ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи оптимизации в реальном мире являются многокритериальными, то есть требуется максимизировать или минимизировать критерии объектов, которые часто противоречат друг другу. Выбрать единственное лучшее решение обычно невозможно, вместо этого получают множества несравнимых объектов. Поиск разнообразных несравнимых решений часто используется в многокритериальных эволюционных алгоритмах.

В области эволюционных алгоритмов рассматривают три основных подхода [1]: на основе Парето фронтов, на основе индикаторов и на основе декомпозиции. Хотя существуют хорошо известные алгоритмы на основе декомпозиции [2] и на основе индикаторов [3], большинство современных алгоритмов основано на Парето фронтах: PESA-II [4], NSGA-II [5], [6], SPEA2 [7] и многие другие. Алгоритмы, основанные на Парето фронтах, в свою очередь, делятся на следующие группы в зависимости от того, как выбираются или ранжируются решения: алгоритмы, поддерживающие недопустимые решения [4, 8, 9], алгоритмы, основанные на недоминирующей сортировке [5, 6], алгоритмы, использующие показатель доминирования [10] или силу доминирования [7]. В данной дипломной работе сфокусировано внимание на недоминирующей сортировке, так как многие популярные эволюционные алгоритмы ее используют [5, 6].

Цель данной работы — разработать алгоритм недоминирующей сортировки, который будет подходить для крупномасштабной многокритериальной оптимизации. Итоговый алгоритм является гибридом двух хорошо известных алгоритмов: алгоритма на основе метода «разделяй и властвуй», изначально предложенного Йенсеном [11], и нового алгоритма на основе недоминирующего дерева, который был предложен в данной работе.

Предложенный алгоритм, во-первых, в худшем случае имеет асимптотику алгоритма на основе метода «разделяй и властвуй», во-вторых, он эффективен на практике. Наше экспериментальное исследование показало ускорение по сравнению с обоими родительскими алгоритмами на основных видах данных: на равномерно распределенных

точках в гиперкубе и на точках в одной гиперплоскости, имеющих один фронт. Размеры множеств точек достигали 10^6, а их размерность — 15.

В Главе 1 данной магистерской работы представлен обзор существующих алгоритмов и введены необходимые для понимания работы понятия. В Разделе 1.1 приведены основные понятия, определение недоминирующей сортировки, а также для подтверждения актуальности данной работы, представлены примеры ее применения. В Разделе 1.2 представлен краткий список существующих алгоритмов недоминирующей сортировки и рассмотрены подробно кандидаты для создания гибрида. В Разделе 1.3 описаны недостатки существующих алгоритмов. В Разделе 1.4 сформулирована итоговая задача магистерской диссертации.

В Главе 2 представлены методы разработки гибридных алгоритмов недоминирующей сортировки. В Разделе 2.1 приведен отбор алгоритмов, подходящих для создания гибридного алгоритма. В Разделе 2.2 описана предлагаемая схема гибридного алгоритма. В Разделе 2.3 описана попытка адаптации существующих алгоритмов для создания гибрида.

В Главе 3 описан новый алгоритм недоминирующей сортировки ENS-NDT-ONE. В Разделе 3.1 описан сам алгоритм. В Разделе 3.2 приведено доказательство асимптотической оценки времени работы. В Разделе 3.3 представлены детали реализации нового алгоритма ENS-NDT-ONE.

В Главе 4 описан гибридный алгоритм и произведен эмпирический анализ времени его работы. В Разделе 4.1 описан гибридный алгоритм, разработанный в данной работе. В Разделе 4.2 приведены детали реализации. В Разделе 4.3 описана настройка параметров гибридного алгоритма, обеспечивающая эффективную работу. В Разделе 4.4 произведено сравнение с существующими алгоритмами. В Разделе 4.5 произведено сравнение с существующими алгоритмами на худшем случае.

В Главе 5 представлена многопоточная версия алгоритма недоминирующей сортировки.

В заключении представлены итоги работы и предложены некоторые идеи дальнейшего пути развития гибридных алгоритмов недоминирующей сортировки.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ

В этой главе введены термины и понятия, присутствующие в работе, произведен обзор существующих алгоритмов, затем сформулирована постановка задачи.

1.1. Недоминирующая сортировка

В данном разделе представлены основные понятия и определение недоминирующей сортировки.

1.1.1. Определение

Для определения недоминирующей сортировки необходимо ввести отношение доминирования по Парето. Будем обозначать в данной работе N — число точек, M — число критериев точек.

Определение. В M-мерном пространстве, точка $p = (p_1, ..., p_M)$ доминирует по Парето точку $q = (q_1, ..., q_M)$, обозначается как $p \prec q$, если для всех $1 \leqslant i \leqslant M$ выполняется неравенство $p_i \leqslant q_i$, и существует такое j, что $p_j < q_j$.

Определение. Недоминирующая сортировка — это процедура назначения ранов точкам множества S в многомерном пространстве R^m. Точки, которые не доминируются ни одной другой точкой, имеют ранг 0. Остальные ранги назначаются следующим образом: точка имеет ранг $i + 1$, если максимальный ранг среди доминирующих её точек равен i.

На Рисунке 1 представлен пример недоминирующей сортировки для девяти точек в двумерном пространстве. Множество точек с одинаковым рангом называют *фронтом* или *слоем*. На рисунке изображено три фронта.

1.1.2. Область применения и актуальность

Первоначально использование недоминирующей сортировки в эволюционных алгоритмах было предложено в [12], она выполнялась за $O(N^3M)$. Позднее время работы было улучшено до $O(N^2M)$ в работе, в которой был представлен знаменитый алгоритм NSGA-II [5].

Эволюционные алгоритмы на каждой итерации генерируют множество потенциальных решений, надо отобрать набор лучших, для чего и требуется недоминирующая сортировка.

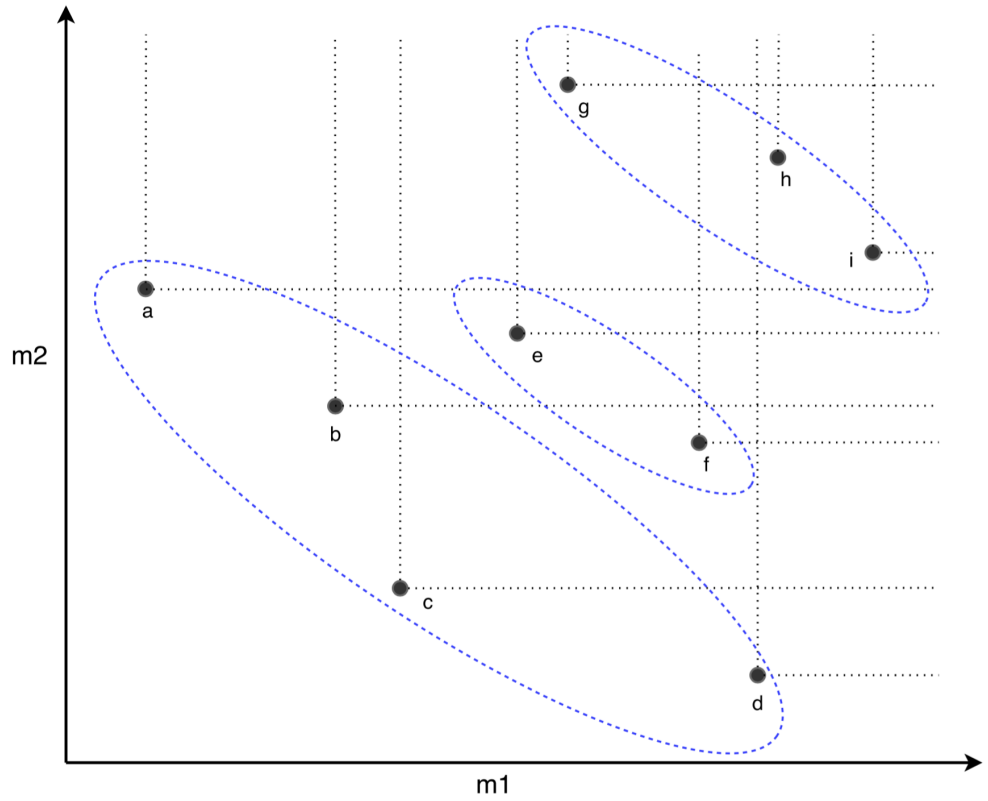


Рисунок 1 – На рисунке представлен пример недоминирующей сортировки для точек $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$. Точки $\{a, b, c, d\}$ имеют ранг 0, $\{e, f\} - 1$, $\{g, h, i\} - 2$.

