Trabalho Teórico 5

Marco Aurélio Silva de Souza Júnior - 696809

Exercício Resolvido 1 (slide 5):

Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros:

$\sum_{i=0}^{n} = 0 + 1 + 2 + ...n$

Exercício Resolvido 2:

O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Quantas comparações entre registros ele realiza?

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
  int menor = i;

  for (int j = (i + 1); j < n; j++){
    if (array[menor] > array[j]){  // comparações = n - i - 1
    menor = j;
    }
  }
  swap(menor, i);
}
```

comparações = n - i - 1

Exercício Resolvido 3:

$\sum_{n=1}^{4} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

Exercício Resolvido 4:

$\sum_{1}^{4} 3.i = 3.1 + 3.2 + 3.3 + 3.4 = 30$

Exercício Resolvido 5:

$\sum_{1}^{4} (3 - 2.i) = 3 - 2.1 + 3 - 2.2 + 3 - 2.3 + 3 - 2.4 = -8$

Exercício Resolvido 6:

$\sum_{1}^{3}(2.i+x) = 2.1+x+2.2+x+2.2+x+2.3+x = 12+3x$

Exercício Resolvido 7:

$\sum_{0}^{5} i.(i-1).(5-i) = 0+0+2.1.3+3.2.2+4.3.1+0 = 30$

Exercício Resolvido 8:

Podemos afirmar que $\sum_{0}^{5} i.(i-1).(5-i) = \sum_{2}^{4} i.(i-1).(5-i)$?

Sim, pois os termos relativos a i=0, i=1 e i=5 são nulos.

Exercício Resolvido 9:

Resposta: $\sum_{i=0}^{3}(3.i+2)^2 = (3x0+2)^2+(3x1+2)^2+(3x2+2)^2+(3x3+2)^2 = 4+25+64+121$

Exercício Resolvido 10:

$\sum_{m=1}^{4} 8k-6m = 8k-6+8k-12+8k-18+8k-24$

Exercício Resolvido 11:

$\sum_{3}^{n} a_i + \sum_{1}^{n} b_i = -a_1 - a_2 + \sum_{1}^{n}(a_i+b_i)$

Exercício Resolvido 12:

Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

a) $\sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3$; verdadeira, pois para k=0 a expressão vale 0.

b) $\sum_{p=0}^{1000}(3+p) = 3+\sum_{k=0}^{1000} p$; falsa, a expressão correta é $\sum_{p=0}^{1000}(3+p) = \sum_{k=0}^{1000} 3 + \sum_{k=0}^{1000} p$.

c) $\sum_{l=1}^{n}(3l) = 3.\sum_{l=1}^{n} l$; verdadeira, aplicando distributividade na constante 3;

d) $\sum_{k=0}^{12} k^p = (\sum_{k=0}^{12} k)^p$; falsa, a expressão correta é $\sum_{k=0}^{12} k^p = k^0+k^1+k^2+...+k^{12}$;

e) $\sum_{t=8}^{32} 3+t = \sum_{t=8}^{32} 3 + \sum_{t=8}^{32} t = 3.(32-8+1) + \sum_{t=8}^{32} t = 75 + \sum_{t=8}^{32} t$; verdadeira.

Exercício Resolvido 13:

$\sum_{i=0}^{4}(3+2.i) = (3+2.0)+(3+2.1)+(3+2.2)+(3+2.3)+(3+2.4)$

$\sum_{i=0}^{4}[3+2.(4-i)] = [3+2.(4-0)]+[3+2.(4-1)]+[3+2.(4-2)]+[3+2.(4-3)]+[3+2.(4-4)]$

As expressões são iguais.

Exercício Resolvido (14):

Mostre os valores de a e b na sequência 1, 4, 7, 10, 13, …

a = 1,

b = 3.

1 + 3.0 + 1 + 3.1 … 1 + 3.n

Exercício Resolvido (15)

$S_n = \sum_{i=0}^{n} a + b.i$ =

$\sum_{n-i=0}^{n} a + b(n-i) = \sum_{i=0}^{n}(a+bn-bi)$

$2S_n = \sum_{i=0}^{n}(a+b.i) + \sum_{i=0}^{n}(a+bn-bi)$

$2S_n = \sum_{i=0}^{n}(a+b.i) + (a+bn-bi)$

$2S_n = \sum_{i=0}^{n} 2a+bn = (2a+bn)\sum_{i=0}^{n} 1$, $\sum_{i=0}^{n} 1 = n+1;$

$2S_n = (2a+bn)(n+1)$

$S_n = (2a+bn)(n+1)/2$

Exercício Resolvido (16)

Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula para o somatório de 0 + 1 + 2 + 3 + … + n = $\sum_{0}^{n}$i

a=0, b=1 ⇒

$(2.0+1.n).(n+1)/2 = n.(n+1)/2$

Exercício Resolvido (17)

Dada a fórmula fechada do somatório dos n primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

Resp.:

```
int somatorio(int n){
  int soma = 0;
  for(int i = 1; i <= n; i++){
    soma += i;
  }
  return soma;
}
```

```
int somatorio(int n) {
  return ((n * (n + 1)) / 2);
}
```

Exercício (1)

Faça um método int somatorioPA(double a, double b, int n) que retorna o somatório dos n primeiros termos de uma PA com termo inicial a e razão b.

```
int somatorioPA(double a, double b, int n) {
  return (2*a + b * n) * (n + 1) / 2;
}
```

Exercício Resolvido (18)

O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{i=0}^{n-2}$(n - i - 1) comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório.

Resp.:

ER 18)

$$\sum_{i=0}^{n-2} n-i-1 = \sum_{i=0}^{n-2} n - \sum_{i=0}^{n-2} i - \sum_{i=0}^{n-2} 1$$

$$= n\cdot(n-1) - \sum_{i=0}^{n-2} i - 1\cdot(n-1)$$

$$= n(n-1)-(n-1) - \left[\sum_{i=0}^{n} i - (n) - (n-1)\right]$$

$$= n(n-1) \cancel{-(n-1)} + n + \cancel{(n-1)} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n(n-1) + n - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2n(n \cancel{-1} \cancel{+1}) - n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2n^2 - n^2 - n}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \theta(n^2)$$

Exercício Resolvido (19)

O termo da direita possui no somatório o elemento nulo para i = 0, tornando-o igual ao termo da esquerda.

Exercício Resolvido (20)

O que varia nestes somatórios é o índice "i" de "a", assim, não necessariamente $a_0 = 0$.

Exercício Resolvido (21)

$\sum_1^n a_i = \sum_0^{n-1} a_{i+1}$

$a_1 + a_2 + ... + a_n = a_{0+1} + a_{1+1} + a_{2+1} + ... + a_{(n-1)+1}$

Exercício Resolvido (22)

A primeira fórmula reduz a quantidade de parcelas no somatório, ignorando os termos iguais a zero, que são para i = {0, 1, n}.

Exercício (2)

$$\sum_1^{m-3} a_i + \sum_m^n a_i = a_m + \sum_1^n a_i \quad , \quad 1 \leq m \leq n$$

$$[a_1 + a_2 + ... + a_{m-3}] + [a_m + a_{m+1} + ... + a_n]$$

Para unificar os dois somatórios, deve-se acrescentar os termos a_{m-2} e a_{m-1}, assim:

$$[a_1 + a_2 + ... + a_{m-3}] + [a_{m-2} + a_{m-1}] + [a_m + a_{m+1} + ... + a_n] - [a_{m-2} + a_{m-1}]$$

$$\sum_1^n a_i - [a_{m-2} + a_{m-1}]$$

Exercício Resolvido 23

ER 23

$$S_n = \sum_0^n a . x^i$$

$$S_{n+1} = S_n + a . x^{n+1} = a . x^0 + \sum_0^n a \cdot x^{i+1}$$

$$S_n + a . x^{n+1} = a + x \underbrace{\sum_0^n x^i}_{S_n}$$

$$S_n + a . x^{n+1} = a + x \cdot S_n$$

$$S_n (1 - x) = a - a x^{n+1}$$

$$S_n = \frac{a(1 - x^{n+1})}{1 - x}$$

//

Exercício Resolvido 24

ER 24)

$$S_n = \sum_0^n i \cdot 2^i$$

$$S_n + \underbrace{(n+1) \cdot 2^{n+1}}_{a_{n+1}} = \underbrace{0 \cdot 2^0}_{a_0} + \sum_0^n (i+1) \cdot 2^{i+1}$$

$$S_n + (n+1)\, 2^{n+1} = \sum_0^n i \cdot 2^{i+1} + \sum_0^n 2^{i+1}$$

$$S_n + (n+1)\, 2^{n+1} = 2 \sum_0^n i \cdot 2^i + 2 \sum_0^n 2^i$$

$$S_n + (n+1)\, 2^{n+1} = 2 \cdot S_n + 2 \cdot \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \right)$$

