Osnovna načela prebrojavanja

dva osnovna problema

- egzistencija razmještaja
- prebrojavanje i klasifikacija razmještaja

treći tip problema:

-proučavanje poznatih razmještaja; svojstva, zakonitosti

-postupci izgradnje razmještaja; algoritam konstrukcije

Osnovna načela prebrojavanja

- načelo (pravilo) jednakosti
- načelo (pravilo) zbroja
- načelo (pravilo) produkta

načelo jednakosti

S, *T* – konačni skupovi

$$|S| = |T| \Leftrightarrow \exists f^{bij}, f : S \to T$$

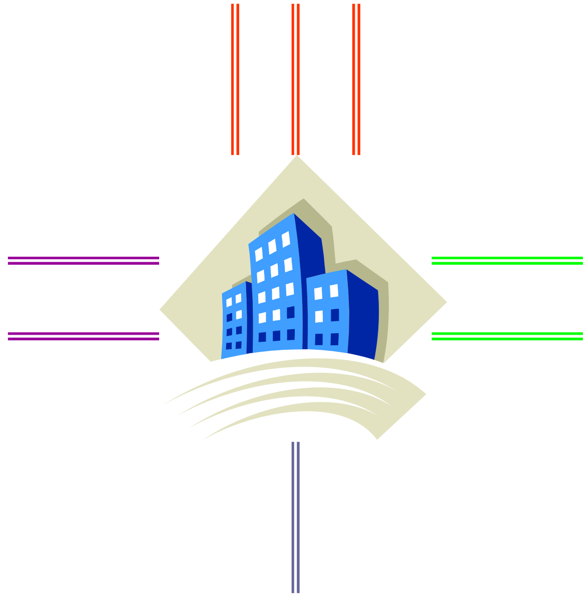
načelo zbroja

$n \in \mathbf{N}$, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ konačni skupovi

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |S_i|,\ S_i \cap S_j = \emptyset \ (i \neq j)$$

Primjer 1

Iz nekog grada prema sjeveru vode 3 ceste, prema zapadu 2 ceste, prema istoku 2 ceste i prema jugu 1 cesta. Na koliko se načina može cestom izaći iz tog grada?



$$3+2+2+1=8$$

načelo produkta

$n \in \mathbf{N}$, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ konačni skupovi

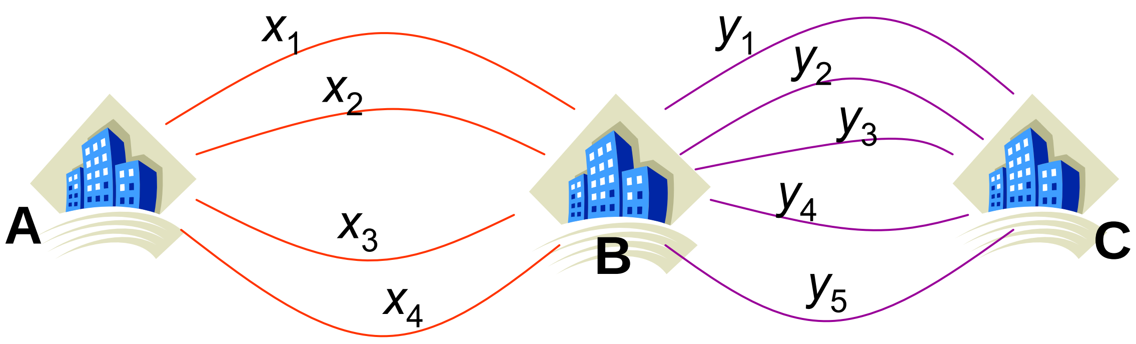
$$\left|S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n\right| = \left|S_1\right| \cdot \left|S_2\right| \cdot \ldots \cdot \left|S_n\right|$$

Teorem

Teorem o uzastopnom prebrojavanju

Primjer 2

Iz grada A u grad B vode 4 ceste, a iz grada B u grad C vodi 5 cesta. Na koliko se načina tim cestama može doći iz grada A preko grada B u grad C?



