

Physik I / II

Autoren: mabischof, yschwab, rebolt, lempr, jkleger

September 22, 2022, Template by Micha Bossart

1 Strom und Ladung

1.1 Merkmale des elektrischen Stroms

- i **magnetische Wirkung:** zwei gleichgesinnte Leiter ziehen sich an. Zwei gegengesinnte Leiter stoßen sich ab.
- ii **thermische Wirkung:** abgesehen von Supraleitern erwärmt sich ein Leiter, wenn durch ihn ein Strom fließt.
- iii **chemische Wirkung:** werden die Pole isoliert können Ionen zwischen als Brücke funktionieren.

1.1.1 Definition des Stroms

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$[Q] = \text{Coulomb} = C = A \cdot s$$

$$[I] = \text{Ampere} = A = \frac{C}{s}$$

$$[t] = \text{Sekunden}$$

1.1.2 Definition der Ladung

$$Q = \int_{\Delta t} Idt = n \cdot e$$

Ladung ist immer ein Vielfaches von

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} C$$

wobei gilt $-1e$ = Elektron

1.1.3 Volumenladungsdichte

$$\rho_v = \frac{Q}{V}$$

$$Q_{\text{gesamt}} = \int \rho_v dV$$

1.1.4 elektrische Spannung (= Potentialdifferenz)

Zwei Körper, zwischen denen eine elektrische Spannung besteht, ziehen sich an.

$$[U] = \text{Volt} = V = \frac{J}{As} = \frac{J}{C}$$

1.1.5 elektrischer Widerstand

$$R = \frac{U}{I}$$

$$[R] = \frac{V}{A} = \Omega$$

1.2 Ohmsche Leiter

Größenabhängigkeit:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

A = Querschnittsfläche des Leiters
 ρ = spezifischer Widerstand
 $[R] = \Omega m$

Temperaturabhängigkeit:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

ρ_0 = spez. Widerstand bei T_0
 T_0 = Bezugstemperatur
 α = Temperaturkoeffizient

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$[\alpha] = \frac{1}{\sigma}$$

σ = Leitfähigkeit

1.3 Kirchhoffsche Regeln

Knotenregel

$$\sum_k I_k = 0$$

Maschenregel

$$\sum_i U_i = \sum_k I_k R_k$$

Serieschaltung:

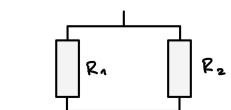
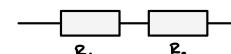
$$R_{\text{tot}} = \sum_i R_i$$

Parallelschaltung:

$$\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

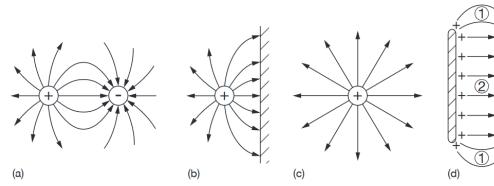
An einem Knotenpunkt fließt gleichviel Strom ab wie zu.

Die Summe der Batteriespannungen U_i ist gleich der Summe aller Spannungsabfälle $I_k R_k$ in einer Masche.



2 elektrisches Feld

elektrische Felder entstehen zwischen zwei Körpern, wenn zwischen ihnen eine Spannung vorliegt.



- Feld zwischen zwei kugelförmigen Elektroden (Dipolfeld)
- Feld zwischen kugelförmigen Pol und Platte
- Feldlinien enden bei negativen Ladungen im Unendlichen
- (2) = homogener Feldbereich, (1) = inhomogener Feldbereich

elektrische Feldstärke:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$[E] = \text{el. Feldstärke} = \frac{V}{m} = \frac{N}{C}$$

diskrete Ladungsverteilung:

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3}$$

kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|^3} dV'$$

Energie im E-Feld:

$$E_{\text{pot}} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Allgemeiner Satz von Gauss:

$\Phi = \text{Fluss des Vektorfeldes}$

$$\Phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Die allgemeine Verschiebungsdichte

$$[D] = \frac{C}{m^2}$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{A} \vec{e}$$

2.1 Elektrische Felder/ Anwendungen Gauss'scher Satz

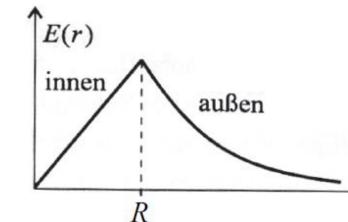
Kugel (nichtleitend) Radius R/ Punktladung

ausserhalb ($r > R$)

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

innerhalb ($r < R$)
(Konst. Ladungsdichte)

$$E(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$



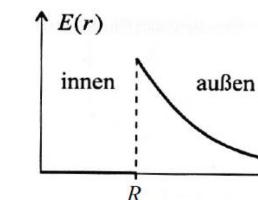
Kugel (leitend) Radius R

ausserhalb ($r > R$)

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

innerhalb ($r < R$)
(Ladung nur auf Oberfläche)

$$E(r) = 0$$



Draht (nichtleitend, unendlich lang, gerade, r senkrecht dazu)

Längenladungsdichte: $\lambda = \frac{Q}{L}$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Platte (nichtleitend, unendlich ausgedehnt, r senkrecht dazu)

$$E(r) = \frac{(Q/A)}{we_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Auf z-Achse einer Ringladung mit Radius a

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Auf z-Achse einer geladenen Kreisscheibe mit Radius r

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - (1 + \frac{r^2}{z^2})^{-\frac{1}{2}})$$

2.2 das elektrostatische Potential

Die Spannung zwischen beiden Feldplatten entspricht der Potentiadifferenz dazwischen. Das elektrostatische Potential ist eine skalare Grösse.

Im Allgemeinen erhält man das Potential an einem Punkt P ausgehend von Punkt P_0 mit Potential ϕ_0 durch:

$$U_{P_0 P} = \phi(P) - \phi(P_0) = - \int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{P_0}^P E \cdot \cos \alpha ds$$

P_0 : Bezugspunkt ($U=0$) gilt nur für stationäre Felder

$$\vec{E} = - \frac{d\vec{\phi}}{dx_i} = - \text{grad} \phi$$

für $x_i \in 1, 2, 3$ (Raumrichtungen)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = U = 0$$

Das Ringintegral der elektrischen Feldstärke ist immer 0!

2.2.1 Arbeit durch Potentialdifferenz

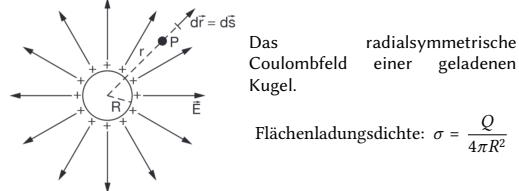
Die elektrische Arbeit bei der Verschiebung einer Ladung Q zwischen zwei Punkten, zwischen denen die Spannung U besteht, beträgt nach der Definition der elektrischen Spannung:

$$W = U \cdot Q$$

Daraus lässt sich mit Work-Energy-Balance die Beschleunigung eines Elektrons (klassisch betrachtet) im E-Feld berechnen:

$$W_{el} = E_{kin} \Leftrightarrow e \cdot U = \frac{1}{2} m_e v^2$$

2.2.2 Potential einer geladenen Kugel:



Generelle Formel für die Flächenladungsdichte:

$$\int_A \sigma dA = Q$$

Für das Potential ϕ im Punkt P mit Abstand r zum Kern der Kugel gilt:

für $r \rightarrow \infty$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Pot. räuml. Ladungsverteilung ρ

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r} dV$$

Coulomb-Feldstärke E:

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{D}(r)}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}_o$$

ϵ_0 = elektrische Feldkonstante
 \vec{r}_o = Einheitsvektor

Verschiebungsdichte D:

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{r}_o$$

\vec{r}_o = Einheitsvektor
 r = Abstand > R

Potentialfeld durch n Ladungen im Raum (Kugelladung i am Punkt $(x, y) = (a_i, b_i)$)

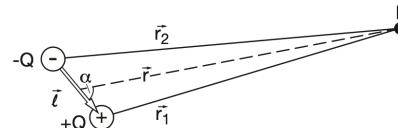
$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{Q_i}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}} \right)$$

Elektrisches Feld durch n Ladungen im Raum (Kugelladung i am Punkt $(x, y) = (a_i, b_i)$)

$$\vec{E}(x, y) = -\vec{\nabla}\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \left[\left(x - a_i \right) \cdot \frac{Q_i}{((x - a_i)^2 + (y - b_i)^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

2.2.3 Potential und Feld eines elektrischen Dipols

Zwei entgegengesetzte gleich grosse Punktladungen $\pm Q$ bilden ein Dipol.



Potential im Punkt P:

$$\varphi_{dip} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_o}{r^2}$$

\vec{p} ist der Vektor des elektrischen Dipolmoments und zeigt von der negativen zur positiven Ladung.

elektrisches Dipolmoment: $\vec{p} = Q\vec{l}$

elektrisches Feld in der Umgebung eines Dipols:

$$\vec{E}_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p}}{r^3}$$

2.3 Der elektrische Fluss

Der elektrische Fluss ist proportional zur Anzahl Feldlinien die durch eine Fläche hindurchgehen.

Allgemeine Definition:

$$\Phi_E = \int_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}'$$

für ein homogenes Feld:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = |\vec{E}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos \phi$$

\vec{A} = Flächennormale
 ϕ = Zwischenwinkel

Satz von Gauss: Der Fluss durch die Oberfläche \vec{A} eines Volumens V ist proportional zur eingeschlossenen Ladung Q

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

ρ = Volumenladungsdichte

2.4 Kondensatoren

Kirchhoff'sche Regeln für Kondensatoren:

Achtung: Regeln sind genau umgekehrt wie bei Widerständen

Serieschaltung:

$$\frac{1}{C_{tot}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

allgemein

$$C = \frac{Q}{U}$$

Parallelschaltung:

$$C_{tot} = \sum_i C_i$$

Überblick Kondensatoren:

Ein Kondensator (speicher el. Energie) besteht aus zwei nahen Leitern, die mit Q und $-Q$ geladen sind. Die Feldlinien laufen vom positiv- zum negativgeladenen Leiter.

Kapazität:

allg.: $C = \frac{Q}{U}$

Plattenk.: $C = \frac{A\epsilon_0}{d}$

Zylinderk.: $C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(\frac{R_o}{R_i})}$

Kugelk.: $C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_o R_i}{R_o - R_i}$

Spannung:

Plattenk.: $U = \frac{Qd}{A\epsilon_0} = |\vec{E}|d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$

Zylinderk.: $U = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right)$

el. Feld: (zeigt von + zu -)

Plattenk.: $\vec{E} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$

Zylinderk.: $E(r) = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r}$

el. Energie:

allg.: $E_{el} = \frac{CU^2}{2}$

Plattenk.: $E_{el} = \frac{Q^2 d}{2 A \epsilon_0} = \frac{U^2 A \epsilon_0}{2d}$

Energiedichte:

Plattenk.: $w = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{U}{d} \right)^2 = \frac{E_{el}}{V_E} = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{Q}{A} \right)^2$

2.5 Ladestrom eines Kondensators

Aus der Maschenregel folgt:

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = R \cdot C$$

$$I_0 = CU_0$$

DGL für Ladestrom:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} I(t) = -\frac{1}{\tau} I(t)$$

2.6 Coulombkraft (elektrostatische Kraft)

Für 2 Ladungen Q_o und q_1 :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_o q_1 \frac{\vec{r}_o - \vec{r}_1}{|\vec{r}_o - \vec{r}_1|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_o q_1}{r^2} \vec{e}_r$$

r_0 = Ort der ersten Ladung

r_1 = Ort der zweiten Ladung

r = Abstand der Ladungen

2.7 Coulomb-Potential

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Das Coulomb Potential entspricht dem Potential im Feld einer Punktladung. Der Nullpunkt ist im Unendlichen.

2.8 Isolatoren im E-Feld: Dielektrikum

$$\vec{D}_m = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}_m$$

elektrische Flussdichte $\left[\frac{C}{m^2} \right]$
 ϵ_r : Dielektrizitätskonstante

dielektrische Stoffe: $\epsilon > 1$ temperatur- und feldunabhängig

paraelektrische Stoffe: $\epsilon > 1$ temperaturabhängig, feldunabhängig

ferroelektrische Stoffe: $\epsilon \gg 1$ temperatur und feldabhängig

2.9 Kraft, Arbeit und Energie

$$dW = U \cdot dQ = U \cdot I \cdot dt \quad [W] = V \cdot As = Ws$$

$$W_{AB} = U_{AB} \cdot Q = \int_A^B \vec{F} d\vec{s}$$

Energie/Leistung des elektrischen Feldes

$$P = \frac{dW}{dt} = U \cdot I$$

$$[P] = W$$

Energie vom Feld auf Ladung Q

$$E_{pot} = Q \cdot \phi = Q \cdot \Delta V$$

$[E_{pot}] = J = W \cdot s$
 ΔV = Spannungsdifferenz

Gespeicherte Arbeit im Plattenkondensator: (Energie im Feld)

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 V E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{A}{l} U^2$$

$[V]$ = Volumen des Kondensators
 $[l]$ = Abstand zw. den Platten

Die Energiedichte folgt dann:

$$\rho_{el} = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E})$$

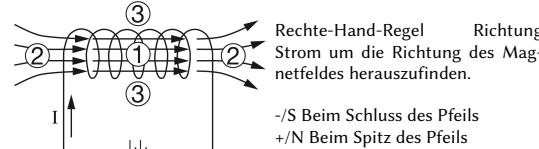
2.9.1 Driftgeschwindigkeit

$$v_D = \frac{-I}{enA}$$

$[n]$ = Ladungsträgerdichte
 $[A]$ = Querschnittsfläche

3 Magnetismus

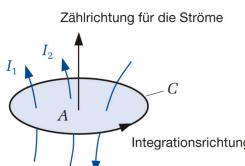
3.1 Magnetisches Feld



3.2 Magnetische Feldstärke

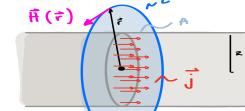
Gesetz von Oersted:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = \sum_k I_k$$



Ampersches Gesetz:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = \iint_A \vec{j} d\vec{A}$$



⇒ magnetische Feldstärke in Kabel mit $j(r)$:

$$\oint B ds = \mu_0 I_{\text{eingeschl.}}$$

$$B(r_o) \cdot 2\pi r_o = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_o} j(r) \cdot r dr d\varphi$$

Für lange Spulen gilt:

$$\vec{H} = I \cdot \frac{\vec{n}}{l}$$

$$[H] = \frac{A}{m} \text{ gilt im Innern der Spule}$$

n = Windungszahl

3.3 Induktion

Magnetischer Fluss Φ_m :

$$\Phi_m = A \cdot B = A \cdot \mu_0 \cdot H$$

$$[\Phi] = \text{Vs} = \text{Wb} \text{ (Weber)}$$

Magnetische Flussdichte B:

$$\vec{B} = \frac{\Phi_m}{A} = \mu_0 \vec{H}$$

$$[B] = \frac{Vs}{m^2} = T$$

A = überstrichene Fläche

homogene Felder:

$$\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cos \alpha$$

inhomogene Felder:

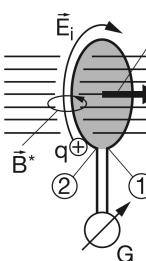
$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Induzierte Spannung

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Φ_m : magnetischer Fluss verursacht durch alle n Windungen

3.3.1 Lenz'sche Regel



Durch die Änderung des magnetischen Fluxes durch die Leiterschleife wird eine Spannung induziert, so dass der dadurch fließende Strom ein Magnetfeld \vec{B}^* erzeugt, welches der Fluxänderung des Magnetfeldes \vec{B} entgegenwirkt.

