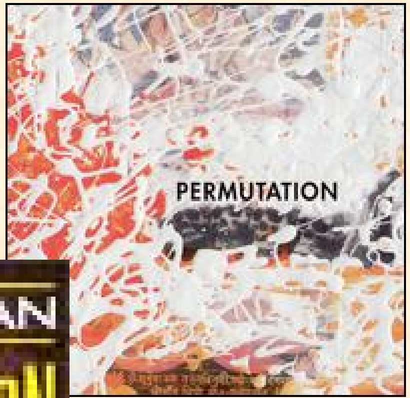
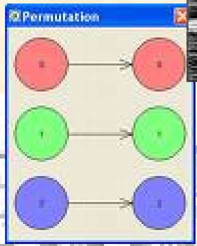
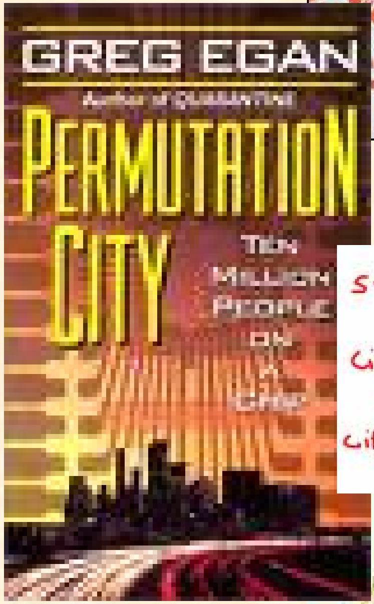
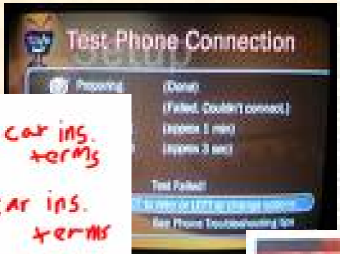
Permutacije skupova



