

Michael Benz  
Samuel Fux  
André Niederberger  
Theo Auckenthaler  
Niklaus Rüttimann  
Simon Wieser  
Jan Schilliger  
Nando Käslin  
Yannick Schnider

# Regelung einer Tauchglocke

## Praktikum Mess- und Regelungstechnik

### Anleitung zum Versuch

Institut für Dynamische Systeme und Regelungstechnik  
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

6. Oktober 2023



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>1</b>
2.1	Ventilblock . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Modellierung</b>	<b>3</b>
3.1	Herleitung der Modellgleichungen . . . . .	3
3.2	Zustandsraummodell . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Hausaufgaben</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Versuchsanleitung</b>	<b>7</b>
5.1	Linearisierung . . . . .	7
5.2	Loop-shaping . . . . .	7
5.3	Störungsunterdrückung mit Loop-shaping . . . . .	9
5.4	LQG/LTR . . . . .	9
5.5	Störungsunterdrückung mit LQG/LTR . . . . .	12
5.6	LQGI/LTR . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Nomenklatur</b>	<b>14</b>
<b>7</b>	<b>Appendix</b>	<b>15</b>

## 1 Einleitung

Für die Stabilisierung und Positionierung einer Tauchglocke soll ein Regler entworfen und getestet werden. Für den Test steht eine reale Tauchglocke in einem ca. 2 m hohen Wassertank zur Verfügung.

Zunächst wird ein bestehendes, nichtlineares Modell in einem Betriebspunkt linearisiert, um Analysen im Frequenzbereich hinsichtlich Nullstellen, Pole, Minimalphasigkeit, etc. vornehmen zu können. Anschliessend sollen mehrere Regler beliebiger Ordnung mittels Loop-shaping mit Hilfe des SISOtools in MATLAB ausgelegt und getestet werden. Schliesslich werden ein LQG und ein LQGI-Regler mittels LTR entworfen und am System getestet.

Für eine optimale Vorbereitung für das Praktikum, müssen das Skript durchgelesen und die Hausaufgaben gelöst werden.

## 2 Versuchsaufbau

Abbildung 1 zeigt den Versuchsaufbau schematisch. Die Tauchglocke ist an einem Wagen befestigt, der auf einer Schiene in einem ca. 2 m tiefen Wassertank so eingespannt ist, dass nur vertikale Bewegungen möglich sind. Die Position der Tauchglocke wird über eine Luftblase eingestellt, mit welcher der Auftrieb der Glocke reguliert werden kann. Die Luftzu- und abfuhr zur Luftblase erfolgt über einen Druckluftschlauch, welcher mit einer Rolle über den Rand des Wassertanks geführt wird. Die Luftzufuhr wird von einer Druckluftquelle gespeist und über ein 2/2-Wege-Ventil gesteuert. Die Luftabfuhr wird ebenfalls über ein 2/2-Wege-Ventil gesteuert, wobei keine Unterdruckpumpe zum Einsatz kommt.

Die Sensorik erfasst die Tiefe der Glocke unter Wasser sowie den Druck und die Temperatur in der Glocke, in der Druckluftleitung vor dem Einlassventil und der Atmosphäre hinter dem Auslassventil.

Die Steuerung und Regelung erfolgt mit einem dSpace-System. Dieses ermöglicht die direkte Einbindung von Matlab bzw. Simulink. Die Regler können in Matlab/Simulink entworfen und getestet, sowie anschliessend per Knopfdruck ins dSpace-System geladen werden.

Die Aufgabe besteht darin, die Tauchglocke auf einer bestimmten Tiefe zu positionieren und zu stabilisieren. Die Tiefe wird mit einem Luftmassenzustrom bzw. -abstrom eingestellt, die Steuer- oder Eingangsgrösse des Systems ist also der Luftmassenstrom  $\dot{m}_L$ . Die Ausgangs- oder Regelgrösse ist die Tiefe  $x$  der Tauchglocke unter dem Wasserspiegel.

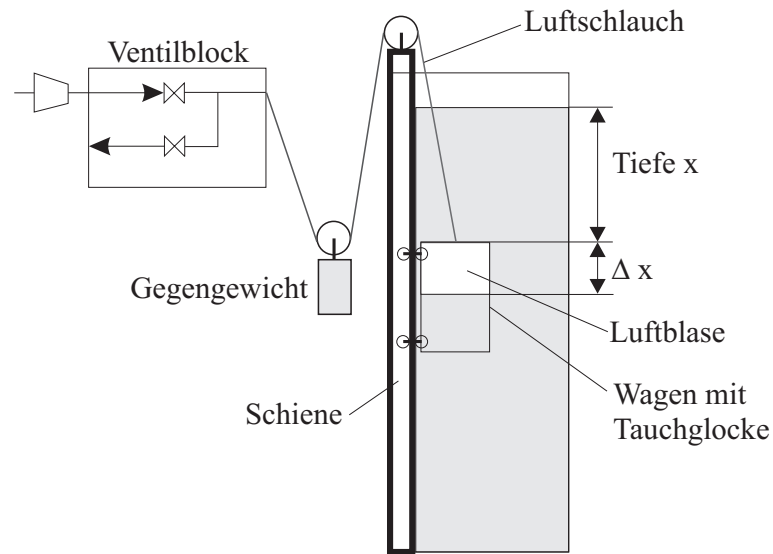


Abbildung 1: Versuchsaufbau mit Wassertank, Tauchglocke und Ventilblock.

## 2.1 Ventilblock

Die Luftzufuhr bzw. Luftabfuhr erfolgt über 2/2-Wege-Ventile. Diese können jeweils nur die Positionen «offen» oder «geschlossen» einnehmen.

Der Regler arbeitet mit einer Abtastzeit von 100 ms, er liefert also alle 100 ms einen Soll-Luftmassenstrom. Dieser wird nun mit dieser Dauer multipliziert, woraus sich die Luftmasse ergibt, die in den nächsten 100 ms aus oder in die Glocke gelangen soll. Wird nun beispielsweise eine Massenzunahme vom Regler gefordert, öffnet sich das Einlassventil. Aus den Druck- und Temperaturverhältnissen vor und hinter dem Ventil wird nun der Luftmassenstrom berechnet, der sich am Ventil einstellt. Dieser Strom wird in einem 1 ms-Raster aufintegriert, wodurch sich die Luftmasse ergibt, die effektiv durch das Ventil geflossen ist. Sobald diese Luftmasse den vom Regler geforderten Wert erreicht hat, wird das Ventil wieder geschlossen.

