תורת השדות ב' - עבודת גמר

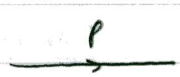
מרק דנוביץ' 303898266

לגרנז'יאן QED:

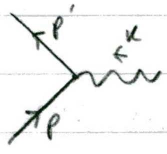
$$\mathcal{L}_{QED}=-\frac{1}{4}F^2-\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2+i\bar\Psi\slashed{\partial}\Psi-m\bar\Psi\Psi-e\bar\Psi\slashed{A}\Psi+\mathcal{L}_{C.T.}$$

כאשר אנו דנים בכיול פיינמן ($\xi=1$) מניחים כי התורה רנורמליזבילית, כלומר $\mathcal{L}_{C.T.}$ מכיל את איברי הנגד מאותה צורה כמו האיברים המקוריים ומבטלים את ההתבדרויות בכל סדר ודואגים לקיים את תנאי הרנורמליזביליות המתאים המקשר בין הגדלים הנצפים לחשופים, לכן בכתיבה זו m, e המופיעים הם הגדלים הפיזיקליים/רה-נורמלים בחישובים שלנו שיתבצעו בהנחת הרנורמליזביליות עד סדר α (לולאה אחת).

כללי פיינמן הרלוונטיים בכתיבה זאת:

 $=\dfrac{i(\slashed{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}$ פרופגטור אלקטרון

 $=\dfrac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$ פרופגטור פוטון

 $=ie\gamma_\mu$ קודקוד אינטרקציה

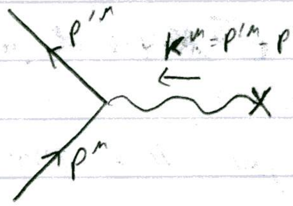
נזכיר כי $\mathcal{L}_{C.T.}$ תורם בכללי פיינמן קודקודים עם $\otimes$ המאפשרים לבטל התבדרויות בכל סדר, בפרט בלולאה אחת כפי שנבדוק ונראה בהמשך.

*[זהויות שנשתמש בהן במהלך החישובים יוכחו או במקביל או לרוב בסוף העבודה]

המומנט המגנטי של האלקטרון מופיע באינטראקציה של האלקטרון עם שדה א"מ חיצוני.

כדי לראות זאת נסתכל על אלמנט מטריצת הפיזור של אלקטרון בשדה שנוצר

ע"י מקור חיצוני. הדיאגרמה המתאימה:



בסדר מוביל בתורת ההפרעות ניתן לדמות את השדה הא"מ כקלאסי, כך שאלמנט המטריצה יהיה:

$$ie\,\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)A_\mu(k^\mu)$$

את ביטוי זה ניתן לכתוב בצורה יותר מפורשת ע"י שימוש בזהות גורדון

$$ie\,\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)A_\mu = \frac{ie}{2m}\bar{u}(p')\left[(p^\mu+p'^\mu)+i\sigma^{\mu\nu}k_\nu\right]u(p)A_\mu(k)$$

האיבר השני מכיל את מטריצת $\sigma^{\mu\nu}$ ולכן מתאר פיזור הקשור עם ספין האלקטרון.

נפשט איבר זה:

$$\frac{ie}{2m}\bar{u}(p')\left[i\sigma^{\mu\nu}k_\nu A_\mu\right]u(p) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{אנטי-סימטריות של } \sigma^{\mu\nu}}}{=} \frac{ie}{2m}\bar{u}(p')\left[i\sigma^{\mu\nu}(k_\nu A_\mu - k_\mu A_\nu)\right]u(p) =$$

$$= \frac{ie}{2m}\bar{u}(p')\left[\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}F_{\nu\mu}\right]u(p) =$$

עבור שדה חיצוני סטטי: $F_{0\mu}=0$, $B_i=\varepsilon_{ijk}F_{jk}$ לכן נשאר רק שדה

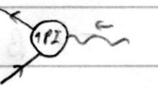
מגנטי בכיוון ציר z $B_3=\varepsilon_{3jk}F_{jk}$ לכן:

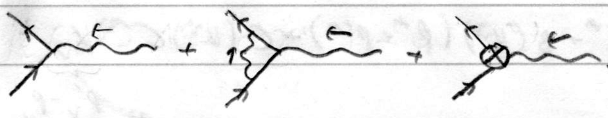
$$= \frac{ie}{2m}\bar{u}(p')\left[\frac{1}{2}\left(\sigma^{12}B_3-\sigma^{21}B_3\right)\right]u(p) = \frac{ie}{2m}\bar{u}(p')\left[\sigma^{12}B_3\right]u(p) =$$

$$= \frac{ie}{2m}\cdot 2\cdot\bar{u}(p')\left[\frac{\Sigma_3}{2}B_3\right]u(p) \quad , \quad \Sigma_3=\begin{pmatrix}\sigma_3 & \\ & \sigma_3\end{pmatrix}$$

מכאן קוראים את המומנט המגנטי: $\mu = g\frac{e}{2m}\underset{\text{אופרטור הספין}}{S}$, עם $g=2$.