$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$



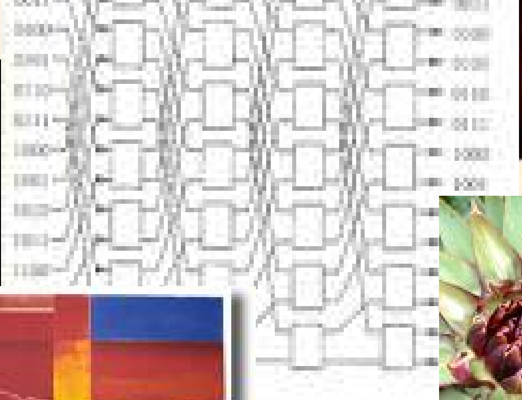


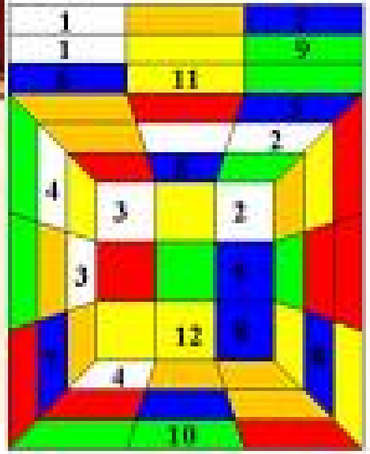


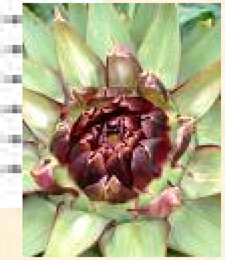
State + car ins. terms

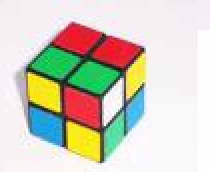
City + car ins. terms

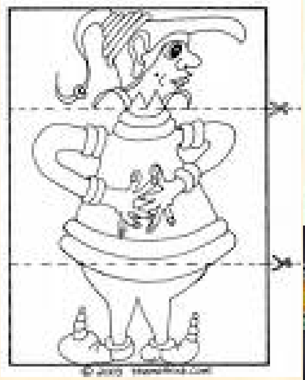
City/state + car ins. terms

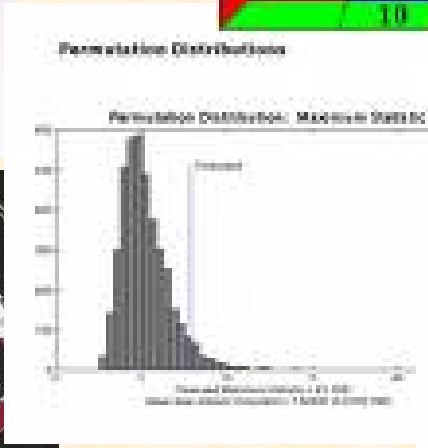


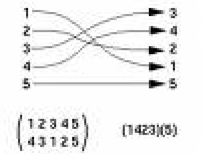




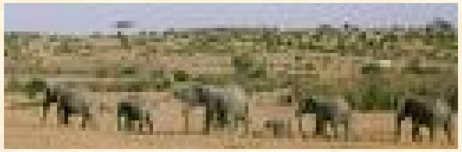


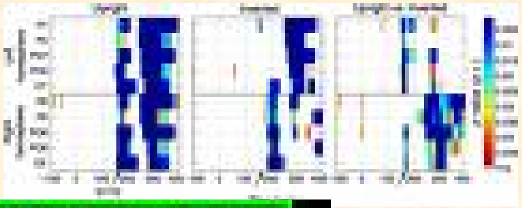




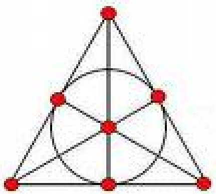


3 Ways to Represent a Permutation



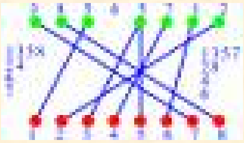


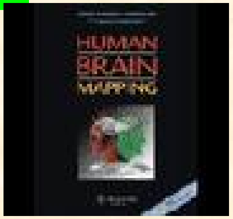
```
permutation(X,[Z|V]) :-
    delete_one(Z,X,Y),
    permutation(Y,V).
permutation([],[]).

ordered([X]).
ordered([X,Y|Z]) :-
    X =< Y,
    ordered([Y|Z]).

naive_sort(X, Y) :-
    permutation(X, Y),
    ordered(Y).
```

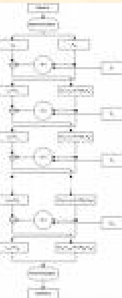


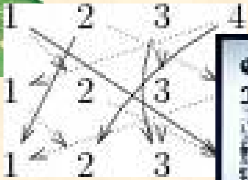
$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

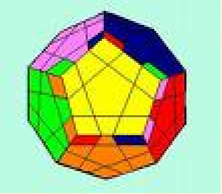
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

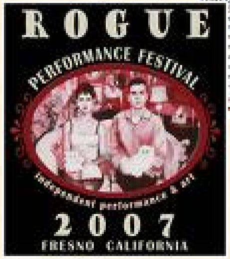


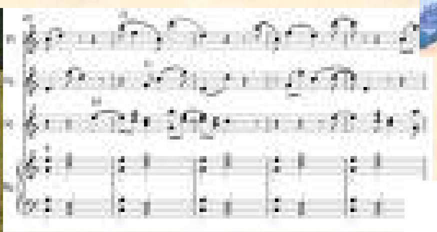


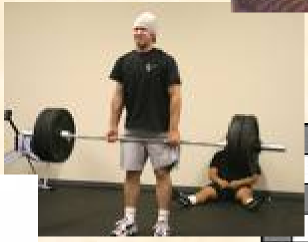




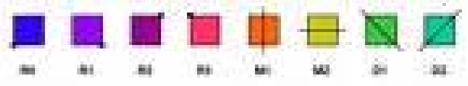


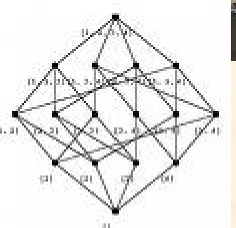


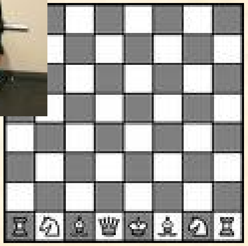




$$\begin{aligned} J = \det F &= F_{1i}F_{2j}F_{3k}\varepsilon_{ijk} \\ &= F_{11}F_{22}F_{33} - F_{11}F_{23}F_{32} - \\ &\quad F_{12}F_{21}F_{33} + F_{12}F_{23}F_{31} + \\ &\quad F_{13}F_{21}F_{32} - F_{13}F_{22}F_{31} \\ &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - 0 - \\ &\quad \kappa_1\kappa_2\lambda_3 + 0 + \\ &\quad 0 - 0 \\ &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - \kappa_1\kappa_2\lambda_3 \end{aligned}$$







Među raznim problemima prebrojavanja razlikujemo prebrojavanja:

- uređenih razmještaja ili uređenih izbora objekata – permutacija
- neuređenih razmještaja ili neuređenih izbora objekata - kombinacija

Permutacije skupova

Neka je S skup od n elemenata i $r \in \mathbf{N}$. Tada je *r*-permutacija skupa S uređena r-torka

$$(x_1, x_2, ..., x_r), \; x_i \in S \; (i = 1, 2, ..., r)$$

kod koje su komponente $x_1, x_2, ..., x_r$ međusobno različiti elementi od S.

