Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Institut für Fluiddynamik
Prof. Dr. T. Rösgen

Fluiddynamik I
Aufgabensammlung

Version Frühjahr 2020, 20.2.2020

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Dimensionsanalyse und Ähnlichkeitstheorie

1.1 Strömungswiderstand einer Kugel

(Dimensionsanalyse, verschiedene Bezugsgrössen)

Es soll der Strömungswiderstand F_D einer Kugel gemessen werden. Gegeben sind der Kugeldurchmesser D, die Anströmgeschwindigkeit u, die Dichte ϱ und die kinematische Zähigkeit ν des Fluids. Man nehme an die Widerstandskraft lasse sich folgendermassen angeben:

$$F_D = f(D, u, \varrho, \nu)$$

1. Bilden Sie die Dimensionsmatrix und bestimmen Sie die Anzahl der Parameter n und den Rang der Matrix r. Wieviele unabhängige Lösungen lassen sich mit diesen Parametern bilden?
2. Wählen Sie als Normierungsgrössen [F_D, u] und als Bezugsgrössen [ϱ, ν, D] und führen Sie eine Dimensionsanalyse im MLT-System durch.
3. Wiederholen Sie 2) mit [F_D, D] als Normierungsgrössen und [ϱ, ν, u] als Bezugsgrössen.
4. Wiederholen Sie 2) im FLT-System. Was fällt Ihnen auf?
5. Bestimmen Sie die dimensionlosen Parameter und folgern Sie:
   $F_D(\varrho, \nu, Re) = \varrho\nu^2 f_1(Re)$

1.2 Reynolds-Zahl

(Dimensionsanalyse, Reynolds-Zahl)

Die *Reynolds-Zahl* Re ist eine wichtige Grösse in der Fluiddynamik. Sie ist definiert als

$$Re = \frac{\varrho \cdot u \cdot d}{\mu} = \frac{u \cdot d}{\nu}$$

mit der Dichte ϱ des Fluids, der Strömungsgeschwindigkeit u, der charakteristischen Länge d, der dynamischen Viskosität μ und der kinematischen Viskosität ν.

1. Verifizieren Sie jeweils mit dem FLT-System und dem MLT-System als Basissystem, dass die Reynolds-Zahl dimensionslos ist.
2. Bestimmen Sie die Reynolds-Zahlen für verschiedene Strömungen und machen Sie sich ein Bild von den Grössenordnungen.
   - Ein VW Golf II fährt mit 30 km/h in einem Wohngebiet sowie mit 120 km/h auf der Autobahn. Das umströmende Fluid, Luft bei kühlen $0°C$, hat eine Dichte von $\varrho = 1.29\,\mathrm{kg/m^3}$ und eine Viskosität von $\mu = 17.1\,\mu\mathrm{Pa\,s}$. Als charakteristische Länge nehme man 4 m.
   - Das aktuell grösste Passagierflugzeug, der Airbus A380, fliegt mit einer Reisegeschwindigkeit von 902 km/h. Die Luft hat in 13 km Höhe eine Dichte von $\varrho = 0.35\,\mathrm{kg/m^3}$ und eine Viskosität von $\mu = 14\,\mu\mathrm{Pa\,s}$. Als charakteristische Länge soll die Spannweite mit 79,8 m genommen werden.

- Das grösste und längste Schiff der Welt war der Öltanker "Jahre Viking". Bei vollem Tiefgang fuhr er mit 15.8 kn über die Weltmeere, was etwa einer Geschwindigkeit von 29.3 km/h entspricht. Er ist 458 m lang. Bei $20°C$ hat Wasser eine Dichte von $\varrho = 0.998\,\mathrm{g/cm^3}$ und eine Viskosität von $\mu = 1.0\,\mathrm{mPa\,s}$.
- Der bekannte grosse rote Fleck auf dem Planeten Jupiter ist mit einem Durchmesser von etwa 30000km der grösste Wirbelsturm des Sonnensystems. Im Inneren wurden Geschwindigkeiten von bis zu 600 km/h bestimmt. Die Fluideigenschaften seiner Atmosphäre können mit denen von Wasserstoff bei $-108°C$ approximiert werden, das sind eine Dichte von $\varrho \approx 0.05\,\mathrm{kg/m^3}$ und eine Viskosität von $\mu \approx 6\,\mu\mathrm{Pa\,s}$.

1.3 Flugzeugmodell im Windkanal

(Berechnung der Ähnlichkeit)

Ein Flugzeug fliege mit einer Geschwindigkeit von 380 km/h in einer Höhe von 3000 m. Um die Aerodynamik des Flugzeugs unter den genannten Bedingungen zu untersuchen, sollen Experimente in einem Windkanal mit einem Modell im Massstab 1:20 durchgeführt werden.

1. Welche Geschwindigkeit muss im Windkanal erreicht werden, um ähnliche Bedingungen wie in der Atmosphäre zu gewährleisten?
2. Ist die im Windkanal notwendige Geschwindigkeit in der Realität zu erreichen?
3. Falls nein: Welchen Ausweg könnte es geben?

Gegeben:
Flugzeug: $\mu = 1.697 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Ns/m^2}$, $\varrho = 0.905\,\mathrm{kg/m^3}$
Modell: $\mu_m = 1.791 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Ns/m^2}$, $\varrho_m = 1.227\,\mathrm{kg/m^3}$

1.4 Automodell im Windkanal

(Berechnung der Ähnlichkeit)

Der Fahrtwind eines Automobils soll im Windkanal untersucht werden. Die Fahrgeschwindigkeit betrage $u = 80\,km/h$, die Wagenhöhe $H = 1.5\,m$. Ein vorhandener Windkanal bietet die Möglichkeit, ein geometrisch ähnliches Modell von $H_M = 1\,m$ Höhe einzubauen. Die Widerstandskraft F_D ist eine Funktion Reynoldszahl, sowie der kinematischen Viskosität ν und der Luftdichte ϱ.

$$F_D = \varrho\nu^2 f(Re), \qquad Re = \frac{uH}{\nu}$$

1. Die Versuchsergebnisse für die Widerstandskraft des Fahrtwindes im Windkanal sollen denselben Gesetzmässigkeiten unterliegen wie das Original. Welche Bedingung muss hierfür erfüllt sein? (Annahme: ν bzw. ϱ nehmen im Windkanal die gleichen Werte an wie im Freien.)
2. Mit welcher Geschwindigkeit muss das Modell im Winkanal folglich angeströmt werden?
3. Im Modellversuch tritt eine unerwünschte Schwingung von $70\,Hz$ auf. Welche Frequenz ist beim originalen Auto zu erwarten?
   Hinweis: Für die Frequenz gilt: $f \sim \nu H^{-2}$.

1.5 Unterschiedliche Flughöhen

(Berechnung der Ähnlichkeit, Mach-Zahl)

Die Schallgeschwindigkeit a in der Atmosphäre ändert sich signifikant mit der Höhe H. Die Temperatur auf einer Höhe von $7\,km$ bzw. $15\,km$ sei $-30.45\,°C$ bzw. $-56.5\,°C$. Die Luft kann als ideales Gas angenommen werden. Die dimensionlose *Mach-Zahl Ma* ist definiert durch

$$Ma = \frac{v}{a}$$

Sie gibt das Verhältnis der Geschwindigkeit v (bspw. eines Körpers oder eines Fluids) zur Schallgeschwindigkeit a des umgebenden Fluids an und ist ein häufig verwendeter Parameter in der Fluiddynamik. In der Luftfahrt wird die Mach-Zahl zur dimensionslosen Angabe der Fluggeschwindigkeit schnell fliegender Flugzeuge verwendet.