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

III. Eine Änderung des mag. Fluxes durch die Fläche A, erzeugt eine el. Spannung U_e entlang des Randes von A. ↔ statisches B-Feld bedeutet E-Feld ist wirbelfrei.

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E} d\vec{A}$$

IV. Die Rotation vom B-Feld im Punkt P wird verursacht durch die herrschende Stromdichte j in P und durch ein änderndes E-Feld in P.

Erzeugung von Feldern:

Elektrische Felder

durch eine elektrische Ladung
⇒ Coulombgesetz, Gesetz von Gauss

durch ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld

⇒ Induktionsgesetz von Faraday

Magnetische Felder

durch einen elektrischen Strom
⇒ Biot-Savart Gesetz, Durchflutungsgesetz

durch ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld

⇒ Verschiebungstrom, Erweiterung des Durchflutungsgesetzes

3.4 Durchflutungsgesetz

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = I_{\text{tot}} = \int \vec{j} d\vec{A}$$

$$I = \vec{j} \cdot \vec{A} = |j| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos \alpha$$

$$I = \int \vec{j} d\vec{A}$$

Ringintegral der magnetischen Feldstärke entspricht dem elektrischen Strom, der durch die vom Integrationsweg eingeschlossene Fläche hindurchfliesst

$$I_{\text{tot}} = \sum I_v$$

$$[j] = \frac{A}{m^2} = \text{Stromdichtevektor (homogen)}$$

α = Winkel zwischen den Vektoren

(inhomogen)

3.4.1 Anwendungen Durchflutungsgesetz

a) Mag. Feldstärke eines geraden Leiters

Bei dicken Kabeln ist das Feld im Innern linear, außerhalb so wie hier.

Richtung der magnetischen Feldlinien aus der Rechte-Hand-Regel

b) Mag. Feld im Innern eines dicken Kabels

r = Entfernung vom Draht

R = Dicke vom Draht

c) Mag. Feld einer langen Spule

$\frac{n_0}{l}$ = konstante Windungsdichte

$\frac{n}{a}$ = Windungen pro Ladungsabschnitt

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

$$H(r) = \frac{I}{2\pi R^2} r$$

$$H = I \cdot \frac{n_0}{l} = I \cdot \frac{n}{a}$$

3.5 Maxwell-Gleichungen:

Die Maxwell-Gleichungen verknüpfen die elektrische Feldstärke \vec{E} und die magnetische Flussdichte \vec{B} mit der Ladungsdichte ρ und der Stromdichte \vec{j} .

I. Elektrische Ladungen sind Quellen (Div. positiv) oder senken (Div. negativ) des elektrischen Feldes. Wird der Satz von Gauss angewendet, lassen sich E-Felder berechnen.

II. B-Feldlinien sind immer geschlossen. Es gibt Magnetische Pole nur gepaart. (Keine magnetischen Monopole)

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

Kraft auf stromdurchflossenen Leiter im homogenen Magnetfeld

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$$

$$F = IIB \sin \varphi$$

$$\vec{F} = \int (\vec{j} \times \vec{B}) dV$$

\vec{l} : Leiterrichtung = technische Stromrichtung

φ : Winkel zw. Strom-/Feldrichtung

3.6.1 Anwendungen Lorentz-Kraft

a) Kraft auf bewegte Punktladung im magnetischen Feld

$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho A \frac{\Delta x}{\Delta t} = \rho A v$

Strom in Leiter mit Querschnitt A. Die im Volumenelement ΔV befindliche Ladung ΔQ fliesst durch Fläche A

Bei Elektronen Kraft bewegt diese in negative Richtung.

b) Drehmoment auf eine stromdurchflossene Leiterschleife

$I \cdot A = \text{mag. Dipolmoment}$

$[m] = Am^2$

\vec{n} ist der Flächennormalenvektor auf die Fläche A

$$M = 2F \frac{l_{\text{kraftarm}}}{2} \sin \theta$$

$$\vec{M} = IA \vec{x} \times \vec{B}$$

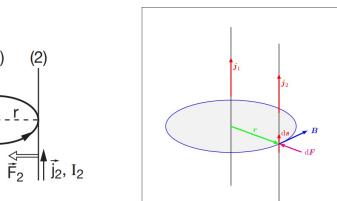
$$\vec{M}_{\text{dip}} = \vec{n} \times \vec{B}$$

$$\vec{m}_{\text{dip}} = \vec{n} \cdot I \cdot A \quad (\text{lange Spule})$$

$$W = \vec{m} \cdot \vec{B} = -E_p$$

c) Kraft zwischen parallelen stromdurchflossenen Leitern

$$F_1 = F_2 = \frac{\mu_0 2l}{4\pi r} I_1 I_2$$



3.7 Biot-Savart Gesetz (gilt für ges. Feld)

Beschreibt das Magnetfeld bewegter Ladungen

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$\hat{r} = \vec{r}/|r|$

B-Feld auf der Achse einer kreisförmigen Stromschleife:

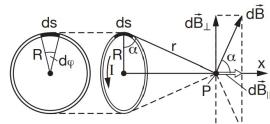
$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{x^3}$$

für $m = IA = I\pi R^2$ und R = Radius der Schleife in der yz -Ebene, Feld in \vec{e}_x -Richtung $B(0,r)$ = das Magnetfeld im Innern einer stromdurchflossenen Leiterschleife. Also $r < R$

$$B(0,r) = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

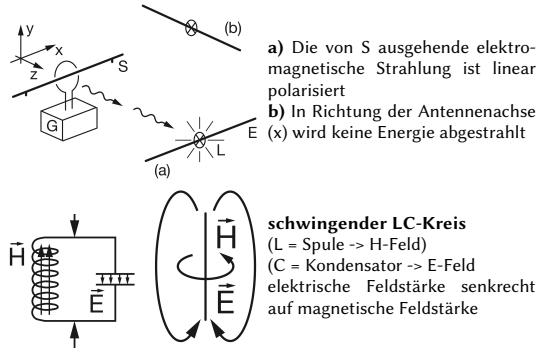
Gilt nur für das Feld in der Spule und nur auf der Spulenachse!

$$B = \frac{\mu_0 N}{L} \cdot I$$



4 Elektromagnetische Wellen

4.1 Hertzscher Dipol



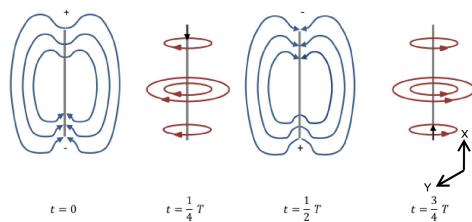
elektrisches Dipolmoment:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t = p_0 \hat{x} \cos \omega t$$

wenn die Ladungen in x-Richtung schwingen.

4.1.1 Nah- Fernfeldbereich

Nahfeldbereich:



$$\text{Phase } t = 0 \quad E_{\text{nah}} \approx \frac{p}{r^3}$$

$$\text{Phase } t = T/4 \quad \vec{j} = \frac{dp}{dt} \quad \text{und} \quad \vec{H}_{\text{nah}} \approx \frac{dp}{r^2}$$

$$\text{Phase } t = T/2 \quad H = 0 \quad E = E(0) \cdot (-\hat{e}_y)$$

$$\text{Phase } t = 3T/4 \quad E = 0, H = H(T/4) \cdot (-\hat{e}_y)$$

Fernfeldbereich: Die Wellen überlagern sich und es gilt:

$$E \approx \frac{d^2 p}{dt^2} \quad \text{und} \quad H \approx \frac{d^2 p}{dt^2}$$

4.2 Ebene elektromagnetische Wellen

Verursacher elektromagnetischer Wellen sind schwingende elektrische Ladungen, meist oszillierende elektrische Dipole (Antennen). Weit genug entfernt, entspricht die elektromagnetische Kugelwelle einer ebenen Welle (Wellengleichung):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kr)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kr)$$

Idealisiert lässt sich durch Maxwell die Wellengleichung herleiten. Der Flächenstrom J in der unendlich ausgedehnten Metallplatte sei konstant:

$$H = \frac{1}{2} J$$

Ebener Flächenstrom in x,y-Ebene erzeugt ein homogenes \vec{H} , überall in Nähe der Ebene gleich stark. Oszilliert der Flächenstrom, entstehen in beiden Halbraümen je eine elektromagnetische Welle. Bei Herleitung der Wellengleichung aus Induktions- und Durchflutungsgesetz, wählt man zwei kleine geschlossene Integrationswege.
1 -> Induktionsgesetz
2 -> Durchflutungsgesetz.

es folgen die Wellengleichungen aus obiger Herleitung:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$$

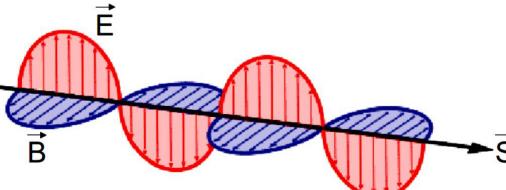
$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$$

Daraus ergibt sich die Phasengeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = \lambda \cdot f$$

λ = Wellenlänge [m]
 f = Frequenz [Hz] = [$\frac{1}{s}$]

Elektromagnetische Wellen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.



4.3 Energiestrom

Die elektromagnetische Welle transportiert Energie.
Energiedichte $\vec{j}_E = \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ Vektor

$$|\vec{j}_E| = |\vec{S}| = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - kz) \approx \rho_E$$

Leistungsdichte [$\frac{W}{m^2}$]
falls \vec{H} und \vec{E} senkrecht

$$\langle I(t) \rangle = \langle |S(t)| \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt$$

Zeitgemittelte Intensität

$$\rho_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

Energiedichte ρ_E
Im elektrischen und magnetischen Teil der elektromagnetischen Welle steckt die gleiche Energie. Diese Energie wird mit Lichtgeschwindigkeit transportiert.

5 Schwingungen

5.1 Einleitung

ungedämpfte Schwingung

$$q = q_0 \cos(\omega t - \phi) = q_0 e^{i(\omega t - \phi)}$$

q = Schwingung q_0 = Amplitude
 ω = Kreisfrequenz ϕ = Phase

gedämpfte Schwingung

$$q = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t)$$

$e^{-\delta t}$ = Dämpfung q_0 = Amplitude

δ = Dämpfungskonst. $\tau = \frac{1}{\delta}$ = char. Abklingzeit
 $[\delta] = \frac{1}{s}$ $[\tau] = s$

5.2 Beispiele gedämpfter Schwingungen

5.2.1 Bewegungsgleichung Harmonischer Oszillatoren

$$\sum_i = \vec{F}_{\text{Trägheit}} + \vec{F}_{\text{Reibung}} + \vec{F}_{\text{Feder}} = 0$$

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + R \frac{d\vec{x}}{dt} + D\vec{x} = 0$$

m = Masse	R = Reibung
D = Federkonstante	

So folgt für die Elektromagnetische Welle:

$$L \frac{d^2 \vec{Q}}{dt^2} + R \frac{d\vec{Q}}{dt} + \frac{\vec{Q}}{C} = 0$$

L = Induktivität	R = Widerstand
C = Kapazität	

Lösung Harmonischer Oszillatoren

Reibung $R = 0$ (ungedämpft)

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) = x_0 \sin(\omega t) = x_0 e^{i\omega t}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Eigenfrequenz der Schwingung

Reibung $R \neq 0$ (gedämpft)

Nur gültig wenn Anfangsgeschwindigkeit und Auslenkung = 0!

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} (\cos(\omega t) + \frac{\delta}{\omega} \sin(\omega t)) = x_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \cos(\omega t - \phi)$$

$$\delta = \frac{R}{2m} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{D}{m} - \delta^2} \quad \tan \phi = \frac{\delta}{\omega}$$

Für RLC Schwingkreise folgt nun also:

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \delta^2} \quad \tan \phi = \frac{\delta}{\omega}$$

Diskussion

- i) $\delta = 0$ ungedämpfte Schwingung
 $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$
- ii) $\delta < \omega_0$ gedämpfte Schwingung
 $x(t) = x_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t)$
- iii) $\delta = \omega_0$ aperiodischer Grenzfall
 (System schwingt gerade nicht mehr)
 $\omega \rightarrow 0$
 $x(t) = x_0 e^{-\delta t} (1 + \delta t)$
- iv) $\delta > / > \omega_0$ Kriechfall (starke Dämpfung)
 $\omega = \pm i\delta'$
 wobei:
 $\tau_1 = \frac{1}{\delta + \delta'} \quad \tau_2 = \frac{1}{\delta - \delta'}$
 im Limit $\omega_0 \ll \delta$:
 $x(t) = x_0 e^{-\delta t/\tau_2}$
 $\omega_0 = \pi/6 \text{ s}^{-1}$

5.2.2 Bewegungsgleichung Elektrischer Schwingkreis

$$U_L + U_R + U_C = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0$$

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Feder ist analog zu Kondensator!