לחישוב התיקון למומנט המגנטי של האלקטרון נצטרך לחשב את התיקון הקוונטי הראשון לקודקוד האלקטרומגנטי ולהפריד את התרומה לאיבר הפרופ' ל-$\sigma^{\mu\nu}$.

קודקוד האלקטרומגנטי ניתן לכל סדר בתורת ההפרעות כסכום הדיאגרמות 1PI מהצורה  , בפרט לסדר α בו מתחיל הקודקוד המלא ניתן ע"י:

$ie\Gamma^\mu =$  $+ O(\alpha^2) =$

(*)

$$= ie\left(\gamma^\mu + \Lambda^\mu + \underbrace{C\gamma^\mu}_{\text{איבר נגדי}}\right) + O(\alpha^2)$$

לכן, לצורך חישוב התיקון בסדר α למומנט המגנטי נצטרך לחשב את התרומה של הדיאגרמה השניה לקודקוד האלקטרומגנטי ומכאן לאלמנט מטריצת הפיזור, באופן נוודא שההתבדרויות שיופיעו אכן מטופלות ע"י איבר הנגדי ומתקיים תנאי הרנורמליזציה עבור הקודקוד. לשם החישוב, נרצה לקבל רעיון לגבי התוצאה הצפויה דבר שיקל על החישוב ויבטיח התיקון הרצוי. משיקולים כלליים של סימטריה וקווריאנטיות לורנץ, ניתן לכתוב את הצורה הכללית ביותר עבור הקודקוד כאשר במקרה שלנו נתחיל בקודקוד בין ספינורים של אלקטרונים on-shell. הקודקוד Γ^μ בהיותו 4-וקטור ניתן לכתיבה כסכום של ה-4 וקטורים שניתן לבנות בבעיה, מוכפלים במקדמים סקלריים התלויים

בסקלר הלורנצי בנוסף k^2 ונתונים $p^2=p'^2=m^2$ (לא נכתבו מטריצות של הספינורים)

$$\Gamma^\mu(p,p') = A(k^2)\gamma^\mu + B(k^2)p^\mu + C(k^2)p'^\mu + D(k^2)\sigma^{\mu\nu}p_\nu + E(k^2)\sigma^{\mu\nu}p'_\nu$$

(γ^5 לא נכנס כאן כי ב-QED נשמרת זוגיות). משימור ה-4 זרם: $k_\mu\Gamma^\mu=0$:

$$0 = A\bar{u}(p')\cancel{\not k}^{\,0}u(p) + B\underbrace{k\cdot p}_{\frac{-k^2}{2}} + C\underbrace{k\cdot p'}_{\frac{k^2}{2}} + D\sigma^{\mu\nu}k_\mu p_\nu + E\underbrace{\sigma^{\mu\nu}}_{\text{אנטי סימטרי}}k_\mu \underbrace{p'_\nu}_{(p_\nu+k_\nu)}$$

$$\Rightarrow B=C,\quad E=-D$$

$$\Rightarrow \Gamma^\mu(p,p') = A(k^2)\gamma^\mu + B(k^2)(p^\mu+p'^\mu) + C(k^2)\sigma^{\mu\nu}\underbrace{k_\nu}_{p'_\nu-p_\nu}$$

נשתמש בסימון אחר עבור האיבר השני:

$$\Gamma^\mu(p,p') = F_1(k^2)\gamma^\mu + F_2(k^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}k_\nu}{2m}$$

נשתמש בנוסף בזהות גורדון להצבת החלק הספיני שבאיבר הראשון:

$$\Gamma^\mu(p,p') = F_1(k^2)\frac{(p+p')^\mu}{2m} + [F_1(k^2)+F_2(k^2)]\frac{i\sigma^{\mu\nu}k_\nu}{2m}$$

מהגבול הלא-יחסותי ב-tree-level של הקודקוד, נקבל עבור ה-g-factor:

$g=2(F_1(0)+F_2(0))$ ראינו שבסדר 0 $F_1(0)=1$, $F_2(0)=0$, לכן התיקון

למומנט המגנטי מגיע מ-$F_2(0)=O(\alpha)$. נציג בזהות גורדון את הקודקוד המלא עבור

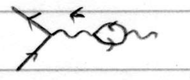
החלק הספינורי ($\sigma^{\mu\nu}$) נותן:

$$\Gamma^\mu(p,p') = (F_1(k^2)+F_2(k^2))\gamma^\mu - F_2(k^2)\frac{(p+p')^\mu}{2m}$$