Die Modellierung des Ventilblocks gehört nicht zur Aufgabe des Praktikums. Obige Beschreibung hat lediglich informativen Charakter. Es ist aber darauf hingewiesen, dass wegen der geringen Tiefe der Druckabfall über dem Auslassventil ziemlich klein ist (bei maximaler Tiefe lediglich 0.2 bar, bei geringeren Tiefen noch weniger). Dies hat zur Folge, dass die Auslassströme entsprechend limitiert sind, was bei der Realisierung eines Reglers unbedingt berücksichtigt werden muss.

Zusammenfassend muss der Regler also lediglich einen Sollmassenstrom liefern, der aber aus den oben genannten Gründen restriktive Begrenzungen einhalten muss.

### 3 Modellierung

In diesem Abschnitt wird zunächst ein nichtlineares Zustandsraummodell der folgenden Form hergeleitet:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u)\end{aligned}\tag{1}$$

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, handelt es sich beim Modell um ein SISO-System (SISO: single input, single output). Die Eingangsgröße  $u$  ist der Luftmassenstrom  $\dot{m}_L$  und die Ausgangsgröße  $y$  ist die Tiefe  $x$ .

Das Zustandsraummodell wird nun aus Bilanzgleichungen hergeleitet. Da die Bewegung der Tauchglocke beschrieben werden soll, wird in einem ersten Schritt die Bewegungsgleichung formuliert.

#### 3.1 Herleitung der Modellgleichungen

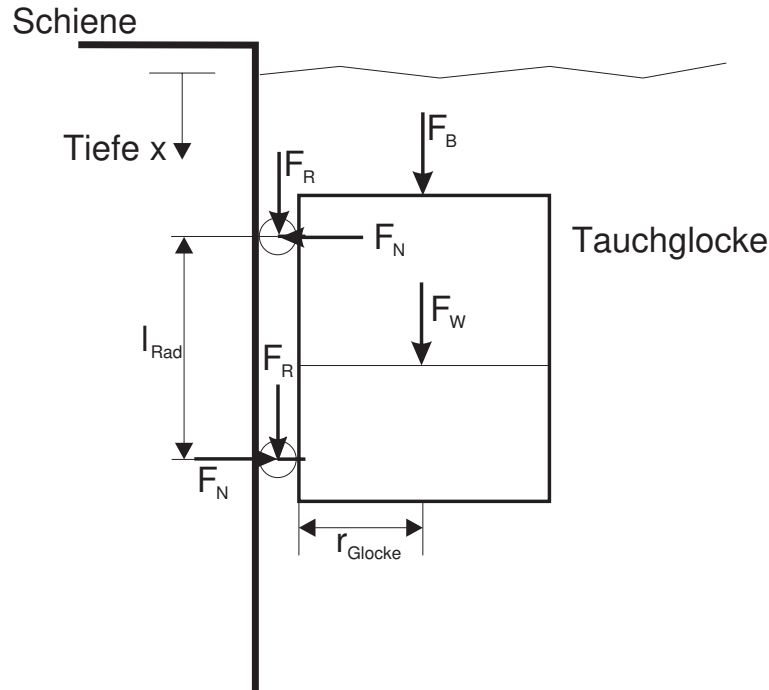


Abbildung 2: Kräfte an der Tauchglocke

Abbildung 2 zeigt die relevanten Kräfte, welche an der Tauchglocke auftreten. Es sind dies die Auftriebskraft  $F_B$ , die Reibungskraft  $F_W$ , die sich aus dem Strömungswiderstand ergibt, sowie die Rollreibungskraft  $F_R$ .

Die Auftriebskraft berechnet sich aus der Differenz zwischen der Gesamtmasse der Tauchglocke sowie der Luftblase und der durch Glocke und Blase verdrängten Wassermasse, multipliziert mit der Erdbeschleunigung  $g$  (Gesetz von Archimedes):

$$F_B = \left[ (V_G \cdot \rho_G + V_L \cdot \rho_L) - (V_G + V_L) \cdot \rho_{H_2O} \right] \cdot g\tag{2}$$

$V$  steht für Volumen,  $\rho$  für die Dichte. Index  $G$  bezieht sich auf die Glocke,  $L$  auf die Luft und  $H_2O$  auf das Wasser.

Für den Strömungswiderstand wird angenommen, dass dieser proportional zum Staudruck ist. Der Staudruck wird wie folgt berechnet:

$$p_{dyn} = \rho_{H_2O} \cdot \frac{v^2}{2} \quad (3)$$

Dabei bezeichnet  $v$  die relative Strömungsgeschwindigkeit. Da das Wasser steht, ist  $v$  gleich der Geschwindigkeit der Glocke. Die Widerstandskraft berechnet sich somit als:

$$F_W = -c_D \cdot \rho_{H_2O} \cdot A_G \cdot \frac{|v|v}{2} \quad (4)$$

$A_G$  ist die angeströmte Querschnittsfläche der Glocke. Der Proportionalitätsfaktor  $c_D$  ist der Widerstandsbeiwert.

Es wird angenommen, dass Rollreibung  $F_R$  nur an den Radachsen der Glocke auftritt. Sie ist proportional zur an den Achsen angreifenden Normalkraft  $F_N$ .

