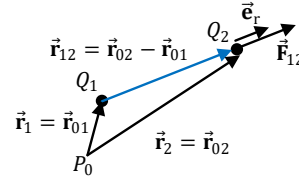


Elektrotechnik I

Formelsammlung

1 Das elektrostatische Feld

Coulomb'sches Gesetz $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12}$

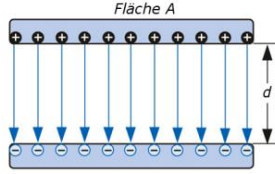
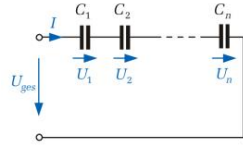
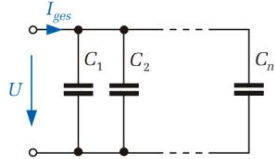


Kraft von 1 auf 2,
 Q , Ladung [C]=[As]

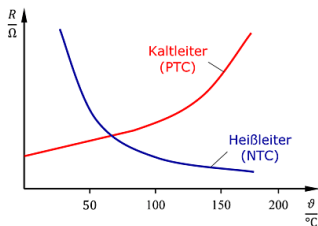
Skalare Variante

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Ladungsverteilung	$\rho = \frac{dQ}{dV}$ $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ $\lambda = \frac{dQ}{dl}$	Raumladungsdichte [C/m ³] Flächenladungsdichte [C/m ²] Linienladungsdichte [C/m]
Elektrisches Feld	$\vec{F} = Q\vec{E}$ $\vec{E}(\vec{r}_p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{ \vec{r}_p - \vec{r}_i ^3} (\vec{r}_p - \vec{r}_i)$ $\vec{E}(\vec{r}_p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}_p - \vec{r}'}{ \vec{r}_p - \vec{r}' ^3} d\vec{r}'$	\vec{E} , elektrisches Feld [V/m] E-Feld zeigt von + nach - Superposition von Punktladungen am Ort \vec{r}_i , Feld am Punkt \vec{r}_p Allg. Superposition
Eigenschaften des el. Feldes (konservatives Kraftfeld, nur im statischen Fall)	$\int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ $\nabla \times \vec{E} = 0$	Arbeit ist weginvariant, nur abhängig vom Anfangs- und Endpunkt. Arbeit entlang eines geschlossenen Pfades verschwindet Rotation des Feldes = 0 (nur in Elektrostatik!)
El. Arbeit	$W_{e12} = Q_1 \int_{r_1}^{r_2} (-\vec{E}) \cdot d\vec{s}$	W_e Arbeit um Q_1 von 1 nach 2 [J]
Potential	$\varphi = \frac{W_e}{Q}$ $\varphi(P_B) = - \int_{\infty}^{P_B} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ $\vec{E} = -\nabla\varphi$ $U_{12} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$	φ , Potential [V], Bezugspunkt üblicherweise im Unendlichen U , Spannung [V]

Elektrische Flussdichte	$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$ $\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$ $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	\vec{D} , elektrische Flussdichte [C/m ²] ϵ_r , Dielektrizitätskonstante, einheitslos Gauss'sches Gesetz (Integralform) Gauss'sches Gesetz (Differentialform)
Randbedingungen	$\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}$ $D_{n2} - D_{n1} = \sigma$	Tangentialkomponente Normalkomponente
Kapazität, Kondensatoren	$C = \frac{Q}{U}$ $C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d}$	C , Kapazität, [F]=[As/V] Plattenkondensator 
Serienschaltung	$C_{\text{ser}}^{-1} = \sum_{k=1}^n C_k^{-1}$	
Spannungsteiler	$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ $U_i = U_{\text{ges}} \frac{C_i^{-1}}{\sum_n C_n^{-1}}$ $U_1 = U_{\text{ges}} \frac{C_2}{C_1 + C_2}$	Spezialfall für zwei Kondensatoren Spezialfall für zwei Kondensatoren
Parallelschaltung	$C_{\text{parr}} = \sum_{k=1}^n C_k$	
Ladungsteiler	$Q_i = Q_{\text{ges}} \frac{C_i}{\sum_n C_n}$ $Q_1 = Q_{\text{ges}} \frac{C_1}{C_1 + C_2}$	Spezialfall für zwei Kondensatoren
Energie	$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2$	W_e , Energie im Kondensator [J]

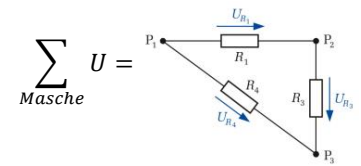
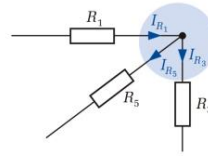
2 Das stationäre elektrische Strömungsfeld

Elektrischer Strom	$I(t) = \frac{dQ}{dt}$ $I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \kappa \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$	I , Strom [Ampere, A] Q , el. Ladung, [Coulomb, C]
Elektrische Stromdichte	$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$ $I = \vec{J} \cdot \vec{A}, \text{ wenn } J = \text{konstant auf } A$ $\vec{J} = \frac{\Delta I}{\Delta A} \vec{e}_v = \rho \cdot \vec{v}$ $\vec{J}_v = \frac{d}{dt} \vec{D}$	J , Stromdichte, [A/m ²] Konvektionsstrom Verschiebungsstrom
Kontinuitätsgleichung	$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ $\oiint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$ (geschlossene Fläche A!)	Spezialfall: ohne Ladungsträger-Generation, Senke
Materialeigenschaften	$\mu_e \vec{E} = \vec{v}_e, \mu_h \vec{E} = \vec{v}_h$ $\kappa = ne \mu_e$ $\rho_R = \frac{1}{\kappa}$	μ_e, μ_h , Mobilität Elektronen & Löcher, [m ² /Vs] κ , Leitfähigkeit, [S/m] ρ_R , Spez. Widerstand, [Ωm]
Im elektrischen Leiter	$\vec{E} = \rho_R \vec{J}$ $\vec{J} = \kappa \vec{E}$	
Widerstand, Leitwert	$R = \rho_R \frac{L}{A}$ $G = \frac{1}{R}$ $R(T) = \frac{l}{A} \rho_{20^\circ\text{C}} (1 + \alpha \Delta T + \beta \Delta T^2)$	ρ_{20} , spez. Widerstand bei 20°C <div style="text-align: center;">  </div>
Ohm'sches Gesetz	$U = RI$ $I = GU$	U , Spannung, [Volt, V] R , Widerstand [Ohm, Ω] G , Leitwert [Siemens, S]
Leistung	$P = UI$ $p = \frac{dP}{dV} = \vec{J} \cdot \vec{E}$	P , Leistung, [Watt, W] p , Leistungsdichte pro Volumen, [W/m ³]