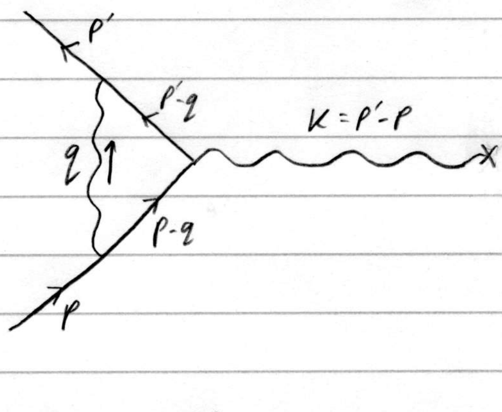
מכאן שבחישוב הדיאגרמה בסעיף האיבר הכולל ל-γ^μ לא יתרום לתיקון ונוכל

להתעלם ממנו, עד שנרצה.

בחישוב התיקון לקודקוד בסופו של דבר ניקח את ערך הדיאגרמה בין ספינורי דיראק $\bar{u}(p')\Lambda_\mu(p',p)u(p)$ עם 4-תנעים on-shell כדי לקשור את הדיאגרמה לגורמים מפורשים בפיזור ולקבל את התרומה לאינטרקציה איבר הספין. עבור השדה החיצוני והתנע המועבר אנו מניחים פיזור חלש משדה חיצוני וסטטי כך שהרכיב היחיד של A_μ יהיה מרוכז סביב $k=0$ מכאן שבסוף ניקח את הגבול $k^2=0$.

נעיר, כי דיאגרמות נוספות מאותו הסדר (לולאה אחת) הקשורות לאותו תהליך פיזור כמו:  ,  משתלבות עם איבר המגנט (הזזת מתבדרים) ותורמות לרנורמליזציה של מסת ומטען האלקטרון, אך אינן תורמות למומנט המגנטי.

הדיאגרמה שנרצה לחשב מהמשוואה (*) של קודקוד פרמטרי:



$$ie\Lambda_\mu = (ie)^3\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{-ig^{\rho\lambda}}{(q^2+i\epsilon)}\,\gamma_\lambda\,\frac{i(\not{p}'-\not{q}+m)}{(p'-q)^2-m^2+i\epsilon}\,\gamma_\mu\,\frac{i(\not{p}-\not{q}+m)}{(p-q)^2-m^2+i\epsilon}\,\gamma_\rho$$

$$\Lambda_\mu = -ie^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{q^2+i\epsilon}\,\gamma_\lambda\,\frac{(\not{p}'-\not{q})+m}{(p'-q)^2-m^2+i\epsilon}\,\gamma_\mu\,\frac{(\not{p}-\not{q})+m}{(p-q)^2-m^2+i\epsilon}\,\gamma^\lambda \qquad (1)$$

נתחיל מפישוט המכנה ע"י שימוש בפרמטרי פיינמן:

$$\frac{1}{abc} = 2\int_0^1 dx\,dy\,dz \frac{\delta(x+y+z-1)}{(az+bx+cy)^3} =$$

$$= 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(a(1-x-y)+bx+cy)^3}$$

נסמן:

$$a = q^2 + i\varepsilon$$
$$b = (p'-q)^2 - m^2 + i\varepsilon$$
$$c = (p-q)^2 - m^2 + i\varepsilon$$

נקבל במכנה:

$$(q^2+i\varepsilon)(1-x-y) + ((p'-q)^2-m^2+i\varepsilon)x + ((p-q)^2-m^2+i\varepsilon)y =$$

$$= q^2 + p'^2x + p^2y - m^2(x+y) - 2q(p'x+py) + i\varepsilon =$$

$$= q^2 - 2q(p'x+py) - r + i\varepsilon$$

סימנו: $r = -p'^2x - p^2y + m^2(x+y)$

מכאן (1) הופך ל:

$$\Lambda_\mu = -2ie^2\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\lambda(\not p' - \not q + m)\gamma_\mu(\not p - \not q + m)\gamma^\lambda}{[q^2 - 2q(xp'+yp) - r + i\varepsilon]^3}$$

נבצע החלפת משתנים הלולאה:

$$q^\mu \to q^\mu + xp'^\mu + yp^\mu$$

תחת ההזזה הזאת, המכנה הופך ל:

$$q^2-2q(xp'+yp)-r+i\varepsilon \rightarrow q^2+(xp'^{\mu}+yp^{\mu})^2+2q\cancel{(xp'+yp)}$$

$$-2q\cancel{(xp'+yp)}-2(xp'+yp)^2-r+i\varepsilon = q^2-(xp'+yp)^2-r+i\varepsilon$$

$$= q^2-t^2-r+i\varepsilon$$

סימון: $t^{\mu}=xp'^{\mu}+yp^{\mu}$

במונה:

$$\gamma_\lambda(\not{p}'-\not{q}+m)\gamma_\mu(\not{p}-\not{q}+m)\gamma^\lambda \rightarrow$$

$$\gamma_\lambda(\not{p}'-\not{q}-x\not{p}'-y\not{p}+m)\gamma_\mu(\not{p}-\not{q}-x\not{p}'-y\not{p}+m)\gamma^\lambda =$$

$$=\gamma_\lambda(\not{p}'-\not{t}+m)\gamma_\mu(\not{p}-\not{t}+m)\gamma^\lambda+\gamma_\lambda\not{q}\gamma_\mu\not{q}\gamma^\lambda + \text{איברים ליניאריים ב-}\not{q}$$