$$F_R = -\mu_R \cdot F_N \quad (5)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\mu_R$  ist die Reibungszahl. Die Normalkraft  $F_N$  ergibt sich aus dem Moment, welches die Luftblase auf die Glocke ausübt. Mit dem Radius der Tauchglocke  $r_G$  erhält man somit für das Moment:

$$m_G = F_{B,Luft} \cdot r_G = F_N \cdot l_{Rad} \quad (6)$$

$$\Rightarrow F_N = \frac{F_{B,Luft} \cdot r_G}{l_{Rad}} \quad (7)$$

$l_{Rad}$  bezeichnet den Abstand zwischen den beiden Radachsen. Natürlich ergibt sich aus dem Gewicht der Glocke ein gewisses Gegenmoment. Da jedoch wegen Zusatzgewichten dessen Schwerpunkt sehr nahe bei den Radachsen liegt, kann dieses vernachlässigt werden. Insgesamt ergibt sich für die Rollreibung nun

$$F_R = -\mu_R \cdot (m_L - V_L \cdot \rho_{H_2O}) \cdot g \cdot \frac{r_G}{l_{Rad}}, \quad (8)$$

wobei die Auftriebskraft der Luftblase  $F_{B,Luft}$  wiederum mit dem Gesetz von Archimedes berechnet wurde:

$$F_{B,Luft} = (m_L - V_L \cdot \rho_{H_2O}) \cdot g \quad (9)$$

Aus den Kräften kann nun das Kräftegleichgewicht aufgestellt werden, von welchem schliesslich die Bewegungsgleichung hergeleitet wird. Das Kräftegleichgewicht lautet:

$$\begin{aligned} (m_G + m_L) \cdot a &= F_B + F_W + 2 \cdot F_R \\ &= (V_G \rho_G + V_L \rho_L) \cdot g - (V_G + V_L) \cdot \rho_{H_2O} \cdot g \\ &\quad - c_D \cdot \rho_{H_2O} \cdot A_G \cdot \frac{|v|v}{2} \\ &\quad + 2 \cdot \mu_R \cdot \text{sign}(v) \cdot (m_L - V_L \cdot \rho_{H_2O}) \cdot g \cdot \frac{r_G}{l_{Rad}} \end{aligned} \quad (10)$$

Wobei  $a$  die Beschleunigung der Glocke und  $\text{sign}(v)$  die Signum-Funktion der Geschwindigkeit ist. Die Signum-Funktion gibt das Vorzeichen des Arguments zurück. Damit ist gewährleistet, dass die Reibungskraft immer gegen die Fahrtrichtung wirkt. Umstellen und vereinfachen von Gleichung (10) ergibt folgenden Ausdruck für die Beschleunigung der Tauchglocke:

$$\begin{aligned} a &= g - \frac{1}{m_L + m_G} \left[ (V_G + V_L) \cdot \rho_{H_2O} \cdot g \right. \\ &\quad \left. + c_D \cdot \rho_{H_2O} \cdot A_G \cdot \frac{|v|v}{2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \cdot \mu_R \cdot \text{sign}(v) \cdot (m_L - V_L \cdot \rho_{H_2O}) \cdot g \cdot \frac{r_G}{l_{Rad}} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Das Volumen der Luftblase  $V_L$  kann aus der Luftmasse  $m_L$  und der Tiefe wie folgt ermittelt werden. Aus der Gasgleichung ergibt sich für das Volumen

$$V_L = \frac{m_L R_L T_L}{p_L} \quad (12)$$

Die Lufttemperatur  $T_L$  wird als konstant angenommen. Der Druck  $p_L$  ist in der ganzen Luftblase gleich und entspricht somit dem hydrostatischen Druck an der Phasengrenze Wasser/Luft. Die Position dieser Grenze ergibt sich aus der Glockenposition  $x$  plus der Höhe der Luftblase,  $\Delta x = V_L/A_G$ , vgl. auch Abbildung 1. Somit erhält man für den hydrostatischen Druck:

$$p_{H_2O} = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot \left( x + \frac{V_L}{A_G} \right) + p_U \quad (13)$$

Wobei  $p_U$  den Umgebungsdruck bezeichnet.

Wird nun der Luftdruck  $p_L$  mit dem hydrostatischen Druck  $p_{H_2O}$  gleichgesetzt, ergibt sich, zusammen mit der Gasgleichung (12) zunächst

$$V_L = \frac{m_L R_L T_L}{\rho_{H_2O} \cdot g \cdot \left( x + \frac{V_L}{A_G} \right) + p_U} \quad (14)$$

Daraus kann ein expliziter Ausdruck für das Volumen der Luftblase  $V_L$  abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} V_L = & \frac{1}{2 \cdot \rho_{H_2O} \cdot \frac{g}{A_G}} \cdot \left( - \left( \rho_{H_2O} \cdot g \cdot x + p_U \right) \right. \\ & \left. + \sqrt{(\rho_{H_2O} \cdot g \cdot x + p_U)^2 + 4 \cdot \rho_{H_2O} \cdot \frac{g}{A_G} \cdot m_L \cdot R_L \cdot T_L} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

### 3.2 Zustandsraummodell

Im vorangegangenen Abschnitt wurde der Luftmassenstrom  $\dot{m}_L$  als Eingangsgrösse und die Position der Glocke  $x$  als Ausgangsgrösse bereits ermittelt. Die Zustandsgrössen werden wie folgt gewählt:

	Beschreibung	Einheit
$x_1$	Position der Tauchglocke $x$	m
$x_2$	Geschwindigkeit der Tauchglocke $v$	m/s
$x_3$	Masse der Luft in der Tauchglocke $m_L$	kg

Damit kann das nichtlineare Zustandsraummodell wie folgt aufgestellt werden:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & g - \frac{1}{x_3 + m_G} \left[ (V_G + V_L(x_1, x_3)) \cdot \rho_{H_2O} \cdot g - c_D \cdot \rho_{H_2O} \cdot A_G \cdot \frac{|x_2| x_2}{2} \right. \\ & \left. - 2 \cdot \mu_R \cdot \text{sign}(x_2) \cdot (x_3 - V_L(x_1, x_3) \cdot \rho_{H_2O}) \cdot g \cdot \frac{r_G}{l_{\text{Rad}}} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\dot{x}_3 = u \quad (18)$$

Dabei gilt für das Volumen der Luftblase

$$\begin{aligned} V_L = & \frac{1}{2 \cdot \rho_{H_2O} \cdot \frac{g}{A_G}} \cdot \left( - \left( \rho_{H_2O} \cdot g \cdot x_1 + p_U \right) \right. \\ & \left. + \sqrt{(\rho_{H_2O} \cdot g \cdot x_1 + p_U)^2 + 4 \cdot \rho_{H_2O} \cdot \frac{g}{A_G} \cdot x_3 \cdot R_L \cdot T_L} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

## 4 Hausaufgaben

Bevor man mit der eigentlichen Arbeit der Reglerauslegung anfängt, lohnt es sich immer, das System «aus der Distanz» intuitiv zu erfassen.