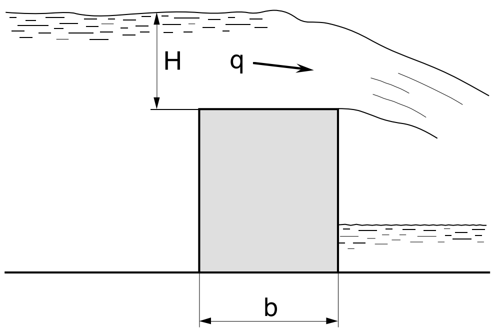
1. Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit in der Atmosphäre für $H = 15\,km$ und $H = 7\,km$.
2. Ein Flugzeug fliege auf einer von Höhe $H = 15\,km$ mit einer Geschwindigkeit von $v = 1180\,km/h$. Wie schnell muss sich das Flugzeug in einer Höhe $H = 7\,km$ bewegen, um die gleiche Mach-Zahl zu erreichen?

Gegeben: $\gamma = 1.4,\ R = 286.9\,J/(kgK)$

1.6 Damm

(Dimensionsanalyse, Wahl der Bezugsgrössen)

Ein angeschwollener Fluss trifft auf einen Damm der Breite b und strömt über diesen hinweg (siehe Skizze). Man nehme an, dass der Volumenstrom Q über den Damm eine Funktion der Höhe H, der Breite b, der Erdbeschleunigung g, der Dichte ϱ des Wassers sowie dessen Viskosität μ ist. Das Problem wird als 2D angenommen. Daher betrachte man hier anstelle des Volumenstroms Q den Volumenstrom pro Längeneinheit $q = Q/l_z$.

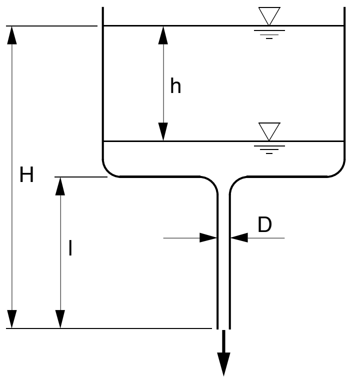


1. Welche Variablen eignen sich als Bezugsgrössen?
2. Wieviele Π-Terme werden zur Beschreibung des Problems benötigt?
3. Mit den unter 1 gewählten Referenzvariablen berechne man einen geeigneten Satz von Π-Termen.
4. Überprüfen Sie jeden Π-Term im *MLT*-System und *FLT*-System auf seine Dimensionslosigkeit.

1.7 Viskosimeter

(Dimensionsanalyse, Kalibrierung)

Die Viskosität μ eines Fluids lässt sich u.a. mit dem unten abgebildeten Gerät bestimmen. Dabei wird die Zeit t gemessen, in welcher der Pegel von der Höhe H um die Differenz h absinkt. Die Zeit t hängt von den geometrischen Grössen D, H, h und l, von der dynamischen Viskosität μ und vom spezifischen Gewicht $\gamma = \varrho g$ ab.



(Die freie Oberfläche ist sehr, sehr viel grösser als die Querschnittsfläche des Auslaufrohrs $\pi D^2/4$.)

1. Wie viele Π-Terme (dimensionsfreie Grössen) sind erforderlich um das Problem zu beschreiben?
2. Als Bezugsgrössen wähle man D, γ und t. Warum sind dies geeignete Bezugsgrössen?
3. Bestimmen Sie die Π-Terme.
4. Der Apparat sei nun gegeben, d.h. die Längen D, H, h und l sind konstant. Ermitteln Sie den Zusammenhang zwischen der Zeit t und der Viskosität μ. Wieviele Messungen sind notwendig, um das Viskosimeter zu kalibrieren?
5. Zur Kalibrierung wird ein Fluid mit der bekannten Viskosität $\mu_k = 9.58 \cdot 10^{-4}\, N \cdot s/m^2$ und dem spezifischen Gewicht $\gamma_k = 15600\, N/m^3$ verwendet. Es wird eine Zeit von $t_k = 60s$ gemessen. Weiter sei $D = 0.001\, m$. Geben Sie den Zusammenhang zwischen μ und t für dieses Viskosimeter an.

1.8 Gebläse

(Bestimmung dimensionsloser Parameter)

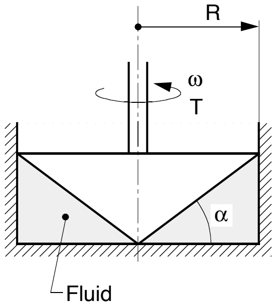
Man nehme an, dass die zum Antrieb eines Gebläses benötigte Leistung P vom Gebläsedurchmesser D, der Dichte ϱ des Fluids, der Rotationsgeschwindigkeit ω und dem Volumenstrom $\dot{Q}$ abhängt.

1. Warum kann man D, ω und ϱ als Referenzvariablen verwenden?
2. Bestimmen Sie unter Verwendung der unter 1) angegebenen Referenzvariablen ein geeignetes Set von Π-Termen.

1.9 Kegel-Rotationsviskosimeter

(Bestimmung dimensionsloser Parameter)

Das Kegel-Rotationsviskosimeter bietet eine Möglichkeit, die Viskosität zu bestimmen. Das Moment T, das nötig ist, um den Kegel mit einer Winkelgeschwindigkeit ω zu rotieren, wird unter anderen Grössen auch von der Viskosität abhängen.



1. Bestimmen Sie, von welchen Grössen das Antriebsmoment abhängt und wieviele Π-Terme somit notwendig sind, um das Problem zu beschreiben.
2. Geben Sie den Zusammenhang zwischen diesen Grössen an.
3. Wie verändert sich das Antriebsmoment (bei gleichbleibender Drehzahl) wenn sowohl der Radius als auch die Viskosität verdoppelt werden?

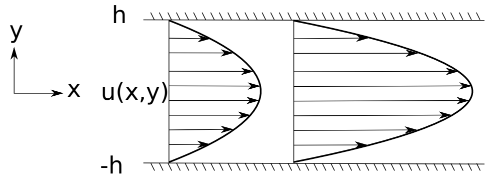
Kapitel 2

Kinematische Beschreibung des Strömungsfeldes

2.1 Strömung im Spalt

(Kinematische Eigenschaften von Strömungen)

Gegeben ist eine zweidimensionale Strömung in einem Spalt, welche in x-Richtung beschleunigt wird:



Die Wände des Spaltes sind porös und lassen eine Strömung des Fluides zu. Beachten Sie bitte, dass es sich bei der eingezeichneten Geschwindigkeit nicht um die Gesamtgeschwindigkeit $\underline{u}(x,y)$, sondern um jene in x-Richtung, $u(x,y)$, handelt. Die Geschwindigkeit $\underline{u}(x,y)$ des Strömungsfeldes ist gegeben mit

$$\underline{u}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1+nx\right)\left(1-\dfrac{y^2}{h^2}\right) \\ -n\left(y-\dfrac{y^3}{3h^2}\right)+C \end{pmatrix}$$

wobei h die halbe Höhe des Spaltes sowie n und C beliebige Konstanten sind.
Hinweis: Es handelt sich um eine reibungsbehaftete Strömung eines inkompressiblen Fluids. Diese Begriffe müssen Sie an dieser Stelle nicht weiter kümmern, diese werden in kommenden Kapiteln der Vorlesung erläutert.

Untersuchen Sie die Strömung auf folgende kinematischen Eigenschaften. Ist sie...

1. ...stationär?
2. ...gleichförmig?
3. ...ausgebildet?
4. ...wirbelbehaftet?

2.2 Düse

(Beschleunigung in Lagrangescher und Eulerscher Beschreibung)

Eine Düse sei so entworfen, dass sie ein Fluid von der Geschwindigkeit $U_1(t)$ auf eine Geschwindigkeit $U_2(t)$ beschleunigt. Die Geschwindigkeit hat bzgl. Ort und Zeit den funktionellen Zusammenhang:

$$U\,(x,t) = ax^2 + bt + c,$$

wobei a, b und c Konstanten sind. Die Strömung hat eine Geschwindigkeit $U_1 = 10m/s$ bei $x_1 = 0m$ und $t_0 = 0s$, sowie $U_2 = 20m/s$ bei $x_1 = 0m$ und $t_1 = 1s$. Die Geschwindigkeit U_3 zur Zeit $t_0 = 0s$ sei bei $x_2 = 1m$ 2.5 mal so gross wie U_1.