נשים לב כי האיברים הליניאריים ב-q^μ יתאפסו באינטגרל הלולאה בגלל אנטיסימטריה

אי זוגי ב-q^μ על תחום סימטרי.

$$\Lambda_\mu=-2ie^2\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{\gamma_\lambda(\not{p}'-\not{t}+m)\gamma_\mu(\not{p}-\not{t}+m)\gamma^\lambda+\gamma_\lambda\not{q}\gamma_\mu\not{q}\gamma^\lambda}{[q^2-t^2-r+i\varepsilon]^3}$$

נשים לב שהאיבר השני תורם איבר שמתנהג בגבול של q גדול כמו: $\int\frac{q^5}{q^6}\sim\log(q)$

כלומר מתבדר לוגריתמית. נשתמש בנוסחה הנכונה למימד מרחב-זמן d כללי:

$\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma^\rho\gamma^\nu=\gamma_\mu(2-d)^2$ מתאים כי לאחר רגולריזציה של האינטגרל (למשל רגולריזציה מימדית)

ההתבדרות תהיה פרופ' ל-γ_μ ולכן תאוזן ע"י איבר הנגד שנבחר בסדר המתאים

כדי שיוכל לבטל את ההתבדרות. לכן נתמקד מעכשיו בחישוב האיבר הראשון

$$\Lambda_\mu^{(1)} = -2ie^2\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{\gamma_\lambda(\not p'-\not k+m)\gamma_\mu(\not p-\not k+m)\gamma^\lambda}{[q^2-t^2-r+i\varepsilon]^3}$$

נחשב תחילה את אינטגרל הלולאה:

$$\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{[q^2-t^2-r+i\varepsilon]^3} \qquad (*)$$

האינטגרציה על q^0 מכילה קטבים ב- $\pm\sqrt{|q|^2+t^2+r}\mp i\varepsilon$, ולכן לצורך ביצוע האינטגרל

נגדיר משתנה אינטגרציה חדש: $q^0 = iq_E\,,\ \vec{q}=\vec{q}_E \Rightarrow q^2 = q_0^2-|q|^2 = -q_0^2-|\vec{q}_E|^2$

כלומר אנו עוברים לאינטגרציה אוקלידית - [illegible] סובבנו את הזמן לציר

המדומה (סיבוב וויק) כדי להמנע את הקטבים.

$$\Rightarrow (*) = -i\int\frac{d^4q_E}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{[q_E^2+t^2+r]^3} = \frac{-i}{(2\pi)^4}\underbrace{\int d\Omega_4}_{=(2\pi)^2}\int_0^\infty dq_E\,\frac{q^3}{[q_E^2+t^2+r]^3} =$$

$$= \frac{-2i}{(4\pi)^2}\int_0^\infty dq_E\,\frac{q_E^3}{[q_E^2+t^2+r]^3} = \frac{-i}{(4\pi)^2}\int_{t^2+r}^\infty du\,\frac{q_E^2}{u^3} =$$

$u = q_E^2+t^2+r$

$\Rightarrow du = 2q_E\,dq_E$

$$= \frac{-i}{(4\pi)^2}\int_{t^2+r}^\infty \frac{u-t^2-r}{u^3} = -\frac{i}{(4\pi)^2}\left(-\frac{1}{u}\Big|_{t^2+r}^\infty - \frac{t^2+r}{2u^2}\Big|_{t^2+r}^\infty\right) =$$

$$= \frac{-i}{(4\pi)^2}\left(\frac{1}{t^2+r} - \frac{1}{2(t^2+r)}\right) = \frac{-i}{2(4\pi)^2}\frac{1}{t^2+r}$$

$$\Rightarrow \quad \Lambda_\mu^{(2)} = \frac{-e^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \; \frac{\gamma_\lambda(\not{p}'-\not{t}+m)\gamma_\mu(\not{p}-\not{t}+m)\gamma^\lambda}{t^2+r}$$