Иногда подсчет каждого критерия для каждого решения занимает много времени, в этом случае время работы недоминирующей сортировки не имеет большого значения, так как асимптотика каждой итерации алгоритма зависит от вычисления критериев. Но гораздо чаще встречаются задачи, в которых подсчет каждого критерия занимает значительно меньше времени, чем необходимо для недоминирующей сортировки. Именно в таких случаях ускорение времени работы недоминирующей сортировки ускорит время выполнения каждой итерации алгоритма, а следовательно и время выполнения всего алгоритма.

Помимо фундаментального стремления к разработке эффективных алгоритмов, исследование, приведенное в данной работе, было мотивировано очень важной практической задачей: многокритериальной задачей оптимизации управления топливом, быстрое решение которой необходимо в ходе функционирования ядерного реактора [13]. Эта задача является сложной задачей оптимизации ряда противоречащих друг

другу критериев, таких как мощность, получаемая от реактора, количество нейтронов, вылетающих из реактора и т. д. В 1995 году размер объектов для сортировки достигал 10^5, сейчас он увеличился до 10^6.

В настоящее время существуют много разных алгоритмов недоминирующей сортировки, но каждый из них имеет свои слабые стороны. Это означает, что есть возможность создать новый гибридный алгоритм, который будет совмещать в себе два других алгоритма, время работы которого будет лучше, как в теории, так и на практике.

1.2. Анализ существующих алгоритмов

В данном разделе рассмотрим историю развития алгоритмов недоминирующей сортировки. Особое внимание будет уделено самым эффективным алгоритмам, которые применяются для создания гибрида в данной работе.

1.2.1. Наивные алгоритмы

Наивный алгоритм недоминирующей сортировки перебирает все пары точек и сравнивает их по всем критериям. Точки, которые не доминируются ни одной другой точкой, получают ранг 0 и исключаются из рассмотрения. Далее данная процедура повторяется, причем на каждом новом шаге присваивается новое значение ранга, на единицу больше, чем на предыдущем шаге. Время работы наивного алгоритма $O(MN^3)$, где N — это число точек, а M — размерность пространства, так как сравнение всех пар точек по M критериям займет $O(MN^2)$, а всего шагов алгоритма будет не больше максимального числа рангов — N.

В работе Кунга и др. [14] предлагается алгоритм сортировки точек по слоям. То есть алгоритм недоминирующей сортировки следующий: сначала определяется минимальный слой, найденным точкам присваивается ранг 0, и они исключаются из рассмотрения. Далее определяется минимальный слой на оставшихся точках, этим точкам присваивается ранг 1. Процесс выполняется до тех пор, пока имеются точки, которым не присвоен ранг. Вычислительная сложностью поиска одного слоя равна $O(Nlog^{M-1}N)$. Описанная процедура в худшем случае выполняется за $O(N^2log^{M-1}N)$, если максимальный найденный ранг равен $O(N)$.

Также существует много других алгоритмов, асимптотика которых равна $O(MN^2)$, например, алгоритм ENS Жанга и др. [15].

1.2.2. Алгоритмы семейства «Разделяй и Властвуй»

Йенсен [11] впервые предложил алгоритм недоминирующей сортировки с вычислительной сложностью $O(Nlog^{M-1}N)$. Однако корректность и оценка сложности алгоритма доказывалась в предположении, что никакие две точки не имеют совпадающие значения ни в какой размерности. Так как часто алгоритмы оптимизации работают с дискретными критериями, совпадение разных решений по одному критерию — часто встречающееся событие. Устранить указанный недостаток оказалось достаточно трудной задачей — первой успешной попыткой сделать это, насколько известно автору, является работа Фортена и др. [16]. Исправленный (или, согласно работе, «обобщенный») алгоритм представлен в работе [11], он корректно работает во всех случаях, и во многих случаях его время работы составляет $O(Nlog^{M-1}N)$, но для худшего случая доказана асимптотика только $O(N^2M)$. Наконец, в работе Буздалова и др. [17] предложены модификации алгоритма из работы [11], которые позволили доказать оценку $O(Nlog^{M-1}N)$ в худшем случае, не нарушая корректности работы алгоритма.

В данной работе базовым алгоритмом для создания гибрида будет алгоритм Буздалова и др., поэтому опишем его подробнее. Основная идея алгоритма — принцип «разделяй и властвуй>. Исходное множество делится на три подмножества по медиане по последнему критерию: первое множество содержит элементы, которые по последнему критерию меньше медианы, второе — равных, третье — больших. Далее алгоритм рекурсивно запускается на каждом подмножестве, при этом по возможности уменьшая количество значимых для сравнения критериев. На рисунке 2 схематически изображена идея алгоритма Буздалова на основе метода «разделяй и властвуй».

Рассмотрим некоторые процедуры, использующиеся в алгоритме Буздалова, необходимые для понимания итогового гибридного алгоритма. Основными из них являются процедуры $HelperA$ и $HelperB$. Первая процедура $DivideConquerSorting$ представляет из себя основной алгоритм недоминирующей сортировки на множестве S, которое в качестве аргумента приходит на вход. Данная процедура сравнивает точки только по первым k критериям. При запуске недоминирующей сорти-

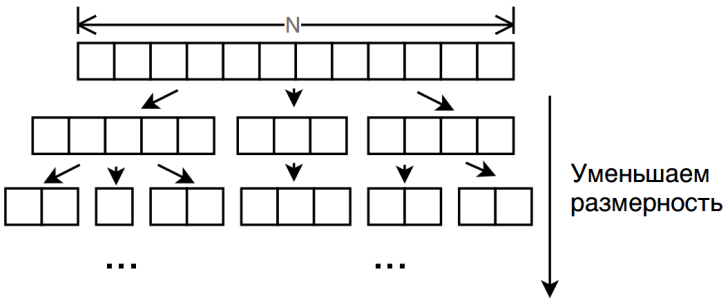


Рисунок 2 – Идея алгоритма Буздалова на основе метода «разделяй и властвуй».

ровки все точки инициализируются рангом 0, и запускается процедура $HelperA$ с аргументами S и M, где M — это размерность пространства.

Процедура $HelperA$ на размерности два запускает алгоритм на основе сканирующей прямой с асимптотической сложностью $O(n \log n)$.

В остальных случаях процедура $HelperA$ находит медианное значение q и, используя это значение, разбивает множество точек на три подмножества P_L, P_M, P_R с помощью процедуры $Split$. Множества определяются как $P_L = \{p \in P | p_j < q\}$, $P_M = \{p \in P | p_j = q\}$ и $P_R = \{p \in P | p_j > q\}$. После такого разбиения ни одна точка из множества правее не может доминировать ни одну точку из множества левее. Используя это свойство, мы можем найти ранги для множества P_L независимо от других, затем обновить ранги множества P_M на основе ранов множества P_L, далее независимо найти ранги множества P_M, используя уже поставленные на предыдущем шаге ранги. Аналогичный процесс продолжается для третьего множества P_R.

Псевдокод основной процедуры недоминирующей сортировки $DivideConquerSorting$ и процедуры $HelperA$ представлен на Листинге 1.

Следующая процедура $HelperB$ запускается между рекурсивными запусками $HelperA$ на двух подмножествах L и R. Задача этой процедуры — обновить ранги второго множества R на основе первого L, для дальнейшего запуска на втором множестве процедуры $HelperA$. Данная процедура также использует принцип «разделяй и властвуй» и при расстановке рангов разбивает множества на более мелкие и запускается на них рекурсивно.

На Листинге 2 представлен псевдокод процедуры $HelperB$.

Листинг 1 – Основная процедура $DivideConquerSorting$ и процедура $HelperA$, которая назначает ранги точкам из S по первым k критериям.

```
1: procedure DivideConquerSorting(S, M)
2:     Инициализация рангов 0
3:     HeplperA(S, M)
4: end procedure
5: procedure HelperA(S, k)
6:     if |S| <= 1 then return
7:     else if |S| = 2 then
8:         Сравнить точки по первым k критериям
9:     else if k = 2 then
10:        Алгоритм на основе сканирующей прямой
11:    else
12:        q ← Median({s_m | s ∈ S})
13:        P_L, P_M, P_R ← Split(S, m, q)
14:        HelperA(P_L, k)
15:        HelperB(P_L, P_M, k − 1)
16:        HelperA(P_M, k − 1)
17:        HelperB(P_L ∪ P_M, P_R, k − 1)
18:        HelperA(P_R, k)
19:    end if
20: end procedure
```

Листинг 2 – Процедура $HelperB$, которая обновляет ранги точек из R на основе множества точек L по первым k критериям.

```
1: procedure HelperB(L, R, k)
2:     if |L| <= 1 or R <= 1 then return
3:         Сравнить все пары точек по первым k критериям
4:     else if k = 2 then
5:         Алгоритм на основе сканирующей прямой
6:     else if min{l_k | l ∈ L} ⩽ max{h_k | h ∈ H} then
7:         q ← Median({p_m | p ∈ L ∪ H})
8:         L_L, L_M, L_R ← Split(L, m, q)
9:         R_L, R_M, R_R ← Split(R, m, q)
10:        HelperB(L_L, R_L, k)
11:        HelperB(L_R, R_R, k)
12:        HelperB(L_L ∪ L_M, R_M ∪ R_R, k − 1)
13:    end if
14: end procedure
```

Асимптотическое время выполнения алгоритма сортировки на основе сканирующей прямой $O(n \log n)$, где n — размер множества точек. Используя этот факт и то, что $max(|P_L|, |P_R|) \leqslant 1/2 \cdot |P|$ и $max(|L_L| + |R_L|, |L_R| + |R_R|) \leqslant 1/2 \cdot (|L| + |R|)$, далее можно использовать мастер-теорему [18] для решения рекуррентного соотношения и доказать, что асимптотическое время работы алгоритма равно $O(|P| \cdot (\log |P|)^{M-1})$ в худшем случае.