**Hausaufgabe 1:** Ist das System stabil? Wo erwartest du Schwierigkeiten bei der Regelung?  
**Hinweis:** Stelle physikalische Überlegungen an. Die Systemgleichungen müssen nicht analysiert (linearisiert) werden.

---

---

**Hausaufgabe 2:** Wie lautet die Übertragungsfunktion eines PID-Reglers?

---

**Hausaufgabe 3:** Wie lautet das Verhältnis zwischen der Anzahl Nullstellen und der Anzahl Pole des PID-Reglers? Lässt sich eine solche Funktion praktisch realisieren?

---

**Hausaufgabe 4:** Was sieht man auf einer Wurzelortkurve (*root locus*)? Wo startet und endet sie (als Funktion der Verstärkung)?

---

---

**Hausaufgabe 5:** Wie lautet das Nyquist-Stabilitätskriterium und wofür wird es verwendet?

---

---



## 5 Versuchsanleitung

Melde dich mit dem lokalen Benutzernamen `.\DivingBell` und dem Passwort `Prakt!kum` an.

### 5.1 Linearisierung

Das Matlabskript `LinTaucher.m` berechnet aus einem Betriebspunkt die Systemmatrizen des linearisierten Systems. Die Funktion wird folgendermassen angewendet:

```
x0 = 1;  
v0 = 0;  
[sysc] = LinTaucher(x0,v0);
```

Dabei ist `sysc` das kontinuierliche, linearisierte System. Berechne zunächst die Pole für `x0 = 1` und `v0 = 0`. Verwende dafür die Funktion `pole`.

Bestimme mit `P = tf(sysc)` die Übertragungsfunktion der Strecke.

**Hinweis:** Es muss nur das File `Loopshaping.m` ausgeführt werden.

#### Fragen:

- Ist das System stabil? Stelle das Nyquist-Kriterium auf.
- Gibt es Bedingungen für die Durchtrittsfrequenz der offenen Kreisverstärkung  $L(s)$ .
- Kann ein PID-Regler für die Regelung verwendet werden? Analysiere den Einfluss eines PID-Reglers auf den Bode-Plot zusammen mit den Stabilitätskriterien.

**Tipp:** Folgende Werte werden in der Praxis oft als Faustregel für die Beschränkungen der Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  verwendet:

$$\max\{2 \cdot \omega_{\pi+}, 10 \cdot \omega_d\} < \omega_c < \min\{\frac{1}{2} \cdot \omega_{\zeta+}, \frac{1}{2} \cdot \omega_T, \frac{1}{2} \cdot \omega_2, \frac{1}{10} \cdot \omega_n\}, \quad \text{mit}$$

$\omega_{\pi+}$  = Frequenz des grössten instabilen Poles

$\omega_d$  = maximale Störungsunterdrückungs-Frequenz

$\omega_{\zeta+}$  = Frequenz der kleinsten nicht-minimalphasigen Nullstelle

$\omega_T = \frac{1}{T_s}$  = Abtast-Frequenz, mit der Abtastzeit  $T_s$

$\omega_2$  = kleinste Frequenz mit 100 % Unsicherheit

$\omega_n$  = Frequenz ab welcher Messrauschen eintritt

Überlege dir welche Frequenzen bekannt sind und konstruiere ein Intervall für die Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  der offenen Kreisverstärkung  $L(s)$  im vorliegenden Regelproblem.

### 5.2 Loop-shaping

Durch das Ausführen des Files `Loopshaping.m` hat sich das SISO-Design tool mit der Dynamik der Tauchglocke geöffnet. Das Ziel ist es nun, mittels Loop-shaping einen guten Regler zu finden. Betrachte dazu den Nyquist-Plot, Bode-Plot und die Wurzelortskurve der Strecke.

**Hinweis:** Laut Nyquist Theorem muss der -1 Punkt für jeden instabilen Pol einmal und für jeden Pol auf der imaginären Achse ein halbes Mal umrundet werden!

1. Füge im SISO-Tool einen Nyquist-Plot ein und überlege dir, wie er verändert werden muss um eine stabile Strecke zu erhalten.

**Hinweis:** Im Menü «Analysis» können weitere Plots wie Nyquist, Sprung- und Impulsantwort hinzugefügt werden (siehe Screenshot Abbildungen 5 und 6 im Appendix).

2. Klicke im Menü «Design» auf «Edit Compensator...» um den Regler zu verändern.
3. Im Reiter «Compensator Editor» kann der Regler bearbeitet werden.
4. Mit *Rechtsklick* → *Add Pole/Zero* können reale Pole und Nullstellen hinzugefügt werden (siehe Screenshot Abbildung 7 im Appendix). Wie viele Pole/Nullstellen braucht es?
5. Der Regler kann auch direkt in der Wurzelortskurve oder dem Bodeplot verändert werden. Die blauen Kreuze sind die Pole der Strecke (d.h. des Tauchers); man kann sie nicht verschieben. Die roten Kreuze sind die hinzugefügten Pole des Reglers (Compensator), und die roten Kreise sind die hinzugefügten Nullstellen. Diese Elemente sind verschiebbar.

**Hinweis:**

Pole/Zero Type	Magnitude	Phase
$Re(\pi_i) \leq 0 \rightarrow$ stable pole	−20 dB/dec	−90°
$Re(\pi_i) > 0 \rightarrow$ unstable pole	−20 dB/dec	+90°
$Re(\zeta_i) \leq 0 \rightarrow$ minphase zero	+20 dB/dec	+90°
$Re(\zeta_i) > 0 \rightarrow$ non-minphase zero	+20 dB/dec	−90°
$e^{-s \cdot \tau} \rightarrow$ Time delay	0 dB/dec	− $\omega\tau$

**Fragen:**

- Was für eine Regelstruktur brauchen wir, um die Strecke stabilisieren zu können?
- Versuche eine möglichst einfache Regelstruktur zu realisieren. Ist diese Struktur auch in der Realität umsetzbar?
- Wenn nicht, welche Erweiterung muss hinzugefügt werden?
- Es wurde ein „guter“ Regler gefordert. Was könnte in diesem Zusammenhang „gut“ heissen?

Diskutiere deine Lösungen mit dem Assistenten.

Speichere jeweils alle Regler anhand der nachfolgenden Anleitung ab, damit du sie später an der Strecke testen kannst.