כמו שהוסבר לחישוב התרומה למומנט המגנטי נרצה לחשב את הביטוי בין ספינורי

דיראק עבור האלקטרון הנכנס והיוצא עם p^μ ו-p'^μ on-shell כדי לקבל את התרומה

למומנט משרעת הפיזור. ובמקרה נשתמש בקירוב הפיזור הרך מאחר שלא והמומנטים כך ש- $k^2 \ll m^2$

נחשב את המכנה תחת ההנחות:

$$t^2+r = (xp'^\mu+yp^\mu)^2 - p'^2x - p^2y + m^2(x+y) \underset{p^2=p'^2=m^2}{\overset{\uparrow}{=}} x^2m^2 + y^2m^2 + 2xy\,p\cdot p'$$

$$-\cancel{m^2x} - \cancel{m^2y} + \cancel{m^2(x+y)} = m^2(x^2+y^2) + 2xy\,p'\cdot p =$$

$$\left(\begin{array}{l} 2p'\cdot p = 2(p+k)\cdot p = 2m^2 + \underset{\downarrow}{2p\cdot k} = 2m^2 \\ \qquad m^2 = p'^2 = (p+k)^2 = m^2+2pk+k^2 \Rightarrow 2p\cdot k = -k^2 \simeq 0 \end{array}\right)$$

$$= m^2(x^2+y^2) + 2xym^2 = m^2(x+y)^2$$

נחזור לחשב את המונה, ולצורך כך נשתמש בזהויות הבאות (יוכחו בסוף):

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \;,\quad \not{p}u(p) = mu(p) \;,\quad \bar{u}(p')\not{p}' = m\bar{u}(p') \;,\quad \bar{u}(p')\not{k}u(p) = 0$$

$$(\not{p}+m)\gamma_\lambda u(p) = 2p_\lambda u(p) \;,\quad \bar{u}(p')\gamma_\lambda(\not{p}'+m) = 2p'_\lambda\bar{u}(p')$$

$$\not{p}\gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu\not{p} \;,\quad \not{p}^2 = \not{p}'^2 = p^2 = p'^2 = m^2$$

$\bar u(p')[\gamma_\lambda(\not p'-\not k+m)\gamma_\mu(\not p-\not k+m)\gamma^\lambda]u(p)=$

$=\bar u(p')[\gamma_\lambda\not p'\gamma_\mu\not p\gamma^\lambda-\gamma_\lambda\not p'\gamma_\mu\not k\gamma^\lambda+\gamma_\lambda\not p'\gamma_\mu m\gamma^\lambda-\gamma_\lambda\not k\gamma_\mu\not p\gamma^\lambda$

$+\gamma_\lambda\not k\gamma_\mu\not k\gamma^\lambda-\gamma_\lambda\not k\gamma_\mu m\gamma^\lambda+\gamma_\lambda m\gamma_\mu\not p\gamma^\lambda-\gamma_\lambda m\gamma_\mu\not k\gamma^\lambda+m^2\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma^\lambda]u(p)=$

$=\bar u(p')[(2p'_\lambda-m\gamma_\lambda)\gamma_\mu(2p^\lambda-m\gamma^\lambda)-(2p'_\lambda-m\gamma_\lambda)\gamma_\mu\not k\gamma^\lambda+(2p'_\lambda-m\gamma_\lambda)\gamma_\mu m\gamma^\lambda$

$-\gamma_\lambda\not k\gamma_\mu(2p^\lambda-m\gamma^\lambda)-2\not k\gamma_\mu\not k-\gamma_\lambda\not k\gamma_\mu m\gamma^\lambda+\gamma_\lambda m\gamma_\mu(2p^\lambda-m\gamma^\lambda)-\gamma_\lambda m\gamma_\mu\not k\gamma^\lambda$

$+m^2\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma^\lambda]u(p)=$

$=\bar u(p')[4p'\cdot p\gamma_\mu-\cancel{2p'_\lambda\gamma_\mu m\gamma^\lambda}-\cancel{2m\gamma_\lambda\gamma_\mu p^\lambda}+\cancel{m^2\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma^\lambda}-2p'_\lambda\gamma_\mu\not k\gamma^\lambda$

$+\cancel{m\gamma_\lambda\gamma_\mu\not k\gamma^\lambda}+\cancel{2p'_\lambda\gamma_\mu m\gamma^\lambda}-\cancel{m^2\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma^\lambda}-2\gamma_\lambda\not k\gamma_\mu p^\lambda+\cancel{m\gamma_\lambda\not k\gamma_\mu\gamma^\lambda}$

$-2\not k\gamma_\mu\not k-\cancel{\gamma_\lambda\not k\gamma_\mu m\gamma^\lambda}+\cancel{2\gamma_\lambda m\gamma_\mu p^\lambda}-\cancel{m^2\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma^\lambda}-\cancel{\gamma_\lambda m\gamma_\mu\not k\gamma^\lambda}+\cancel{m^2\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma^\lambda}]u(p)=$