1.2.3. Алгоритм Роя и др.

Некоторый интерес для рассмотрения в качестве кандидата для создания гибрида представляет алгоритм Роя $Best\ Order\ Sort\ (BOS)$ [19], вычислительная сложность которого $O(MN \log N + MN^2)$. В лучшем случае алгоритм работает за $O(MN \log N)$, что лучше, чем время работы алгоритма, предложенного Буздаловым и др, но в худшем случае его асимптотика — $O(MN^2)$.

Опишем кратко идею этого алгоритма, так как в данной работе была рассмотрена возможность создания гибридного алгоритма с использованием алгоритма Роя. Хотя она и не увенчалась успехом, но это исследование представляет некоторый научный интерес, так как показывает важность выбора алгоритмов при создании гибридного алгоритма. Более детальное описание алгоритма Роя можно найти в статье [19].

Идея алгоритма в следующем: для каждой точки составим по каждому критерию множество, которое доминируется этой точкой. Получаем M множеств для каждой точки. Далее для того, чтобы найти ранг точки s достаточно рассмотреть только одно из множеств, соответствующих точке s. Назовем это множество T. Предположим, максимальный ранг точек из T равен r, тогда точка s будет иметь ранг $(r + 1)$. Важным моментом является то, что любое множество из M множеств может быть рассмотрено для поиска ранга s. Алгоритм BOS находит для каждой точки минимальное возможное множество для этой цели. Чтобы это обеспечить, будем поддерживать множества $Q_1, Q_2, ..., Q_M$ для каждого критерия. Каждое Q_i будет содержать отсортированный набор точек по критерию i. Далее будем определять ранги точек в следующем порядке: сначала для первой точки из множества Q_1, затем для первой точки из Q_2, так до множества по последнему критерию Q_M. Потом перейдем

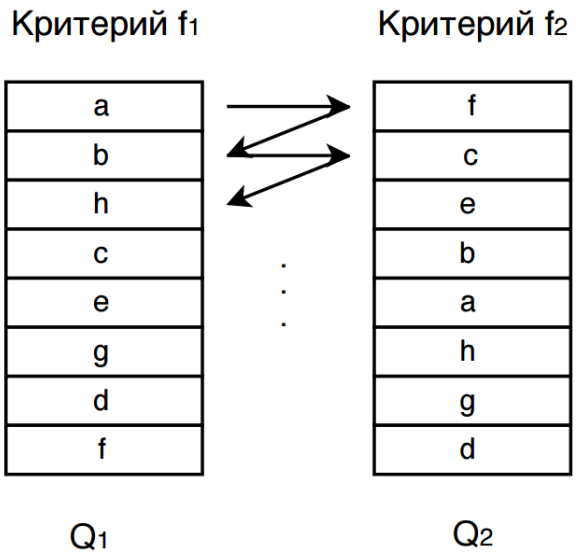


Рисунок 3 – На рисунке представлены отсортированные списки по критерию f_1 и f_2. Точка b будет сравниваться только с точкой a и впоследствии ее ранг не будет меняться.

ко вторым точкам множеств и так далее. Если встретилась точка, ранг которой мы уже определили, пропускаем эту точку. На Рисунке 3 изображены Q_1 и Q_2 для некоторого множества двумерных точек. Стрелками показан порядок обхода точек. Процесс завершается как только все точки будут иметь ранг.

Последним важным моментом в описании этого алгоритма является то, что определение ранга в каждом множестве происходит последовательным поиском по подмножествам одного ранга от минимального до максимального. То есть для определения ранга точки s, мы находим в соответствующем ей множестве Q_i подмножество, соответствующее минимальному рангу, где ни одна точка не доминирует точку s. Если точки найденного подмножества имеют ранг r, то точке s будет назначен ранг r. Это свойство назовем *монотонностью*. Монотонность гарантирует, что ни одна точка из других подмножеств с большим рангом, не будет доминировать нашу точку s, и мы назначили ранг корректно. Благодаря монотонности определение ранга происходит быстро. А нарушение ее влечет значительное замедление. Впоследствии именно это станет основной причиной, почему создание эффективного гибридного алгоритма на основе алгоритма Роя и алгоритма Буздалова невозможна.

1.2.4. Алгоритм Густавссона и др.

Большой интерес представляет алгоритм Густавссона и Соберфильдта ENS-NDT [20], который основан на применении k-d деревьев (k-мерных деревьев). Его вычислительная сложность на случайно сгенерированных независимых точек равна $O(N^{1.43})$. Однако в худшем случае алгоритм работает за квадратичное время $O(MN^2)$.

Опишем основную идею этого алгоритма и приведем псевдокоды основных методов. Такое подробное описание необходимо в данной работе для понимания оптимизаций, модификаций алгоритма и для понимания итогового гибридного алгоритма. Более детальное описание можно найти в статье [20].

Алгоритм Густавссона и Сиберфильдта ENS-NDT относится к группе алгоритмов Efficient Non-dominated Sort(ENS). Еще одним представителем этой группы является алгоритм ENS-BS (Efficient Non-dominated Sort Binary Strategy), скорость работы которого сильно ухудшается с ростом количества точек. Алгоритм ENS-NDT справляется и с большим количеством точек, и с точками большой размерности в общем случае.

Алгоритм ENS-NDT использует недоминирующее дерево (NDTree). Недоминирующее дерево основано на корзиночных (bucket) k-d деревьях.

Определение. Корзиночное k-d дерево - это вид бинарного дерева, где хранятся точки k-мерного пространства. В узловых вершинах не содержится точек, в каждом узле происходит разделение множества точек на два подмножества по некоторому критерию: половина точек, имеющих большее значение критерия, отправляется в правого ребенка, остальные — в левого. Все точки содержатся в листьях. Размер множеств точек в листьях ограничен *размером корзины (bucket size)*, который является параметром k-d дерева. Если появляется необходимость добавить больше точек, вершина делится на две. Также глубина дерева ограничена параметром *максимальной глубины дерева*. Если достигнута максимальная глубина дерева, параметр размера корзины игнорируется.

Каждый уровень дерева ассоциирован с одной размерностью. Корневая вершина соответствует первому критерию, второй слой узлов соответствует второму критерию и так далее. Если родительский параметр

ассоциирован с максимальной размерностью, слой наследников будет снова соответствовать первому критерию.

При добавлении новой точки сначала производится спуск по дереву до соответствующего листа. Затем корзина листа пополняется, если размер корзины не превышен. В ином случае происходит создание двух вершин-наследников, в которые попадают точки согласно разделению по медиане по соответствующему родительской вершине критерию.

На рисунке 4 подставлена иллюстрация корзиночного k-d дерева. Вершина A ассоциирована с критерием X, вершины B и C ассоциирована с критерием Y, вершины D и E ассоциирована снова с критерием X. Размер корзины представленной на рисунке структуры равен трем.