5.3 Gekoppelte Schwingungen

Schwing mit Erreger der Frequenz ω_e

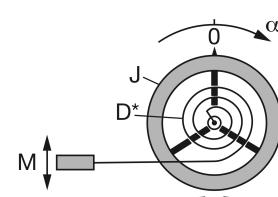
$$\vec{M}_{\text{Federdrehmom.}} + \vec{M}_{\text{Reibungsdrehmom.}} + \vec{M}_{\text{Erregerdrehmom.}} = J \frac{d^2 \vec{\alpha}}{dt^2}$$

$$J \frac{d^2 \vec{\alpha}}{dt^2} + R \frac{d\vec{\alpha}}{dt} + D\vec{\alpha} = \vec{M}_0 e^{i\omega_e t}$$

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \text{Trägheitsdrehmoment} \quad R = \text{Reibung}$$

D = Federkonstante

J = Trägheitsmoment



5.3.1 Lösung der Bewegungsgleichung

experimentelle Feststellungen:

- i) Pendel schwingt immer mit der Erregerfrequenz ω_e nicht mit der Eigenfrequenz ω_0
- ii) Pendel schwingt gegenüber dem Erreger mit einer Phasenverschiebung, die von der Erregerfrequenz abhängt $\phi = \phi(\omega_e)$
- iii) Pendelschwingungsamplitude hängt auch stark von der Erregerfrequenz ab $\alpha_0 = \alpha_0(\omega_e)$
- iv) $\omega_e \ll \omega_0$ α_0 klein, $\neq 0$ $\phi \approx 0$
- v) $\omega_e \approx \omega_0$ α_0 sehr gross $\phi \approx \pi/2$ (Resonanz)
- vi) $\omega_e > \omega_0$ $\alpha_0 \rightarrow 0$ $\phi = \pi$

Ansatz:

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{i(\omega_e t - \phi)} \quad \omega = \omega_e$$

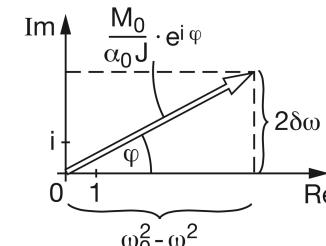
mit:

$$2\delta = R/J \quad \omega_0^2 = D/J$$

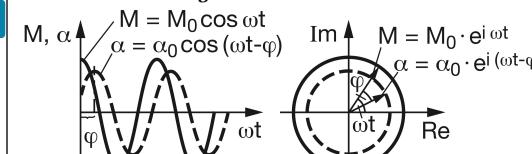
Amplitude

$$\alpha_0 = \frac{M_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\delta^2 \omega_e^2}}$$

$$\tan \phi = \frac{2\delta \omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}$$



Diskussion der Lösung:



- i) $\omega \rightarrow 0, \omega \ll \omega_0$

$$\alpha_0 \rightarrow \frac{M_0}{J\omega_0^2}, \phi \rightarrow 0$$

Pendel bewegt sich, als wäre der Pendelkörper starr mit dem Erregerkörper gekoppelt. Bewegen sich gleichphasig.

- ii) $\omega = \omega_0$ (Resonanz)

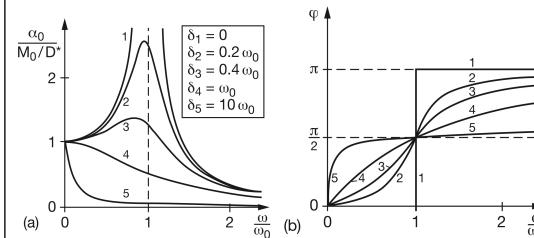
$$\alpha_0 \rightarrow \frac{M_0}{2\delta J\omega_0} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty, \tan \phi \rightarrow \pm \infty, \phi = \pi/2$$

Amplitude geht gegen unendlich und kann nur durch Reibung/Dämpfung von Katastrophe bewahrt werden.

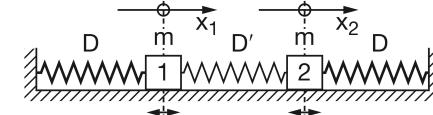
- iii) $\omega_e > \omega_0$

$$\alpha_0 \rightarrow \frac{M_0}{J\omega_0^2} \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} 0, \tan \phi \rightarrow -0, \phi = \pi$$

Amplitude wird sehr klein, Schwinger und Erreger schwingen gegenseitig.



5.4 Schwingungen gekoppelter Systeme



Annahmen: keine Dämpfung, Federn reagieren auf Zug und Druck

Bewegungsgleichungen

$$m \ddot{x}_1 + Dx_1 + D'(x_1 - x_2) = 0$$

$$m \ddot{x}_2 + Dx_2 + D'(x_2 - x_1) = 0$$

mit neuen Koordinaten $q_1 = x_1 + x_2$ $q_2 = x_1 - x_2$ ergibt sich:

$$m \ddot{q}_1 + Dq_1 = 0$$

$$m \ddot{q}_2 + (D + 2D')q_2 = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2D'}{D}}$$

ω_0 und ω' sind die Eigenfrequenzen

Lösungen der DGL:

$$q_1(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t$$

$$q_2(t) = x_1(t) - x_2(t) = B_1 \cos \omega' t + B_2 \sin \omega' t$$

5.4.1 Lösungsdiskussion

a) **Anfangsbed.:** $x_1(0) = x_2(0) = x_0$ und $\dot{x}_1(0) = 0$

$$A_2 = B_2 = 0$$

$$q_1 = x_1(0) + x_2(0) = A \cos \omega_0 t = 2x_0$$

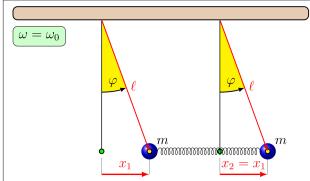
$$q_2 = x_1(0) - x_2(0) = B \cos \omega' t = 0$$

Daraus folgt:

$$x_1(t) = x_0 \cos \omega_0 t$$

$$x_2(t) = x_0 \cos \omega_0 t$$

Beide Körper schwingen gleichsinnig mit der Frequenz ω_0 . Man nennt dies die erste Fundamentalschwingung des Systems.



b) Anfangsbed.: $x_1(0) = -x_0; x_2(0) = x_0$ und $\dot{x}_i(0) = 0$

$$A_2 = B_2 = 0$$

$$A_1 = 0$$

$$B_1 = -2x_0$$

$$q_1 = x_1(t) + x_2(t) = 0$$

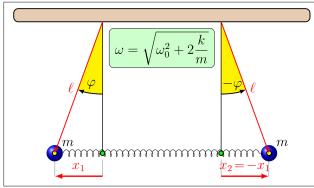
$$q_2 = x_1(t) - x_2(t) = -2x_0 \cos \omega' t$$

Daraus folgt:

$$x_1(t) = -x_0 \cos \omega' t$$

$$x_2(t) = x_0 \cos \omega' t$$

Beide Körper schwingen gegensinnig mit der Frequenz ω' . Man nennt dies die zweite Fundamentalschwingung des Systems.



Eigenfrequenz eines Pendels:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx \sqrt{L}$$

c) Anfangsbed.: $x_1(0) = x_0; x_2(0) = 0$ und $\dot{x}_i(0) = 0$

$$A_2 = B_2 = 0$$

$$A_1 = B_1 = x_0$$

$$q_1 = x_1(t) + x_2(t) = x_0 \cos \omega_0 t$$

$$q_2 = x_1(t) - x_2(t) = x_0 \cos \omega' t$$

Daraus folgt:

$$x_1(t) = \frac{x_0}{2} (\cos \omega_0 t + \cos \omega' t)$$

$$x_2(t) = \frac{x_0}{2} (\cos \omega_0 t - \cos \omega' t)$$

Die Lösungen entsprechen der symmetrischen und der antisymmetrischen Linearkombination der beiden Fundamentalschwingungen.

Dies gilt auch allgemein!

d) Falls $D' \ll D$ (Kopplung ist schwach)

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2D'}{D}} \sim \omega_0 (1 + \frac{D'}{D})$$

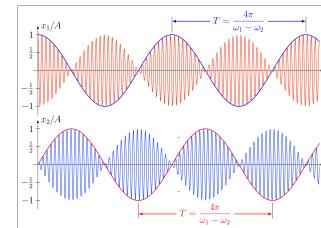
mit $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega') \sim \omega_0$ und $\Delta\omega = \omega' - \omega_0 \sim \frac{D'}{D} \omega_0$ folgt:

$$x_1(t) = \frac{x_0}{2} [\cos\left(\bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t + \cos\left(\bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t] = x_0 \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \bar{\omega} t$$

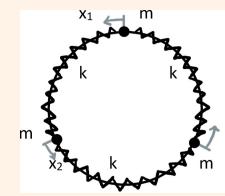
$$x_2(t) = \frac{x_0}{2} [\cos\left(\bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \cos\left(\bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t] = x_0 \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \sin \bar{\omega} t$$

Bei beiden Pendeln ergeben sich Schwingungen mit der Frequenz $\bar{\omega} \sim \omega_0$, deren Amplituden mit der kleinen Frequenz $\Delta\omega/2$ langsam harmonisch um $\pi/2$ phasenschoben variieren. Man nennt dies eine **Schwebung**:

Die Schwingungsenergie "schwebt" mit der halben Differenzfrequenz $\Delta\omega/2$ langsam zwischen den beiden Teilsystemen hin und her.



Beispiel: Ring-Oszillator



Ein Ring mit 3 Massen und 3 Federn (k)

Auf die Massen wirken jeweils ausschließlich die Kräfte, welche von den benachbarten Feder erzeugt werden.

1. Bewegungsgleichung pro Masse:

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - k(x_1 - x_3) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) \\ m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_1) - k(x_3 - x_2)$$

Matrixschreibweise:

$$\ddot{\vec{x}} = (-\frac{k}{m}) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

2. Eigenwertgleichung:

Ansatz: $\vec{x}(t) = \vec{a} e^{i\lambda t}$ mit $\vec{a} \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$

$$\lambda^2 \cdot \vec{a} = M \cdot \vec{a}$$

Wobei λ^2 EW von M sind!

$$\det\left(-\frac{k}{m}\right) \begin{bmatrix} 2 - \lambda^2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda^2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 - \lambda^2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Achtung Vorzeichen!

3. Eigenschwingungen: charakteristisches Polynom nach $\omega_{1,2}^2$ lösen, wobei der Term vor dem \vec{x} , hier $(-\frac{k}{m}) = \omega^2$ ist.

Beispiel: Ring-Oszillator

Zusatz Das funktioniert ganz analog mit n Massen im Ring. Die Matrix schaut dann folgendermassen aus:

$$\begin{bmatrix} 2\omega^2 - \lambda^2 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2\omega^2 - \lambda^2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 2\omega^2 - \lambda^2 \end{bmatrix}$$

6 Wellen

6.1 Wellenfunktion und Wellengleichung

Sind mehrere Massenelemente aneinander gekoppelt und wird der erste ausgelenkt, so spüren auch die anderen Massenelemente diese Auslenkung und folgen dem ersten mit einer gewissen Phasenverschiebung. Die Massenelemente lassen sich beschreiben mit

$$\Psi_0 = A \cos(\omega t)$$

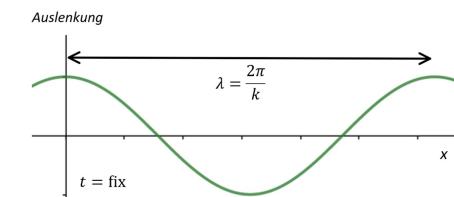
$$\Psi_i = A \cos(\omega t - \delta_i)$$

Jedes Teilchen schwingt mit der Kreisfrequenz ω und der Periodendauer $T = 2\pi/\omega$, jedoch mit der **Phasenverschiebung** δ bezüglich Körper 1.

$$\delta_n \sim z_n \rightarrow \delta \sim z \quad \delta = kz$$

$$\Psi = A \cos(\omega t - \vec{k} \vec{z}) = Ae^{i(\omega t - \vec{k} \vec{z} + \varphi)} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

k	Wellenzahl	λ	Wellenlänge
z	Ortskoordinate (Stelle)	ω	Frequenz
A	Amplitude		



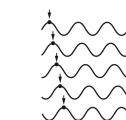
Phasengeschwindigkeit v_{ph} der Welle

$$v_{ph} = \left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

v = Frequenz

v_{ph} = Phasengeschwindigkeit der Welle (Geschwindigkeit längs z Achse)

(Berechnung durch Differentiation eines Punkt auf der Welle mit konstanter Phase $\phi = \omega t - kz = \text{const.}$)

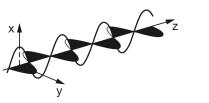


Fortschreitende Bewegung:

a) einer transversalen Welle, Bsp.: Seilwellen, EMW.



b) einer longitudinalen Welle im Gas, Bsp.: Schall



c) zur linearen Polarisation von transversalen Wellen.

Allgemeine Wellengleichung für elektromag. Wellen

$$\frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2} = v_{ph}^2 \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2}$$

$$\Psi_{tt} = v_{ph}^2 \Psi_{zz}$$

6.2 Intensität einer Welle

Massenelement an Band, wird ausgelenkt, deshalb pot. E = Energie der Feder und kin. E = geschwindigkeit der Masse

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} D s_0^2 = \frac{1}{2} \Delta m_{(1)} \omega^2 s_0^2, \Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m_{(2)} v_\perp^2 = \frac{1}{2} \Delta m_{(2)} \omega^2 s_0^2$$

also $\Delta E_k = \Delta E_p$. Entsprechend der Wellenbewegung wird die Energie jeweils an die Nachbarn in Ausbreitungsrichtung weitergegeben. Wie wenn jedes Masseteilchen sich wie ein Pendel verhält. Für den Strom von kinetischer Energie gilt:

$$\frac{\Delta E_k}{\Delta t} = \frac{\Delta E_k}{\Delta V} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho_E A \frac{\Delta z}{\Delta t} = \rho_e A v_{ph}$$

ΔV = Volumen des Massenelements Δm

$\rho_E = \Delta E_k / \Delta V$ = Energiedichte

A = Fläche

Intensität der Welle (Energiedichte)

$$I = |\vec{j}_E| = \frac{1}{A} \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

$I \sim s_0^2$ und $I \sim \Psi_0^2$
Die Intensität einer Welle ist proportional zum Quadrat ihrer Amplitude

Intensität der elektromagnetischen Welle

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 |\vec{E}_0|^2$$

Leistungsdichte

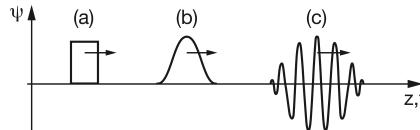
$$S = \frac{P}{A_{\text{Oberfläche}}}$$

6.3 Superposition von Wellen

Aus der Superposition von geeigneten Wellen entstehen Wellengruppen, welche die Übertragung von Informationen ermöglicht.

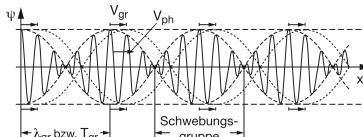
6.3.1 a) Die Gruppengeschwindigkeit

Wellengruppen entstehen durch Überlagerung vieler harmonischer Wellen mit Frequenzen aus einem ganzen Frequenzband und mit Wellenlängen aus einem gewissen Wellenlängenbereich.



Einige Formen von Wellengruppen:

a) oder b) entsprechen einem Knall



Eine Schwebungs-Wellengruppe bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit v_{gr} die von der Phasengeschwindigkeit verschieden ist.