$$S_n + (n+1)\, 2^{n+1} = 2\, S_n - 2 (1 - 2^{n+1})$$

$$S_n = 2^{n+1} (n+1) + 2 (1 - 2^{n+1})$$

Exercício Resolvido 25

ER 25)

$$\sum_{0}^{n}(3+i) = \sum_{0}^{n} 3 + \sum_{0}^{n} i$$

$$= 3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(6+n)(n+1)}{2}$$

Prova por indução:

I) Passo base:

$a_0 = 3$, verdadeiro.

II) Indução:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(6+n-1)(n-1+1)}{2} + 3+n$$

$$S_n = \frac{(n+5)\,n}{2} + n + 3$$

$$S_n = \frac{n^2+5n+2n+6}{2} = \frac{n^2+7n+6}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)(n+6)}{2}$$

Exercício Resolvido 27

ER 27)

$$\sum_{1}^{n}\left[(5i+1)^2 - (5i-1)^2\right]$$

Diferença de quadrados:

$$\sum_{1}^{n}\left[(5i+1+5i-1)(5i+1-5i+1)\right]$$

$$\sum_{1}^{n}\left[10i \cdot 2\right] = 20\sum_{1}^{n} i = 20 \cdot \frac{(1+n)(n)}{2} = 10n(n+1)$$

- Prova por indução:

1) Passo base:

$a_1 = 36 - 16 = 20$ (Verdadeiro)

2) Indução:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = 10(n-1)(n-1+1) + 20 \cdot n$$

$$= 10(n-1)n + 20n$$

$$= 10n(n-1+2) = 10n(n+1)$$

Exercício Resolvido 28

ER 28)

$$S_n = \sum_{0}^{n} i\, 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Prova por indução:

1) Passo base:

$a_0 = 0$, verdadeiro

2) Indução:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$
$$S_n = (n-1-1)\, 2^{n-1+1} + 2 + n \cdot 2^n$$
$$S_n = (n-2)\, 2^n + 2 + n \cdot 2^n$$
$$= 2^n (n-2+n) + 2$$
$$= 2^n (2n-2) + 2$$
$$= 2^{n+1} (n-1) + 2$$

Exercício Resolvido 29

ER 29)

$$S_n = \sum_{0}^{n} i^2$$
$$S_n^3 + (n+1)^3 = \sum_{0}^{n} (i+1)^3$$
$$S_n^3 + (n+1)^3 = \sum_{0}^{n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1)$$
$$S_{n3} + (n+1)^3 = \sum_{0}^{n} i^3 + 3\sum_{0}^{n} i^2 + 3\sum_{0}^{n} i + \sum_{0}^{n} 1$$
$$\cancel{S_{n3}} + (n+1)^3 = \cancel{S_n^3} + 3 \cdot S_n^2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$
$$2(n+1)^3 = 6 S_n^2 + 3n(n+1) + 2(n+1)$$
$$6 S_n^2 = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)$$
$$6 S_n^2 = (n+1)\left[2(n+1)^2 - 3n - 2\right]$$
$$6 S_n^2 = (n+1)\left[2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2\right]$$
$$6 S_n^2 = (n+1)\left[2n^2 + n\right]$$
$$S_n^2 = \frac{(n+1) \cdot n(2n+1)}{6}$$

Exercício 2

Exercício 3

MC: Melhor Caso, array ordenado, $\theta(n)$ movimentos, $\theta(n)$ comparações.

PC: Pior Caso, array em ordem decrescente, $\theta(n^2)$ movimentações, $\theta(n^2)$ comparações .

```
public void sort() {
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int tmp = array[i];  // MC e PC: n-1 movimentos
    int j = i - 1;
    while ((j >= 0) && (array[j] > tmp)) {  // MC: n-1 Comparações.  PC: n(n-1)/2 comparações
      array[j + 1] = array[j];  // movimentos: nº de comparações do while - 1
      j--;
    }
    array[j + 1] = tmp;  // n- 1 movimentos
  }
}
```