U literaturi se ponekad r-permutacija naziva varijacija bez ponavljanja r-tog razreda u skupu od n elemenata.

Ako je $r = n$ onda se n-permutacija skupa S od n elemenata zove permutacija skupa S.

Primjer

$S = \{1, 2, 3\}$

$(1,2,3) \to 123$

123	213	312
132	231	321

Uobičajeno je permutacije ispisivati u leksikografskom poretku.

Ispišite u leksikografskom poretku sve permutacije skupa S={a, b, c}.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
a	a	a	b	b	c	c
b	b	c	a	c	a	b
c	c	b	c	a	b	a

Permutacija skupa od *n* objekata je zapravo bijekcija tog skupa na samog sebe.

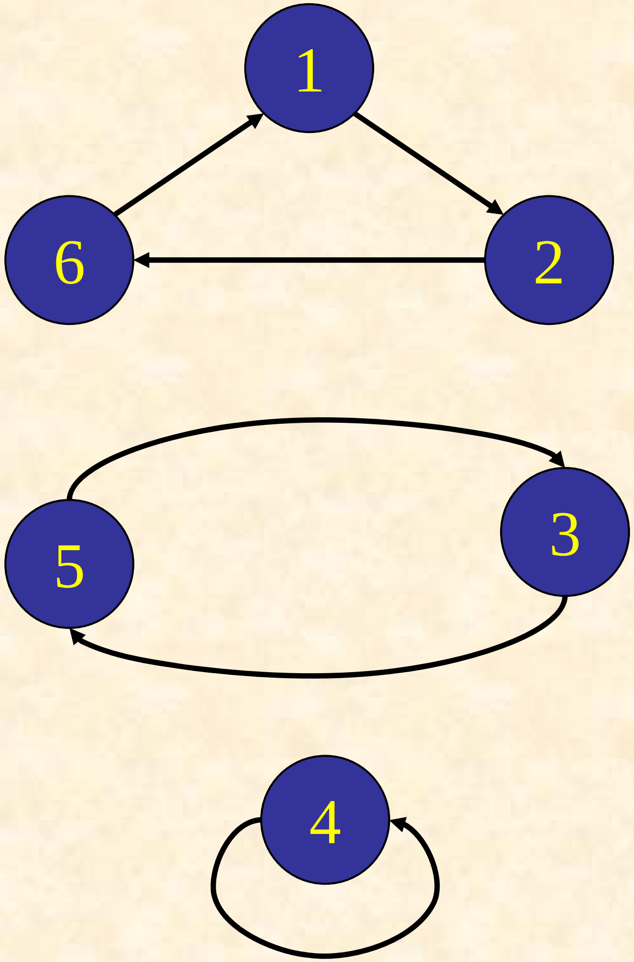
$f : \mathbf{N}_{15} \to \mathbf{N}_{15}$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
10 & 2 & 8 & 11 & 1 & 3 & 9 & 7 & 6 & 14 & 12 & 15 & 4 & 5 & 13
\end{array}$$

Ciklički zapis permutacije:

(1,10,14,5)(2)(3,8,7,9,6)(4,11,12,15,13)

Ciklički zapis permutacije



- Djelovanje funkcije

π: $\mathbf{N}_6 \rightarrow \mathbf{N}_6$

$\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 6$,

$\pi(3) = 5$, $\pi(4) = 4$,

$\pi(5) = 3$, $\pi(6) = 1$.

- Permutaciju π zapisujemo pomoću disjunktnih ciklusa:

  $\pi = (1,2,6)(3,5)(4)$

Permutacije cikličkog tipa $(k_1, k_2, \dots, k_n)$

Neka je k_i broj ciklusa duljine i permutacije $\pi : \mathbf{N}_n \to \mathbf{N}_n$. Tada kažemo da je π permutacija cikličkog tipa $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ ili $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ - permutacija.