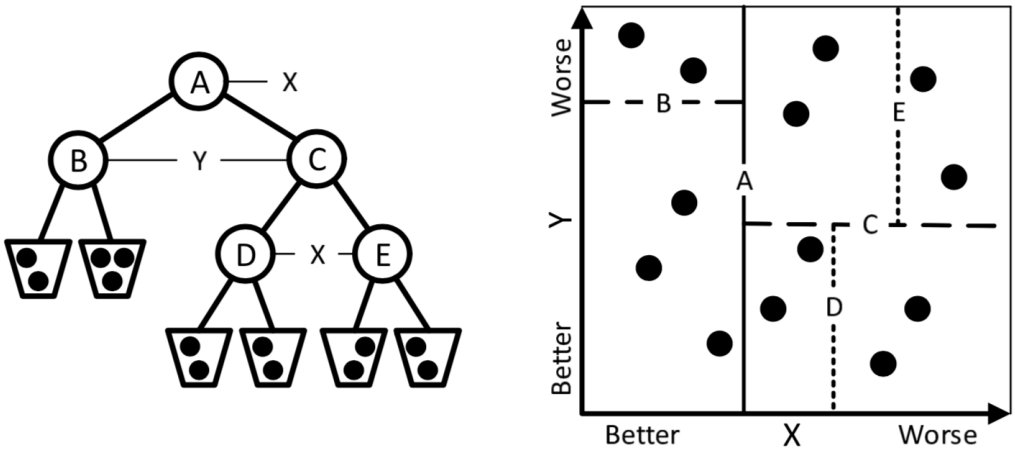
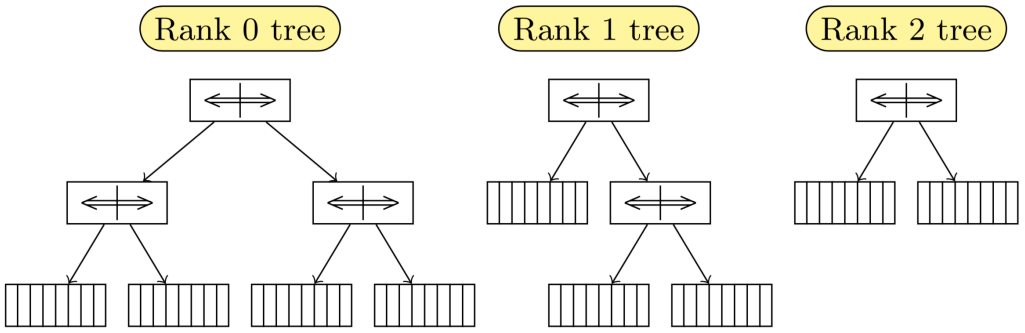


Рисунок 4 – Иллюстрация внутреннего устройства структуры корзиночного k-d дерева. Слева изображена структура, справа точки на плоскости, по которым получена структура.

В алгоритме Густавссона для выполнения недоминирующей сортировки следует поддерживать отдельное дерево для каждого ранга. На Рисунке 5 представлена схема структуры k-d использующейся в недоминирующей сортировке.

Недоминирующее дерево использует предподсчитанную $split$ структуру, где все возможные медианные значения преподсчитаны до того, как они потребуются. Отдельно уточним для избежания путаницы, что $split$ структура не имеет ничего общего с известной структурой данных, называемой $split$ деревьями. Предподсчет всех медиан заранее не используется в стандартной реализации корзиночного k-d



.

Рисунок 5 – Структура деревьев для алгоритма ENS-NDT. Каждое дерево ассоциировано с отдельным рангом.

дерева, в котором обычно значения считаются в момент переполнения размера корзины в вершине. Это возможно сделать, потому что мы знаем множество точек для недоминирующей сортировки заранее. $Split$ структуру удобно хранить в виде k-d дерева, похожего на финальное недоминирующее дерево. Основное преимущество использования $split$ структуры заключается в том, что недоминирующее дерево остается сбалансированным, что значительно улучшает производительность добавления вершин и определения ранга.

Для выполнения недоминирующей сортировки следует выполнить следующие действия:

а) Создать $split$ структуру для всех точек.

б) Осуществить лексикографическую сортировку точек.

в) Перебирать точки в лексикографическом порядке.

1) Определить ранг.

2) Добавить в соответствующее рангу дерево.

На Листинге 3 представлен псевдокод основного метода недоминирующей сортировки, который принимает в качестве аргументов множество точек P, M — размерность и B — размер корзины. Для получения $split$ структуры используется функция $CreateSplits$, которая на вход получает множество точек, размер корзины и размерность $M - 1$. Одна размерность игнорируется, так как ранее множество точек было лексикографически отсортировано. Лексикографическая сортировка выбрана еще потому, что она позволяет уменьшить число сравнений впоследствии.

Следующим шагом является создание множества $\mathcal{F}$ и $\mathcal{T}$ в Строках 4-6, $\mathcal{F}$ — это ранжированное множество точек, $\mathcal{T}$ — множество деревьев для каждого ранга, в каждом дереве ни одна точка не доминирует другую точку в том же дереве. Точка P_1 добавляется в оба множества с рангом один, так как ни одна другая точка не может доминировать первую в лексикографическом порядке точку. Главный цикл на Строке 8 определяет ранги точек и добавляет их в структуру.

Листинг 3 – Главная процедура алгоритма ENS-NDT.

```
1:  procedure ENS-NDT(P, M, B)
2:      P ← Sort(P, a^M ≺ b^M, ..., a^1 ≺ b^1)
3:      S ← CreateSplits(P, M − 1, B)
4:      F ← {{P_1}}
5:      T ← {newNDTree(S, B)}
6:      InsertIntoNDTree(T_1, P_1)
7:      j ← 1
8:      for i = 2, ..., |P| do
9:          if P_{i−1} ≠ P_i then
10:             j ← FrontIndexBinarySearch(T, P_i)
11:             if j > |T| then
12:                 F_j ← 0
13:                 T_j ← newNDTree(S, B)
14:             end if
15:             InsertIntoNDTree(T_j, P_i, )
16:         end if
17:         F_j ← F_j ∪ P_i
18:     end for
19:     return F
20: end procedure
```

Возможная реализация $CreateSplits$ приведена на Листинге 4. Структура $NDSplit$ похожа на $NDTree$, но вместо точек она хранит медианные значения. Общий подход построения сбалансированных k-d деревьев с помощью метода «разделяй и властвую» описан Бламом и др. [21].

Вкратце опишем процедуру $CreateSplit$. Процедура принимает четыре аргумента: множество точек P, число критериев M, размер корзины B и текущая глубина дерева d. При первом вызове процедуры $CreateSplit$ текущая глубина равна 0. Далее значение текущей глубины

дерева используется для выбора координаты в Строке 2, для которой происходит поиск медианного значения. Затем множество точек P сортируется в Строке 3 по выбранному критерию, а переменной m в Строке 4 присваивается значение медианы, как среднего значения в отсортированном множестве. Далее создается новая вершина дерева, и если множество не помещается в одну вершину по ограничению на размер корзины, то создается два наследника $Better$ и $Worse$. После чего происходит рекурсивный вызов процедуры $CreateSplits$ для обоих подмножеств с увеличенным значением глубины. Таким образом создается $split$ структура, которая возвращается в Строке 12.

Листинг 4 – Пример реализации процедуры $CreatSplit$, которая вычисляет медианные значения для недоминирующего дерева.

1: **procedure** CreateSplit($P, M, B, d \leftarrow 0$)
2: $o \leftarrow 1 + (d \mod M)$
3: $P \leftarrow Sort(P, a^o \prec b^o)$
4: $m \leftarrow P_{1+\lfloor |P|/2 \rfloor}$
5: $S \leftarrow \{newNDSplit(o, m)\}$
6: **if** $|P| > B$ **then**
7: $Better \leftarrow \{P_i, i < 1 + \lfloor |P|/2 \rfloor\}$
8: $Worse \leftarrow \{P_i, i \geqslant 1 + \lfloor |P|/2 \rfloor\}$
9: $S.BetterSplit \leftarrow CreateSplit(Better, M, B, d + 1)$
10: $S.WorseSplit \leftarrow CreateSplit(Worse, M, B, d + 1)$
11: **end if**
12: **return** S
13: **end procedure**

Последней интересной для нас функцией является функция определения ранга точки $FrontIndexBinarySearch$, представленная на Листинге 5. Эта процедура бинарным поиском определяет минимальное дерево в структуре $\mathcal{T}$, где ни одна точка не доминировала бы рассматриваемую.

Подробное описание алгоритма ENS-NDT необходимо для понимания дальнейших модификаций и самого гибридного алгоритма.

1.3. Недостатки существующих алгоритмов

Все описанные выше алгоритмы имеют разные преимущества и недостатки. Алгоритм Буздалова «разделяй и властвуй» имеет хорошую

Листинг 5 – Процедура определения ранга точки s.

```
1:  procedure FrontIndexBinarySearch(𝒯, s)
2:      i ← 1
3:      j ← |𝒯| + 1
4:      while i ≠ j do
5:          k ← ⌊i + (j − i)/2⌋
6:          if FromntDominates(𝒯_k, s) then
7:              i ← k + 1
8:          else
9:              j ← k
10:         end if
11:     end while
12:     return i
13: end procedure
```

асимптотику, даже на самых плохих входных данных. Однако алгоритм сильно замедляется с ростом размерности задачи M.

Алгоритм Роя, имеет интересную идею и показал хорошие результаты на практике. Однако теоретическое время его работы пока не исследовано.