3 Elektrische Netzwerke

Kirchhoff'sche
Gleichungen

$$\sum_{\text{Knoten}} I = 0$$



Widerstandsnetze

Serie / Reihe

$$R_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^n R_k$$

Gesamtwiderstand

Parallel

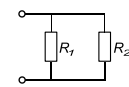
$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

$$G_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^n G_k$$

Gesamtleitwert

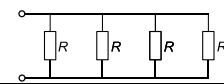
2 parallele Widerstände

$$R_{\text{ges}} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



N gleiche, parallele
Widerstände

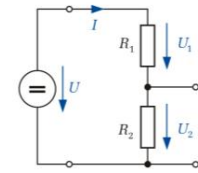
$$R_{\text{ges}} = \frac{R}{n}$$



Teiler

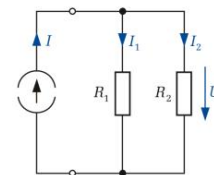
Spannungsteiler

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)}$$



Stromteiler

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{I} &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{G_1}{G_1 + G_2} \end{aligned}$$



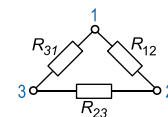
Umwandlung

Dreieck → Stern

$$R_{1N} = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_{2N} = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_{3N} = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

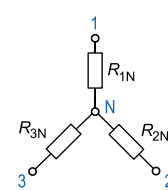


Stern → Dreieck

$$R_{12} = R_{1N} + R_{2N} + \frac{R_{1N} R_{2N}}{R_{3N}}$$

$$R_{23} = R_{2N} + R_{3N} + \frac{R_{2N} R_{3N}}{R_{1N}}$$

$$R_{31} = R_{1N} + R_{3N} + \frac{R_{1N} R_{3N}}{R_{2N}}$$



Superpositions-
prinzip Quellen:
Die Gesamtquelle
ist die lineare
Superposition der
Teillösungen von
jeder einzelnen
Quelle

Spannungsquelle

Einzelne Quelle bestimmen:
Ersatz durch Kurzschluss

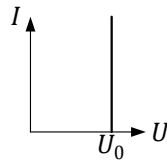
Es darf bei Teillösungen
keine zusätzliche Spannung
über der Quelle abfallen

Stromquelle

Einzelne Quelle bestimmen:
Ersatz durch Unterbruch

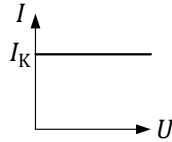
Es darf bei Teillösungen kein
zusätzlicher Strom durch die
Quelle fließen.

Ideale Spannungsquelle



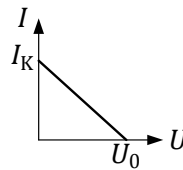
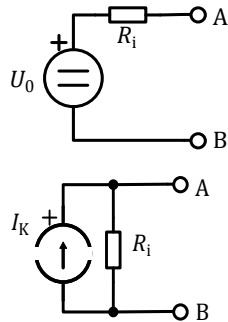
- Konstante Spannung unabh. von Strom
- Innenwiderstand 0
- Unphysikalisch bei Kurzschluss

Ideale Stromquelle



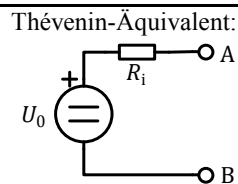
- Konstanter Strom unabh. von Spannung
- Innenwiderstand unendlich
- Unphysikalisch wenn offen

Reale (lineare) Quelle

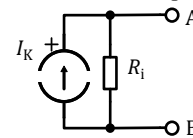


- Endlicher Innenwiderstand
- Kein unphysikalisches Verhalten
- $U = U_0 - R_i I$
- $I = I_K - U/R_i$

Beliebige Kombination von Quellen können durch eine äquivalente Quelle ersetzt werden.



Nach Norton-Äquivalent:



Verfahren zum Finden äquivalenter Quellen: Finde 2 der 3 Grössen U_0, I_K, R_i

$$U_0 = I_K R_i$$

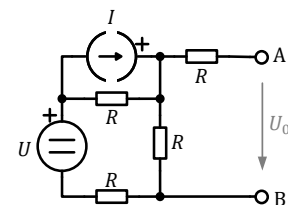
$$I_K = \frac{U_0}{R_i}$$

$$R_i = \frac{U_0}{I_K}$$

Leerlaufspannung U_0 finden durch

Ausgang offen lassen

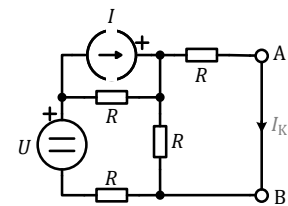
Spannung berechnen



Kurzschlussstrom I_K finden durch

Ausgang kurzschliessen

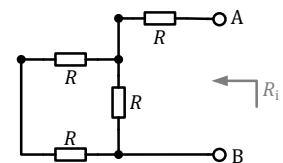
Strom berechnen



Innenwiderstand R_i finden durch

Alle Quellen ausschalten

Äquivalenten Widerstand berechnen

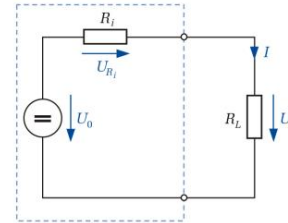


Identische Quellen	Leerlaufspannung	Kurzschlussstrom	Innenwiderstand
Serienschaltung	$U_{0,n} = n U_0$	$I_{K,n} = I_K$	$R_{i,n} = n R_i$
Parallelschaltung	$U_{0,n} = U_0$	$I_{K,n} = n I_K$	$R_{i,n} = \frac{R_i}{n}$