Bsp: Überlagerung zweier Wellen unterschiedlicher Frequenz und Wellenlänge. Resultat ist eine Schwebungsgruppe, welche die Superposition beider Wellen ist:

$$\Psi = A \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$

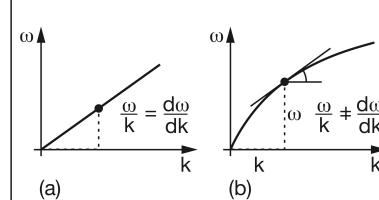
mit $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, $\bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ und $\Delta k = k_1 - k_2$

$$\Psi = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) \cdot \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z)$$

langsam-veränderliche Amplitude ebene-Welle

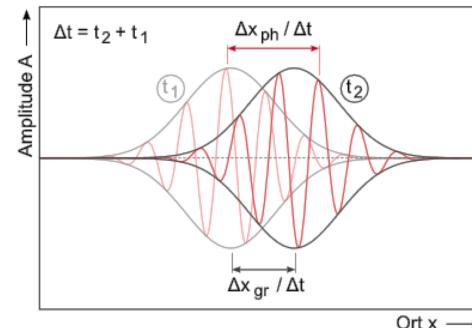
Gruppengeschwindigkeit v_{gr}
Diff. der Gruppenphase nach Zeit:

$$v_{gr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \xrightarrow{\Delta k \rightarrow 0} \frac{d\omega}{dk}$$



a) Abhängigkeit linear. Phasen-/Gruppengeschw. gleich.
b) nicht linear. Geschwindigkeiten verschieden.

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit nur gleich wenn $\omega(k)$ linear ist!



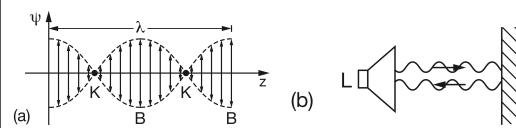
6.3.2 Stehende Wellen

Überlagerung zweier ebener Wellen mit gleicher Amplitude, die gegeneinander laufen.

$$\Psi_{\rightarrow} = \Psi_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$\Psi_{\leftarrow} = \Psi_0 \cos(\omega t + kz)$$

$$\Psi = \Psi_0 [\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz)] = 2\Psi_0 \cos(kz) \cos(\omega t + \phi)$$



a) es gibt Orte K (Knoten) wo die Wellen sich aufheben. Schwingungsbäuche B haben den Abstand lambda/2 Knoten ist in der Mitte.

b) Exp. Erzeugung von stehenden Schallwellen
Der Abstand zwischen zwei benachbarten Knoten = $\frac{1}{2}$ Wellenlänge (λ) Zusammenhang: Frequenz:

$$\frac{n\lambda}{2} = \text{Länge Seil}$$

$$v = \frac{v_{ph}}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Für eine allgemeine stehende Welle (mit Auslenkung A_0)

$$\Psi(z, t, \phi) = A_0 \cos(kz) \cos(\omega t + \phi)$$

vertikale Geschwindigkeit eines **beliebigen** Punktes auf der Stehenden Welle:

$$\frac{\partial \Psi(z, t, \phi)}{\partial t} = -A_0 \omega \cos(kz) \sin(\omega t + \phi)$$

vertikale Geschwindigkeit eines **festen** Punktes auf der Stehenden Welle:

$$\frac{\partial \Psi(t, \phi)}{\partial t} = -A_0 \omega \sin(\omega t + \phi)$$

6.3.3 Interferenz

Wenn Wellen die selbe Frequenz und Wellenlänge besitzen, aber gegeneinander phasenverschoben sind entsteht Interferenz (Superposition von Wellen).

$$\Psi_1 = A_1 \cos(\omega t - kz)$$

$$\Psi_2 = A_2 \cos(\omega t - kz - \delta)$$

Überlagert:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A_1 \cos(\omega t - kz) + A_2 \cos(\omega t - kz - \delta) =$$

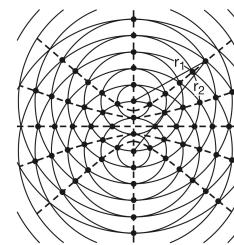
$$(A_1 + A_2 \cos \delta) \cos(\omega t - kz) + A_2 \sin \delta \sin(\omega t - kz)$$

Mit $\sqrt{\dots} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \delta}$ führt man die Phasenverschiebung ε der resultierenden Welle ein:

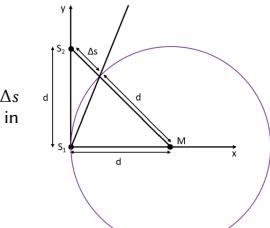
$$\cos \varepsilon = \frac{A_1 + A_2 \cos \delta}{\sqrt{\dots}}$$

$$\sin \varepsilon = \frac{A_2 \sin \delta}{\sqrt{\dots}}$$

$$\Psi = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \delta} \cdot \cos(\omega t - kz - \varepsilon)$$



Interferenz zweier Kreiswellen:
Maximas der Wellenbäuche liegen auf Hyperbeln mit Wellenzentren als Brennpunkte.



Der Gangunterschied Δs beschreibt den Unterschied in der Laufstrecke von zwei Wellen.

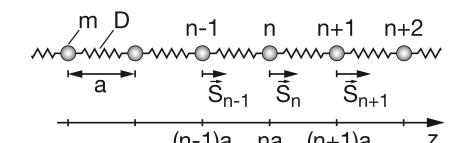
Konstruktive Interferenz falls:
 $k \in 1, 2, 3, \dots$

$$\Delta s = k \cdot \lambda$$

Destruktive Interferenz falls:
 $k \in 1, 2, 3, \dots$

$$\Delta s = \left(k - \frac{1}{2} \right) \cdot \lambda$$

6.4 Wellen auf einer Pendelkette



\vec{s}_n = Auslenkung aus Ruhelage des n-ten Masseteilchens
Bewegungsgleichung des n-ten Masseteilchens:

$$m \ddot{s}_n = D(\vec{s}_{n+1} - \vec{s}_n) - D(\vec{s}_n - \vec{s}_{n-1})$$

(Unendlich viele miteinander gekoppelte DGL.)
Als Ansatz wird eine harmonische Welle benutzt:

$$s = s_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

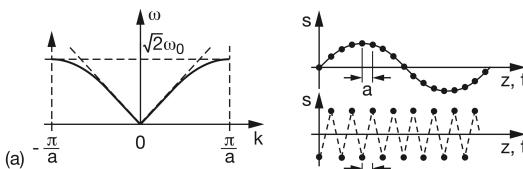
für $z_n = na$ (a = Abstand/Gitterkonstante)

$$s_n = s_0 e^{i(\omega t - kna)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2D}{m}(1 - \cos(ka))} = \sqrt{2\omega_0} \sin\left(\frac{1}{2}ka\right)$$

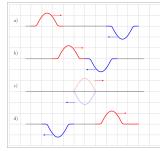
$$\text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{2D}{m}}$$

Diese Beziehung zwischen ω und k heisst **Dispersionsrelation**



a) Dispersionsrelation für elastische Wellen auf einer Pendelkette: bei langen Wellen (kleinen Wellenzahlen), gibt es einen näherungsweise linearen Verlauf; rechter Kurvenast nach rechts, linker Kurvenast nach links laufende Wellen
 b) oben: Welle mit grosser Wellenlänge (kleinem k)
 unten: Welle mit kürzester Wellenlänge (größtem k) ($\lambda = 2a, k = \pi/a$)
 Auslenkungen longitudinal (zur Veranschaulichung in Abbildung transversal gezeichnet)

6.5 Seilwellen



Überlagerung von zwei Seilwellen (Auslöschung dieser bei c)

Aus der Gleichung der Pendelkette mit ($n \rightarrow \infty$), $m \rightarrow \Delta m$ und $a \rightarrow \Delta z$ (Die Körper und die Abstände der Pendelkette werden immer weiter verkleinert). Hier beschreibt s die Auslenkung der Welle in vertikaler Richtung.

$$\Delta m \ddot{s}_n = D[\underbrace{(\vec{s}_{n+1} - \vec{s}_n)}_{\Delta s_r} - \underbrace{(\vec{s}_n - \vec{s}_{n-1})}_{\Delta s_l}] = D\Delta(\Delta s)$$

$$\ddot{s} = \frac{D}{A} \Delta z \frac{A\Delta z}{\Delta m} \frac{\Delta^2 s}{(\Delta z)^2} = \sigma \frac{1}{\rho} \frac{\Delta^2 s}{(\Delta z)^2}$$

für $\Delta z \rightarrow 0$:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = f \rho \sigma$$

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} k = 2\pi v = 2\pi \frac{v_{ph}}{\lambda}$$

$$s_{tt} = \frac{\sigma}{\rho} s_{zz}$$

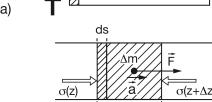
$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{D\Delta z}{A} = \text{Vorspannung}$$

$$\rho = \frac{\Delta m}{A\Delta z} = \text{Dichte}$$

Wichtige Erkenntnisse für Seilwellen:

- i) $\omega(k)$ ist linear!
- ii) keine Dispersion
- iii) Phasen- und Gruppengeschwindigkeit sind gleich
- iv) Reflexion einer Seilwelle:
 - Ende fixiert: Phasensprung von π (Spiegelung an x-Achse)
 - Ende lose: kein Phasensprung

6.6 Elastische Wellen



- a) Longitudinaler Wellenimpuls durch einen Hammerschlag.
 b) Massenelement mit Spannungen und Kräften

$$\vec{F} = A(\sigma(z) - \sigma(z + \Delta z))\hat{z} = -A \frac{d\sigma}{dz} \Delta z \hat{z}$$

$$\sigma = -\epsilon E = -\frac{\Delta s}{\Delta z} E = s_z E$$

$$\vec{F} = A E s_{zz} \Delta z \hat{z} = \rho A \Delta z s_{tt} \hat{z} = \Delta m \vec{a}$$

$$s_{tt} = \frac{E}{\rho} s_{zz}$$

$\frac{E}{\rho}$: Ausbreitungsgeschwindigkeit

Phasengeschwindigkeit einer longitudinalen elastischen Wellen (Schlag seitlich):

$$v_{ph}^l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

E: Elastizitätsmodul
 ρ: Dichte

Phasengeschwindigkeit einer transversalen elastischen Wellen (Schlag von oben):

$$v_{ph}^{tr} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G: Torsionsmodul $\approx \frac{3}{8} E$

Phasengeschwindigkeit einer longitudinalen Wellen im Gas:

$$v_{ph}^l = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

K: Kompressionsmodul

6.7 Der Dopplereffekt

6.7.1 Der nicht-relativistische Dopplereffekt für Schall

Wenn sich Empfänger und Quelle relativ zueinander bewegen, entsteht der Dopplereffekt

- Quelle ruht und schwingt mit Frequenz f_0
 Empfänger bewegt sich mit Geschwindigkeit v auf Quelle zu.

$$\lambda_0 = c/f_0$$

c: Schallgeschwindigkeit

Es gelangen pro sec $f' = \frac{c+v}{\lambda_0}$ an den Empfänger heran.

Empfänger bewegt sich auf Quelle zu:

$$f' = f_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

Empfänger bewegt sich von Quelle weg:

$$f' = f_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

- Quelle bewegt sich längs x mit Geschwindigkeit $v < c$ und schwingt mit Frequenz f_0 , der Empfänger ruht.

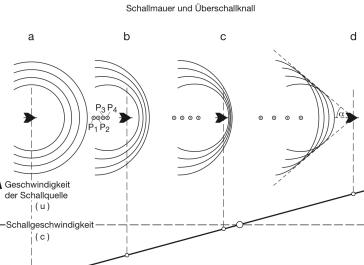
$$\lambda' = \frac{c-v}{f_0}$$

Quelle bewegt sich auf Empfänger zu:

$$f' = f_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

Quelle bewegt sich von Empfänger weg:

$$f' = f_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$



Energie und Intensität von Ebenenwellen

M = Massen, Ψ = Amplitude, ρ = Dichte, V = Volumen, $ct = x$ = Länge
 In der Welle gespeicherte Energie:

$$E = \frac{M}{2} \omega^2 \Psi^2 = \frac{\rho V}{2} \omega^2 \Psi^2 = \frac{\rho A c t}{2} \omega^2 \Psi^2 = \frac{\rho A x}{2} \omega^2 \Psi^2$$

Intensität:

$$I = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 \Psi^2$$

Intensitätsabfall

I = Intensität, r = Abstand zur Quelle
 Kreiswellen:

$$I(r) = \frac{P}{2\pi r} \propto \frac{1}{r}$$

Kugelwellen:

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

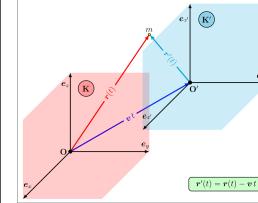
Zylinderwellen:

Falls Quelle Länge l hat und $l \ll r$ gilt die Abschätzung der Kugelwelle:

$$I(r) = \frac{P}{2\pi rl} \propto \frac{1}{r}$$

6.7.2 Der longitudinale Dopplereffekt des Lichtes im Vakuum

nur beim Licht spielt es keine Rolle ob sich der Empfänger oder der Sender bewegt



Galilei Transformation:
 Relativbewegung von zwei Bezugssystemen

Sender: System K
 Empfänger: System K'
 Relativgeschwindigkeit V des System K' zu K
 $r'(t) = r(t) - vt$

System K' empfängt eine harmonische Schwingung mit Schwingungsdauer T'

$$T' = T \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}$$

Entfernen von Sender/Empfänger: Nähern von Sender/Empfänger:

$$f' = f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$f' = f \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$$f = 1/T$$

$$f' = 1/T'$$

$$\beta = V/c$$

6.8 Allgemeine Formeln zu Wellen

Amplitudenabfall

A = Amplitude, r = Abstand zur Quelle

Kugelwellen:

$$A(r) \propto \frac{1}{r}$$

Kreiswellen:

$$A(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

Zylinderwellen:

Falls Quelle Länge l hat und $l \ll r$ gilt die Abschätzung der Kugelwelle:

$$A(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

7 Welle-Teilchen Dualismus

7.1 Das Photon

7.1.1 Energiequantifizierung der elektromagnetischen Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \phi)}$$

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 |\vec{E}_0|^2$$

$[E_0]$ = Amplitude El. Feld
 $[B_0]$ = Amplitude Mag. Feld
 $[I]$ = Intensität

$$E_0 = c \cdot B_0$$

7.1.2 Energie eines Photons bei Absorption und Emission

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_e v_c^2 = h\nu - W_{Austritt}$$

$[E_{kin}]$ = maximale kinetische Energie des Elektrons das von einem Photon herausgelöst wurde

$$E_{photon} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$[E]$ = kin. Energiemenge
 $[h]$ = Plancks Konstante

$$W_{Austritt} = \frac{hc}{\lambda_{max}} = e \cdot \phi_A$$

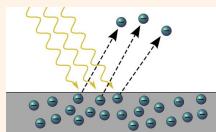
$[v]$ = Frequenz der Strahlung
 $[\phi_A]$ = Austrittspotential [V]

für Grenzwellenlänge: $E_{kin} \stackrel{!}{=} 0$

Lichtenergie wird nur in Portionen übertragen. Die Portionen betragen ein Vielfaches der Energiemenge E (quantisiert)

Beispiel: Der Photoelektrische Effekt

Beim photoelektrischen Effekt schiesst man ein Photon auf eine Metallplatte, auf der je nach kinetischer Energie des Photons ein Elektron rausgelöst wird.