$=\bar u(p')[4p'\cdot p\gamma_\mu-2\gamma_\mu\not k\not p'-2\not p\not k\gamma_\mu-2\not k\gamma_\mu\not k]u(p)=$

$=\bar u(p')[4m^2\gamma_\mu-2\gamma_\mu(x\not p'+y\not p)\not p'-2\not p(x\not p'+y\not p)\gamma_\mu-2(x\not p'+y\not p)\gamma_\mu(x\not p'+y\not p)]u(p)=$

$=\bar u(p')[4m^2\gamma_\mu-2xm^2\gamma_\mu-2y\gamma_\mu\not p\not p'-2x\not p\not p'\gamma_\mu-2ym^2\gamma_\mu-2x^2m\gamma_\mu\not p'$

$-2y^2\not p\gamma_\mu m-2xym^2\gamma_\mu-2xy\not p\gamma_\mu\not p']u(p)=$

$=\bar u(p')[\gamma_\mu(4m^2-2xm^2-2ym^2)-2y\gamma_\mu\gamma_\nu p^\nu\not p'-2x\not p(2p'_\mu-\gamma_\mu\not p')$

$-2mx^2(2p'_\mu-m\gamma_\mu)-2y^2m(2p_\mu-m\gamma_\mu)-2xym^2\gamma_\mu-2xy\not p\gamma_\mu\not p']u(p)=$

$=\bar u(p')[\gamma_\mu(4m^2-2xm^2-2ym^2+2y^2m^2+2x^2m^2-2xym^2\gamma_\mu)-2y(2g_{\mu\nu}-\gamma_\nu\gamma_\mu)p^\nu\not p'$

$-4mxp'_\mu-4mx^2p'_\mu-4my^2p_\mu+(2x-2xy)\not p\gamma_\mu\not p']u(p)=$

$$\bar{u}(p')[\gamma_\mu(4m^2-2xm^2-2ym^2+2x^2m^2+2y^2m^2-2xym^2)-4myp_\mu-4mxp'_\mu-4mx^2p'_\mu$$

$$-4my^2p_\mu+(2x+2y-2xy)\not p\gamma_\mu\not p']u(p)$$

נטפל בגורם של האיבר האמצעי:

$$\bar{u}(p')[\not p\gamma_\mu\not p']u(p)=\bar{u}(p')[\not p\gamma_\mu(\not p+\not k)]u(p)=$$

$$=\bar{u}(p')[m(2p_\mu-m\gamma_\mu)+(2p_\mu-\gamma_\mu\not p)\not k]u(p)=$$

$$=\bar{u}(p')[2mp_\mu-m^2\gamma_\mu+2p_\mu\overset{0}{\cancel{\not k}}-\gamma_\mu\not p\gamma_\nu k^\nu]u(p)=$$

$$=\bar{u}(p')[2mp_\mu-m^2\gamma_\mu-\gamma_\mu(2p_\nu-m\gamma_\nu)k^\nu]u(p)=$$

$$=\bar{u}(p')[2mp_\mu-m^2\gamma_\mu-2\gamma_\mu\overset{\propto k^2\to 0}{\cancel{p\cdot k}}+m\gamma_\mu(\not p'-\not p)]u(p)=$$

$$=\bar{u}(p')[2mp_\mu+m(2p'_\mu-m\gamma_\mu)-2m^2\gamma_\mu]u(p)=$$

$$=\bar{u}(p')[2mp_\mu+2mp'_\mu-3m^2\gamma_\mu]u(p)$$

נשוב חזרה לביטוי הראשי שלנו:

$$\bar{u}(p')[\gamma_\mu(4m^2-8xm^2-8ym^2+2x^2m^2+2y^2m^2+4xym^2)-$$

$$-\cancel{4myp_\mu}-\cancel{4mxp'_\mu}-4mx^2p'_\mu-4my^2p_\mu+4mxp_\mu+\cancel{4myp_\mu}+\cancel{4mxp'_\mu}+4myp'_\mu$$

$$-4mxyp_\mu-4mxyp'_\mu]u(p)=$$

$$=\bar{u}(p')[f(x,y,m)\gamma_\mu-4m(p_\mu(y^2-x+xy)+p'_\mu(x^2-y+xy))]u(p)$$

כפי שהוסבר הא'בר הטרופי ל-γ_μ אינו תורם לתיקון למומנט המגנטי אלא מטופל

ע"י תנאי הרנורמליזציה עבור הקודקוד, כלומר משחזר את הקודקוד והצימוד ב-tree level

עבור אלקטרון חופשי on-shell.