Leistungsanpassung

Von Spannungsquelle an
Last abgegebene Leistung

$$P_L = \left(\frac{U_0}{R_i + R_L} \right)^2 R_L$$



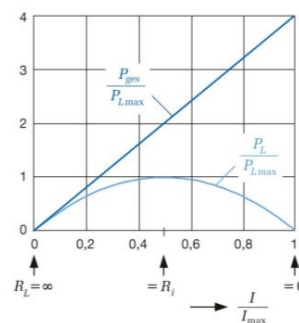
Bei Leistungsanpassung: $R_L = R_i$

Maximal abgegebene
Leistung

$$P_{L,max} = \frac{U_0^2}{4R_i}$$

bei
Leistungsanpassung

$$R_L = R_i$$



Wirkungsgrad einer
Spannungsquelle

$$\eta = \frac{P_L}{P_{ges}} = \frac{R_L}{(R_i + R_L)} = \frac{U_L}{U_0}$$

Wirkungsgrad einer
Stromquelle

$$\eta = \frac{P_L}{P_{ges}} = \frac{R_i}{(R_i + R_L)} = \frac{I_L}{I_K}$$

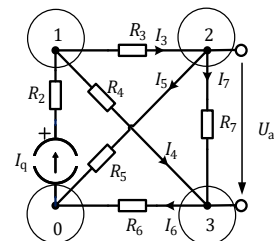
Knotenpotentialverfahren

Allgemein

Beispiel

- 1) Knoten & Potentiale nummerieren
 - Potential 0: «GND»
 - k-1 freie

$$\varphi_i = U_{i0}$$



- 2) Knotengleichungen

$$\sum_{j \neq i} I_{ij} = 0$$

$$1: I_3 + I_4 - I_q = 0$$

- 3) Leitwerte & Potentiale einsetzen
 - Stromquellen auf die rechte Seite

$$\sum_{j \neq i} G_{ij}(\varphi_i - \varphi_j) = \sum_{j \neq i} I_{q,ij}$$

$$1: G_3(\varphi_1 - \varphi_2) + G_4(\varphi_1 - \varphi_3) = I_q$$

- 4) Nach Potentialen gruppieren

$$\left(\sum_{j \neq i} G_{ij} \right) \varphi_i - \sum_{j \neq i} G_{ij} \varphi_j = \sum_{j \neq i} I_{q,ij}$$

$$2: (G_3 + G_4)\varphi_1 - G_3\varphi_2 - G_4\varphi_3 = I_q$$

5) Matrixform

- Leitwertmatrix M
- Quellenstromvektor \vec{I}

$$M_{ij} = \begin{cases} -G_{ij} & j \neq i \\ \sum_{l \neq i} G_{il} & j = i \end{cases}$$

$$\vec{I}_i = \sum_{l \neq i} I_{q,ij}$$

$$M = \begin{bmatrix} G_3 + G_4 & -G_3 & -G_4 \\ -G_3 & G_3 + G_5 + G_7 & -G_7 \\ -G_4 & -G_7 & G_4 + G_6 + G_7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} I_{q1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6) Matrixgleichung lösen

$$M\vec{\varphi} = \vec{I}$$

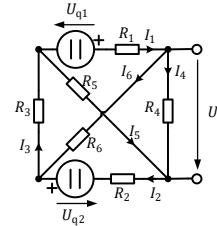
Maschenstromverfahren

Allgemein

Beispiel

1) (Zweig-) Strompfeile definieren

I_1 bis I_z , z Zweige

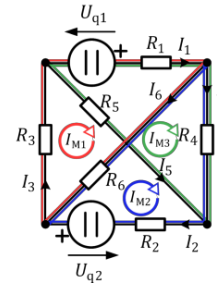


2) Lin. unabhängige Maschen finden

M_1 bis M_m , m Maschen

3) Maschenstrom für jede Masche definieren

I_{M1} bis I_{Mm}



4) Zweigströme als Kombination der Maschenströme schreiben

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, I_i = \sum_{n=1}^m b_n I_{M_n}, \text{ mit } b_n \in \{0, \pm 1\}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{M1} + I_{M3} \\ I_3 &= I_{M1} \\ I_6 &= I_{M1} - I_{M2} \end{aligned} \quad \text{etc.}$$

$$\Rightarrow \vec{I} = A\vec{I}_M$$

5) Für jede Masche Maschengleichung aufstellen.

$$\forall m \sum_{U \in M_m} U = 0$$

$$U_1 + U_6 + U_3 - U_{q1} = 0$$

6) Ohm'sches Gesetz anwenden. Ströme durch Maschenströme gemäss (4) ersetzen.

$$U = \begin{cases} R_i I_i = R_i \sum_{n=1}^m b_n I_{M_n} & , \Omega\text{-Law} \\ U_q & , \text{Quellen} \end{cases}$$

$$R_1(I_{M1} + I_{M3}) + R_6(I_{M1} - I_{M2}) + R_3 I_{M1} = U_{q1}$$

7) Finde Maschenströme

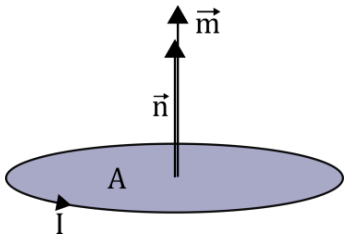
$$R\vec{I}_M = \vec{Q}$$

$$\begin{bmatrix} -R_6 & R_2 + R_6 + R_4 & R_4 \\ R_1 + R_3 + R_6 & -R_6 & R_1 \\ R_1 & R_4 & R_4 + R_5 + R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{q2} \\ U_{q1} \\ U_{q1} \end{bmatrix}$$

8) Finde Zweigströme

$$\vec{I} = A\vec{I}_M = AR^{-1}\vec{Q}$$

4 Das stationäre Magnetfeld

Lorentz-Kraft auf bewegte Ladung	$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$	q , Elementarladung [C] \vec{v} , Geschwindigkeitsvektor [m/s] \vec{B} , Magnetische Flussdichte [T]
Lorentz-Kraft auf Leiter	$\vec{F} = I(\vec{\ell} \times \vec{B})$	$\vec{\ell}$, Gerichtetes Leiterstück der Länge ℓ
Gesetz von Oersted	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_k I_k := \Theta$	\vec{H} , Magnetische Feldstärke [A/m] Θ , Durchflutung [A]
Durchflutungsgesetz/ Ampèresches Gesetz	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} := \Theta$ $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$	
Magnetische Feldstärke im Vakuum	$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$	μ_0 , Magnetische Feldkonstante [H/m=N/A ²]
Magnetische Spannung	$V_{m,AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{s}$	$V_{m,AB}$, Magnetische Spannung zwischen den Punkten A und B [A]
Magnetischer Fluss	$\Phi_A = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$	Φ_A , Magnetischer Fluss durch Fläche A
Magnetische Feldstärke eines unendlich langen geraden Leiters	$\vec{H}(\rho) = \begin{cases} \vec{e}_\varphi \frac{I}{2\pi a^2} \rho & \rho \leq a \\ \vec{e}_\varphi \frac{I}{2\pi \rho} & \rho > a \end{cases}$	ρ , Abstand zum Zentrum des Leiters a , Radius des Leiters \vec{e}_φ , Einheitsvektor in φ -Richtung in Zylinderkoordinaten
Magnetische Feldstärke im Inneren einer idealisierten Toroidspule	$\vec{H}(\rho) = \vec{e}_\varphi \frac{NI}{2\pi \rho}$	ρ , Abstand zum Zentrum der Spule N , Wicklungszahl \vec{e}_φ , Einheitsvektor in φ -Richtung in Zylinderkoordinaten
Magnetische Feldstärke im Inneren einer idealisierten langgestreckten Zylinderspule	$\vec{H} = \vec{e}_x \frac{NI}{l}$	N , Wicklungszahl l , Spulenlänge \vec{e}_x , Einheitsvektor in x-Richtung
Gesetz von Biot-Savart	$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3} dV'$	\vec{r} , Ortsvektor des Berechnungspunkts \vec{r}' , Ortsvektor des Leiterstücks
Magnetisches Moment	$\vec{m} = \vec{n}IA = I\vec{A}$	
Magnetisierung	$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \vec{m}_n$	
Magnetische Polarisation	$\vec{J} = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \vec{j}_n = \mu_0 \vec{M}$	
Beziehung zwischen magnetischer Feldstärke und magnetischer Flussdichte	$\vec{B} = \mu \vec{H}$ $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + (\mu - \mu_0) \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}$	μ , Magnetische Permeabilität
Beziehungen zwischen den Feldgrößen, der Magnetisierung \vec{M} und	$\vec{J} = (\mu - \mu_0) \vec{H} = \mu_0(\mu_r - 1) \vec{H}$ $= \mu_0 \chi \vec{H}$ $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$	μ , Magnetische Permeabilität μ_r , Relative Permeabilität \vec{M} , Magnetisierung