Es gilt Energieerhaltung:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_e v_e^2 = h\nu - W_{aus}$$

W_{aus} = Austrittsarbeit

Wobei E_{kin} die kinetische Energie des austretenden Elektrons ist.

Die kinetische Energie der Elektronen hängt also nur von der Frequenz ν ab und nicht von der Intensität des Lichts.

7.1.3 Impuls des Photons

$$P = \frac{I}{c}$$

$[P]$ = Strahlungsdruck

$[I]$ = Intensität

$[c]$ = Lichtgeschwindigkeit

$$I = \frac{E \cdot N}{A \cdot 1s}$$

$[N]$ = Anzahl Photonen
 $[A]$ = Absorbierende Fläche

$$p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar}{\lambda} = mv = \sqrt{2mE_{kin}}$$

[p] = Impuls
De Broglie Beziehung

$$E_{zugeführt} = e \cdot U$$

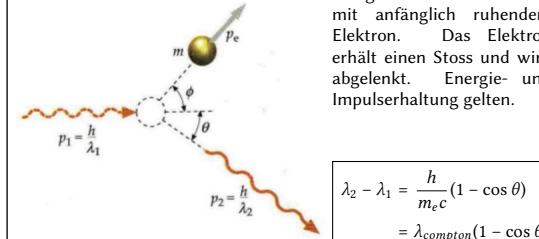
Bei einer **ebenen** elektromagnetischen Welle im Vakuum ist die Intensität gegeben durch:

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 |\vec{E}_0|^2 \quad E_0 = c \cdot B_0 \quad \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

Gesamtenergie eines Teilchens (relativistisch)

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + (mc^2)^2} \quad \text{für } m \rightarrow 0 \text{ pc}$$

Compton-Effekt



Impulserhaltung: $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_e$

Der Impuls als Absolutbetrag:

$$p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta$$

Energieerhaltung: $E_1 + E_{e,1} = E_2 + E_{e,2}$

Ruheenergie des Elektrons: $E_{e,1} = m_e c^2$

$$p_e^2 = p_1^2 - 2p_1 p_2 + p_2^2 + 2(p_1 - p_2)m_e c$$

Die Kombination von Impuls- und Energieerhaltung ausgedrückt als Funktion der Wellenlängen λ_1, λ_2 oder den Energien E_1, E_2 ergibt:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{1 + E_1/(m_e c^2) \cdot (1 - \cos \theta)}$$

Compton-Wellenlänge

$$\lambda_{Compton} = \frac{\hbar}{m_e c} = 2,43 \cdot 10^{-3} \text{ nm}$$

→ Photonen haben genau so wie Teilchen einen Impuls
→ Die Wellenlängenverschiebung ist unabhängig von der Ausgangswellenlänge

$$E[\text{keV}] \approx \frac{1.24}{\lambda[\text{nm}]} \quad E[\text{eV}] \approx \frac{1.24}{\lambda[\mu\text{m}]} \quad 1\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Mittlere Geschwindigkeit von Teilchen der Masse m bei Temperatur T

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

7.2 Materiewellen

Merkmale eines Teilchens:

- eindeutige Energie
- eindeutigen Impuls
- punktförmig

De Broglie Beziehung

De Broglie Frequenz

$$v = \frac{E_{kin}}{\hbar}$$

De Broglie Wellenlänge

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{mv} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_{kin}}}$$

- Umso länger die Wellenlänge, desto eher tritt Wellenverhalten auf.
- Die selbe Wellenlänge bedeutet das selbe Beugungsbild!

Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Die Wahrscheinlichkeit $P(x)$, dass das Teilchen am Ort x auftritt, ist durch das Betragsquadrat der Wellenfunktion gegeben.

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(x) = |\psi(x)|^2$$

Normierungsbedingung der Wahrscheinlichkeitsdichte

Wenn normiert ist das Integral, die Wahrscheinlichkeit das Teilchen zwischen den Grenzen zu finden.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

Erwartungswert für eine

allgemeine Messgröße a
Ort wo links und rechts gleich viel Wahrscheinlichkeit ist, das Teilchen aufzufinden.

$$\langle \hat{a} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \cdot \hat{a} \cdot \psi(x) dx$$

$\psi^*(x)$: komplex konjugiertes $\psi(x)$

Erwartungswert der Position x wobei $\hat{x} = x$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \cdot x \cdot \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x) dx$$

Unschärferelation für Position x / Standardabweichung

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x P(x) dx \right)^2}$$

Energie und Impuls einer Teilchenwelle

Energie:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \hat{E} \psi(x, t)$$

Impuls:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) = \hat{p} \psi(x, t)$$

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$\sigma_x = \Delta x$: Genauigkeit der Position
 $\sigma_p = \Delta p$: Genauigkeit des Impuls
 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

$$\sigma_E \cdot \sigma_t \geq \frac{\hbar}{2}$$

mit $\sigma_x = c \sigma_t$ & $\sigma_p = \sigma_E/c$

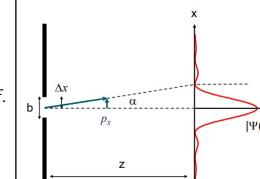
$$\sigma_x \cdot \sigma_p = r \sigma_\phi \frac{1}{r} \sigma_L \geq \frac{\hbar}{2}$$

mit $\sigma_x = r \sigma_\phi$ & $\sigma_p = \frac{1}{r} \sigma_L$

Unschärferelation für Zeit und Energie

Unschärferelation für Winkel und Drehimpuls

7.2.1 Beispiel: Beugung am Spalt



Ein Teilchen passiert einen Spalt der Breite b. Beim Spaltdurchtritt ist die Position des Teilchens mit einer Genauigkeit von $\Delta x \approx \frac{b}{2}$ bekannt. Der vertikale Impuls kann durch die Auftreffposition am Detektor bestimmt werden $p_x \approx p \sin \alpha$.

Gesucht ist das **erste Beugungsminimum**, so ist $\sin \alpha \approx \lambda/b$.
Der vertikale Impuls lautet:

$$\Delta p_y \approx p \sin \alpha_{min} \approx \frac{\hbar}{\lambda} \frac{\lambda}{b} = \frac{\hbar}{b}$$

Das Produkt von Δx und Δp_x ist:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \frac{b}{2} \frac{\hbar}{b} = \frac{\hbar}{2}$$

→ Das heisst, die **Messgenauigkeit von Ort und Impuls** ist durch die **Planck'sche Konstante** \hbar miteinander verknüpft.

7.3 Energieniveaus

7.3.1 Schrödinger-Gleichung

$$\underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{E_{kin}} \Psi(x, t) + E_{pot} \Psi(x, t) = E \Psi(x, t) = \hat{H} \Psi(x, t)$$

Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$\hat{H} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + E_{pot} \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

Für Wellen mit konstanter Energie E mit Frequenz $\omega = E/\hbar$ mit $\Psi(x, t) = \psi(x) \cdot e^{-i\omega t}$

$$\hat{H} \psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + E_{pot} \psi(x) = E \cdot \psi(x)$$

Hamilton Operator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_{pot}$$

7.3.2 Freie und gebundene Teilchen

- Freie Teilchen:
Wellenpaket, das sich wie eine ebene Welle ausbreitet
→ Durch Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung bestimmt.
Bsp: Elektronenstrahlen, wie bei Interferenz und Beugungsexperimenten vorkommt.
- Gebundene Teilchen:
Stehende Wellen, Gesamtenergie und Wellenform (Wahrscheinlichkeitsdichte) ist konstant und durch zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung gegeben. Bsp: Elektron in Atomhülle

7.3.3 Potentialtopf

Unendliche Potentielle Grenze bei $x = 0$ und $x = L$ (Topf)
 $V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

Löse $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E \psi(x)$ mit dem Standard Wellenansatz!
 $(\psi(x) = \psi_{0,A} \sin(kx) + \psi_{0,B} \cos(kx))$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Energieniveaus

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = \frac{\hbar^2 n^2}{8mL^2} \quad \text{mit } k_n = \frac{n\pi}{L}$$

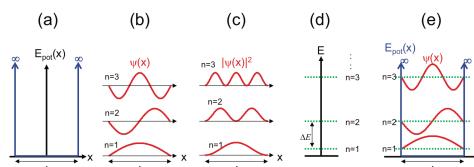


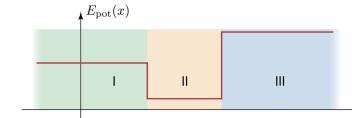
Abbildung 1.5: Teilchen im Kasten: (a) Potential. (b) Wellenfunktion. (c) Wahrscheinlichkeitsdichte. (d) Energieniveaus. (e) Kombiniertes Energieniveaudiagramm

Implikationen

- Energie ist quantifiziert
- Tiefste erlaubte Energie steigt mit der Begrenzung und ist E_1 (Grundzustandsenergie)!
- Wenn das Elektron in einen kleineren Raum gequetscht wird, steigt dessen Energie!
- Die Energie, welche der längsten Wellenlänge entspricht, ist grösser als null!
- Die kinetische Energie ist nur dann quantifiziert, wenn es durch ein Potential an einem Ort lokalisiert ist (räumliche Randbedingungen werden benötigt).
- Anzahl gebundener Zustände ist abhängig vom Potential E_{pot} (beim Potentialtopf nicht!)

7.4 Lösen der Zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung

- Schrödinger-Gleichung für getrennte Bereiche des Potenzials trennen lösen
- Stetigkeit der Wellenfunktion bei den Potenzialstufen
- Stetigkeit der ersten Ableitung der Wellenfunktion bei endlich hohen Potenzialstufen
- Normierung der Wellenfunktion
- Unter Umständen müssen verschiedene Fälle unterschieden werden (z.B. Teilchenenergie grösser oder kleiner als Oberkante des endlich hohen Kastens)



Mit dem Ansatz $\Phi(x) = A \cdot e^{ikx}$ hat die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung die Lösung für k :

$$k = \pm \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - E_o)}$$

- Fall:** $E > E_o \Rightarrow k = \text{reell}$
- Fall:** $E < E_o \Rightarrow k = \text{komplex}$

Da wir zwei Lösungen (\pm) haben, ist unsere allgemeine Lösung eine Superposition der beiden:

- Fall:** $\Phi(x) = A \cdot e^{-kx} + B \cdot e^{kx}$
- Fall:** $\Phi(x) = A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx}$

7.4.1 Lösungen am unendlichen Potentialtopf

1D: Es gilt für das Potential in- bzw. außerhalb des Topfs:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Wir müssen also die Schrödinger-Gleichung für den einzelnen Bereich $0 \leq x \leq L$ lösen. Schrödinger-Gleichung im Kasten:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = E \cdot \Psi(x) \Leftrightarrow \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \Psi(x)$$

Mit dem Ansatz: $\Psi(x) = A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx)$ folgt:

$$\underbrace{Ak^2 \cdot \sin(kx) + Bk^2 \cdot \cos(kx)}_{=-\Psi''(x)} = \frac{2mE}{\hbar^2} (A \sin(kx) + B \cos(kx))$$

2. Es folgt mit den beiden Randbedingungen:

$$i) \quad \Psi(x=0) = 0 \quad ii) \quad \Psi(x=L) = 0$$

dass $B = 0$ und damit noch:

$$A \cdot \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L} \quad n \in \mathbb{N}$$

3. entfällt (weil unendlich hohe Potentialstufen)

und damit folgt die Zwischenlösung der Schrödinger-Gleichung abhängig vom Index n :

$$\Psi_n(x) = A_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Es muss noch die Amplitude der Wellenfunktion bestimmt werden:

4. Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_n(x)|^2 dx = \int_0^L |\Psi_n(x)|^2 dx = A_n^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = 1$$

Mit der Id. $\sin^2(Cx) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2Cx))$ wird das Integral zu $\frac{L}{2}$ und damit:

$$a_n^2 \cdot \frac{L}{2} = 1 \Rightarrow a_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

und somit die finale Lösung der Schrödinger-Gleichung als normierte Wellenfunktion:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

2D: Es gilt für das Potential in- bzw. außerhalb des Topfs:

$$V(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x, y) = E \cdot \Psi(x, y)$$

Randbedingungen:

$$\Psi(0, y) = 0 \quad \Psi(L_x, y) = 0 \quad \Psi(x, 0) = 0 \quad \Psi(x, L_y) = 0$$

Trennung der Variablen mit: $\Psi(x, y) = u(x) \cdot v(y)$ wird die Schrödinger-Gleichung zu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x) \cdot v(y) = E \cdot u(x) \cdot v(y)$$

und weil $u \neq u(y)$ und $v \neq v(x)$ können wir umformen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{u''(x)}{u(x)} + \frac{v''(y)}{v(y)} \right) = E$$

Alle Terme sind konstant. Wir können daher zwei separate Gleichungen bestimmen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} u''(x) = E_x \cdot u(x) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} v''(y) = E_y \cdot v(y)$$

Deren Lösungen durch das Problem am 1D Kasten gegeben sind:

$$u_{n_x}(x) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \quad v_{n_y}(y) = \sqrt{\frac{2}{L_y}} \sin\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right)$$

Mit den Energiewerten:

$$E_{x,n_x} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L_x^2} n_x^2 \quad E_{y,n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L_y^2} n_y^2$$

Und der Gesamtenergie:

$$E_{n_x, n_y} = E_{x,n_x} + E_{y,n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L_x^2} n_x^2 + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L_y^2} n_y^2$$

Hinweis: Wenn der Kasten quadratisch ist, dh. $L_x = L_y$, dann ändert sich der Ausdruck für die Gesamtenergie und wir erhalten entartete Zustände:

$$E_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} \cdot (n_x^2 + n_y^2)$$

Z.B. sind jetzt die Energiewerte $E_{1,2} = E_{2,1} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} \cdot 5$ identisch, jedoch unterscheiden sich die Wellenfunktionen für die beiden Fälle.