לכן נחשב את תרומת החלק הנותר:

$$\bar{u}(p')\Lambda^{(\mu)}_{m}u(p) = \frac{4e^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\, \frac{\bar{u}(p')\left[p'_\mu\left(x(x+y)-y\right)+p_\mu\left(y(x+y)-x\right)\right]u(p)}{m(x+y)^2}$$

שני האיברים מתקבלים אחד מהשני ע"י $x \leftrightarrow y$ ואלה הם משתני דמי, לכן יתנו אותה תוצאה

נחשב אחד מהם:

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\, \frac{y(x+y)-x}{(x+y)^2} = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\left[\frac{y}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}\right] =$$

$$\underset{z=x+y}{=} \int_0^1 dx\int_x^1 dz\left[\frac{z-x}{z}-\frac{x}{z^2}\right] = \int_0^1 dx\left(z - x\ln z + \frac{x}{z}\right)\Bigg|_x^1 =$$

$$= \int_0^1 dx\left(1 - x + x\ln x + x - 1\right) = \int_0^1 dx\,(x\ln x) =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 dx\,\frac{x^2}{2x} = -\frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}$$

נקבל בהצבה:

$$\bar{u}(p')\Lambda^{(2)}_{\mu}u(p) = \frac{-e^2}{(4\pi)^2}\,\bar{u}(p')\left[\frac{p'_\mu + p_\mu}{m}\right]u(p)$$

משתמש בזהות גורדון ומבודד את האיבר הכולל ל־ $\sigma_{\mu\nu}$, שכן אותו תורם

למומנט המגנטי:

$$\rightarrow \quad \frac{ie^2}{(4\pi)^2 m}\,\bar{u}(p')\left[\sigma_{\mu\nu}k^\nu\right]u(p) = \frac{i\alpha}{4\pi m}\,\bar{u}(p')\left[\sigma_{\mu\nu}k^\nu\right]u(p)$$

תוספת התרומה הבאה לקודקוד הכולל:

$$\bar{u}(p')\left[\gamma_\mu + \frac{i\alpha}{4\pi m}\sigma_{\mu\nu}k^\nu\right]u(p) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{זהות} \\ \text{גורדון}}}{=} \bar{u}(p')\left[\frac{p_\mu + p'_\mu}{2m} + \frac{i}{2m}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)\sigma_{\mu\nu}k^\nu\right]u(p)$$

מכאן אנו קוראים את ה- g-factor של האלקטרון עד לסדר α:

$$\frac{g}{2} = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2) = 1.00116 + O(\alpha^2)$$

<u>הוכחת זהויות:</u>

הוכחת זהות גורדון:

נשתמש ביחסי הקומוטציה ואנטי-קומוטציה: $\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2g_{\mu\nu}$, $[\gamma_\mu,\gamma_\nu]=-2i\sigma_{\mu\nu}$

משוו' דיראק: $(1)\ \gamma_\nu p^\nu u(p)=m u(p)$, $(2)\ \bar{u}(p')\gamma_\nu p'^\nu=m\bar{u}(p')$

$$\begin{cases}\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu}\\ \gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu=-2i\sigma_{\mu\nu}\end{cases}\quad +,/2\Rightarrow\quad \gamma_\mu\gamma_\nu=g_{\mu\nu}-i\sigma_{\mu\nu}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma_\nu\gamma_\mu=\underset{\text{סימטרי}}{g_{\nu\mu}}+i\underset{\text{אנטי סימטרי}}{\sigma_{\mu\nu}}$$

נכפיל את (1) משמאל ב- γ_μ:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu p^\nu=m\gamma_\mu u(p)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{m}(g_{\mu\nu}-i\sigma_{\mu\nu})p^\nu u(p)=\gamma_\mu u(p)\Rightarrow\frac{1}{m}(p_\mu-i\sigma_{\mu\nu}p^\nu)u(p)=\gamma_\mu u(p)$$

נכפיל את (2) מימין ב- γ_μ:

$$\bar{u}(p')\gamma_\nu\gamma_\mu p'^\nu=m\bar{u}(p')\gamma_\mu$$

$$\frac{1}{m}\bar{u}(p')(g_{\mu\nu}+i\sigma_{\mu\nu})p'^\nu=\bar{u}(p')\gamma_\mu\Rightarrow\frac{1}{m}\bar{u}(p')(p'_\mu+i\sigma_{\mu\nu}p'^\nu)=\bar{u}(p')\gamma_\mu$$

$$\Rightarrow\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)=\frac{1}{2}\bar{u}(p')[\gamma_\mu u(p)]+\frac{1}{2}[\bar{u}(p')\gamma_\mu]u(p)=$$

$$=\frac{1}{2m}\left[\bar{u}(p')\left(p_\mu-i\sigma_{\mu\nu}p^\nu+p'_\mu+i\sigma_{\mu\nu}p'^\nu\right)u(p)\right]=$$

$$=\frac{1}{2m}\bar{u}(p')\left[(p'_\mu+p_\mu)+i\sigma_{\mu\nu}k^\nu\right]u(p)$$