**Vorgehen Regler speichern:**

1. Pulldown-Menü «File» → «Export»
2. Feld der Zeile «Compensator C» und Spalte «Export As» doppelklicken und «LTI\_Regler» eintragen.
3. «Export to Disk...» auswählen.
4. Name vergeben, z.B. «Regler\_5.2.mat», Taste «save» drücken.

**Regler testen**

Teste den Regler an der realen Tauchglocke (Hilfe vom Assistenten nötig!)

1. Netzteil der Micro Autobox einschalten.
2. Vom manuellen Betrieb auf dspace wechseln (Kippschalter Sensorbox).

3. Modell initialisieren und Regler laden: `start_Regelung.m` ausführen.
4. Controldesk starten (Link auf Desktop) und Experiment `Diving_Bell` öffnen.
5. Zuerst Schaltfläche «Go Online» klicken und danach «Start Measuring» um die Signale abzugreifen und in den Zeitplots des GUI graphisch darzustellen.
6. Tauchglocke manuell in den unteren Anschlag fahren und Encoder initialisieren. Anschliessend Glocke manuell auf ca. 1 m Tiefe fahren. Kontrollieren, dass die angezeigte Tiefe korrekt ist.
7. Solltiefe im Panel auf 1 m einstellen.
8. Regler einschalten und Verhalten beobachten.

Teste deine Regler auf verschiedenen Höhen und probiere auch Sprungantworten aus.

**Fragen:**

- Wie ist die Sprungantwort des Reglers?
- Wie und warum verändert sich die Sprungantwort, wenn der Vorfilter eingeschaltet ist?

Diskutiere deine Antworten mit dem Assistenten.

### 5.3 Störungsunterdrückung mit Loop-shaping

Nun soll die Eignung des vorhin entworfenen Reglers zur Störungsunterdrückung untersucht werden. Dazu werden vom Boden des Wassertanks Luftblasen aufsteigen, die die Luftmasse in der Tauchglocke verändern. Die veränderte Luftmasse führt zu einer veränderten Auftriebskraft, welche ihrerseits zu einer Beschleunigung führt und die Tauchglocke destabilisieren kann. Der Regler soll diese Störung unterdrücken. Das Einschalten der Luftblasen ist Aufgabe des Assistenten. Es muss immer darauf geachtet werden, dass die Tauchglocke nicht vollständig mit Wasser gefüllt ist. Andernfalls kann die Einrichtung beschädigt werden!

**Fragen:**

- Eignet sich dein Regler aus Abschnitt 5.2 zur Störungsunterdrückung?
- Kann ein Regler für die Tauchglocke sowohl eine gute Sprungantwort als auch eine gute Störungsunterdrückung haben?
- Gibt es einen statischen Nachlauffehler?  
**Hinweis:** Die Übertragungsfunktion der Tauchglocke weist einen Pol bei 0 auf.
- Wie könnte man einen statischen Nachlauffehler entfernen? Designe und implementiere einen geeigneten Regler mittels Loop-shaping. Teste den Regler auf Nachlauffehler am realen System.

Diskutiere deine Antworten mit dem Assistenten.

### 5.4 LQG/LTR

Anstelle von Loop-shaping soll nun ein LQG (Linear Quadratic Gaussian) Regler mit Hilfe des LTR (Loop Transfer Recovery) Ansatzes entwickelt werden.

**Theorie**

Der infinite-horizon LQG-Regler setzt sich aus einem LQR (Linear Quadratic Regulator) Regler und einem Zustands-Beobachter (hier Luenberger Observer) zusammen.

Beim LTR Ansatz wird in einem ersten Schritt ein LQR-Regler ausgelegt, welcher den Systemspezifikationen entspricht. Dieser ist asymptotisch stabil und hat garantierte Robustheit. Der State-Feedback-Gain  $K$  wird mittels der Riccati-Gleichung gefunden, welche folgende Kostenfunktion

minimiert:

$$J(u(t)) = \int_0^\infty \Delta x(t)^T \cdot Q \cdot \Delta x(t) + u(t)^T \cdot R \cdot u(t) dt \quad (20)$$

Der Regler-Input ist:

$$u^{opt}(t) = \arg \min_{u(t)} J(u(t)) = -K \cdot \Delta x(t) \quad (21)$$

wobei  $\Delta x(t) = x(t) - x_{ref}(t)$ .

Mittels Einträgen auf der Diagonalen der positiv semidefiniten Matrix  $Q$  können Abweichungen der einzelnen Zustände vom Referenzwert bestraft werden. Die positiv definite Matrix  $R$  (hier ein Skalar und daher  $r$  im Experiment) gewichtet den zur Verfügung stehenden Regler Ausgang (Luftmassenstrom in/aus der Glocke).

Da der Zustandsvektor  $x(t)$  nicht direkt messbar ist, braucht man zusätzlich einen Zustands-Beobachter. In diesem Fall wird mittels dem Parameter  $q$  ein Luenberger-Observer mit Beobachter-Gain  $L$  getunt, welcher den Zustand mit  $\hat{x}(t)$  schätzt. Der Regler-Ausgang ist somit  $u(t) = -K \cdot \Delta \hat{x}(t)$  wobei  $\Delta \hat{x}(t) = \hat{x}(t) - x_{ref}(t)$ . Durch das Einführen des Zustandsschätzers ist der neue LQG-Regler implementierbar, die Robustheit des ursprünglichen LQR-Reglers ist allerdings nicht mehr garantiert.

Beim Loop Transfer Recovery Ansatz wird nun  $q$  variiert, um den LQG Loop Gain ( $L_{LQG}$ ) dem LQR Loop Gain ( $L_{LQR}$ ) anzunähern und somit die Robustheitseigenschaften wiederzuerlangen. Es gilt:

$$\lim_{q \rightarrow 0} L_{LQG} = L_{LQR} \quad (22)$$

Da ein zu schneller Beobachter ( $q \rightarrow 0$ ) allerdings das Messrauschen verstärkt, ist ein Trade-Off zwischen Schnelligkeit und Robustheit gefragt.

Der gesamte Regelkreis ist in Abbildung 3 dargestellt. Ausführlichere Erklärungen können dem Skript Regelungstechnik 2 von Prof. Guzzella entnommen werden (Kapitel 4-8).