Алгоритм Густавссона имеет хорошую асимптотику на случайно распределенных независимых точках в гиперкубе, но имеет квадратичную асимптотику в описанном авторами плохом случае.

1.4. Постановка задачи

Цель данной работы состоит в разработке нового гибридного алгоритма недоминирующей сортировки и разбивается на задачи:

а) Выбрать наиболее подходящие для алгоритмы.
б) Приспособить их для создания гибридного алгоритма.
в) Реализовать гибридный алгоритм.
г) Настроить гибридный алгоритм для эффективной работы.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ РАЗРАБОТКИ ГИБРИДНЫХ АЛГОРИТМОВ НЕДОМИНИРУЮЩЕЙ СОРТИРОВКИ

В данной главе описана схема гибридного алгоритма, приведены требования к кандидатам на роль алгоритмов, на основе которых разрабатывается гибридный алгоритм, приведена адаптация существующих алгоритмов и описан гибридный алгоритм на основе существующих.

2.1. Отбор алгоритмов, подходящих для создания гибридного алгоритма

Основным кандидатом для создания гибридного алгоритма недоминирующей сортировки оказался алгоритм Буздалова и др. на основе метода «разделяй и властвуй». Есть две основные причины, чтобы использовать этот алгоритм:

а) Данный алгоритм основан на методе «разделяй и властвуй», что позволяет использовать рекурсивные вызовы к качестве точек подключения с одного алгоритма на другой.

б) Данный алгоритм является одним из лучших алгоритмов на сегодняшний день и имеет хорошую доказанную асимптотику времени работы.

Вторым кандидатом стал алгоритм Роя, который уже показал неплохие результаты в гибриде с алгоритмом Буздалова [22], но алгоритм Роя был приспособлен для гибридизации только при вызове $HelperA$. То есть только в трех из пяти случаев, когда существует возможность переключиться на другой алгоритм. В этой работе представлена попытка приспособить алгоритм Роя к переключению на него внутри процедуры $HelperB$.

Третьим кандидатом стал алгоритм Густавссона ENS-NDT, использование которого для создания гибридного алгоритма сильно снизило эффективность гибридного алгоритма недоминирующей сортировки. Вдохновившись идеями алгоритма Густавссона, мы получили новый алгоритм и назвали его ENS-NDT-ONE. Сам по себе он уже имеет некоторый научный интерес, так как имеет хорошую асимптотику и эффективен на практике наравне с лучшими алгоритмами недоминирующей сортировки. Затем мы реализовали гибридный алгоритм на основе алгоритма Буздалова и алгоритма ENS-NDT-ONE.

2.2. Предлагаемая схема гибридного алгоритма

В этом разделе будет описана предлагаемая схема гибридного алгоритма.

2.2.1. Выбор момента переключения

Алгоритм Буздалова очень хорошо подходит для создания гибридного алгоритма недоминирующей сортировки, так как в алгоритме рекурсивно вызывается этот же алгоритм на множествах меньшего размера и меньшей размерности. Данный алгоритм подробно описан в Главе 1. В оригинальной статье функции, где мы предполагаем переключаться на другой алгоритм, названы $HeplerA$ и $HeplerB$. Мы предлагаем следующую идею создания гибридного алгоритма:

а) Запускаем алгоритм Divide&Conquer, согласно некоторым правилам переключаемся на другой алгоритм.

б) Моменты смены алгоритма:

1) HelperA
   i. Входные данные: множество точек S с предварительными рангами.
   ii. Результат выполнения: множество точек S с обновленными рангами.
2) HelperB
   i. Входные данные: множество точек L с окончательными рангами и R с предварительными рангами.
   ii. Результат выполнения: множество точек R с обновленными рангами по множеству L.

2.2.2. Настройка параметров переключения

Настройка гибридного алгоритма будет представлять некоторый диапазон размеров множества точек для каждой размерности, при котором происходит переключение. Например, при размерности точек три, договоримся, что смена алгоритма происходит если точек не больше 100, а при размерности 4 и более смена происходит при размере множеств точек не более 1000. Параметры гибридизации получаются экспериментальным путем для конкретного вида гибридного алгоритма. Параметры, полученные в данной работе, описаны в Разделе 4.3.

2.3. Адаптация существующих алгоритмов

В этом разделе описана адаптация алгоритмов для создания гибридного алгоритма. Для этой цели было выбрано два алгоритма: алгоритм Роя и алгоритм Густавссона. Идеи гибридизации и адаптации схожи, поэтому опишем их сначала в общем случае, а потом перейдем к деталям каждого алгоритма.

Функция $HeplperA$ — это сама недоминирующая сортировка, поэтому приспосабливать алгоритмы с этой точки зрения не надо.

Напомним, что функция $HeplerB$ в качестве входных параметров принимала два множества L с окончательными рангами и R с предварительными рангами, по результату работы назначаются ранги множеству точек R по множеству точек L.

Для $HeplerB$ была предложена следующая идея адаптации для гибридизации:

а) Обходим точки из множества $|L| \cup |R|$в порядке, предложенном в оригинальном алгоритме.
   1) Если точка принадлежит множеству с окончательными рангами L, добавляем точку в структуру алгоритма с текущим рангом.
   2) Если точка принадлежит множеству с предварительными рангами R, то мы определяем ранг рассматриваемой точки на основе текущего состояния структуры и не добавляем ее в структуру, так как ранжирование происходить только на основе точек из множества L.

Основные отличия от оригинальных алгоритмов:

а) В оригинальных статьях на момент начала работы алгоритмов все точки имели ранг 0, в нашем же случае начальные ранги могут быть любыми.

б) Определение ранга точек надо изменить, чтобы алгоритм учитывал предпоставленные ранги.

Рассмотрим отдельно для каждого алгоритма адаптацию для последующей реализации гибридного алгоритма.

2.3.1. Алгоритм Роя и др.

Алгоритм, предложенный Роем и др. описан подробно в Главе 1. Ранее был предложен гибридный алгоритм, который может переключаться на другой алгоритм в момент вызова алгоритмом Буздалова процедуры $HelperA$ [22], при этом возможность переключения на другой алгоритм в момент вызова $HelperB$ не была рассмотрена в данной работе.

Определение ранга в оригинальном алгоритме происходит бинарным или последовательным поиском с нулевого ранга по ранжированному множеству точек. Эффективность этих двух подходов практически совпадала. Найденное множество точек с минимальным рангом, где ни одна точка не доминирует рассматриваемую, означало, что точке можно присвоить ранг этого множества. Справедлив следующий инвариант: для рассматриваемой точки до некоторого ранга k все множества, соответствующие меньшим k рангам, имеют хотя бы одну точку, которая доминирует рассматриваемую, а начиная с множества соответствующего рангу k и больше во всех множествах нет ни одной точки, которая бы доминировала рассматриваемую точку. В таком случае точка получает ранг k.

В новой версии алгоритма в множестве L, точки которого добавляются в структуру позволяющую определять ранг, могут иметь совершенно любые ранги. И точка может доминироваться точкой, например, ранга k, но не доминироваться точкой $k-1$ ранга, это означает, что больше нельзя использовать бинарный поиск для определения ранга. Единственным выходом является перебор множеств начиная с наибольшего в структуре, пока не найдется множество, где есть хотя бы одна точка, которая доминирует рассматриваемую. После этого можно сделать вывод, что точка имеет ранг найденного множества + 1.

После такого значительного изменения алгоритма мы провели замеры времени работы, и оказалось, что новый алгоритм работает на порядок хуже оригинального алгоритма. Это означает, что создать эффективный гибридный алгоритм на его основе нельзя, по крайней мере используя такой подход гибридизации. Теоретическое исследование времени алгоритма является достаточно трудоемкой задачей, и из-за настолько плохого практического результата оно не было проведено.

2.3.2. Алгоритм Густавссона и др.

Следующим кандидатом для гибридизации был алгоритм Густавссона и др.

Время работы этого алгоритма на случайно сгенерированных независимых точках в гиперкубе составляет $O(N^{1.43})$, но авторами работы описан худший случай, на котором асимптотика становится квадратичной и составляет $O(MN^2)$. На больших N время работы становится неприемлемо большим. Алгоритм выбран в качестве основного кандидата для гибридизации, потому что он является самым эффективным алгоритмом на сегодняшний день в общем случае.

В оригинальном алгоритме точки, которые необходимо отсортировать, инициализируются рангом 0, и ранг назначается постепенно, в лексикографическом порядке. В гибридном алгоритме точки в качестве аргументов приходят в алгоритм Густавссона из базового алгоритма Буздалова. Если никак не модифицировать оригинальный алгоритм Густавссона, то возможна следующая ситуация, при которой ранги могут быть расставлены неправильно: вновь добавляемая точка не доминируется ни одной точки с рангом 0 (то есть оригинальный алгоритм может поставить ранг 0), при этом добавляемая точка может доминировать точкой с рангом больше 0.