8.1.4 Quantenzahlen des Einelektronenatoms

pro Koordinate (r, θ, φ) gibt es eine Quantenzahl (n, l, m_l)

Radiale Quantenzahl (Hauptquantenzahl) $n = 1, 2, 3, \dots$:
bestimmt den radialen Anteil der Wellenfunktion und somit die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem bestimmten Abstand vom Kern vorzufinden
Länge des Drehimpuls-Vektor
Assozierte Polarkoordinate = r
 $n - 1$ "Knoten" in der Wellenfunktion
Energie:

$$E_n = -E_R Z^2 / n^2$$

Drehimpulsquantenzahl $l = 0, 1, \dots, n-1$

bestimmt zusammen mit m_l den winkelabhängigen Anteil der Wellenfunktion

Assozierte Polarkoordinate = θ

Richtung des Drehimpuls-Vektor

l = Anzahl Knotenebenen

Betrag des Drehimpulses:

$$L = \sqrt{l(l+1)\hbar}$$

Magnetische Quantenzahl $m_l = -l, -l+1, \dots, l-1, l$

Komponente des Drehimpulses entlang einer bestimmten Raumrichtung (Standardweise: z-Richtung)

z-Komponente des Drehimpulses:

$$L_z = m_l \hbar$$

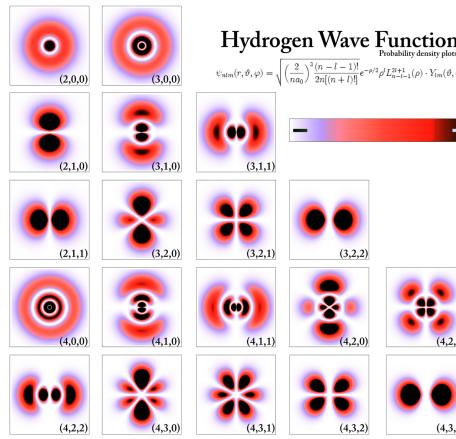
Drehimpuls ist verknüpft mit magnetischem Dipol des Atoms. Kreisbewegung des Elektrons um Atomkern entspricht einem Kreisstrom I mit magnetischem Dipol \vec{m} :

$$\vec{m} = I\pi r^2 \vec{n} = \frac{1}{2}(-e)(\vec{r} \times \vec{v}) = -\frac{1}{2}e(\vec{r} \times \vec{p}/m_e) = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

Die z-Komponente des Dipoles entspricht dann:

$$m_{z,l} = -\frac{e}{2m_e} L_z = -\frac{e\hbar}{2m_e} m_l = -\mu_B m_l$$

$\mu_B = 9.274 \cdot 10^{-24} \frac{I}{r}$ Bohr-Magneton. Bestimmt die Lage der Knotenebenen.



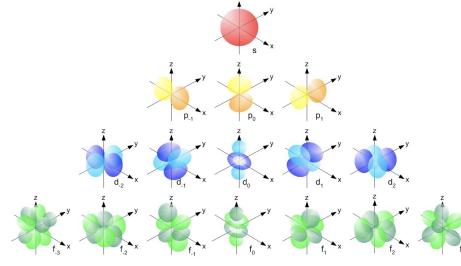
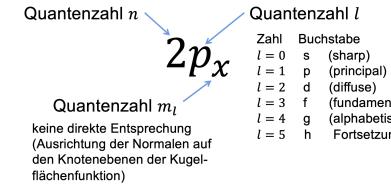
Quantenmechanisches Modell vs. Bohrmodell

- Im Bohrmodell gibt es nur eine Quantenzahl die die stehenden Wellen um den Kern beschreibt (Drehimpulsquantenzahl). Radiale Quantenzahl $n \neq$ Bohr'sche Quantenzahl n

- Im Bohrmodell gibt es keine Entartung. -> kann das PSE nicht erklären

- Bohrmodell: Grundzustand des Elektrons hat Drehimpuls $L = \hbar$ quantenmech. Modell: Grundzustand $L = 0$

8.1.5 Orbitalsymbole



Zwischen den verschiedenen Farben gibt es einen Phasenunterschied von π in der Wellenfunktion

8.1.6 Eigendrehimpuls (Spin)

Der Spin ist eine fundamentale Eigenschaft eines Elementarteilchens, analog zu Masse und Ladung. Er wird durch zwei Quantenzahlen (Drehimpulsquantenzahl s und magnetische Quantenzahl m_s) beschrieben.

Eigendrehimpuls des Elektrons (fixer Wert für alle Elektronen):

$$S = \sqrt{\frac{3}{4}} \hbar = \sqrt{s(s+1)} \hbar$$

Eigendrehimpuls der z-Komponente:

$$S_z = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

$s = \frac{1}{2}$ und $m_s = \pm \frac{1}{2}$

z-Komponente des magnetischen Dipol des Elektrons:

$$m_{z,s} = -g_e \frac{e\hbar}{2m_e} m_s = -g_e \mu_B m_s$$

g -Faktor = relativistischer Korrekturfaktor ≈ 2.002

Magnetisches Moment:

$$m_z = \underbrace{m_{z,l}}_{\text{Bahndrehimpuls}} + \underbrace{m_{z,s}}_{\text{Spin}} = -\mu_B m_l - g_e \mu_B m_s$$

8.1.7 Periodensystem

Wellenfunktion von Mehrelektronenatomen

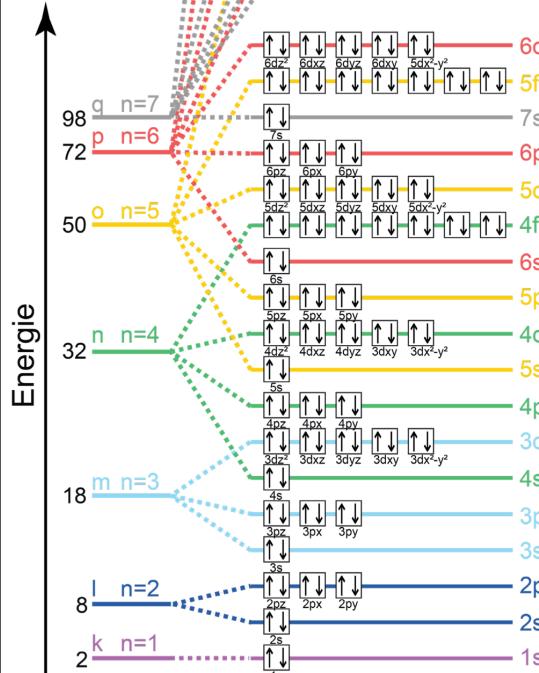
Wellenfunktionen und Energien müssen angepasst werden, da mehrere Elektronen sich abstoßen. In diesen Fällen ist die Schrödinger-Gleichung nicht analytisch lösbar (nur noch numerisch). Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms sind in vielen Fällen immer noch eine gute Näherung.
Pauli-Prinzip (Spin-Statistik-Theorem)

In der Realität nehmen nicht alle Elektronen das tiefste Energieniveau im Grundzustand an (Wegen dem Pauli-Prinzip). Pauli-Prinzip stellt einen fundamentalen Zusammenhang zwischen Spin und den erlaubten Zuständen her.

Zwei identische Teilchen mit halbzahligem Spin s können nie in allen Quantenzahlen übereinstimmen.

Es können sich immer nur genau zwei Elektronen im selben Zustand (n, l, m_l) befinden und dieselbe Wellenfunktion haben!
(Diese Elektronen unterscheiden sich im Spin $\pm 1/2$)

Die Wellenfunktion eines Mehrelektronenatoms erhält man, indem die Energieniveaus in aufsteigender Energie eines nach dem anderen mit Elektronen besetzt werden. Die Angaben der Quantenzahlen (n, l, m_l, m_s) für jedes Elektron im Atom nennt man auch dessen Elektronenkonfiguration.



Die Anzahl verschiedener Quantenzustände wird beschrieben durch:

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 4 \frac{(n-1)n}{2} + 2n = 2n^2$$

8.2 Absorption und Emission von Licht

8.2.1 Atomspektren

Wenn die Energie eines Elektrons von E_1 auf E_2 durch Absorption eines Photons angehoben wird gilt Energieerhaltung:

$$E_2 - E_1 = E_{\text{photon}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

→ Elektronen absorbieren/emittieren nur Photonen mit einer bestimmten Wellenlänge

$$\frac{1}{\lambda} = R_H Z^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

Rydbergformel Einelektronenatom
 R_H = Rydbergkonst. = $1.1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

$$\Delta E = 13.6 \text{ eV} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{n^2}{n^2 - 4} G$$

$$\begin{aligned} \Delta l &= l_2 - l_1 \stackrel{!}{=} \pm 1 \\ \Delta m &= m_2 - m_1 \stackrel{!}{=} 0, \pm 1 \end{aligned}$$

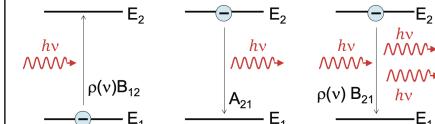
Balmer Formel mit $n = 3, 4, \dots$

Aus der Drehimpulserhaltung folgt die sogenannte Auswahlregel für optische Übergänge

8.2.2 Einstein'sche Koeffizienten

Es werden zwischen drei elementaren Prozessen unterschieden:

- Absorption:**
Elektron geht durch Absorption in Zustand höherer Energie über
- Spontane Emission:**
Elektron geht durch spontane Emission in Zustand tieferer Energie über
- Stimulierte Emission:**
Elektron ist im Zustand höherer Energie. Einfallendes Photon kann Emission eines weiteren Photons durch Übergang des Elektrons in den Zustand tieferer Energie induzieren.



Einstein betrachtete nicht einzelne Atome, sondern eine grosse Anzahl N Atome. N_1 ist die Anzahl Atome, bei welchen das Elektron im tieferen Energieniveau mit Energie E_1 ist und N_2 die Anzahl Atome, bei welchen das Elektron im höheren Energieniveau mit Energie E_2 ist. $N = N_1 + N_2$. Die kinetischen Gleichungen sind:

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = -\rho(v)B_{12}N_1 + \rho(v)B_{21}N_2 + A_{21}N_2$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = +\rho(v)B_{12}N_1 - \rho(v)B_{21}N_2 - A_{21}N_2$$

$B_{21} = B_{12}$ und A_{21} sind die Einstein'schen A- und B-Koeffizienten. Die Einheiten sind $[B_{21}] = \frac{m^3}{J s}$ und $[A_{21}] = \frac{1}{s}$

$$\rho(v) = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}(v)|^2$$

$$p(v) \propto N_p$$

$\rho(v)$ ist die Energiedichte
 $\vec{E}(v)$ = Amplitude des E-Feldes

N_p = Anzahl Photonen mit Energie $h\nu$

8.2.3 Grundprinzip des Lasers

Bei Lasern wird das obere Energieniveau mit Elektronen aufgefüllt und danach eine Kettenreaktion von stimulierter Emission ausgelöst. Das Resultat ist eine Kettenreaktion identischer Photonen, die verstärkt wirken.

Laserbedingung:

oberes Energieniveau muss mehr Elektronen enthalten, als das untere Energieniveau.

Benötigt mindestens 3 Niveaus!

Kontinuierlicher Laser ist im Gleichgewicht:

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = 0$$

Eigenschaften von Laserlicht:

- Laserlicht ist kohärent:**

Alle Photonen haben dieselbe Wellenlänge, Frequenz und Phase

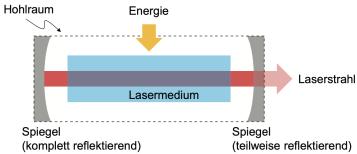
- Laserlicht ist polarisiert:**

Normalerweise haben alle Photonen dieselbe Polarisation

- Laserlicht ist in der Regel räumlich gerichtet:**

Und hat ein Wohldefiniertes, meist gaussförmiges Intensitätsprofil. (Eine Folge des Laserhohlraums).

8.2.4 Aufbau eines Lasers



Ein Laser besitzt folgende Komponente:

- Pumpmechanismus:**

Liefert Energie, die nötig ist, um das Elektron vom Grundzustand ins Niveau 3 zu bringen.

- Lasermedium:**

Medium in welchem die stimulierte Emission stattfindet.

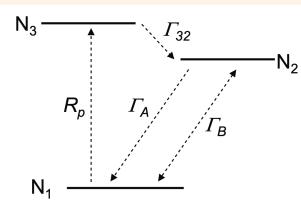
- Lasercavity:**

Um stimulierte Energie zu verstärken wird Laserlicht häufig in einem resonanten Hohlraum generiert. Die elektromagnetische Welle wird von den Enden des Hohlraums kontinuierlich reflektiert und löst bei jedem Durchgang eine stimulierte Emission aus. Der Laserhohlraum hat eine weitere Funktion. Da die elektromagnetische Welle kontinuierlich reflektiert wird, entspricht sie einer stehenden Welle. Die Länge des Laserhohlraums muss deshalb exakt ein Vielfaches der halben Wellenlänge sein.

$$\lambda_m = \frac{2L}{m} \quad v_m = \frac{c}{2L} \cdot m$$

m = 1, 2, 3, ...

Beispiel: Dreiniveau-Laser



Kinetische Gleichungen

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \underbrace{+ \Gamma_B N_p (N_2 - N_1)}_{\text{Absorption und Stim. Em.}} + \underbrace{- \Gamma_A N_2}_{\text{Spont. Em.}} - \underbrace{- R_p N_1}_{\text{Pumpvorgang}}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \underbrace{- \Gamma_B N_p (N_2 - N_1)}_{\text{Absorption und Stim. Em.}} - \underbrace{- \Gamma_A N_2}_{\text{Spont. Em.}} + \underbrace{+ \Gamma_{32} N_3}_{\text{Bevölker. strahlungloser Zerfall}}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial t} = \underbrace{R_p N_1}_{\text{Pumpvorgang}} - \underbrace{- \Gamma_{32} N_3}_{\text{strahlungloser Zerfall}}$$

Wenn im Gleichgewicht:

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{\partial N_3}{\partial t} = 0$$

Da Γ_{32} sehr schnell ist $N_3 \approx 0$

Differenz der beiden Gleichungen: $(N_2 - N_1 = \Delta N)$

$$\frac{\partial \Delta N}{\partial t} = -2\Gamma_B N_p \Delta N - \Gamma_A (N + +\Delta N) + R_p (N_1 N) = 0$$

mit $\Delta N = N_2 - N_1$ und $N \approx N_2 + N_1$

Besetzungsinverson (falls R_p gross genug ist) $\Delta N > 0$ (mehr Elektronen in E_2 als E_1):

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{R_p - \Gamma_A}{2\Gamma_B N_p + R_p + \Gamma_A} > 0$$

Bei Besetzungsinverson werden insgesamt mehr Photonen emittiert als absorbiert, es wird netto also Licht abgegeben: Laseraktivität tritt ein. Damit Besetzungsinverson eintritt, muss gemäss obiger Gleichung die Pumprate schneller als die Rate der spontanen Emission sein.

9 Festkörperphysik

9.1 Bändermodell

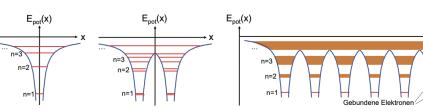


Abbildung 3.1: (Links) 1 Atom (Mitte) 2 Atome (Molekül) (Rechts) N Atome (Festkörper)

Effekte der Annäherung einzelner Atome

Die Energieniveaus in einem einzelnen Atom liegen weit auseinander. Reihenfolge der Energieniveaus bleibt in etwa erhalten.