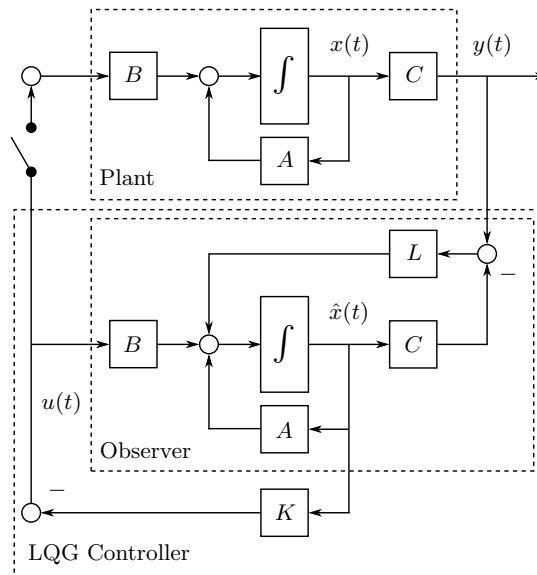


Abbildung 3: Schematische Darstellung eines LQG Regelkreises.

#### Anmerkung

Streng genommen handelt es sich beim klassischen LQG-Regler um die Kombination von LQR-Regler und einem Kalman Filter. Letzterer ist optimal für normalverteilte Störsignale, was auch der Namensgebung «Linear Quadratic *Gaussian*» zu entnehmen ist. In diesem Experiment wird jedoch ein Luenberger-Beobachter verwendet, dessen Implementation keine Kenntnisse der statistischen Eigenschaften des Störsignals voraussetzt. Das Wirkprinzip der beiden Zustands-Schätzer ist allerdings sehr ähnlich.

### Aufgaben

1. Verwende das Matlabskript `LQR_Regler.m` um einen LQR-Regler auszulegen. Gewichte die Abweichung der Zustandsgrößen von den Referenzgrößen und den Regler Output via  $Q$  und  $r$ . Es können verschiedene Werte für  $r$  als Vektor eingegeben werden um die zugehörigen Bode Plots des offenen Regelkreises darzustellen.
2. Verwende nun das Matlabskript `LQG_Regler.m` um den Beobachter auszulegen. Die Werte für  $Q$  und  $r$  aus dem vorherigen Aufgabenteil sollten übernommen werden. Es können wiederum verschiedene Werte für  $q$  als Vektor eingegeben werden. Wähle einen Wert für  $q$ , welcher die LQR Kreisverstärkung zureichend approximiert und gleichzeitig die Systemspezifikationen respektiert.
3. Wenn du mit dem Regler zufrieden bist, speichere ihn ab. Um den Regler zu speichern, gib jeweils nur einen skalaren Wert für  $r$  und  $q$  im Matlabskript `LQG_Regler.m` an. Mit dem Matlabskript `start_Regelung.m` kann der Regler wie gewohnt geladen werden.
4. Teste den Regler an der realen Tauchglocke und vergleiche die Performance mit dem Regler aus Abschnitt 5.2.
5. Teste den Regler auch mit Vorsteuerung.

### Hinweis:

	Beschreibung	Einheit
$x_1$	Position der Tauchglocke $x$	m
$x_2$	Geschwindigkeit der Tauchglocke $v$	m/s
$x_3$	Masse der Luft in der Tauchglocke $m_L$	kg

### Fragen:

- Warum braucht es einen LQG-Regler (bzw. einen Beobachter)?
- Wie unterscheidet sich der Loop-shaping Regler vom LQG-Regler?
- Im SISO-Fall: Welche Vorteile bietet ein LQG-Regler via LTR, die mit Loop-shaping nicht realisierbar sind?
- Wie beeinflussen die einzelnen Gewichtungen den resultierenden LQG Regler?
- Mit dem Regler aus Abschnitt 5.2 war es aufgrund des grossen Overshoots nicht möglich die Tauchglocke direkt vom Boden auf 1 m zu regeln. Ist dies mit dem neuen Regler möglich?

Diskutiere deine Antworten mit dem Assistenten.

## 5.5 Störungsunterdrückung mit LQG/LTR

### Aufgaben

1. Versuche nun einen LQG Regler mittels LTR zu designen, welcher mit den Luftblasen als Störungen umgehen kann. Befolge dazu wiederum die obigen fünf Schritte um geeignete Parameter für  $Q$ ,  $r$  und  $q$  zu finden.

### Fragen:

- Teste den Regler an der realen Tauchglocke und vergleiche die Performance mit dem Regler aus Abschnitt 5.3.
- Schafft der gefundene Regler (mit oder ohne Vorsteuerung) den Sprung vom Boden auf 1 m Tiefe?
- Was ist das Hauptunterscheidungsmerkmal des Reglers gegenüber demjenigen aus Abschnitt 5.4?

Diskutiere deine Antworten mit dem Assistenten.

## 5.6 LQGI/LTR

Um das volle Potenzial der LQG-Regelungstheorie auszunützen, erweitern wir unseren Regler an dieser Stelle mit einem zusätzlichen Element. Obwohl es in der vorangegangenen Aufgabe möglich war, mit entsprechend gewählten Gewichtungen in  $Q$  und  $r$ , den Einfluss der Störung zu minimieren, ist für eine komplette Elimination des Störsignals ein Integrator im Regler nötig. Die resultierende Regler-Struktur wird in der Literatur LQGI genannt. Der erweiterte Regelkreis ist in Abbildung 4 dargestellt.