В оригинальном алгоритме Густавссона определение ранга происходит похожим на алгоритм Роя образом. В структуре недоминирующих деревьев, где каждое дерево соответствует своему рангу, мы бинарным поиском определяется минимально по рангу дерево. И если ни одна точка дерева не доминирует рассматриваемую, тогда рассматриваемой точке присваивался ранг этого дерева. Но аналогично проблеме описанной выше для алгоритма Роя, в алгоритме Густавссона инвариант позволяющий осуществить бинарный поиск перестает работать. Теперь определении ранга точки необходимо искать точку с максимальным рангом, которая доминирует точку, ранг которой определяется. Тогда этой точке назначается ранг найденной точки $+1$.

По этой причине алгоритм был адаптирован следующим образом: вместо бинарного поиска использовался последовательный перебор с дерева, соответствующего максимальному рангу, переходя к деревьям

меньшего ранга. После этого мы провели эмпирический анализ времени работы, который показал, что потеря монотонности критически влияет на время работы. Теоретический анализ адаптированного алгоритма не был произведен, из-за плохого практического результата.

Описанные выше сложности вдохновили на создание нового алгоритма на основе недоминирующего дерева, на которое отсутствие монотонности не производило бы такого сильного замедления. Новый алгоритм был названный ENS-NDT-ONE, описан в Главе 3.

ГЛАВА 3. ОПИСАНИЕ И РЕАЛИЗАЦИЯ НОВОГО АЛГОРИТМА НЕДОМИНИРУЮЩЕЙ СОРТИРОВКИ ENS-NDT-ONE

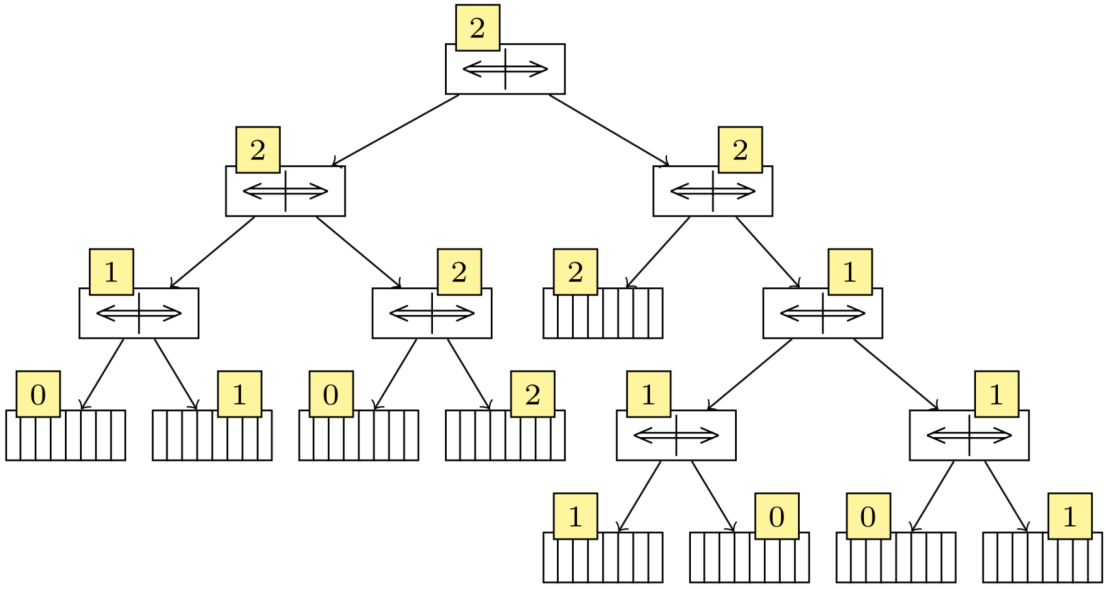
В данной главе описан новый алгоритм ENS-NDT-ONE, который лучше подходит на роль одного из алгоритмов, на основе которых был разработан гибридный алгоритм. Также в данной главе представлена и доказана асимптотическая оценка времени работы алгоритма ENS-NDT-ONE.

3.1. Описание алгоритма

Причины, по которым алгоритм Роя и алгоритм Густавссона не подходили для создания эффективного гибридного алгоритма (см Главу 2), породили необходимость в создании нового алгоритма недоминирующей сортировки. В результате нами был разработан алгоритм ENS-NDT-ONE. Разработанный алгоритм по большей части основан на идеях алгоритма Густавсона, но при этом структура данных, используемая в нем значительно модифицирована. Это позволило избежать необходимости перебора всех k-d деревьев.

Алгоритм ENS-NDT был изменен следующим образом: вместо множества деревьев теперь хранится одно дерево для всех точек. Именно по этой причине алгоритм назван ENS-NDT-ONE. Параметрами дерева, как и в оригинальной версии алгоритма, будет размер корзины, ограничивающий максимальное число точек, которое может содержаться в одной вершине, и глубина, начиная с которой размер корзины игнорируется, и точки перестают делиться на две при превышении первого порога. Так же, как в оригинальном алгоритме, дерево будет сбалансированным. Это обеспечивается предварительно подсчитанной структурой $split$. На Рисунке 6 представлена схема структуры данных, поддерживаемой в алгоритме ENS-NDT-ONE.

Одной из причин высокой производительности алгоритма ENS-NDT является то, что, при определении ранга для точки p в некотором дереве, как только найдена точка, доминирующая точку p, можно сразу же убрать из рассмотрения это дерево, так как остальные точки из этого дерева не могут влиять на ранг p. Такой особенности нет у алгоритма ENS-NDT-ONE, так как в дереве могут встретиться точки с большим или равным рангом, чем ранг рассматриваемой точки p.



.

Рисунок 6 – Пример k-d дерева с максимальными рангами на поддеревьях, которое поддерживается алгоритм ENS-NDT-ONE

Чтобы предотвратить потери производительности, мы предлагаем хранить максимальный ранг всех точек на поддереве. Это позволит при определении ранга точки с предпоставленным рангом k, не спускаться в поддерево с рангом $\leqslant k$. На фазе добавления точки в дерево необходимо не забыть обновить значения максимального ранга по пути добавления.

Адаптация алгоритма ENS-NDT-ONE для переключения на него при вызове процедуры $HeplerA$ не требуется, так как при вызове процедуры $HeplerA$ происходит обычная недоминирующая сортировка с небольшим уточнением: при обновлении ранга надо только учитывать предварительный ранг точки и обновлять ранг только в том случае, если он меньше, чем новый ранг.

Напомним, что процедура $HeplerB$ принимает в качестве аргументов два множества, одно с окончательными рангами L, другое предварительными рангами R. В процедуре $HeplerB$ происходит обновление рангов множества R, по рангам множества L. Опишем работу алгоритма ENS-NDT-ONE с двумя множествами L и R:

а) Обходим точки в лексикографическом порядке, как в оригинальном алгоритме.

1) Если точка принадлежит множеству с окончательными рангами L, добавляем точку в дерево с текущим рангом.
2) Если точка принадлежит множеству с предварительными рангами R, то мы обновляем ранг рассматриваемой точки по дереву и не добавляем ее в структуру, так как ранжирование происходит только на основе точек из множества L.

3.2. Асимптотическая оценка времени работы

Вероятность пропуска поддеревьев сильно влияет на производительность алгоритма ENS-NDT-ONE. В частности, для многих видов входных данных можно показать постоянную верхнюю границу α на вероятность входа в дочерний узел, который соответствует более высокому значению по критерию, рассматриваемому на данном слое. Из этого по Мастер-теореме получаем верхнюю границу $O(MN^{\log_2(1+\alpha)})$ на один запрос к дереву и $O(MN^{1+\log_2(1+\alpha)})$ для времени выполнения всей сортировки, что асимптотически меньше, чем $\Theta(N^2M)$, когда $\alpha < 1$. В худшем случае алгоритм ENS-NDT-ONE работает за $O(MN^2)$, однако зачастую время работы алгоритма сильно лучше. Например, когда входные данные состоят из случайно сгенерированных точек в гиперкубе $[0;1]^M$, существует $O(N)$ точек, при добавлении в k-d дерево которых, вероятность зайти в обоих детей в каждой не листовой вершине дерева не более $1/2$. Таким образом получаем, что верхняя граница асимптотики времени работы равна $O(MN^{1+\log_2(1+1/2)}) \approx O(MN^{1.585})$.

3.3. Реализация алгоритма ENS-NDT-ONE

В данном разделе будет описана реализация алгоритма ENS-NDT-ONE.