1. Bestimmen Sie allg. die Gleichung für die Beschleunigung $\underline{a}(\xi, t)$ eines Fluidelements.
2. Berechnen Sie die Beschleunigung $\underline{a}(\xi, t)$ an den Punkten 1 und 2 in Abhängigkeit von der Zeit.

2.3 Bewegung eines Fluidelements I

(Eulersche und Lagrangesche Schreibweise)

Gegeben ist die Bewegung eines Fluidelements in Lagrangescher Schreibweise

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{0,1}\ e^{ct} \\ \xi_{0,2}\ e^{ct} \\ \xi_{0,3}\ e^{-2ct} \end{pmatrix}$$

mit $c = const.$ und $\underline{\xi}_0 = \underline{\xi}(t = 0)$.

1. Berechnen Sie die Geschwindigkeit $u_i^L(t, \underline{\xi}_0)$ und die Beschleunigung $a_i^L(t, \underline{\xi}_0)$ in Lagrangescher Schreibweise.
2. Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsfeld $u_i^E(t, \underline{x})$ und das Beschleunigungsfeld $a_i^E(t, \underline{x})$ in Eulerscher Schreibweise.

2.4 Zylinderumströmung

(Stromfunktion, Zylinderkoordinaten)

Die ideale Umströmung eines Zylinders wird beschrieben durch die Gleichung

$$\underline{u} = U\left[1 - \frac{R^2}{r^2}\right]\cos\theta\ \underline{e_r} - U\left[1 + \frac{R^2}{r^2}\right]\sin\theta\ \underline{e_\theta}\ .$$

U ist die Anströmgeschwindigkeit des freien Strömungsfeldes und R der Zylinderradius.

Bestimmen Sie die Gleichung für die Stromlinien dieser Strömung.
Hinweis: Die Gleichung für die Stromlinien in Zylinderkoordinaten ist

$$\frac{\mathrm{d}r}{u_r} = \frac{r\,\mathrm{d}\theta}{u_\theta}\ .$$

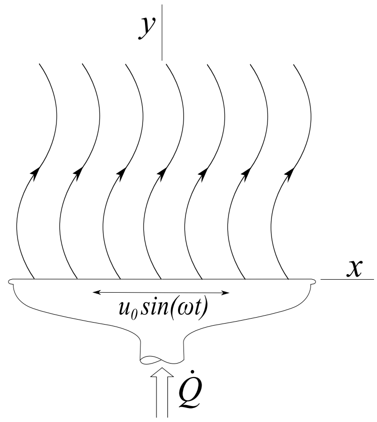
2.5 Sprinkler

(Strom-, Bahn- und Streichlinie)

Wasser, welches aus einem waagrecht oszillierenden Sprinkler tritt, erzeugt ein Geschwindigkeitsfeld der Form:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \sin\left[\omega\left(t - \dfrac{y}{v_0}\right)\right] \\ v_0 \end{bmatrix},$$

mit den gegebenen Konstanten u_0, v_0 und ω.



1. Berechnen Sie die Stromlinien, die zu den Zeiten $t = 0$ und $t = \pi/(2\omega)$ durch den Ursprung gehen.
2. Berechnen Sie die Bahnlinien der Fluidelemente, die sich zu den Zeiten $t = 0$ und $t = \pi/(2\omega)$ im Ursprung befinden.
3. Skizzieren Sie die Form der Streichlinie durch den Ursprung.

2.6 Drei Arten der Beschleunigung

(Materielle Ableitung)

Gegeben ist eine eindimensionale Strömung, deren Geschwindigkeit durch folgende Funktion beschrieben wird:

$$u = \left(U_0 - \frac{x}{\tau}\right) e^{-t/\tau}$$

Die Geschwindigkeit U_0 sowie die Zeit τ sind konstant.

Berechnen Sie die lokale, die konvektive und die materielle Beschleunigung.

2.7 Bewegung eines Fluidelements II

(Langrangesche und Eulersche Beschreibung, Strom- und Bahnlinien)

Gegeben sei in Lagrangescher Schreibweise der Ortsvektor eines Fluidpartikels, welches bei t_0 den Punkt $\underline{\xi}_0$ passiert:

$$\begin{aligned}\underline{\xi}(t;\underline{\xi}_0,t_0) &= \left[\xi_0 + \frac{c}{\omega}\{\sin(\omega t) - \sin(\omega t_0)\}\right]\underline{e}_x + \\ &\quad \left[\eta_0 + \frac{c}{\omega}\{\cos(\omega t) - \cos(\omega t_0)\}\right]\underline{e}_y + \chi_0 \cdot \underline{e}_z\end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie die Partikelgeschwindigkeit und -beschleunigung.
2. Bestimmen Sie die Stromlinien und skizzieren Sie diese durch den Punkt $\underline{x}_0 = [0,0,0]^T$ für $\omega t = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$.
3. Bestimmen Sie die Bahnlinien und skizzieren Sie diese durch den Punkt $\underline{\xi}_0 = [0,0,0]^T$ für $\omega t_0 = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$.

2.8 Bewegung eines Fluidelements III

(Eulersche und Lagrangesche Darstellung, Strom- und Bahnlinie, materielle Ableitung)

Gegeben sei in Eulerscher Darstellung das Geschwindigkeitsfeld

$$\underline{u}(\underline{x},t) = \begin{bmatrix} -\alpha x\tan(\alpha t) \\ 2\alpha y \end{bmatrix} \quad \text{mit } \alpha = \mathit{const}.$$

1. Wie lautet die Gleichung der Stromlinien durch einen Punkt (x_0, y_0)? Skizzieren Sie die Stromlinie durch den Punkt P(1,1) zum Zeitpunkt $\alpha t = \pi/4$.
2. Berechnen Sie die Beschleunigung $\underline{a}(\underline{x},t)$, welche ein strömendes Partikel erfährt, in der Eulerschen Darstellung.
3. Berechnen Sie die Bahnlinie eines Teilchens $\underline{\xi}(t,\underline{\xi}_0,t_0)$ mit dem Startpunkt $\underline{\xi}_0 = (\xi_0,\eta_0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Berechnen Sie daraus die Geschwindigkeit $\underline{u}^L(t,\underline{\xi}_0,t_0)$ und die Beschleunigung $\underline{a}^L(t,\underline{\xi}_0,t_0)$ in der Langrangeschen Darstellung.
4. Zeigen Sie, dass die Beschleunigungen in der Eulerschen und derLagrangeschen Darstellung äquivalent sind.

Hinweis:

$$\int \tan(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\,\ln\cos(ax)$$

Kapitel 3

Erhaltunssätze

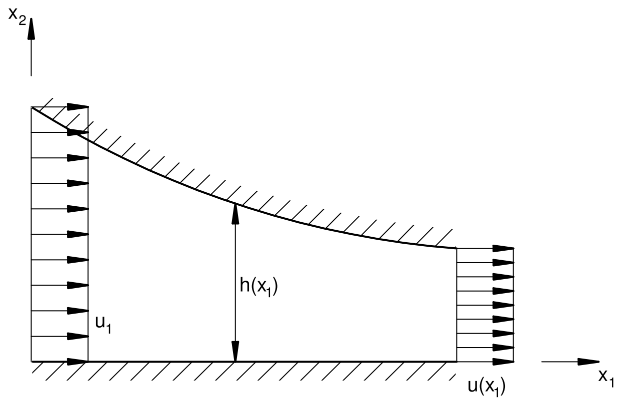
3.1 Strömung im Kanal

(Massenerhaltung)

Betrachtet wird eine Strömung durch einen Kanal mit Einheitsbreite in x_3, dessen Höhe $h(x_1)$ gegeben ist durch:

$$h(x_1) = \frac{2}{x_1 + 2}$$

Die Strömung ist stationär und die Dichte des Fluids kann als konstant angesehen werden. Die Komponente des Geschwindigkeitsvektors in x_2-Richtung verschwindet näherungsweise $u_2 = 0$, die Geschwindigkeit in x_1-Richtung hängt nur von x_1 ab ($u_1 = u_1(x_1)$).