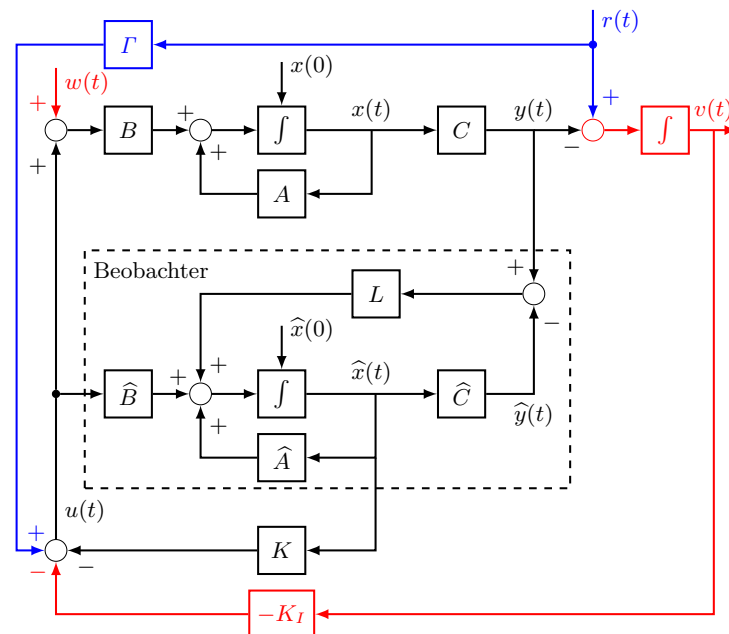


Abbildung 4: Schematische Darstellung eines LQGI Regelkreises.

Durch die Einführung des Integrators muss der Zustandsraum um einen Zustand erweitert werden:  $\tilde{x}(t) = [x(t), v(t)]^T$ . Die erweiterte Gewichtungsmatrix des LQG-Problems ist:

$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$ , wobei  $\gamma$  einen zusätzlichen Tuning-Parameter für den Integrator-Zustand darstellt.

Dieser wird verwendet um die Geschwindigkeit des Integrators einzustellen.  $K$  und  $K_I$  werden analog zum LQG-Problem mittels der Riccati-Gleichung des erweiterten Systems gefunden.

### Aufgaben

1. Versuche nun einen LQGI-Regler mittels LTR zu designen, welcher sowohl grosse Sprünge in der Referenz meistern, als auch mit Luftblasen als Störung umgehen kann. Verwende das Matlabskript `LQGI_Regler.m` und befolge wiederum die fünf Schritte aus Abschnitt 5.4 um geeignete Parameter für  $\tilde{Q}$ ,  $r$  und  $q$  zu finden.

**Tipp:** Beginne mit den gefundenen Parameter aus Abschnitt 5.4 als Startwert und verändere vorerst nur die Gewichtung des Integrator-Zustands.

### Fragen:

- Schafft der gefundene Regler (mit oder ohne Vorsteuerung) den Sprung vom Boden auf 1 m Tiefe?
- Schafft der gefundene Regler einen statischen Nachlauffehler von Null mit den Luftblasen als Störung?
- Was ist das Hauptunterscheidungsmerkmal des Reglers gegenüber demjenigen aus Abschnitt 5.5?
- Diskutiere deine Antworten mit dem Assistenten.

## 6 Nomenklatur

	Beschreibung	Einheit
$a$	Beschleunigung	$\text{m/s}^2$
$A_G$	Angeströmte Querschnittsfläche der Glocke	$\text{m}^2$
$c_D$	Widerstandsbeiwert	-
$F_B$	Auftriebskraft	N
$F_{B,\text{Luft}}$	Auftriebskraft der Luftblase	N
$F_N$	Normalkraft auf Radachsen	N
$F_R$	Reibungskraft (Rollreibung)	N
$F_W$	Reibungskraft (Strömungswiderstand)	N
$g$	Erdbeschleunigung	$\text{m/s}^2$
$l_{\text{Rad}}$	Abstand zwischen den Radachsen	m
$m$	Masse	kg
$M$	Moment	Nm
$\dot{m}_L$	Luftmassenstrom	kg/s
$p$	Druck	Pa
$p_U$	Umgebungsdruck	Pa
$r_G$	Radius der Tauchglocke	m
$R_L$	Gaskonstante der Luft	J/kg K
$T_L$	Lufttemperatur	K
$u$	Eingangsgrösse	
$v$	Geschwindigkeit	m/s
$V$	Volumen	$\text{m}^3$
$x$	Tiefe, Position	m
$\vec{x}$	Zustandsvektor	
$y$	Ausgangsgrösse	
$\mu_R$	Reibungszahl	-
$\rho$	Dichte	$\text{kg/m}^3$

### Indizes

	Beschreibung
$\text{H}_2\text{O}$	Wasser
L	Luft
U	Umgebung
G	Glocke



## 7 Appendix

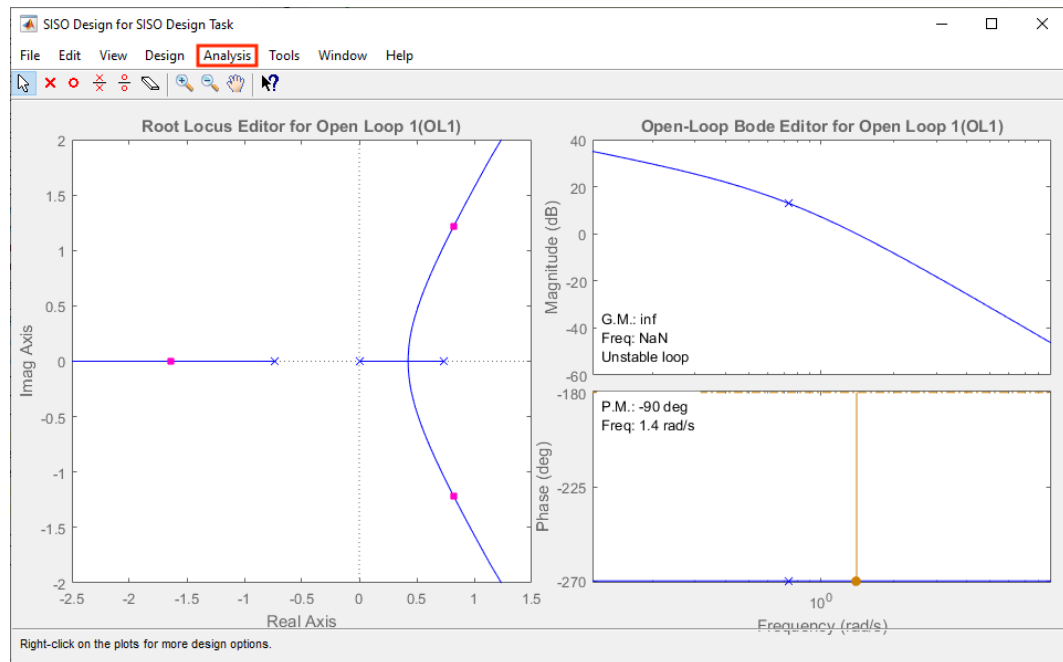


Abbildung 5: MATLAB SisoTool mit dem rot markierten Reiter «Analysis» zum Einblenden von diversen weiteren Plots.