In grosser Entfernung sind die Energieniveaus von zwei gleichen Atomen identisch.

Nähern sich zwei Atome an, verschieben sich die entsprechenden Energieniveaus unter dem gegenseitigen Einfluss gegenseitig. Im resultierenden zwei-Atom-System erscheinen beide ursprünglich identischen Energieniveaus als zwei neue Niveaus mit leicht unterschiedlicher Energie (ein Niveau etwas höher, das andere etwas tiefer als die Originalniveaus).

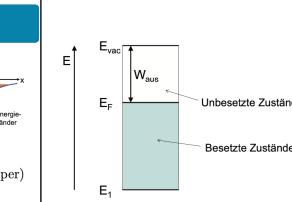
Nähern sich N Atome an, so spaltet sich ein gegebenes atomares Energieniveau in N leicht unterschiedliche Niveaus auf. Wenn die Anzahl Atome sehr gross ist, ergibt sich daraus eine kontinuierliche Verteilung von Energieniveaus (Energieband).

Zu jedem atomaren Energieniveau gibt es ein Energieband. Je höher das ursprüngliche Energieniveau, desto breiter in der Regel der Bereich des Energiebands.

Elektronen in hohen Energieniveaus spüren die umliegenden Elektronen anderer Atome und können sich frei bewegen (Valenzelektronen/freie Elektronen).

Elektronen in tiefen Energieniveaus spüren die umliegenden Elektronen anderer Atome nicht (gebundene Elektronen).

9.1.1 Fermienergie



Die Fermienergie E_F ist die Energie des höchsten besetzten Energieniveaus, relativ zum tiefsten besetzten Niveau E_1 .

$(E_{vac} = \text{Energie freies Elektron ausserhalb des Festkörpers} \rightarrow \text{Vakuumniveau})$

$$W_{aus} = E_{vac} - E_F$$

Einige grundlegende Eigenschaften sieht man bereits, wenn man annimmt, dass sich Valenzelektronen wie freie Elektronen in einem Kastenpotential verhalten.

Element	Fermienergie eV	Fermitemperatur $\times 10^{14} \text{ K}$	Fermigeschwindigkeit $\times 10^6 \text{ m/s}$
Li	4.74	5.51	1.29
Na	3.24	3.77	1.07
K	2.12	2.46	0.86
Rb	1.85	2.15	0.81
Cs	1.59	1.84	0.75
Cu	7.00	8.16	1.57
Ag	5.49	6.38	1.39
Au	5.53	6.42	1.40
Be	14.3	16.6	2.25
Mg	7.08	8.23	1.58
Ca	4.69	5.44	1.28
Sr	3.93	4.57	1.18
Ba	3.64	4.23	1.13
Nb	5.32	6.18	1.37
Fe	11.1	13.0	1.98
Mn	10.9	12.7	1.96
Zn	9.47	11.0	1.83
Cd	7.47	8.68	1.62
Hg	7.13	8.29	1.58
Al	11.7	13.6	2.03

Beispiel: Fermienergie eines 3D Kastenpotentials

$$E_{N_x, N_y, N_z} = \frac{\hbar^2}{8m_e} \left(\frac{N_x^2}{L_x^2} + \frac{N_y^2}{L_y^2} + \frac{N_z^2}{L_z^2} \right), \quad N_x, N_y, N_z = 1, 2, 3, \dots$$

N = Quantenzahl

Wenn alle Seitenlängen gleich:

$$E_{N_x, N_y, N_z} = \frac{\hbar^2}{8m_e L^2} (N_x^2 + N_y^2 + N_z^2) = \frac{\hbar^2}{8m_e L^2} N_{tot}^2$$

Wieviel Kombinationen von N_x, N_y, N_z möglich sind, ohne dass ein gewählter Maximalwert von N_{tot}^2 überschritten wird:

Entspricht für genügend grosse N_x, \dots genau 1/8 des Volumens einer Kugel mit Radius N_{tot} (1/8 Kugelvolumen = nur pos. Oktaktant):

$$N \approx \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} N_{tot}^3 = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} (N_x^2 + N_y^2 + N_z^2)^{3/2}$$

$$N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 = \left(\frac{24N}{4\pi} \right)^{2/3}$$

Energie ist:

$$E_N = \frac{\hbar^2}{8m_e L^2} (N_x^2 + N_y^2 + N_z^2) = \frac{\hbar^2}{8m_e} \left(\frac{6N}{\pi L^3} \right)^{2/3}$$

Fermienergie bestimmt durch $N = M/2$ (jeder Zustand hat zwei Plätze):

$$E_F = \frac{\hbar^2}{8m_e} \left(\frac{3M}{\pi L^3} \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{8m_e} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{2/3}$$

n = M/L^3 dreidimensionale Teilchendichte (Anzahl freie Elektronen pro Volumeneinheit)

Bezogen auf das tiefste Niveau des Kastenpotential. In Realität auf den Grundzustand bezogen.

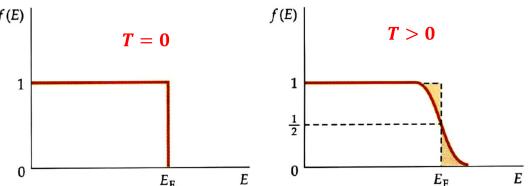
9.1.2 Fermi-Dirac Verteilung

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{falls } E \leq E_F \\ 0 & \text{falls } E > E_F \end{cases}$$

Besetzungswahrscheinlichkeit $f(E)$
Bei $T = 0K$

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{k_B T}}}$$

Fermi-Dirac Verteilung
Besetzungswahrscheinlichkeit $f(E)$
Bei $T > 0K$



Fermienergie

Die Fermienergie ist diejenige Energie E , bei welcher die Besetzungswahrscheinlichkeit nach Fermi-Dirac $f(E) = 0.5$ ist.

Fermitemperatur, Fermigeschwindigkeit und Fermi-Wellenzahl

Temperatur ab welcher Elektronen thermisch so stark angeregt werden, dass das Pauliprinzip keine grosse Rolle mehr spielt. Fermi-Dirac Verteilung geht für hohe Temperaturen ($T > T_F$) in Boltzmannverteilung über.

Geschwindigkeit der Leitungselektronen, wenn ihre kinetische Energie der Fermienergie entspricht

$$T_F = \frac{E_F}{k_B}$$

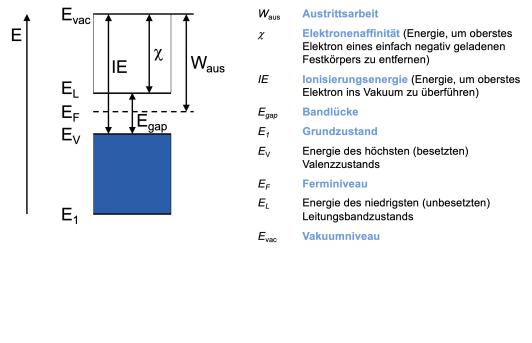
$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m_e}}$$

$$k_F = \sqrt{\frac{8\pi^2 m_e E_F}{h^2}}$$

Zustandsdichte

$$g(E) = \frac{dN}{dE_F}$$

9.1.3 Energieniveaudiagramm



9.1.4 Leiter, Halbleiter und Isolatoren

Anhand der Lage der Fermienergie und der Bandstruktur, kann vorhergesagt werden, ob elektrischer Strom geleitet werden kann (Leiter) oder nicht (Isolator).

Bedingung für elektrisches Leitvermögen

Bei Anlegen eines elektrischen Feldes werden Elektronen beschleunigt.

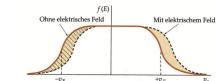
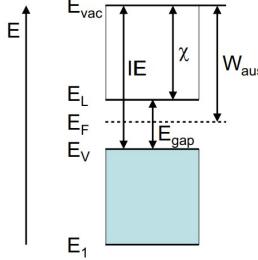


Abbildung 3.4: Fermiverteilung im elektrischen Feld



Ionisierungsenergie IE:

Energie die benötigt wird, um oberstes Elektron eines Atoms zu entfernen (ins Vakuum).

Elektronenaffinität χ : Energie die benötigt wird, um oberstes Elektron eines einfach negativ geladenen Atoms/Festkörpers zu entfernen

Bandlücke

- Metall ($E_{Gap} = 0$): Die Fermienergie liegt in einem Band und die Elektronen können deshalb kinetische Energie aufnehmen oder abgeben. $IE = \chi = W_{aus}$

- Halbleiter ($0 \text{ eV} < E_{Gap} < 4 \text{ eV}$): Das Material besitzt eine Bandlücke und die Fermienergie liegt zwischen zwei Bändern, aber die Energiedifferenz zwischen den beiden Bändern ist klein genug, dass Elektronen thermisch vom Valenz- ins Leitungsband angeregt werden können. $IE = \chi + E_{Gap}$

- Isolator ($E_{Gap} > 4 \text{ eV}$): Die Fermienergie liegt zwischen zwei Bändern, und die Energiedifferenz zwischen den beiden Bändern ist so gross, dass keine Elektronen ins Leitungsband angeregt werden und die Besetzungswahrscheinlichkeit im Leitungsband gleich null ist. $IE = \chi + E_{Gap}$

9.2 Elektronische Leitfähigkeit von Festkörpern

9.2.1 Drude-Modell

n_e =	Ladungsträgerdichte
σ =	(Spez.) Leitfähigkeit
\vec{v}_D =	elektrisches Feld Oftmals: $\frac{U}{L}$
U =	Spannung
τ =	Driftgeschwindigkeit
λ =	Streuzzeit
λ =	Freie Weglänge

$$\lambda = \langle |\vec{v}| \rangle \tau \approx \langle |\vec{v}_0| \rangle \tau \quad \text{mittlere freie Weglänge}$$

$$\mu = \frac{v_d}{E} = \frac{\sigma}{en_e} \quad \text{Mobilität von Elektronen}$$

$$n_e \propto g(E_F) = \frac{\partial n}{\partial E} \Big|_{E_F} \propto \sqrt{E}$$

$$\sigma = \frac{e^2 \tau n_e}{m_e} = \frac{e^2 \lambda n_e}{m_e v_F} \propto \frac{e^2 \lambda g(E_F)}{m_e v_F} \quad \text{spezifische Leitfähigkeit nach Drude}$$

9.2.2 Streuung von Leitungselektronen

Elektronen sind durch eine gitterperiodische stehende Wellenfunktion im Metallgitter repräsentiert [Bloch]. Da sich Wellen ohne Energieverlust ausbreiten, findet in einem idealen Metallgitter keine Streuung und kein Energieverlust bei 0K statt. Ein ideales Metall sollte deshalb eine unendliche Leitfähigkeit aufweisen.

Gründe für Streuungen

Gitterschwingungen:

Ionen verlassen ihren Gitterplatz \rightarrow Potential zeitabhängig \rightarrow potentieller Energieverlust.
Elektronen können Energie an Gitterschwingungen abgeben oder aufnehmen.

Störstellen:

Gitter weist Fremdatome oder Bruchstellen auf \rightarrow im regelmässigen Gitter nicht berücksichtigt und können Elektronen unter Energieaufnahme oder -abgabe streuen.

Elektron - Elektron Interaktion:

Streuung durch Gitterschwingung:

$$\lambda_{osc} = \frac{V_{ion}}{A_{ion}} = \frac{1}{n_{ion} A_{ion}} = \frac{m_{ion} \omega_0^2}{n_{ion} \pi k_B T}$$

n_{ion} : Ionenendichte, A_{ion} : Streuquerschnitt des Ions, ω_0 : Schwingungsfrequenz, m_{ion} : Masse des Ions, V_{ion} : Volumen, welches pro Ion zur Verfügung steht

$$A_{ion} = \pi x_0^2 = \pi \frac{k_B T}{k_c} = \frac{\pi k_B T}{m_{ion} \omega_0^2}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_c}{m_{ion}}}$$

x_0 : Amplitude, k_c : Federkonstante Gitterschwingung

Streuung durch Störstellen (SS):

$$\lambda_{SS} = \frac{1}{n_{SS} A_{SS}} = \frac{1}{n_{SS} \pi r_{SS}^2}$$

$n_{SS} \ll n_{ion}$: Dichte an Störstellen, r_{SS} : Radius des Störstellen

Zusammengesetzt:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_{osc}} + \frac{1}{\lambda_{SS}}$$

Spezifische Leitfähigkeit nach Bändermodell:

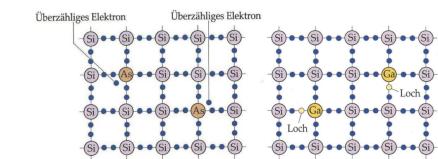
$$\sigma = \frac{e^2 n_e}{m_e v_F} \left(\frac{n_{ion} \pi k_B T}{m_{ion} \omega_0^2} + n_{SS} \pi r_{SS}^2 \right)^{-1} \neq f(\vec{E})$$

Richtige Voraussagen des Bändermodells zur el. Leitfähigkeit:

- σ ist unabhängig vom E-Feld (Ohm'sches Gesetz).
- σ ist $\propto g(E_F) \propto n_e$ und gibt also wieder, ob ein Material leitend ist oder nicht.
- σ ist bei hohen Temperaturen $\propto 1/T$ (wenn Gitterschwingungen der dominierende Mechanismus sind).
- σ ist für tiefe Temperaturen temperaturunabhängig (wenn Störstellen der dominierende Mechanismus sind).
- σ ist für tiefe Temperaturen abhängig von der Konzentration an Störstellen.

9.3 Halbleiter

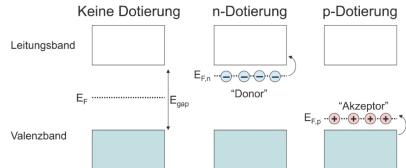
Dotierung von Halbleitern Halbleitern kann man gezielt Fremdatome (Si, Ga, As, usw.) einpflanzen, um positive (p-Dotierung / Akzeptor) oder negative (n-Dotierung / Donor) Ladungen einzuführen. Die Ladungsträgerdichte kann durch ein E-Feld beeinflusst werden.



Donor: Falls das Fremdatom ein Elektron mehr hat, gibt es das Elektron ab und wird zu einem Leitungselektron. Dies wird auch *electron doping* oder *n-doping* (negativ) genannt.

Akzeptor: Falls das Fremdatom ein Elektron weniger hat, nimmt es ein Elektron auf und hinterlässt ein mobiles "Loch" im Valenzband. Dies wird auch *hole doping* oder *p-doping* (positiv) genannt.