На Листинге 6 приведен псевдокод основного метода алгоритма ENS-NDT-ONE, который принимает в качестве аргументов множество точек P, M — размерность и B — порог, максимальное количество точек в вершине. Для получения $split$ структуры используется функция $CreateSplits$, которая описана в Главе 2 данной работы.

Помимо этого, для ускорения процесса определения ранга, будем хранить максимальный ранг на поддереве, что позволит добавить следующую эвристику: если у поддерева максимальный ранг меньше ранга

рассматриваемой точки, то это поддерево никак не может повлиять на ранг данной точки.

Листинг 6 – Главная процедура алгоритма ENS-NDT-ONE.

```
1:  procedure ENS-NDT-ONE(P, M, B)
2:      P ← Sort(P, a^M ≺ b^M, ..., a^1 ≺ b^1)
3:      S ← CreateSplits(P, M − 1, B)
4:      F ← {{P_1}}
5:      T ← newNDTreeOne(S, B)
6:      InsertIntoNDTreeOne(T, P_1)
7:      j ← 1
8:      for i = 2, ..., |P| do
9:          if P_{i−1} ≠ P_i then
10:             j ← FindRankInNDTreeOne(T, P_i)
11:             InsertIntoNDTreeOne(T, P_i)
12:         end if
13:         F_j ← F_j ∪ P_i
14:     end for
15:     return F
16: end procedure
```

В функцию $FindRankInNDTreeOne$ будет добавлен дополнительный аргумент, ранг точки P_i, тогда функция $FindRankInNDTreeOne$ в листовой вершине будет иметь реализацию представленную на Листинге 8. А в узловой вершине реализация представляет из себя два рекурсивных вызова на вершинах-потомках с одним только отсечением, если координата рассматриваемой вершины больше либо равна медианному значению, то в левого ребенка можно не заходить, потому что в поддерево, где по текущей координате все точки больше рассматриваемой, не найдется ни одной точки, которая бы доминировала нашу. На Листинге 7 представлен псевдокод определения ранга в узловой вершине.

Важно отметить, что если ранг на поддереве $< r$, то есть ранга рассматриваемой точки, то текущее поддерево не может повлиять на ранг точки, для которой происходит обновление ранга. В таком случае в Строке 3 Листингов 8 и 7 происходит выход из процедур.

Листинг 7 – Процедура поиска ранга точки с предварительным рангом в узловой вершине.

```
1: procedure FindRankInNDTreeOne(𝒯, p, r)
2:     if maxRank < r then
3:         return r
4:     end if
5:     if p[𝒯.splitCoordinate] >= 𝒯.splitValue then
6:         r ← FindRankInNDTreeOne(𝒯.worseNode, P_i, r)
7:     end if
8:     r ← FindRankInNDTreeOne(𝒯.betterNode, P_i, r)
9:     return r
10: end procedure
```

Листинг 8 – Процедура поиска ранга точки с предварительным рангом в листовой вершине.

```
1: procedure FindRankInNDTreeOne(𝒯, p, r)
2:     if maxRank < r then
3:         return r
4:     end if
5:     for i = |𝒯.points|, ..., 1 do
6:         if 𝒯.points[i] ≺ p then
7:             return 𝒯.ranks[i] + 1
8:         end if
9:     end for
10:    return r
11: end procedure
```

ГЛАВА 4. ОПИСАНИЕ ГИБРИДНОГО АЛГОРИТМА И ЭМПИРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕНИ ЕГО РАБОТЫ

В данной главе описан гибридный алгоритм, приведен асимптотический анализ времени его работы, описана реализация гибридного алгоритма, а также приведен эмпирический анализ времени работы реализованного алгоритма в сравнении с уже существующими.

4.1. Гибридный алгоритм

4.1.1. Формулировка гибридного алгоритма

Теперь мы можем сформулировать гибридный алгоритм. Мы используем алгоритм Буздалова как базовый алгоритм. Каждый раз прежде чем вызывать процедуры $HelperA$ и $HelperB$, мы проверяем размер точек, на которых необходимо выполнить сортировку. Если точки с таким размером эффективно сортируются в алгоритме ENS-NDT-ONE, гибридный алгоритм переключается с базового алгоритма на алгоритм ENS-NDT-ONE для решения этой подзадачи. Так как алгоритм ENS-NDT-ONE приспособлен к гибридизации, в том числе невосприимчив к отсутствию монотонности, и учитывает предпоставленные ранги в базовом алгоритме, полученный алгоритм будет работать корректно.

Если говорить более формально, мы определяем для каждого значения размерности пороговое значение, которое означает, что каждая подзадача с таким и меньшим размером точек должна быть делегирована алгоритму ENS-NDT-ONE. Для процедуры $HelperA$ размер множества точек — это размер множества S, для процедуры $HelperB$ — это сумма размеров множеств L и R.

4.1.2. Анализ времени работы гибридного алгоритма

В этом разделе дадим некоторую оценку асимптотики времени работы гибридного алгоритма.

Напомним, что время работы алгоритма Буздалова асимптотически равно $O(N(\log N)^{M-1})$. Так как мы определяем пороговые значения как константы, асимптотическая оценка времени работы итогового гибридного алгоритма по-прежнему равна $O(N(\log N)^{M-1})$. Заметим, что более тщательный выбор пороговых значений, например, учитывающий особенности входных данных, может улучшить асимптотическую

оценку. Так как эта задача является сложной, мы оставляем это для возможной будущей работы.

4.2. Реализация гибридного алгоритма

В данном разделе будут описаны подробности реализации гибридного алгоритма.

Так как при создании алгоритма ENS-NDT-ONE, мы учитывали, что точки могут иметь предпоставленные ранги, адаптировать алгоритм для использования его в гибридном алгоритме не составляет труда.

4.2.1. HelperA

При переключении на алгоритм ENS-NDT-ONE с алгоритма Буздалова при вызове процедуры $HeplerA$ требуется дополнительно учитывать только то, что точки имеют изначальный ранг. Таким образом, помимо множества точек в функцию приходят ранги точек. Обновление ранга рассматриваемой точки происходит, только если изначальный ранг был меньше нового.

4.2.2. HelperB

Переключения на алгоритм ENS-NDT-ONE при вызове процедуры $HeplerB$ значительно сложнее. Псевдокод процедуры $HeplerB$ гибридного алгоритма на основе алгоритма ENS-NDT-ONE представлен на Листинге 9. Множество точек L уже окончательно проранжированы в базовом алгоритме Буздалова, множество точек R имеют некоторые предварительно предпоставленные ранги. Задача метода обновить ранги точек множества R на основе рангов точек множества L.

Первым интересным моментом является то, что $split$ структуру мы будем строить только для множества точек L, то есть точки из множества R никак не влияют друг на друга и обновляются только на основе рангов точек L. Также добавлять в структуру мы будем только точки из множества L, а точки из R мы будем только ранжировать. Так как точки приходят из базового алгоритма в отсортированном порядке дополнительно делать лексикографическую сортировку нет необходимости. Таким образом мы перебираем объединение точек L и R в лексикографическом

Листинг 9 – Главная процедура алгоритма ENS-NDT-ONE, адаптированная для переключения в момент $HeplerB$.

```
1: procedure ENS-NDT-ONE-HelperB(L, R, M, B, Ranks)
2:     S ← CreateSplits(L, M − 1, B)
3:     T ← newNDTreeOne(S, B)
4:     InsertIntoNDTreeOne(T, P_1)
5:     j ← 1
6:     for p ∈ L ∪ R do
7:         r ← p.rank
8:         if p ∈ L then
9:             InsertIntoNDTreeOne(T, p, r)
10:        end if
11:        if p ∈ R then
12:            r ← FindRankInNDTreeOne(T, p, r)
13:        end if
14:    end for
15:    return R⊣\‖∫
16: end procedure
```

порядке. Далее в зависимости от вида точки либо обновляем ей ранг, либо добавляем точку в структуру для последующего ранжирования других точек.

Таким образом, мы реализовали гибридный алгоритм на основе алгоритма Буздалова и алгоритма Густавссона.

4.3. Настройка параметров гибридного алгоритма

Настройка гибридного алгоритма будет представлять некоторый диапазон размеров множеств точек, при котором происходит переключение, зависящий от размерности. Параметры основаны на экспериментальных данных и не зависят от размера множеств точек на которых изначально запускается гибридный алгоритм недоминирующей сортировки. Другими словами, эти параметры можно считать константами.

Наше экспериментальное исследование показало, что для размерности три оптимальным будет переключение, когда размер множества точек не превышает 100, а при размерностях больше трех переключение необходимо осуществлять на множествах точек размером не более 20000.