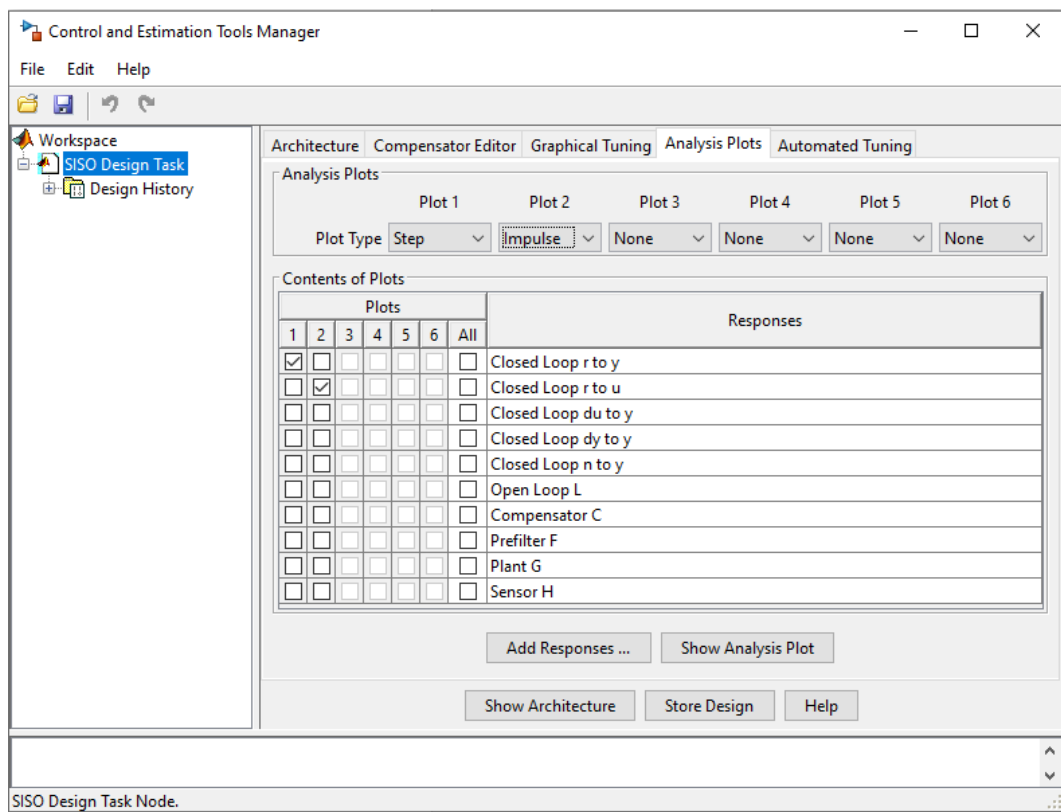


Abbildung 6: Reiter «Analysis Plots» mit zwei Beispielplots: Plot 1 als Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises von  $r$  nach  $y$  und Plot 2 als Impulsantwort von  $r$  nach  $u$ .

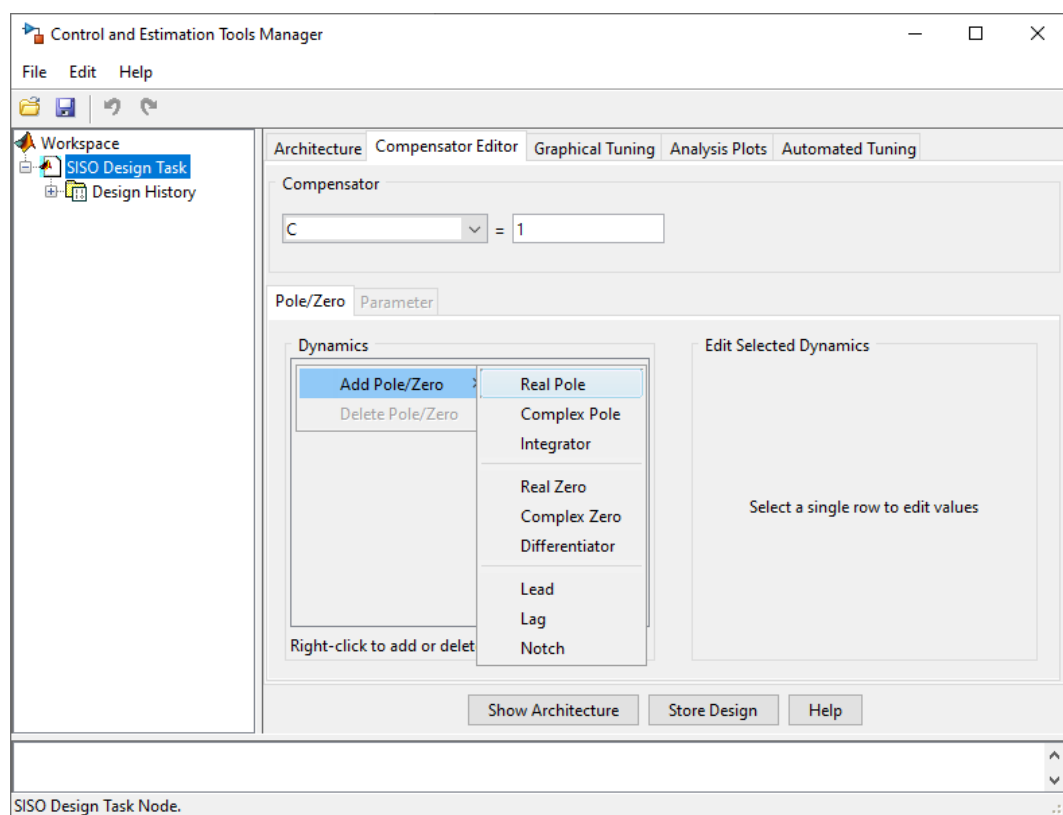


Abbildung 7: Reiter «Compensator Editor»: Durch Rechtsklicken in der grauen Fläche «Dynamics» können Pole und Nullstellen hinzugefügt werden.