der magnetischen
Polarisation \vec{J}

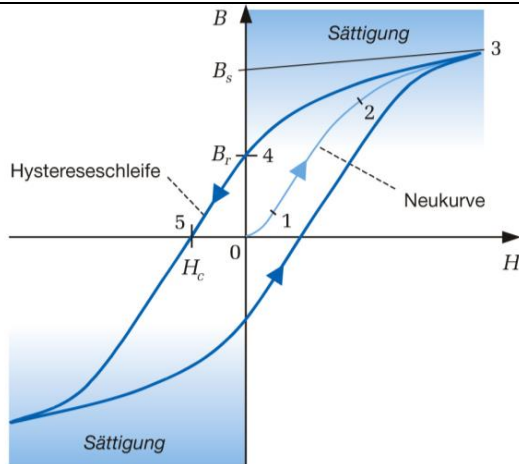
$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

χ , Magnetische Suszeptibilität

Feldgrößen an
Grenzflächen

$$\begin{aligned} B_{n1} &= B_{n2} \\ \mu_1 H_{n1} &= \mu_2 H_{n2} \\ H_{t1} &= H_{t2} \\ \frac{B_{t1}}{B_{t2}} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \end{aligned}$$

n, Normalkomponente
t, Tangentialkomponente
 μ , Magnetische Permeabilität

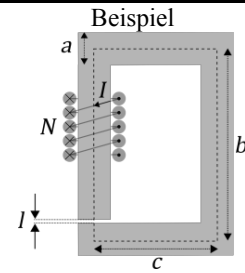


B_s , Sättigungsflussdichte
 B_r , Remanenzflussdichte
 H_c , Koerzitivfeldstärke

	Bezeichnung	Elektrisches Netzwerk	Magnetisches Netzwerk
Magnetischer Kreis	Leitfähigkeit	κ	μ
	Widerstand	$R = \frac{l}{\kappa A}$	$R_m = \frac{l}{\mu A}$
	Leitwert	$G = \frac{1}{R}$	$\Lambda_m = \frac{1}{R_m}$
	Spannung	$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$	$V_{m12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{H} \cdot d\vec{s}$
	Strom bzw. Fluss	$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \kappa \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$	$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu \iint_A \vec{H} \cdot d\vec{A}$
	Ohm'sches Gesetz	$U = R I$	$V_m = R_m \Phi$
	Maschengleichung (Abb. 5.26)	$U_0 = \sum_{Masche} R I$	$\Theta = \sum_{Masche} R_m \Phi$
	Knotengleichung	$\sum_{Knoten} I = 0$	$\sum_{Knoten} \Phi = 0$

Verfahren magnetischer Kreis

Allgemein



Netzwerkgleichungen des magnetischen Kreises

i) Knotenregel

$$\sum_{\text{Knoten } i} \Phi_i = 0$$

$$\Phi_K - \Phi_L = 0 \rightarrow \Phi \equiv \Phi_K = \Phi_L$$

ii) Maschenregel

$$\theta = \sum_{\text{Masche } i} V_{m,i} = \sum_i R_{m,i} \Phi_i$$

$$\theta = \Phi (R_{m,K} + R_{m,L})$$

iii) Ohm'sches Gesetz

$$V_{m,i} = \Phi_i R_{m,i}$$

$$V_{m,K} = \Phi R_{m,K}, \\ V_{m,L} = \Phi R_{m,L}$$

Jetzt noch die fehlenden Grössen bestimmen:

iv) Durchflutung θ via Ampère.
(i.e. Quellen bestimmen & Vorzeichen beachten!)

$$\theta = \sum_i H_i l_i = \sum_i N_i I_i$$

$$\theta = NI$$

v) Magnetische Widerstände $R_{m,i}$ bestimmen

$$R_{m,i} = \frac{l_i}{\mu_0 \mu_{r,i} A_i}$$

$$R_{m,K} = \frac{2(b+c) - l}{\mu_0 \mu_r a^2} \\ R_{m,L} = \frac{l}{\mu_0 a^2}$$

(Mittlere Längen l_i)

→ Nach gewünschter Grösse auflösen

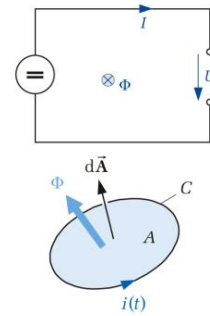
$$\text{z.B. } \Phi = \frac{NI}{R_{m,K} + R_{m,L}}$$

Mit der Spule verketteter Fluss	$\Phi = N \Phi_A$	N , Windungszahl
Induktivität	$L = \frac{\Phi}{I}$	L , Induktivität [H]
Induktivität aus Reluktanzmodell	$L = \frac{N^2}{R_m}$	
Induktivität einer Ringkernspule	$L = N^2 \frac{\mu h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ $\approx N^2 \frac{\mu h}{2\pi} \frac{b-a}{a}, b-a \ll a$	N , Windungszahl μ , Magnetische Permeabilität h , Kernhöhe b , Äusserer Radius a , Innerer Radius
Induktivität einer Doppelleitung pro Längeneinheit	$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)$	μ_0 , Permeabilitätskonstante b , Leiterabstand a , Leiterradius

5 Das zeitlich veränderliche elektromagnetische Feld

Induzierte Spannung in
der Leiterschleife gemäss
Abbildung

$$U = - \frac{d\Phi}{dt}$$



Faraday'sche
Induktionsgesetz

$$\oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Lenz'sche Regel

*Der induzierte Strom ist so gerichtet,
dass er die Ursache seines
Entstehens zu verhindern sucht*