להוכיח שמתקיים:

1) $\not p \gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu \not p$

$\rightarrow \not p \gamma^\mu = p_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu = p_\nu (2g^{\nu\mu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) = 2p^\mu - \gamma^\mu \not p$

2) $\bar u(p') \not k u(p) = 0$

$\rightarrow \bar u(p')(\not p' - \not p) u(p) = \bar u(p')(m-m)u(p) = 0$

3) $(\not p + m)\gamma_\lambda u(p) = 2p_\lambda u(p)$

$\rightarrow (\not p + m)\gamma_\lambda u(p) \underset{(1)}{=} (2p_\lambda - \gamma^\lambda \not p + m) u(p) = 2p^\lambda u(p)$

4) $\bar u(p')\gamma_\lambda(\not p' + m) = 2p'_\lambda \bar u(p')$

$\rightarrow \bar u(p')\gamma_\lambda(\not p' + m) = \bar u(p')(\gamma_\lambda \gamma_\mu p'^\mu + m\gamma_\lambda) = \bar u(p')(2p'_\lambda - \underbrace{\not p'}_{m}\gamma_\lambda + m\gamma_\lambda) =$

$= 2p'_\lambda \bar u(p')$

5) $\gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma^\beta \gamma^\nu = \gamma_\mu (2-d)^2$ (עבור מרחב-זמן d)

$\rightarrow (2g_{\nu\beta} - \gamma_\beta\gamma_\nu)\gamma_\mu\gamma^\beta\gamma^\nu = 2\gamma_\mu \underbrace{\gamma_\nu\gamma^\nu}_{(7)\ d} - \gamma_\beta\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\beta\gamma^\nu =$

$= 2\gamma_\mu d - \gamma_\beta(2g_{\nu\mu} - \gamma_\mu\gamma_\nu)(2g^{\beta\nu} - \gamma^\nu\gamma^\beta) = 2\gamma_\mu d - \gamma_\beta(4\delta^\beta_\mu - 2\gamma_\mu\gamma^\beta - 2\gamma_\mu\gamma^\beta$

$+ d\gamma_\mu\gamma^\beta) = 2d\gamma_\mu - 4\gamma_\mu + 4\underbrace{\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma^\beta}_{(6)\ (2-d)\gamma_\mu} - d\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma^\beta =$

$= \cancel{2d\gamma_\mu} - 4\gamma_\mu + 8\gamma_\mu - 4d\gamma_\mu - \cancel{2d\gamma_\mu} + d^2\gamma_\mu = \gamma_\mu(d^2 - 4d + 4) =$

$= \gamma_\mu(2-d)^2$

6) $\gamma_\beta \gamma_\mu \gamma^\beta = (2-d)\gamma_\mu$

$$\rightarrow (2g_{\beta\mu} - \gamma_\mu \gamma_\beta)\gamma^\beta = 2\gamma_\mu - d\gamma_\mu = (2-d)\gamma_\mu$$

7) $\gamma_\mu \gamma^\mu = d$

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = g^{\mu\nu}\gamma_\mu \gamma_\nu = g^{\mu\nu}(2g_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu) = 2d - \gamma^\mu \gamma_\mu \Rightarrow \gamma^\mu \gamma_\mu = d$$

8) $$\frac{1}{abc} = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \, \frac{1}{(a(1-x-y)+bx+cy)^3}$$ פרמטרי פיינמן:

$$2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \, \frac{1}{(y(c-a)+x(b-a)+a)^3} = -\int_0^1 dx \left(\frac{1}{(c-a)(y(c-a)+x(b-a)+a)^2} \right)\Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= -\int_0^1 dx \, \frac{1}{c-a}\left(\frac{1}{(c+x(b-c))^2} - \frac{1}{(x(b-a)+a)^2} \right) =$$

$$= \int_0^1 dx \, \frac{1}{c-a}\left(\frac{1}{(b-c)(c+x(b-c))} - \frac{1}{(b-a)(a+x(b-a))} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{c-a}\left(\frac{1}{b(b-c)} - \frac{1}{b(b-a)} - \frac{1}{c(b-c)} + \frac{1}{a(b-a)} \right) =$$

$$= \frac{1}{c-a}\left(\frac{ac(b-a) - ac(b-c) - ab(b-a) + bc(b-c)}{abc(b-c)(b-a)} \right) =$$

$$= \frac{1}{c-a}\left(\frac{a(b-a)(c-b) + c(b-c)(b-a)}{(abc)(b-c)(b-a)} \right) = \frac{1}{c-a} \cdot \frac{c-a}{abc} = \frac{1}{abc}.$$

מקורות: 1) Ryder - QFT, 2) Mandl, Shaw - QFT, 3) Peskin, Schroeder - QFT