1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Massenerhaltung die Geschwindigkeit $u(x_1)$.
2. Berechnen Sie damit die Strömungsgeschwindigkeit bei $x_1 = 2$, wenn bei $x_1 = 0$ die Geschwindigkeit $u(x_1 = 0) = 5\text{m/s}$ beträgt.

3.2 Eigenschaften eines Strömungsfeldes

(Inkompressibilität und Rotation einer Strömung, Kontinuitätsgleichung)

Betrachten Sie das folgende Strömungsfeld:

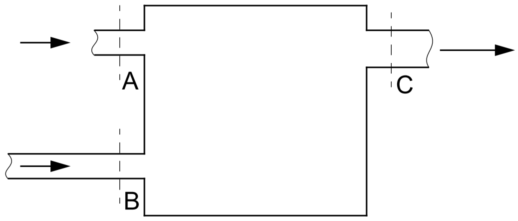
$$\underline{u} = x^2 y\, \underline{e}_x + xy^2 \underline{e}_y + \sin\left(\frac{x^2}{yz}\right) \underline{e}_z$$

1. Ist die Strömung inkompressibel?
2. Ist die Strömung rotationsfrei?

3.3 Durchströmter Behälter

(Massenerhaltung)

Der skizzierte Behälter hat zwei Zuflüsse und einen Abfluss.



Die Strömung in den Leitungen ist stationär, die Dichte ϱ des Fluides ist konstant. In den kurzen Rohren ist die Geschwindigkeit an den Stellen [A] und [C] über den Querschnitt konstant. In der langen Zuleitung hat sich an der Stelle [B] ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil ausgebildet.
Bekannt sind die Radien der Rohrleitungen R_A, R_B, R_C und die Geschwindigkeiten

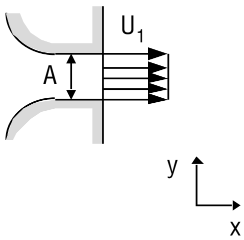
$$u_A \quad \text{und} \quad u_B = U_{B,max}\left(1 - \left(\frac{r}{R_B}\right)^2\right) .$$

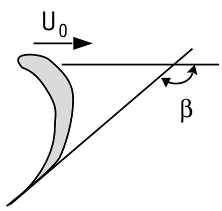
Wie gross ist die Geschwindigkeit u_C?

3.4 Kraft auf Schaufel

(Massen- und Impulserhaltung, Bernoulli-Gleichung, mitbewegtes System)

Aus einer Düse mit Querschnittsfläche A tritt ein Flüssigkeitsstrahl mit der Geschwindigkeit U_1 aus. Der Strahl trifft auf eine Schaufel, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit U_0 von der Düse fortbewegt. Für einen mit der Schaufel bewegten Beobachter wird der Strahl um den Winkel β umgelenkt. Die Strömung sei reibungsfrei und das Fluid sei inkompressibel. Gravitationseinflüsse sind zu vernachlässigen. Die Grössen A, U_0, U_1, β und ϱ seien gegeben.





Welche Kraft $\underline{F} = \left[F_x, F_y\right]^T$ wird auf die Schaufel ausgeübt?
Hinweis: Der umgelenkte Strahl hat nach der Schaufel immer noch die selbe Querschnittsfläche A. Können Sie erkären, warum das so ist?

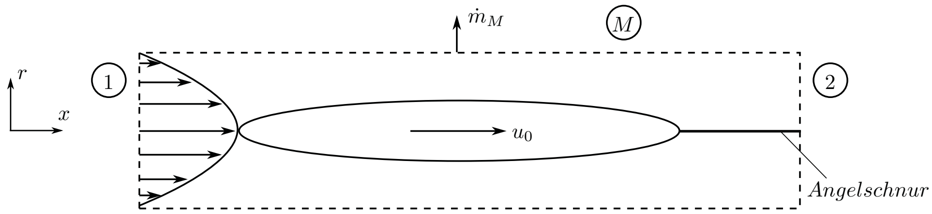
3.5 Angelköder

(Massen- und Impulserhaltung, mitbewegtes Kontrollvolumen)

Ein Angler zieht einen Köder mit der konstanten Geschwindigkeit u_0 durch ein ruhendes Gewässer. Der Köder erzeugt eine *absolute* Nachlaufströmung $u(r)$ der Form

$$\underline{u}(r) = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \underline{e}_x \qquad 0 \leq r \leq R$$

Die Verdrängung durch den Köder führt zu einem Massenfluss $\dot{m}_M$ über die Mantelfläche des Kontrollvolumens.



Gegeben: $R,\ u_0,\ \varrho,\ p_0$ (konstanter Umgebungsdruck im gesamten KV)

Annahmen: Die Strömung ist reibungsfrei, inkompressibel, rotationssymmetrisch und die Strömung kann im mitbewegten System als stationär angenommen werden.

Hinweise:

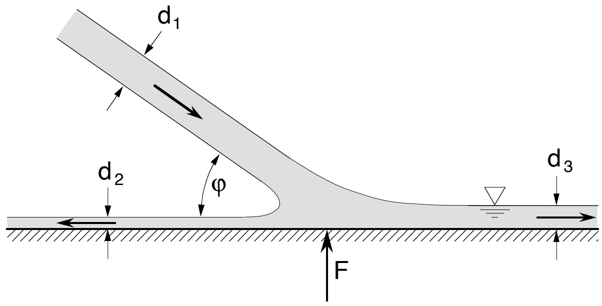
- Die Rechnung wird am einfachsten, wenn man ein Kontrollvolumen betrachtet, welches sich mit dem Köder mitbewegt und in dem alle Grenzen *dieselbe* Geschwindigkeit haben.
- Rechnen Sie in Zylinderkoordinaten.
- Die Geschwindigkeit an der Mantelfläche hat im *relativen* Bezugssystem eine zusätzliche axiale Komponente.

1. Skizzieren Sie das mitbewegte Kontrollvolumen mit den Relativgeschwindigkeiten.
2. Berechnen Sie den unbekannten Massenfluss $\dot{m}_M$ über die Mantelfläche des KV.
3. Bestimmen Sie die Kraft, mit der der Angler den Köder durch das Wasser zieht.

3.6 Flüssigkeitsstrahl auf Platte

(Massenerhaltung, Impulserhaltung)

Ein zweidimensionaler Flüssigkeitsstrahl trifft wie skizziert auf eine horizontale Platte auf.



Annahmen:

- Volumenkräfte können vernachlässigt werden.
- Die Geschwindigkeit u sind in den Querschnitten 1, 2 und 3 gleich.
- Die Strömung ist reibungsfrei und stationär.
- Das Fluid ist inkompressibel.
- Alle Strahlen können als Freistrahlen betrachtet werden.
- Es wirkt keine Horizontalkraft.
- Das Problem kann zweidimensional betrachtet werden. Die Tiefe ist gegeben mit b.

Gegeben: $d_1,\ b,\ \varrho,\ \varphi,\ u$

1. Bestimmen Sie die Flüssigkeitsdicken d_2 und d_3 als Funktionen der Strahldicke d_1 und des Aufprallwinkels φ.
2. Bestimmen Sie die Haltekraft als Funktion der Flüssigkeitsdichte ϱ, der Strahldicke d_1 und des Aufprallwinkels φ.

3.7 Oszillierende Blase

(Kugelkoordinaten, Massenerhaltung, Kontinuitätsgleichung und materielle Ableitung)

Eine Blase mit dem Radius $R(t) = R_0 + A \sin \omega t$ befindet sich im Wasser mit der konstanten Dichte ϱ. Man nimmt ein reibungsfreies Fluid an. Es wird angenommen, dass die Strömung radialsymmetrisch ist und das Strömungsfeld somit nicht von den Winkeln abhängig ist.

1. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v des Wassers auf einem Radius R_f ausserhalb der Kugel als Funktion des Ortes und der Zeit, $u_w = f(R_f, \phi, \theta, t)$, mit der Integralform der Massenerhaltung.
2. Man berechne denselben Zusammenhang mit der Differentialform der Massenerhaltung (Kontinuitätsgleichung).
3. Berechnen Sie die Beschleunigung eines Fluidteilchens im Strömungsfeld.

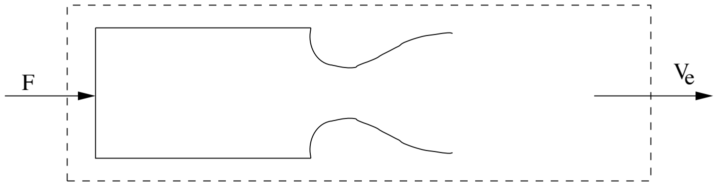
Hinweis: Konti-Gleichung in Kugelkoordinaten:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varrho r^2 v_r\right) + \frac{1}{r \sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\varrho v_\phi \sin\phi\right) + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\varrho v_\theta\right) = 0\ .$$

3.8 Raketenmotor

(Impulssatz)

Ein Raketenmotor wird mit einem Gemisch aus Treibstoff und Oxidant gespiesen. Beim Verbrennen des Gemisches entstehen sehr hohe Drücke und Temperaturen. Die Verbrennungsprodukte strömen durch eine Düse aus und beschleunigen dabei zu sehr hoher Geschwindigkeit, währenddem der Druck des Abgases auf den viel tieferen Umgebungsdruck sinkt. Die antreibende Kraft des Motors entsteht aus der Druckkraft auf die inneren Wände des Raketenmotors, inklusive der Düse. Die Impulsgleichung sagt uns nun, dass diese Kraft gerade die Erhöhung des Impulses der Verbrennungsprodukte ausgleicht. Ein Feststoffraketentriebwerk wird auf einem horizontalen Prüfstand getestet. Der Brennstoff wird mit einem Massentrom von $\dot{m} = 2kg/s$ verbrannt und die Austrittsgeschwindigkeit ist $V_e = 200m/s$.

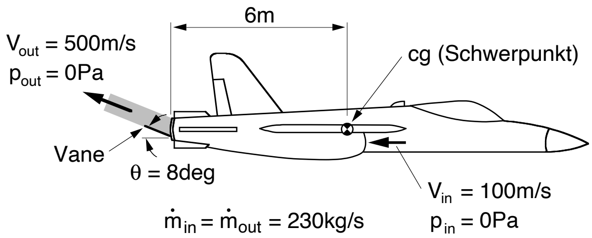


Berechnen Sie die Rückhaltekraft, um das Triebwerk an Ort zu halten.
Hinweis: Man nimmt an, dass die Austrittsgeschwindigkeit horizontal ist. Weiter wird angenommen, dass die Gase inkompressibel (unrealistisch) und reibungsfrei sind.

3.9 Schubvektorsteuerung

(Impulserhaltung)

Die Schubvektorsteuerung ist eine Technik um die Manövrierbarkeit von Kampfflugzeugen stark zu verbessern. Das Prinzip ist einfach: Der Abgasstrahl des Triebwerkes wird beim Austritt mit Hilfe von Umlenkpanels (Vanes) abgelenkt.



1. Bestimmen Sie das Kippmoment (Moment, welches die Nase des Flugzeuges nach oben drücken will) um den Schwerpunkt des Flugzeuges für die in der Zeichnung gegebene Konfiguration. Man nehme an, dass die umlenkende Kraft am Triebwerksaustritt angreift.

2. Um wieviel ist der Schub (Kraft entlang der Mittellinie des Flugzeuges) reduziert im Vergleich zum normalen Flug, wenn der Abgasstrahl parallel zur Mittellinie ist?

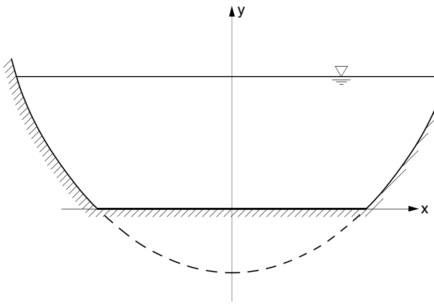
3.10 Salton Sea

(Massenerhaltung)

Ein See ohne Abfluss wird von einem Fluss mit der konstanten Rate $\dot{m}_F$ gespeist. ($\dot{m}_F$ ist der zugeführte Massenstrom.) Das Wasser verdunstet an der Oberfläche mit einer konstanten Rate k. (k hat die Dimension eines Volumenstroms pro Flächeneinheit.) Der See hat eine Rinnenform. Die Länge sei L, das Profil habe die Form

$$a\,x^2 = y + y_0 \qquad \text{wenn} \quad y > 0$$
$$a\,x_0^2 = y_0 \qquad \text{wenn} \quad y = 0$$

woraus sich die Breite der Wasseroberfläche ableiten lässt.
Gegeben: $a,\ \varrho = konst.,\ k,\ L, y_0$



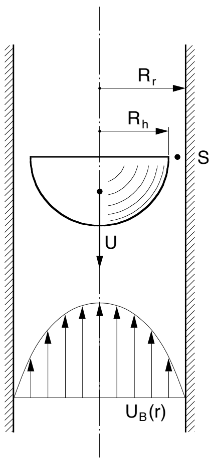
1. Wie hoch ist der Wasserstand h im Gleichgewichtszustand?
2. Unterhalb welcher Speisungsrate $\dot{m}_{F,min}$ des Flusses wird der See austrocknen?
3. Mit welcher Geschwindigkeit u ändert sich der Wasserspiegel für eine Speisungsrate, die nicht der Gleichgewichtsspeisungsrate entspricht $\dot{m}_F \neq \dot{m}_{F,GGW}$?

3.11 Halbkugel

(Massenerhaltung, mitbewegtes Kontrollvolumen)

Eine Halbkugel mit Radius R_h bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit U in einem Kreisrohr mit Radius R_r. Das Rohr werde von einem parabolischen Geschwindigkeitsprofil $U_B(r)$ durchströmt:

$$U_B = U_{B,max}\left(1 - \left(\frac{r}{R_r}\right)^2\right) .$$



Das Fluid soll als inkompressibel betrachtet werden.

1. Wie gross ist die Relativgeschwindigkeit im Spaltraum zwischen Halbkugel und Rohrwand, wenn dort ein homogenes Geschwindigkeitsprofil angenommen wird?

2. Welche Geschwindigkeit in Wandnähe misst ein an der Rohrwand befestigter Sensor, wenn die Kugel vorbeifliegt?

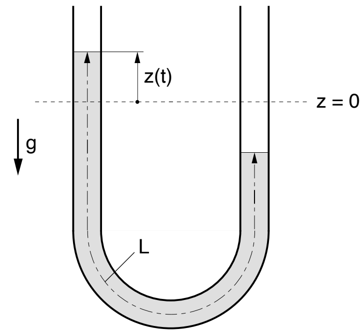
Kapitel 4

Reibungsfreie Strömungen

4.1 U-Rohr

(Instationäre Bernoulli-Gleichung)

Ein inkompressibles, reibungsfreies Fluid befindet sich in einem U-Rohr konstanten Querschnitts, das an beiden Enden offen ist.

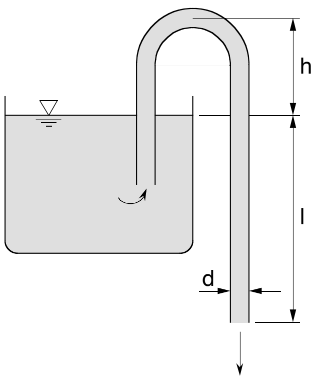


Wenn das Fluid aus der in der Zeichnung skizzierten Lage freigelassen wird, wird es mit einer charakteristischen Frequenz ω schwingen. Ermitteln Sie diese Frequenz.