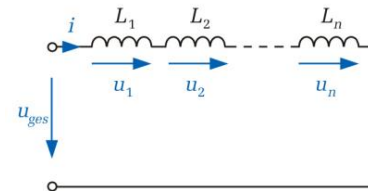
Induktivität

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

L , Induktivität [Henry, H]

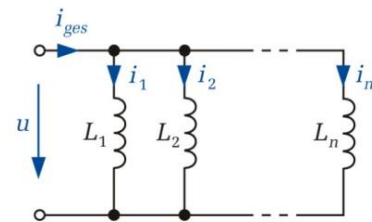
Serienschaltung

$$L_{\text{ser}} = \sum_{k=1}^n L_k$$



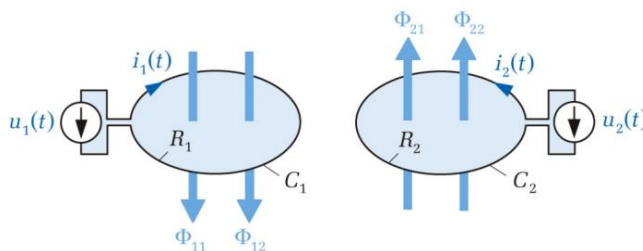
Parallelschaltung

$$L_{\text{parr}}^{-1} = \sum_{k=1}^n L_k^{-1}$$



$$L_{\text{parr}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Spezialfall für zwei Induktivitäten



Φ_{11} , Fluss durch C_1 aufgrund $i_1(t)$
 Φ_{12} , Fluss durch C_1 aufgrund $i_2(t)$
 Φ_{21} , Fluss durch C_2 aufgrund $i_1(t)$
 Φ_{22} , Fluss durch C_2 aufgrund $i_2(t)$

Gekoppelte
Leiterschleifen

$$u_1 = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$$

L_{11}, L_{22} , Selbstinduktivität
 L_{12}, L_{21} , Gegeninduktivität

Gegeninduktion

$$M = L_{ik} = L_{ki}$$

Gegeninduktivität zweier
Doppelleitungen

$$L_{12} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \left(\frac{bc}{ad} \right)$$

Kopplungsfaktoren

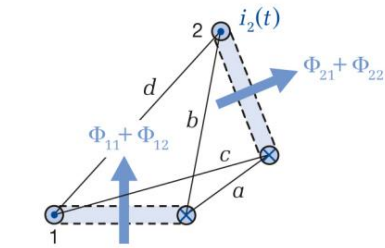
$$k_{12} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} = \frac{M}{L_{22}}$$

$$k_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} = \frac{M}{L_{11}}$$

$$k = \pm \sqrt{k_{12} k_{21}}$$

Streuung

$$\sigma = 1 - k^2$$



l , Länge des Leiterabschnitts

k , Kopplungsfaktor

Energieinhalt
Induktivitäten

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \Phi I$$

Einzelne Spule

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n L_{ik} I_i I_k$$

Gekoppelte Spulen

Energiedichte

$$w_m = \int_0^B H dB = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

w_m , Energiedichte [VAsm^{-3}]

Magnetische Energie

$$W_m = \iiint_V w_m dV = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV$$

Rotierende Leiterschleife
im Magnetfeld

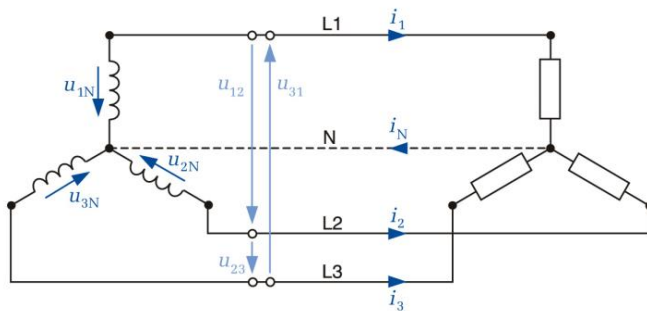
$$\Phi = \hat{\Phi} \cos(\omega t)$$

$\hat{\Phi}$, der maximale magnetische Fluss
 ω , Kreisfrequenz
 t , Zeit

Wechselspannung

$$u(t) = -\frac{d}{dt} \Phi(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$$

\hat{u} , Spitzenspannung
 ω , Kreisfrequenz



u_{1N} , Strangspannung L1 nach N
 u_{2N} , Strangspannung L2 nach N
 u_{3N} , Strangspannung L3 nach N
 u_{12} , Leiterspannung L1 nach L2
 u_{23} , Leiterspannung L2 nach L3
 u_{31} , Leiterspannung L3 nach L1
 i_1 , Leiterstrom in L1
 i_2 , Leiterstrom in L2
 i_3 , Leiterstrom in L3
 i_N , Neutraleiterstrom

Sternschaltung
Strangspannung

$$u_{kN} = \hat{u} \sin \left(\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{3} \right)$$

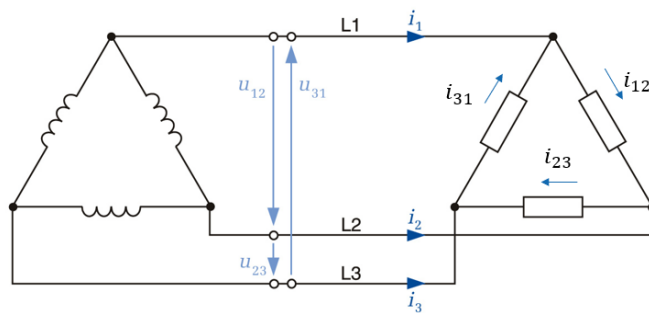
\hat{u} , maximale Spannung
(Spitzenspannung)
 k , Index der Leitung $k \in \{1,2,3\}$

Leiterspannung
Spitzenwert

$$\hat{u}_{12} = \hat{u}_{23} = \hat{u}_{31} = \sqrt{3} \hat{u}$$

Neutraleiterstrom bei
symmetrischer Last

$$i_N = i_1 + i_2 + i_3 = 0$$



Dreieckschaltung
Leiterspannung

$$u_{12} = \hat{u} \sin(\omega t)$$

$$u_{23} = \hat{u} \sin(\omega t + 2\pi/3)$$

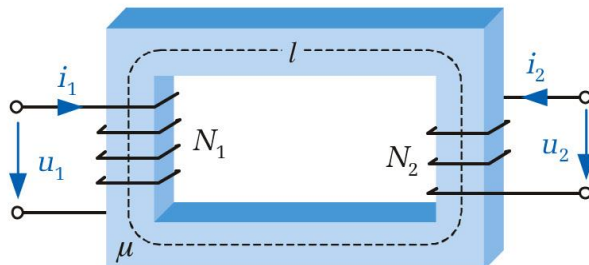
$$u_{31} = \hat{u} \sin(\omega t + 4\pi/3)$$