- Vrijedi: $1k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$, $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$.
- Ciklički tip permutacije često zapisujemo kraće u obliku formalnog produkta:

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) = 1^{k_1} 2^{k_2} \cdot \ldots \cdot n^{k_n}$$

uz ispuštanje faktora s nulom u eksponentu.

$$(1,10,14,5)(2)(3,8,7,9,6)(4,11,12,15,13)$$

$k_1=1$, $k_4=1$, $k_5=2$; $k_n=0$ za $n \in \mathbf{N}_{15} \setminus \{1, 4, 5\}$

ciklički tip permutacije:

(1,0,0,1,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)

$$1^1 \cdot 4^1 \cdot 5^2$$

Dokažite:

- Skup svih bijekcija (permutacija) n-članog skupa $\mathbf{N}_n=\{1, 2, ..., n\}$ čini grupu (uz operaciju kompozicije funkcija). Ta grupa se zove simetrična grupa S_n.
- Broj $P(k_1, k_2, ..., k_n)$ permutacija od n elemenata cikličkog tipa $(k_1, k_2, ..., k_n)$ jednak je

$$P(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{n!}{1^{k_1} k_1! \cdot 2^{k_2} k_2! \cdot \ldots \cdot n^{k_n} k_n!}$$

Broj r-permutacija *n*-članog skupa

- $P(n,r)$
- $P(n,0):=1$
- $P(n,r):=0$, za $n < r$

Teorem

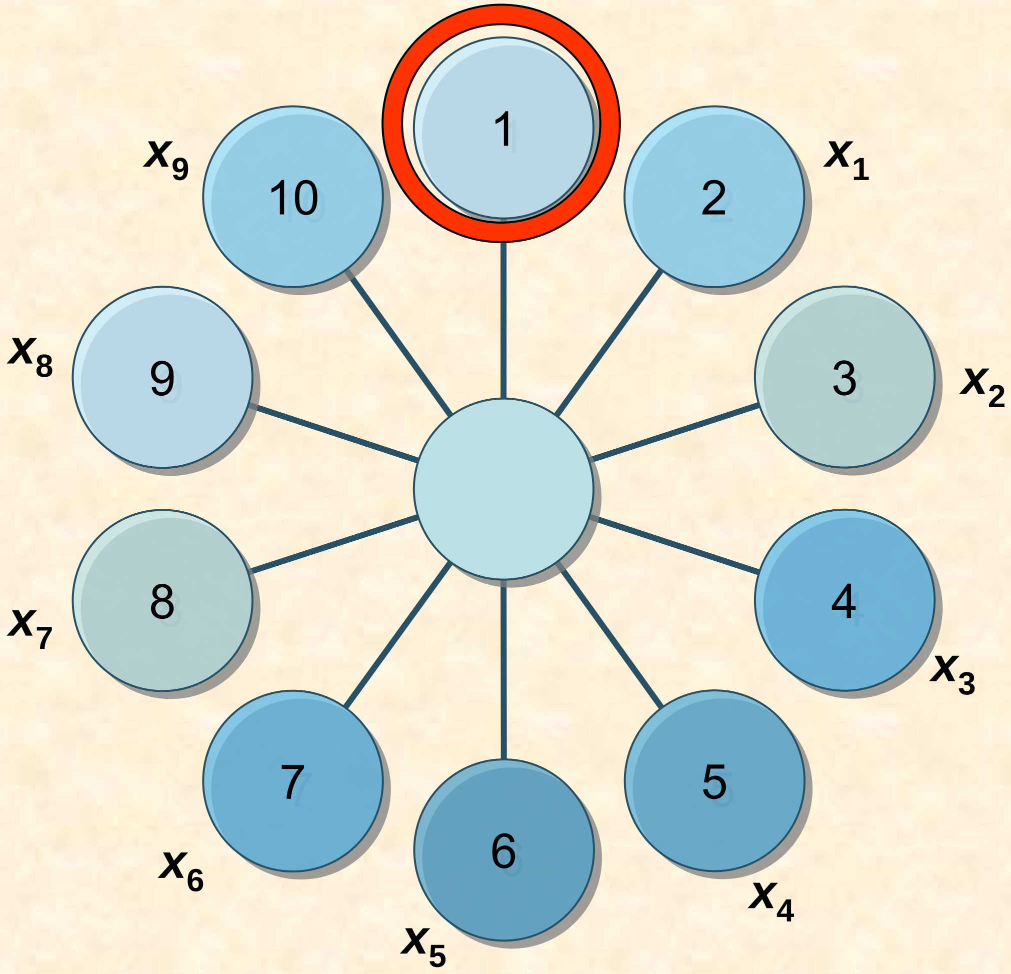
Za n, $r \in \mathbf{N}$, $r \leq n$ je

$$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = (n)_r$$

Na koliko različitih načina može *n* ljudi stajati u redu?

Traženi broj jednak je broju permutacija *n*-članog skupa.

Na koliko različitih načina može 10 ljudi sjesti za okrugli stol?



Funkcija *n*! jako brzo raste.

n	*n*!
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880

Pri određivanju približnih vrijednosti služimo se **Stirlingovom formulom:**

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$$

$$100! = 9.333 \cdot 10^{157}$$

$$\sqrt{200\pi}\left(100/e\right)^{100} \approx 9.328 \cdot 10^{157}$$