4.2 Saugheber

(Massenerhaltung, stationäre Bernoulli-Gleichung)

Ein gebogenes zylindrisches Rohr wird benutzt, um Wasser aus einem Behälter abzulassen. Man nennt eine solche Vorrichtung Saugheber oder Siphon. Das Rohr hat einen konstanten Innendurchmesser d und die Mittellinie des Rohrs liegt im höchsten Punkt um h höher als der Wasserspiegel im Behälter. (Die Höhe des Wasserspiegels kann als konstant angenommen werden.) Das Rohr ist um die Strecke l unter das Wasserniveau abgesenkt.



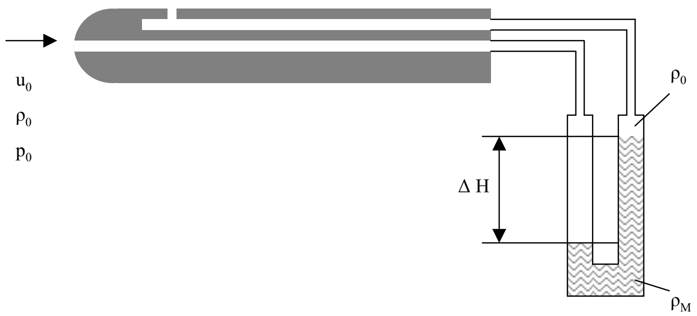
1. Von welchen Grössen hängt die Durchflussrate (d.h. Massenstrom $\dot{m}$) im Saugheber (Siphon) ab, wenn Sie reibungs- und rotationsfreie Strömung annehmen?
2. Kavitation wirkt sich limitierend auf den Betrieb aus. Unter welcher Bedingung wird sie vermieden?
3. Berechnen Sie die Durchflussrate $\dot{m}$ in Abhängigkeit von den relevanten Parametern für den Fall, dass gerade keine Kavitation auftritt.

Zusatzfrage: Wie ändert sich die Durchflussrate in Aufgabe 1 qualitativ, wenn Sie statt reibungsfreier reibungsbehaftete Strömung betrachten?

4.3 Prandtl-Rohr

(Bernoulli-Gleichung)

Mit einem Prandtl-Rohr soll die Strömungsgeschwindigkeit u_0 von Wasser der Dichte $\varrho_0 = 1000 kg/m^3$ ermittelt werden. Der Druck der ungestörten Strömung ist bekannt, $p_0 = 1.02 \cdot 10^5 Pa$. Das U-Rohranemometer, das mit einer Messflüssigkeit der Dichte $\varrho_M = 1400 kg/m^3$ gefüllt ist, zeigt die Differenz ΔH an.



Die Höhendifferenz zwischen den zwei Öffnungen sei vernachlässigbar. Das Problem ist stationär und reibungsfrei.

Berechnen Sie die Höhe der Messflüssigkeit ΔH für $u_0 = 0.2 m/s$ und $u_0 = 1.0 m/s$.

4.4 Druckfeld

(Euler-Gleichung)

Betrachten Sie die inkompressible, stationäre, zweidimensionale Strömung, die durch

$$\underline{u} = ax\, \underline{e}_x - ay\, \underline{e}_y$$

beschrieben wird. (a ist eine Konstante.)

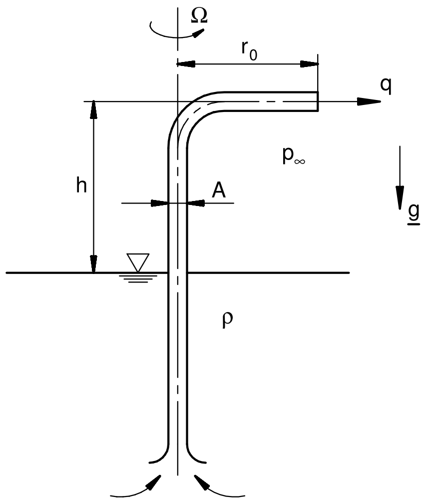
Berechnen Sie das Druckfeld $p(x, y)$, wenn $p(0, 0) = p_t$ ist. Sie können die Strömung als reibungsfrei annehmen und die Volumenkräfte vernachlässigen.

4.5 Einfache Pumpe

(Bernoulli-Gleichung)

Die skizzierte Anordnung eines abgewinkelten Rohres (Querschnittsfläche A, Länge l) dessen unteres Ende in Flüssigkeit (Dichte ϱ) taucht, stellt eine einfache Pumpe dar, wenn das Rohr mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω um die vertikale Achse rotiert.

Gegeben: A, l, h, r_0 , ϱ, p_∞ , p_D



Wie gross

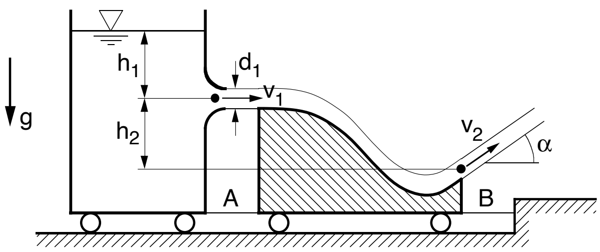
1. muss die Winkelgeschwindigkeit Ω mindestens sein, damit Flüssigkeit gefördert werden kann?
2. darf Ω höchstens sein, damit an keiner Stelle des Rohres der Dampfdruck p_D unterschritten wird?

Hinweis: Das Rohr ist stets mit Wasser gefüllt.

4.6 Kräfte durch Strömung

(Bernoulli-Gleichung)

Es soll die unten skizzierte Anlage untersucht werden. Das Fluid kann als reibungsfrei und inkompressibel angenommen werden. Das Problem soll als 2-dimensional betrachtet werden. Das Fluid läuft als Freistrahl über den zweiten Wagen.

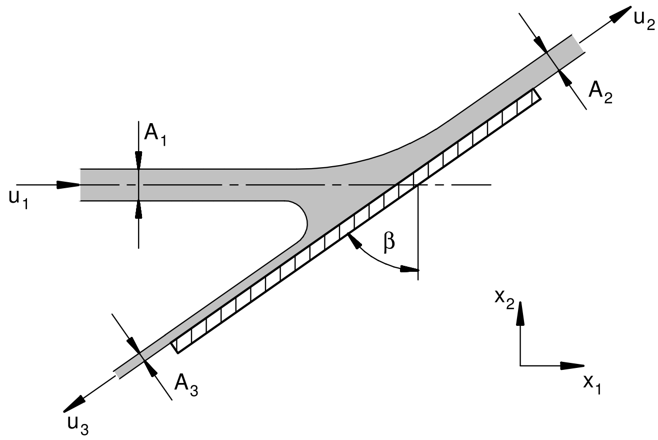


1. Geben Sie die Geschwindigkeit v_1 an.
2. Geben Sie die Geschwindigkeit v_2 an.
3. Wie gross ist die Kraft, die durch die Verbindung A übertragen wird?
4. Wie gross ist die Kraft, die durch die Verbindung B übertragen wird?

4.7 Flüssigkeitsstrahl auf schräge Platte

(Massenerhaltung, stationäre Bernoulli-Gleichung)

Ein Luftstrahl trifft auf eine sich in Ruhe befindende ebene Platte entsprechend der Skizze. Das Problem kann zweidimensional mit der Einheitsbreite in x_3, reibungsfrei und stationär angesehen werden. Das Fluid Luft soll konstanter Dichte sein. Die Strömung entlang der Platte kann als Freistrahl angesehen werden. Die Schwerkraft wird vernachlässigt.