Leiterstrom Spitzenwert
bei symmetrischer Last

$$\hat{i}_k = \sqrt{3}\hat{i}_{12} = \sqrt{3}\hat{i}_{23} = \sqrt{3}\hat{i}_{31}$$

u_{12} , Leiterspannung L1 nach L2
 u_{23} , Leiterspannung L2 nach L3
 u_{31} , Leiterspannung L3 nach L1
 i_1 , Leiterstrom in L1
 i_2 , Leiterstrom in L2
 i_3 , Leiterstrom in L3
 i_{12} , Strangstrom L1 nach L2
 i_{23} , Strangstrom L2 nach L3
 i_{31} , Strangstrom L3 nach L1

k , Index der Leitung $k \in \{1,2,3\}$



Der verlustlose streufreie
Transformator

$$\frac{u_1}{u_2} = \mp \frac{N_1}{N_2}$$

Der ideale Transformator

$$\frac{i_1}{i_2} = \pm \frac{N_2}{N_1}$$

$$P_1 = P_2$$

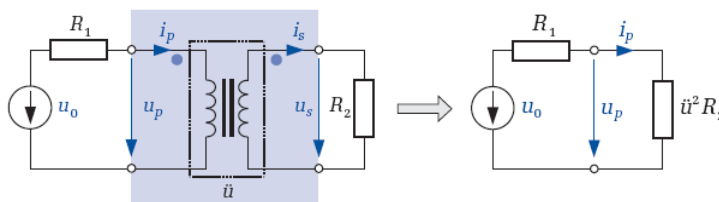
Übersetzungsverhältnis

$$\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2}$$

u_1 , Spannung an der Primärseite
 u_2 , Spannung an der Sekundärseite
 i_1 , Strom auf der Primärseite
 i_2 , Strom auf der Sekundärseite
 N_1 , Anzahl Windungen auf der Primärseite
 N_2 , Anzahl Windungen auf der Sekundärseite

In der Skizze obere Vorzeichen. Je nach Wicklungssinn untere.

P_1 , Leistung auf der Primärseite
 P_2 , Leistung auf der Sekundärseite



Widerstands-
Transformation

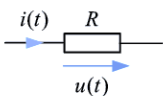
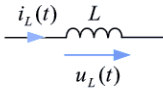
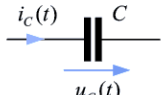
$$R_E = \frac{u_1}{i_1} = \ddot{u} u_2 \frac{\ddot{u}}{i_2} = \ddot{u}^2 R_2$$

R_2 , Widerstand auf Sekundärseite
 R_E , Ersatzwiderstand auf Primärseite

6 Wechselstrom

Mittelwert	$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} u(t) dt$	
Effektivwert	$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} u^2(\varphi) d\varphi}$	
	$I_{\text{eff}} = \hat{i} / \sqrt{2}, \quad U_{\text{eff}} = \hat{u} / \sqrt{2}$	Sinusförmige Anregung
Instantane Leistung	$p(t) = u(t) \cdot i(t)$	
Mittlere Leistung	$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} p(t) dt = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$	

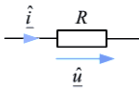
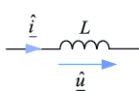
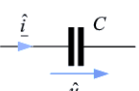
Zusammenhang zwischen Strang- und Außenleitergrößen

Komponente	Spannung	Strom	Gleichung
	$u(t) = R i(t)$	$i(t) = \frac{1}{R} u(t)$	(7.3)
	$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$	$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt$	(7.4)
	$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt$	$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$	(7.5)

Komplexe Amplitude $u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}\{\hat{u} \cdot e^{j\omega t}\}$

$i(t) = \hat{i} \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}\{\hat{i} \cdot e^{j\omega t}\}$

Strom- und Spannungsbeziehungen an den linearen, passiven Netzwerkelementen

Komponente	Spannung	Strom	Impedanz	Admittanz	Gl.
	$\hat{u} = R \hat{i}$	$\hat{i} = \hat{u} / R$	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Y}_R = \frac{1}{R} = G$	(8.28)
	$\hat{u} = j\omega L \hat{i}$	$\hat{i} = \frac{\hat{u}}{j\omega L}$	$\underline{Z}_L = j\omega L \stackrel{(8.13)}{=} jX_L$	$\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = jB_L$	(8.29)
				mit $B_L = -\frac{1}{\omega L}$	
	$\hat{u} = \frac{1}{j\omega C} \hat{i}$	$\hat{i} = j\omega C \hat{u}$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = jX_C$	$\underline{Y}_C = j\omega C \stackrel{(8.15)}{=} jB_C$	(8.30)
			mit $X_C = -\frac{1}{\omega C}$		

Vorgehen zur
Netzwerkanalyse

1. Ersatzschaltbild
2. Mehrere Strom-, Spannungsquellen via Superposition
3. Vom Zeit- in Frequenzraum transformieren, komplexe Impedanzen
4. Vereinfachen: Serien- und Parallelschaltung, Maschen- und Knotenregeln, Spannungs- und Stromteiler
5. Rücktransformation in Zeitbereich

Zeitabhängige Spannung und zugehörige komplexe Amplitude

Zeitabhängige Spannung

Komplexe Amplitude

$$\hat{u} \cos \omega t$$

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u}$$

$$\hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u} e^{j\varphi_u}$$

$$\hat{u} \sin \omega t = \hat{u} \cos(\omega t - \pi/2)$$

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u} e^{-j\pi/2}$$

$$\hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u} e^{j(\varphi_u - \pi/2)}$$

Ohm'sches Gesetz

$$\underline{\hat{u}} = \underline{Z} \underline{\hat{i}}$$

\underline{Z} , Komplexe Impedanz

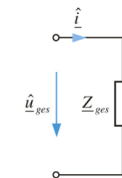
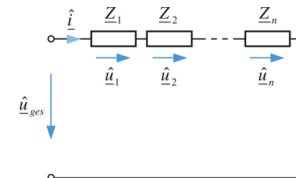
Maschenregel

$$\sum_{\text{Masche}} \underline{\hat{u}}_i = 0$$

Knotenregel

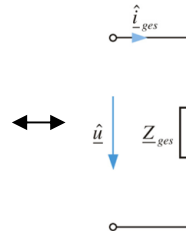
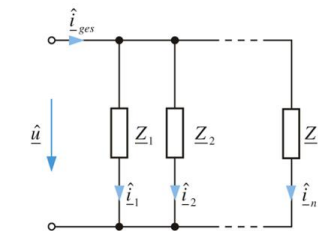
$$\sum_{\text{Knoten}} \underline{\hat{i}}_i = 0$$