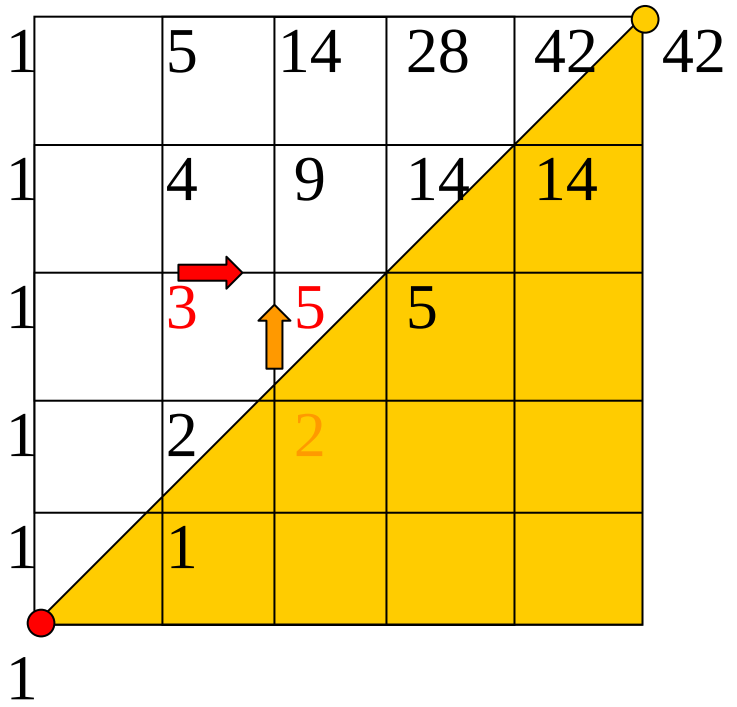
$$\left(x_i, y_j\right)$$

$$4 \cdot 5 = 20$$

- Napišite jedan zadatak kojeg je moguće riješiti primjenom načela jednakosti.

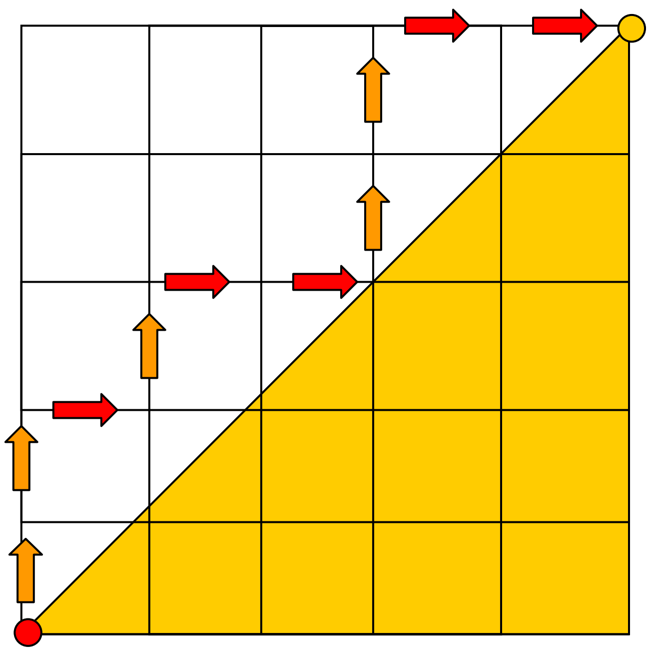
- Napišite jedan zadatak kojeg je moguće riješiti primjenom načela produkta.

Primjer 3



- Broj puteva od crvene do bijele točke “nad žutim trokutom” možemo odrediti tako da u svakoj točki mreže zapišemo na koliko načina možemo doći do nje, ako smo krenuli iz crvene točke. (npr. 2+3=5)

Primjer 4



((())(())(()))

- Želimo odrediti broj načina zapisivanja *n* (parova) zagrada:
  - ()
  - ()()
  - (())
  - (()())()((()())())
- Traženi broj za 5 pari zagrada jednak je broju putova od crvene do bijele točke nad žutim trokutom.

- Prema *osnovnom teoremu aritmetike* znamo da za svaki prirodan broj $n>1$ postoje jedinstveno određeni prosti brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_k$, ($p_1 < p_2 < \ldots < p_k$) i prirodni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, tako da je

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

  Koliko različitih djelitelja $\tau(n)$ (uključujući 1 i n) ima broj n?

- Neka su $r, n \in \mathbf{N}$, a T i S skupovi takvi da je $|T| = r$ *i* $|S| = n$. Dokažite da svih funkcija sa T u S ima n^r.