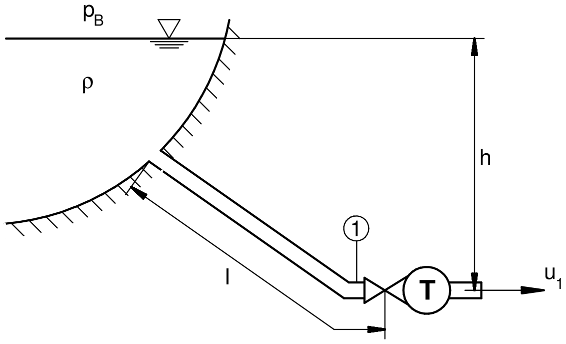
Berechnen Sie

1. die Kraft, die auf die Platte wirkt als Funktion von β, A_1 und u_1 sowie
2. das Verhältnis A_2/A_1

4.8 Schieber

(stationäre und instationäre Bernoulli-Gleichung)

In der Druckleitung einer Wasserturbine ist unmittelbar vor der Turbine ein Schieber angebracht. Die Leitung hat konstanten Querschnitt und das Wasser konstante Dichte ϱ. Beim Schliessen des Schiebers nimmt die Strömungsgeschwindigkeit u im Rohr linear mit der Zeit vom Anfangswert u_1 auf Null ab. Die Turbine liegt um die Strecke h tiefer als der Oberwasserspiegel. Das Problem sei reibungsfrei.



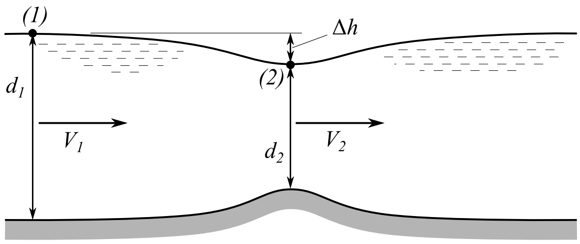
1. Welcher Überdruck $(p_1 - p_B)$ herrscht bei stationärem Betrieb unmittelbar vor dem Schieber?
2. Wie gross muss die Schliesszeit Δt mindestens sein, wenn der Überdruck vor dem Schieber während des Schliessens nicht höher als $2\varrho g h$ werden darf?

Gegeben: h, l, u_1 , ϱ

4.9 Venturikanal

(Bernoulli-Gleichung)

Um die Geschwindigkeit in einem Fluss zu messen wird manchmal ein sogenannter Venturikanal eingesetzt. Dafür wird einfach am Flussboden eine kleine Erhöhung eingebaut:



Weil die Geschwindigkeit über der Erhöhung grösser ist (Kontinuität), besitzt die Strömung eine höhere kinetische Energie $\frac{1}{2}\varrho u^2$, dies wird durch eine geringere potentielle Energie $\varrho g h$ ausgeglichen, der Wasserspiegel ist tiefer.

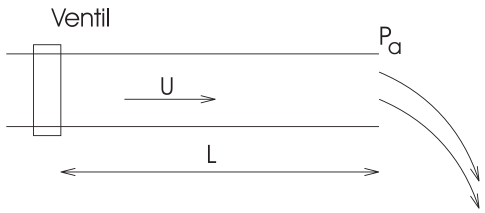
Berechnen Sie die Geschwindigkeit V_1 in Abhängigkeit von d_1, d_2 und Δh. Verwenden Sie dazu den Satz des Bernoulli entlang der Stromlinie von *(1)* zu *(2)*.

Hinweise: An der Wasseroberfläche herrscht überall der atmosphärische Druck. Die Strömung ist inkompressibel, stationär und reibungsfrei. Die Geschwindigkeiten V_1 und V_2 können als uniform über die ganze Höhe angenommen werden.

4.10 Ventil

(Instationäre Bernoulli-Gleichung)

Durch eine Leitung fließt Wasser mit einer konstanten Geschwindigkeit u in die Umgebung aus, wo der Umgebungsdruck p_a herrscht. Mit einem Ventil wird die Geschwindigkeit linear mit der Zeit reduziert.



Welche Schließzeit ist erlaubt, wenn der tiefste Druck im Rohr nicht unter den Dampfdruck p_d fallen darf, d.h. wenn man Kavitation[1] vermeiden will?

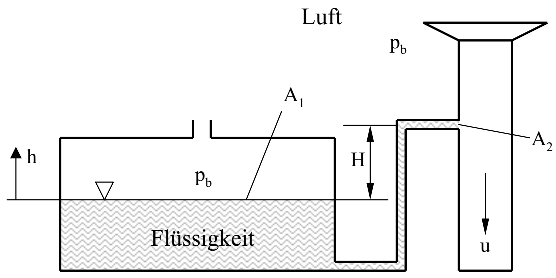
Gegeben sind u, L, p_a und p_d. Die Strömung sei inkompressibel und reibungsfrei.

[1] Von Kavitation spricht man, wenn der Druck in einer Flüssigkeitsströmung unter den Dampfdruck fällt und sich deshalb mit Dampf gefüllte Hohlräume bilden.

4.11 Vergaser

(Bernoulli-Gleichung)

Die Skizze zeigt das Prinzip eines einfachen Vergasers. Durch die Düse wird Luft angesaugt und auf die Geschwindigkeit u beschleunigt. In der Düse mündet ein Saugrohr in der Höhe H über dem Flüssigkeitsspiegel des Behälters mit einem Austrittsquerschnitt A_2.



1. Bestimmen Sie den Druck in der Düse bei der Geschwindigkeit u.
2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit u_F mit der das Fluid aus dem Saugrohr austritt.
3. Berechnen Sie die Geschwindigkeit u für den Fall, dass 7.2 l/h Kraftstoff ($\dot{V}_K$) angesaugt werden sollen?

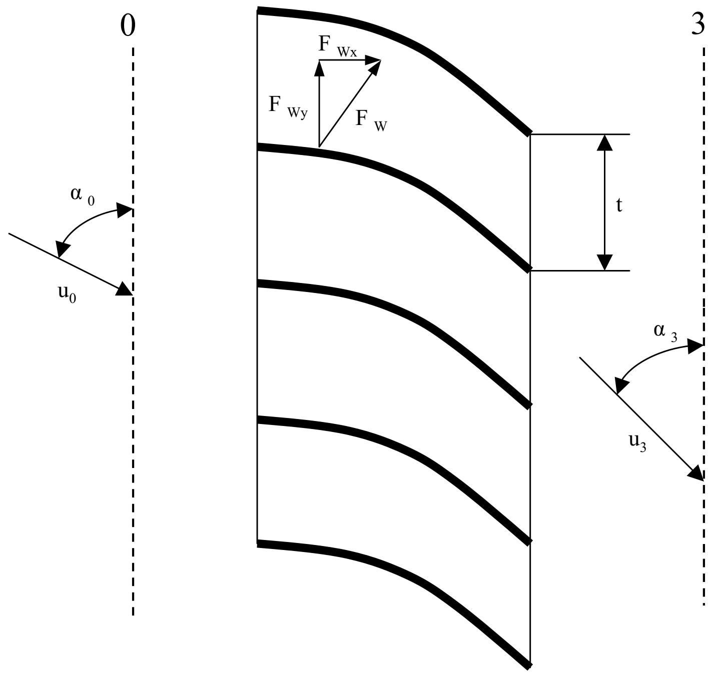
Gegeben: $A_2 = 2mm^2$, $\varrho_F = 840kg/m^3$, $\varrho_L = 1.2kg/m^3$, $H = 0.02m$.

Anmerkung: $A_1 >> A_2$, die Reibung und Potentialkräfte für Luft sind zu vernachlässigen, der Einfluss des angesaugten Kraftstoffes auf die Saugströmung sei ebenfalls vernachlässigbar.

4.12 Schaufelgitter

(Massen- und Impulserhaltung, Bernoulli-Gleichung)

Ein ebenes, gerades Schaufelgitter besteht aus unendlich vielen, unendlich langen Schaufelprofilen, die im Abstand t angebracht sind. Das Gitter lenkt die homogene Parallelströmung um. Die Reibung soll vernachlässigt werden und die Strömung kann als stationär angesehen werden, das Fluid sei inkompressibel. Es wird angenommen, dass die Drücke an den Stellen 0 und 3 konstant sind.