Reihenschaltung:
Impedanz-Addition



$$\underline{Z}_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$$

Parallelschaltung:
Admittanz-Addition



$$\underline{Y}_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k$$

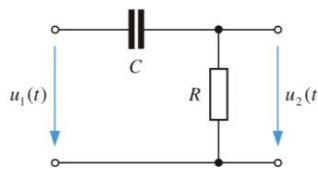
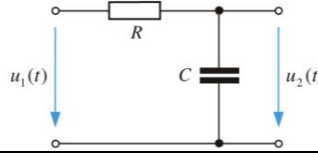
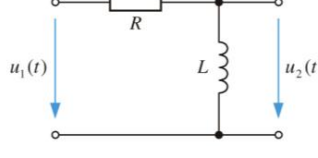
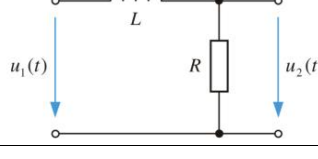
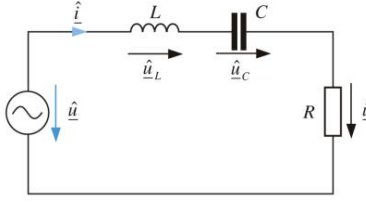
$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{ges}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_k}$$

Spannungsteiler

$$\frac{\underline{\hat{u}}_1}{\underline{\hat{u}}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$$

Stromteiler

$$\frac{\underline{\hat{i}}_1}{\underline{\hat{i}}_2} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

Grenzfrequenz ω_g		$\left \frac{\hat{u}_2(\omega_g)}{\hat{u}_1(\omega_g)} \right ^2 = \frac{1}{2}$
RC Hochpass		$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1}$ $\Delta\varphi = \angle \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$ $\omega_g = \frac{1}{RC}$
		$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{1}{j\omega RC + 1}$ $\Delta\varphi = \angle \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \tan^{-1}(-\omega RC)$
RL Hochpass		$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{Z_L}{Z_R + Z_L} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$ $\Delta\varphi = \angle \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \tan^{-1}\left(\frac{R}{\omega L}\right)$ $\omega_g = \frac{R}{L}$
		$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_L} = \frac{R}{R + j\omega L}$ $\Delta\varphi = \angle \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \tan^{-1}\left(\frac{-\omega L}{R}\right)$
RLC Oszillator		$\frac{\hat{u}_R}{\hat{u}} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_L + Z_C}$ $= \frac{Rj\omega C}{Rj\omega C - \omega^2 LC + 1}$ $\left \frac{\hat{u}_R}{\hat{u}} \right = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$
$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$		ω_0 , Resonanzfrequenz
$Q_s = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{d_s}$		Q_s , Güte
$B = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L} = \frac{f_0}{Q_s}$		d_s , Dämpfung
		B , Bandbreite

7 Halbleiter

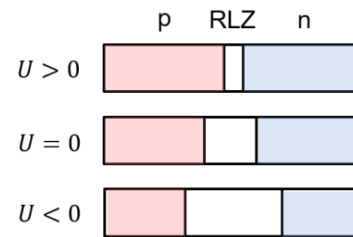
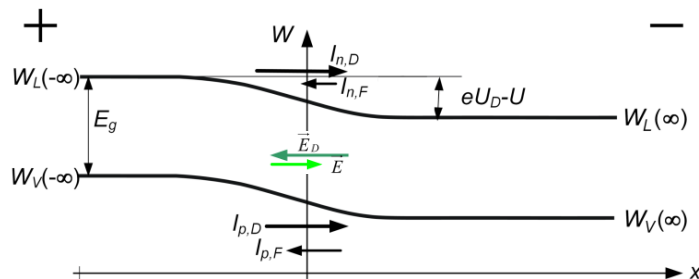
Bandlücke E_G	$E_G = E_L - E_V$	E_L , Leitungsband E_V , Valenzband
Halbleiter	$0.1 \text{ eV} < E_G < 4 \text{ eV}$	$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$	m , Masse v , Geschwindigkeit p , Impuls
De Broglie	$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$	h , Planck'sche Konstante $\hbar = h/2\pi$, reduzierte Planck'sche K. $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Energie eines Elektrons	$E_{\text{tot}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2 m_{\text{eff}}}$	m_{eff} , effektive Masse
Boltzmann-Konstante	k_B	$k_B = 1.380 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ $k_B = 8.617 \cdot 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$
Fermi-Dirac-Verteilung	$f_{\text{FD}}(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{k_B T}}}$	E_F , Fermi-Energie
Boltzmann-Verteilung	$f_B(E) = e^{-\frac{E-E_F}{k_B T}}$	
Ladungsträgerdichte im Leitungsband, allg.	$n = \int_{E_L}^{\infty} f(E) \rho_n(E) dE$	ρ , Zustandsdichte
Ladungsträgerdichte im Leitungsband, mit Boltzmann-Annäherung	$n = N_L \exp\left(-\frac{E_L - E_F}{k_B T}\right)$	
Äquivalente Zustandsdichte im Leitungsband N_L	$N_L = 2 \left(\frac{2\pi \cdot m_{\text{eff},n} \cdot k_B T}{h^2} \right)^{3/2}$	
Ladungsträgerdichte im Valenzband	$p = N_V \exp\left(-\frac{E_F - E_V}{k_B T}\right)$	
Äquivalente Zustandsdichte im Valenzband N_V	$N_V = 2 \left(\frac{2\pi \cdot m_{\text{eff},p} \cdot k_B T}{h^2} \right)^{3/2}$	
Eigenhalbleiter	$n_{\text{th}} = p_{\text{th}} = n_i$	n_i , Eigenleitungsträgerdichte th, thermische Ladungsträger
Massenwirkungsgesetz	$n_i^2(T) = n p$	
Donatorenniveau E_D	$\Delta E_D = E_L - E_D$	E_D ist unter dem Leitungsband
Akzeptorenniveau E_A	$\Delta E_A = E_A - E_V$	E_A ist über dem Valenzband
Ladungsneutralität	$n + n_A^- = p + n_D^+$	n_A^- , ionisierte Akzeptorendichte n_D^+ , ionisierte Donatorendichte
Drift	$\vec{J}_{\text{Drift}} = [en\mu_n + ep\mu_p] \vec{E}$	\vec{J}_{Drift} , Drift-Stromdichte
Leitfähigkeit	$\kappa = en\mu_n + ep\mu_p$	
Diffusion	$\vec{J}_{\text{Diff}} = \vec{J}_{n,\text{Diff}} + \vec{J}_{p,\text{Diff}}$	\vec{J}_{Diff} , Diffusions-Stromdichte
	$\vec{J}_{n,D} = +eD_n \nabla n$	$\vec{J}_{n,\text{Diff}}$, Elektr.-Diffusionsstromdichte D , Diffusionskonstante
	$\vec{J}_{p,D} = -eD_p \nabla p$	$\vec{J}_{p,\text{Diff}}$, Löcher-Diffusionsstromdichte