Die Energie zur Abgabe des Elektrons oder Lochs ist normalerweise viel kleiner als die Energie der Bandlücke. Damit kann man Materialien, die eigentlich nur bei sehr hoher Temperatur leitfähig wären, halbleitend machen. Dies führt zu einer technisch verwendbaren Leitfähigkeit in einem brauchbaren Temperaturbereich.



$$\text{Effektiver Bohrradius: } a_0^* = \varepsilon_r \frac{m_e}{m_e} a_0$$

Effektive Masse:

$$m_e^* = C \cdot m_e \quad zBsp := 0.3 m_e$$

Wechselwirkungen sobald:

$$N_{\text{Donatoren}} \geq \frac{1}{(a_0^*)^3}$$

9.3.1 Kontaktpotential

Austrittsarbeit (Elektron vom Material entfernen):

$$W = E_{vac} - E_F$$

E_{vac} : Energie des ungebundenen Elektrons, E_F : Fermienergie

Werden zwei Leiter zusammengebracht, fliessen Ladungsträger vom Leiter mit der höheren Fermienergie zum Leiter mit der tieferen Fermienergie.

Kontaktpotential:

$$E_{\text{Kontakt}} = W_2 - W_1$$

Kontaktspannung:

$$U_{\text{Kontakt}} = \frac{E_{\text{Kontakt}}}{e} = \frac{W_2 - W_1}{e}$$

Mit der Austrittsarbeit des Photons:

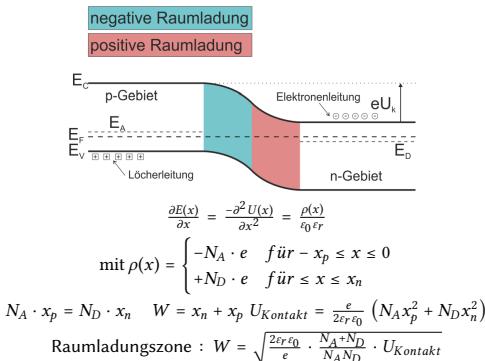
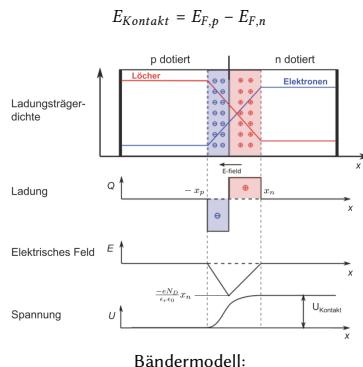
$$E = \frac{hc}{\lambda} = mvc = c \cdot p$$

folgt nun:

$$U_{\text{Kontakt}} = \frac{E_2 - E_1}{e} = \frac{\frac{hc}{\lambda_2} - \frac{hc}{\lambda_1}}{e} = hc \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 e}$$

9.3.2 pn-Halbleiterübergänge

Kontaktpotential von zwei unterschiedlich dotierten Halbleitern:



Durch Verringerung der Dotierkonzentration im schwach dotierten Bereich kann also die Raumladungszone vergrössert werden. Der pn-Übergang leitet keinen Strom, obwohl sowohl die p-dotierte wie auch die n-dotierte Seite leitend sind!

9.3.3 Diode

Die Leitfähigkeit des pn-Übergangs kann durch eine Spannung verändert werden.

- Vorwärtsspannung (forward bias):** Wird an der p-Seite eine positive Spannung angelegt, so verringert sich das Kontaktpotential. Die ladungsarme Zone wird dünner und es beginnt Strom zu fliessen.
- Rückwärtsspannung (reverse bias):** Wird an der p-Seite eine negative Spannung angelegt, so erhöht sich das Kontaktpotential. Die ladungsarme Zone wird breiter und der Halbleiter wird zum Isolator. Falls das E-Feld zu gross wird, kommt es zu einem Durchschlag und der Strom beginnt wieder zu fliessen. Der Durchschlag ist reversibel, solang der Strom die Diode nicht überhitzt.

9.3.4 Solarzelle, Photodiode und Leuchtdiode

Solarzelle:

Es wird ein Elektron auf der p-Seite vom Valenzband ins Leitungsband angeregt, indem es ein Photon absorbiert. Dazu muss die Energie des Photons mindestens so gross wie die Bandlücke sein, $h\nu > E_{\text{Gap}}$. Falls das Elektron in die Nähe des pn-Übergangs kommt, wird es durch die Potentialdifferenz auf die n-Seite beschleunigt. Dabei baut sich eine Spannung über dem Halbleiterübergang auf, die zur elektrischen Stromerzeugung benutzt werden kann.

Photodiode:

In der Photodiode wird zusätzlich eine Rückwärtsspannung angelegt. Dies führt zu einer viel schnelleren Reaktion auf ein absorbiertes Photon, da die Potentialdifferenz nun viel grösser ist. Da der resultierende Strom proportional zur Anzahl eintreffender Photonen ist, kann man die Lichtintensität direkt messen.

Leuchtdiode (LED):

Ein LED (light emitting diode) ist das Umgekehrte einer Photodiode. Es wird eine Vorwärtsspannung angelegt, sodass eine grosse Zahl von Elektronen auf der p-Seite und Löchern auf der n-Seite entstehen. Die Elektronen und Löcher re kombinieren nun paarweise an der Kontaktstelle unter Aussendung eines Photons.

9.3.5 Transistor

Ein Transistor besteht aus zwei Halbleiterübergängen npn- oder pnp-Konfiguration. Dies wird benutzt um el. Ströme zu verstärken oder zu schalten.

Bipolartransistor (Verstärkung):

Besteht aus einem npn/pnp Halbleiterübergang mit drei Kontakten: Emitter, Basis und Kollektor. Legt man eine Spannung zwischen Emitter und Kollektor an, so fliessst erst mal kein Strom, da je nach Vorzeichen der Spannung beim np- oder pn-Übergang der Stromfluss blockiert wird.

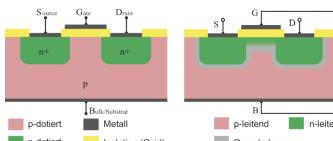
Legt man nun zusätzlich eine Spannung an der Basis an, so wandern Ladungsträger in den p-Bereich und die Blockade wird aufgelöst. Es beginnt ein Strom zwischen Emitter und Kollektor zu fliessen. Zusätzlich fliessst auch ein Strom durch die Basis, der wegen der kleineren Kontaktstelle viel kleiner ist. Daher kann der Transistor dazu benutzt werden, einen kleinen Kontrollstrom drastisch zu verstärken.



MOSFET:

Implementierungsmöglichkeiten eines Feldeffekttransistors:

- Als Gate-gesteuerter npn/pnp Übergang.
- Als Gate-gesteuerter Übergang zwischen nin oder pip, wobei das i (intrinsic/insulating) für undotierten Halbleiter steht.
- Als undotierter Halbleiter, in welchem Ladungsträger durch ein externes Feld akkumuliert werden.



Links: N-Kanal FET im ungestörten Zustand. Rechts: Durch Anlegen einer Spannung zwischen Gate und Bulk akkumulieren sich Ladungsträger an der Grenzschicht zum Gate. Dadurch bildet sich ein elektrostatisch dotierter n-Kanal zwischen Source und Drain aus. Oft wird Bulk und Source zusammengeschlossen und geerdet, sodass sich die Zahl der Anschlüsse auf drei reduziert. Es fliessst kein Strom durch das Gate (stromlose Schaltung). Dadurch kann man in integrierten Schaltungen Verluste reduzieren und hohe Dichte an Transistoren auf kleinstem Raum realisieren (Computerchips).

10 Konstanten und Umrechnungen

10.1 Einheiten

Frequenz	Hertz	[Hz]	$\frac{1}{s}$
Kraft	Newton	[N]	$\frac{kg \cdot m}{s^2}$
Druck	Pascal	[Pa]	$\frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}$
Energie	Joule	[J]	$N \cdot m = W \cdot s = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$
Leistung	Watt	[W]	$\frac{J}{s} = VA = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$
Ladung	Coulomb	[C]	$A \cdot s$
Spannung	Volt	[V]	$\frac{J}{C}$
Kapazität	Farad	[F]	$\frac{C}{V}$
Strom	Ampere	[A]	$\frac{Q}{s}$
magn. Fluss	Weber	[Φ_M]	$\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^2} = V \cdot s$
magn. Feldstärke	[H]		$\frac{A}{m}$
magn. Flussdichte	Tesla	[B]	$T = \mu H = \frac{Vs}{m^2} = \frac{N}{Am} = \frac{kg}{As^2}$
Induktivität	Henry	[L]	$\frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^2} = \frac{\Phi_M}{A} = \frac{Vs}{A}$
E-Feld	[E]		$\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$
elektrischer Fluss	[Φ_E]		$\frac{Nm^2}{C}$
Flächenladungsdichte	[σρ]		$\frac{C}{m^2}$
Längenladungsdichte	[λρ]		$\frac{C}{m}$
Elektrostat. Energie	[E_el]		$J = V \cdot A \cdot s = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$
spezifische Leitfähigkeit	[σ]		$\frac{1}{Ωm}$
spezifischer Widerstand	[ρ]		$Ωm$
Widerstand	[R]		$Ω = \frac{kg \cdot m}{s^3 \cdot A^2}$
Leitwert	Siemens	[S]	$\frac{1}{Ω}$
Stromdichte	[j]		$\frac{A}{m^2}$
Längenstromdichte	[j_A]		$\frac{A}{m}$

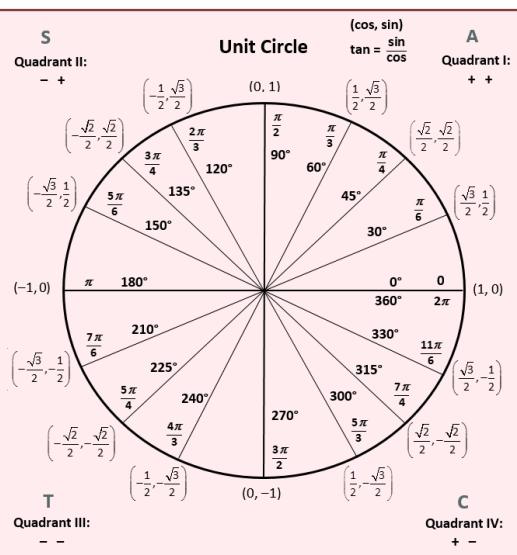
10.2 Konstanten

Elementarladung	e	$1.602 \cdot 10^{-19}$	[e] = C
el. Feldkonstante	$ε_0 = \frac{1}{(μ_0 c^2)}$	$8.854 \cdot 10^{-12}$	[ε_0] = $\frac{A \cdot s}{V \cdot m}$
mag. Feldkonstante	$μ_0$	$4π \cdot 10^{-7}$	[μ_0] = $\frac{A \cdot s}{V \cdot m}$
Lichtgeschw. Vakuum	c	$2.997 \cdot 10^8$	[c] = $\frac{m}{s}$
Planck'sche Konstante	h	$6.626 \cdot 10^{-34}$	[h] = Js
	h	$4.136 \cdot 10^{-15}$	[h] = eV/Hz
Bohrradius	a_o	$5.291 \cdot 10^{-10}$	[a_o] = m
Lichtgeschwindigkeit	c	$2.998 \cdot 10^8$	[c] = $\frac{m}{s}$
Elektronenvolt	eV	$1.602 \cdot 10^{-19}$	[eV] = J
Elektronenmasse	m_e	$9.11 \cdot 10^{-31}$	[m_e] = kg
atomare Masse	u	$1.661 \cdot 10^{-27}$	[u] = kg

10.3 Vorsilben

Deka	da	10^1	Dezi	d	10^{-1}
Hekto	h	10^2	Centi	c	10^{-2}
Kilo	k	10^3	Milli	m	10^{-3}
Mega	M	10^6	Mikro	μ	10^{-6}
Giga	G	10^9	Nano	n	10^{-9}
Tera	T	10^{12}	Pico	p	10^{-12}
Peta	P	10^{15}	Femto	f	10^{-15}
Exa	E	10^{18}	Atto	a	10^{-18}

10.4 Cosinus/Sinus



Allgemein gilt:

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha & \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha\end{aligned}$$

10.5 Additionstheoreme

$\cos \alpha + \cos \beta$	=	$2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos x - \cos y$	=	$-2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\sin x + \sin y$	=	$2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\sin x - \sin y$	=	$2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\sin(x \pm y)$	=	$\sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$
$\cos(x \pm y)$	=	$\cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$
$\sin(2x)$	=	$2 \sin x \cdot \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$
$\cos(2x)$	=	$\cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$

10.6 wichtige Formeln aus anderen Bereichen

Frequenz	f	=	$\frac{\omega}{2\pi}$	Hz = Hertz
Wellenzahl	k	=	$\frac{2\pi}{\lambda}$	$1/m$
Kraft	F	=	$m\vec{a}$	$N = kg \cdot m/s^2$
Auftriebskraft	F_A	=	$ρ_{medium} V \cdot g$	
kinetische Energie	E_k	=	$\frac{1}{2} mv^2$	J = Ws
Federenergie	E_F	=	$\frac{1}{2} Dy^2$	J
Arbeit	W_AB	=	$\int_{s_A}^{s_B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$	Nm = J
Leistung	P	=	$\frac{dW}{dt}$	J/s
Zentripetalkraft	F_Z	=	$\frac{mv^2}{r}$	N
Druck	p	=	$\frac{F_N}{A}$	$N/m^2 = Pa$
Gravitationsgesetz	F	=	$G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$	
red. Masse	μ	=	$\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$	

$$\int \sin(ax) \cdot \cos^n(ax) dx = -\frac{\cos^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C$$

$$\int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \tan^2(x) dx = \frac{\sec^2(x)}{2} + \ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \tan^4(x) dx = x + \frac{1}{3} \tan(x) (\sec^2(x) - 4) + C$$

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \tanh x dx = \ln \cosh x + C$$

$$\int \sin^2(kx) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2k} \sin(2kx) + C$$

$$\int_a^b x(a-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = 2 \left[\frac{a}{n\pi} \right]^3 [1 - \cos(n\pi)]$$

$$\int_a^b x \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{a^2}{4} \quad (n \text{ positive integer})$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \left(\frac{\pi}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (n \text{ positive integer})$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \int_0^a \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \frac{a}{2} \delta_{nm}$$

10.8 Vektoranalysis

$$\text{Kreuzprodukt: } \vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cdot z - c \cdot y \\ c \cdot x - a \cdot z \\ a \cdot y - b \cdot x \end{pmatrix}$$

$$\text{Gradient: } \text{grad}(a) = \vec{\nabla} \cdot a = \begin{pmatrix} \frac{da}{dx} \\ \frac{da}{dy} \\ \frac{da}{dz} \end{pmatrix}$$

$$\text{Divergenz: } \text{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\text{Rotation: } \text{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