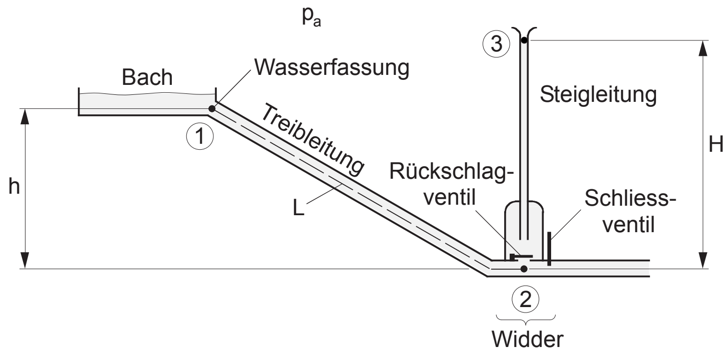
Gegeben: $\varrho,\ \alpha_0,\ \alpha_3,\ u_0,\ b,\ t$

1. Berechnen Sie die die Geschwindigkeit u_3 hinter dem Schaufelgitter.
2. Berechnen Sie die Druckdifferenz $\Delta p = p_0 - p_3$.
3. Berechnen Sie den Betrag und die Richtung der auf die Fläche $b \cdot t$ bezogenen Kraft, die das Fluid auf die Schaufel ausübt. (b ist die Länge der Schaufelprofile senkrecht zur Schnittebene)
4. Berechnen Sie Grösse und Richtung der bezogenen Kraft für ein Gitter mit $\alpha_0 = 135°$ und $\alpha_3 = 45°$.

4.13 Hydraulischer Widder

(Massenerhaltung, instationäre Bernoulli-Gleichung)

Betrachtet wird ein hydraulischer Widder:



Wasser wird von einem Bergbach abgezweigt (Stelle 1) und über die Treibleitung der Länge L und mit konstantem Querschnitt dem Widder (Stelle 2) zugeführt. Die Höhendifferenz zwischen der Wasserfassung und dem Widder betrage h. Es darf angenommen werden, dass der Druck p_1 am Eingang der Treibleitung gleich dem Umgebungsdruck p_a ist: $p_1 = p_a$. Ferner soll die Reibung vernachlässigt werden. Das Wasser ströme anfangs mit konstanter Geschwindigkeit durch die Treibleitung. Nun wird das Schliessventil des Widders so geschlossen, dass die Geschwindigkeit u_2 an der Stelle 2 gegeben sei durch:

$$u_2(t) = u_0 \cos(\omega t) \qquad 0 < t \leq \frac{\pi}{2\omega} \ .$$

Unmittelbar vor dem Schliessventil befindet sich ein Rückschlagventil, das die Steigleitung mit der oben offenen Treibleitung verbindet. Der durch das Schliessen bedingte Druckstoss vermag das Rückschlagventil zu öffnen und fördert so bei jedem Schliessvorgang eine kleine Wassermenge in die Steigleitung. Gesucht wird nun die theoretisch maximale Steighöhe H, die das Wasser in der Steigleitung erreichen kann. In diesem Zustand ist die Wassersäule in der Steigleitung in Ruhe. Gehen Sie wie folgt vor:

1. Bestimmen Sie den maximalen Druck $p_{2,max}$, der im Widder (stromauf des Schliessventils) während des Schliessvorgangs aufgebaut wird. Nehmen Sie dazu an, dass das Rückschlagventil geschlossen sei.

2. Nehmen Sie nun an, dass auf beiden Seiten des Rückschlagventils der in Aufgabenteil a) bestimmte Druck $p_{2,max}$ vorliege. Berechnen Sie nun die gesuchte Höhe H.

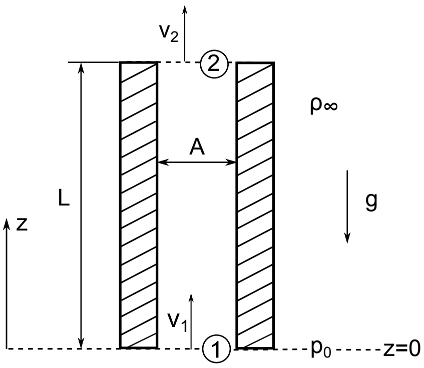
4.14 Wärmetauscher

(Massenerhaltung, Bernoulli-Gleichung)

Luft wird zwischen zwei aufgeheizten Platten erwärmt, was eine Strömung in positive z-Richtung erzeugt. Der Querschnitt A zwischen den beiden Platten ist konstant und es wird angenommen, dass die Temperatur und die Geschwindigkeit der Luft sich über den Querschnitt nicht ändern. Das Dichteprofil im Kanal ist gegeben durch

$$\varrho(z) = \varrho_\infty \left(1 - \frac{z}{4L}\right),$$

wobei ϱ_∞ die Dichte der ungeheizten Luft ist. Der Umgebungsdruck ist auf der Höhe $z = 0$ ist gegeben durch p_0.



Das Ziel der Aufgabe ist, die Einströmgeschwindigkeit v_1 im Querschnitt 1 zu berechnen.

Annahmen:

- Das Problem sei stationär und zweidimensional
- Reibungskräfte werden vernachlässigt
- Im Querschnitt 2 liegt ein Freistrahl vor
- Die Umgebungsluft habe eine statische Druckverteilung mit konstanter Dichte ϱ_∞

Gegeben: L, A, ϱ_∞, p_0, g

1. Bestimmen Sie die Ausströmgeschwindigkeit v_2 im Querschnitt als Funktion der Einströmgeschwindigkeit v_1.
2. Bestimmen Sie den Druck p_1 im Querschnitt 1 als Funktion von v_1.
3. Bestimmen Sie den Druck p_2 im Querschnitt 2.
4. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_1.

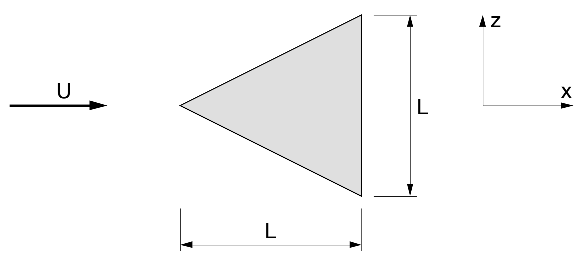
Kapitel 6

Grenzschichten

6.1 Widerstand einer angeströmten Platte

(Blasius-Grenzschicht, Reibungswiderstand)

Eine unendlich dünne, ebene dreieckige Platte wird mit der konstanten Geschwindigkeit U angeströmt.



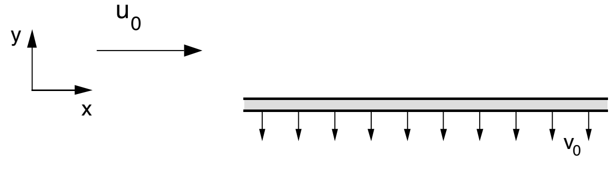
Berechnen Sie den Reibungswiderstand der Platte unter der Annahme, dass die Blasius-Lösung anwendbar ist.

Hinweis: Die Widerstandskraft geht aus der Integration der Schubspannung über die Oberfläche hervor. Beachten Sie, dass die Platte zwei Seiten hat!

6.2 Abgesaugte Grenzschicht

(ausgebildete Grenzschicht)

Eine poröse Platte wird einseitig von einer Parallelströmung mit der Geschwindigkeit u_0 angeströmt. Von der anderen Seite wird das Fluid mit konstanter Geschwindigkeit v_0 abgesaugt. Die Strömung sei stationär und inkompressibel.



Es soll hier nur die Strömung für ausreichend grosse Abstände von der Vorderkante der Platte betrachtet werden. In diesem Bereich wächst die Grenzschicht durch das Absaugen nicht mehr an. Es gilt also $\delta \neq \delta(x)$.

1. Berechnen Sie die Geschwindigkeitskomponenten u und v für die Strömung über der Platte.

2. Wie hängt die Grenzschichtdicke δ von x ab $(u(\delta) = 0.99\ u_0)$?
   Berechnen Sie die Verdrängungsdicke δ_1 und die Inpulsverlustdicke δ_2.