Einschuss v. Ladungsträgern	$pn > n_i^2$ $\Delta n = \Delta p = g \tau_{n/p}$	n , Elektronendichte p , Löcherdichte g , Generationsrate $\tau_{n/p}$, Lebensdauer von Elektronen (n) und Löchern (p)
Kontinuitätsgleichung	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = e(g_n - r_n) - e(g_p - r_p)$ $\rho = e(p + n_D^+ - n - n_A^-)$	ρ , Raumladungsdichte
Elektronenstromdichte	$\vec{J}_n = \vec{J}_{n,Drift} + \vec{J}_{n,Diff}$ $\vec{J}_n = en\mu_n \vec{E} + eD_n \nabla n$	\vec{J}_n , totale Elektronen-Stromdichte
Löcherstromdichte	$\vec{J}_p = \vec{J}_{p,Drift} + \vec{J}_{p,Diff}$ $\vec{J}_p = ep\mu_p \vec{E} - eD_p \nabla p$	\vec{J}_p , totale Löcher-Stromdichte
Kontinuitätsgleichung für Löcher	$\frac{\partial(ep)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_p = e(g_p - r_p) + eg_{ext}$	
Kontinuitätsgleichung für Elektronen	$\frac{\partial(-en)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_n = -e(g_n - r_n) - eg_{ext}$	
Poisson Gleichung	$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{e}{\epsilon}(p + n_D^+ - n - n_A^-)$	ϕ , Potential ρ , Raumladungsdichte ϵ , Permittivität

8 pn-Diode

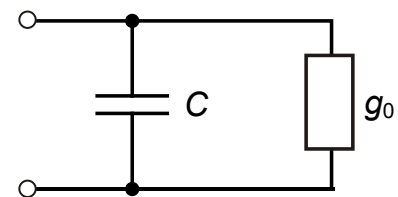
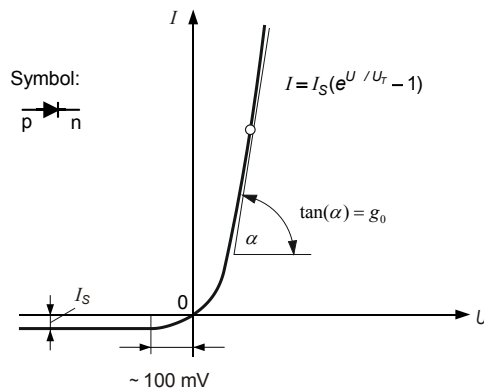
Diffusionsspannung $U_D = \frac{k_B T}{e} \ln \left(\frac{n_D n_A}{n_i^2} \right)$
Verhalten der RLZ bei angelegter Spannung $U > 0$

U_D , Diffusionsspannung
Verhalten der RLZ



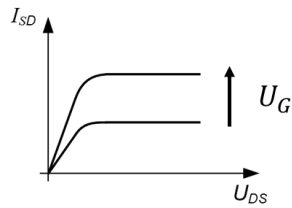
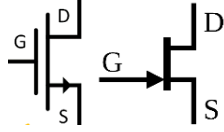
Diodenkennlinie $I = I_n + I_p = I_S \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right)$
Photodiode $I_{PD} = I_L - I_S \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right)$
Kleinsignal:
- Leitwert $g(U) = \frac{dI}{dU} = \frac{e}{k_B T} (I(U) + I_S)$
- Sperrschichtkapazität $C_S = \frac{dQ}{dV} = \frac{A}{l} \epsilon_r \epsilon_0$
Diodenkennlinie

I , Strom durch die Diode
 U , Spannung über der Diode
 I_{PD} , Strom erzeugt durch die Photodiode
 I_L, I_S , (photo) Drift-, Sperrstrom
 g , Kleinsignal Leitwert
 C_S , Kleinsignal Kapazität
Kleinsignal Ersatzschaltbild



9 Aktive Bauelemente

n-typ MOSFET



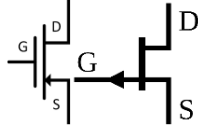
Linear: $I_{DS} = \beta(V_{GS} - V_T)V_{DS}$

Sättigung: $I_{DS} = \frac{\beta}{2}(V_{GS} - V_T)^2$

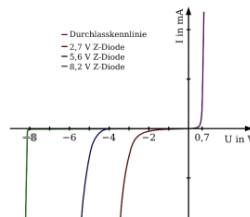
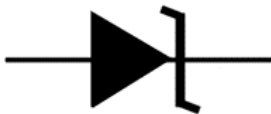
Anwendung: Digitales Schaltelement, Verstärker

Typ. Char.: Lineare und Sättigte Region, mit U_{GS} steigt der Strom I_{DS}

p-typ MOSFET



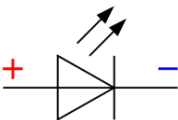
Zener Diode



Anwendung: Schaltungsschutz

Typ. Char.: Durchbruch nach einer gewissen Spannung, Widerstand sackt zu sehr kleinen Werten.

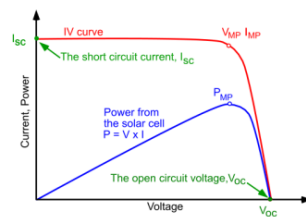
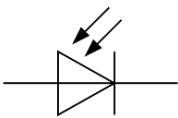
LED



Anwendung: Licht-Generation

Typ. Char.: Wie normale pn-diode.

Solarzelle/Photodetektor



$$I = I_L - I_S \left(e^{\frac{eU}{kT}} - 1 \right)$$

Anwendung: Solarenergie, Quelle

Typ. Char.: Maximum Power Point

10 Konstanten

Elementarladung	$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$	$[\text{C}] = [\text{As}]$
Vakuumpermittivität	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$	$[\text{F/m}] = [\text{As/Vm}]$
Vakuumpermeabilität	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ $\approx 1.26 \times 10^{-6} \text{ H/m}$	$\left[\frac{\text{H}}{\text{m}}\right] = \left[\frac{\text{N}}{\text{A}^2}\right] = \left[\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2 \text{A}^2}\right]$
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1.380 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ $= 8.617 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$	
Thermische Energie bei Raumtemperatur	$k_B T = 25.9 \text{ meV}$ $= 4.14 \times 10^{-21} \text{ J}$	Raumtemperatur: 300 K