4.4. Сравнение с существующими алгоритмами на искусственно сгенерированных тестовых данных

В данном разделе приводится сравнение эффективности работы нового гибридного алгоритма с существующими алгоритмами недоминирующей сортировки. Сравнение производилось с двумя родительскими алгоритмами, которые в свою очередь являются лучшими алгоритмами недоминирующей сортировки на сегодняшний день, и с алгоритмом ENS-NDT-ONE, работающим самостоятельно.

Замеры времени работы производились на множестве точек размером до 10^6 с размерностями $3, 5, 7, 10$ и 15 на случайно сгенерированных независимых точках в гиперкубе $[0; 1]^M$ и на точках расположенных, на одной гиперплоскости и имеющих один ранг. Результаты приведены в Таблице 1, серым обозначен лучший в каждой группе алгоритм.

Таблица 1 – Среднее время работы алгоритмов в секундах. Лучшее время в каждой категории обозначено серым цветом.

N	M	Divide&Conquer		ENS-NDT		ENS-NDT-ONE		Hybrid	
		hypercube	hyperplane	hypercube	hyperplane	hypercube	hyperplane	hypercube	hyperplane
$5 \cdot 10^5$	3	1.52	0.85	1.95	0.73	1.66	0.76	1.17	0.67
10^6	3	2.82	1.60	5.25	1.61	4.25	1.65	2.63	1.50
$5 \cdot 10^5$	5	22.7	16.6	8.31	2.01	6.25	2.22	6.43	4.68
10^6	5	45.2	33.0	26.3	5.22	18.2	5.82	17.2	12.8
$5 \cdot 10^5$	7	89.6	55.1	17.1	6.96	15.5	6.78	9.29	7.02
10^6	7	191.5	120.2	55.4	19.4	46.1	18.9	26.8	20.1
$5 \cdot 10^5$	10	197.7	99.9	27.6	15.9	36.7	17.7	14.5	11.5
10^6	10	478.8	228.6	84.8	48.1	104.8	55.0	41.0	33.0
$5 \cdot 10^5$	15	190.0	116.1	40.8	23.0	62.1	25.9	22.6	15.7
10^6	15	587.9	337.5	135.4	76.3	206.8	85.4	64.5	46.0

Для каждой конфигурации ввода было создано 10 экземпляров входных данных. Мы измерили общее время во всех этих случаях и разделили их на 10, чтобы получить среднее время выполнения. Измерения времени выполнялись с использованием пакета Java Microbenchmark Harness с одной итерацией прогрева не менее 6 секунд, чего было достаточно для стабилизации работы программы. Был использован высокопроизводительный сервер с процессорами AMD OpteronTM 6380 и 512 GB ОЗУ, а код был запущен с виртуальной машиной OpenJDK 1.8.0 141.

Репозиторий с кодом представлен на GitHub [1]. Репозиторий также содержит графики времени работы. В Таблице 1 показаны только средние результаты для $N = 5 \cdot 10^5$ и 10^6. Видно, что гибридный алгоритм выигрывает во всех случаях, кроме $M = 5$ и $M = 7$ на гиперплоскости. Еще одно интересное наблюдение, что ENS-NDT-ONE работает быстрее, чем ENS-NDT, на экземплярах гиперкуба с $M \leqslant 7$, что означает, что предложенная эвристика действительно эффективна.

4.5. Сравнение времени работы алгоритмов на худшем случае

Так как время работы алгоритма Густавссона ENS-NDT и нового алгоритма ENS-NDT-ONE имеют квадратичную асимптотику $O(MN^2)$ в некотором худшем случаем, мы провели сравнение времени работы этих алгоритмов на таком виде данных с получившимся гибридным алгоритмом.

Мы провели исследование на множестве точек размером до 10^5 и разных размерностях: $3, 5, 7, 10$ и 15. Результаты сравнения времени работы на худшем случае для алгоритмов ENS-NDT и ENS-NDT-ONE приведены в Таблице 2.

Таблица 2 – Среднее время работы алгоритмов на худшем виде данных для алгоритмов ENS-NDT и ENS-NDT-ONE в секундах.

N	M	Divide&Conquer worst case	ENS-NDT worst case	ENS-NDT-ONE worst case	Hybrid worst case
10^5	3	0.04	0.32	0.38	0.04
10^5	5	0.05	4.6	7.5	0.7
10^5	7	0.05	45.5	38.3	1.58
10^5	10	0.06	69.1	81.8	3.37
10^5	15	0.08	175.3	185.3	4.45

Эмпирический анализ времени работы показал, что данные, которые только за квадратичное время сортируются алгоритмами ENS-NDT и ENS-NDT-ONE, нашим гибридным алгоритмом сортируются несравнимо быстро. Несмотря на то, что гибридный алгоритм проигрывает по времени алгоритму на основе метода «разделяй и властвуй», это происходит только на специфическом, худшем виде данных, на остальных же

[1] https://github.com/mbuzdalov/non-dominated-sorting/releases/tag/v0.1

наборах точек, как было видно в Таблице 2, гибридный алгоритм работает сильно быстрее алгоритма Буздалова. Это означает, что гибридный алгоритм обладает большей универсальностью по сравнению с другими алгоритмами, так он на всех наборах входных данных либо является самым эффективным, либо незначительно уступает самому эффективному алгоритму.

ГЛАВА 5. МНОГОПОТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ НЕДОМИНИРУЮЩЕЙ СОРТИРОВКИ

В данной главе приведено описание многопоточной версии алгоритма недоминирующей сортировки, описанного в Главе 4.

5.1. Описание многопоточного алгоритма

Наше исследование было мотивировано очень важной практической задачей: многокритериальной задачей оптимизации управления топливом, быстрое решение которой необходимо для функционирования ядерного реактора [13]. Необходим быстрый алгоритм для большого числа точек до 10^6. После успешной реализации гибридного алгоритма недоминирующей сортировки появилась идея написать параллельный алгоритм для еще большего повышения эффективности.

Для реализации многопоточного алгоритма использовалась специфика алгоритма Буздалова, который основан на методе «разделяй и властвуй». В момент рекурсивного запуска на множествах точек, ранги которых только впоследствии повлияют друг на друга, можно выполнить сортировку этих двух множеств независимо, а значит, в разных потоках. Важно отметить, что в этот же момент происходит проверка переключения на новый алгоритм, то есть если по параметрам настройки гибридизации необходимо переключить алгоритм, то алгоритм Буздалова переключается на алгоритм Густавссона, иначе алгоритм Буздалова продолжает работать, но в новом потоке.

Мы выявили две стратегии разделения данных между потоками:

а) Создавать каждый раз новые объекты всех необходимых классов.
б) Переиспользовать ранее созданные классы, учитывая, что их может одновременно использовать несколько потоков.

Во втором случае необходимо заранее договориться, какая часть данных в какой момент будет использоваться, и обеспечить гарантию того, что пересекающиеся данные не изменяются в разных потоках одновременно. При выборе второго способа пришлось бы в самом начале выделить память на максимальный возможный размер точек. Однако, на практике нам такого количества памяти не нужно, так как в гибридном алгоритме обычно происходит переключение не на всех точках, а на частях, которые часто сильно меньше общего числа точек.

После проведения теоретического и практического сравнения затрат по памяти этих двух стратегий оказалось, что суммарное количество памяти, которое необходимо в первом случае примерно равно затратам по памяти во втором случае.

Также при реализации, используя вторую стратегию, мы столкнулись с проблемой: при больших массивах размером с максимальное число точек, алгоритм выполняется медленнее, чем аналогичный алгоритм, использующий маленькие массивы, созданные только для текущей итерации. Сравнение происходило на одном потоке. Мы пришли к выводу, что это особенности исполнения, и остановились на первой стратегии параллелизации.

5.2. Анализ времени работы многопоточного алгоритма

После написания корректно работающего алгоритма мы произвели замеры времени работы алгоритма на одном, на двух и на восьми потоках. В результате был реализован гибридный параллельный алгоритм недоминирующей сортировки, который оказался быстрее однопоточной версии до 1.8 раз на двух потоках и до 3 раз на восьми потоках. Так как базовый алгоритм невозможно полностью приспособить к многопоточности, то есть большую часть времени сортировка все равно выполняется в один поток, результат считается успешным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате данной работы был предложен новый гибридный алгоритм недоминирующей сортировки, основанный на алгоритме Буздалова и др и алгоритма ENS-NDT-ONE, также разработанного в рамках данной работы. Скорость работы полученного алгоритма превосходит оба родительских алгоритма, которые являются лучшими алгоритмами недоминирующей сортировки на сегодняшний день. Основным его преимуществом оказалась хорошая производительность на очень больших множествах точек. Нам неизвестны публикации результатов с приемлемым временем работы недоминирующей сортировки множеств точек размером 10^6 большой размерности.

Алгоритм адаптирован для многопоточного выполнения благодаря использованию свойств алгоритма «разделяй и властвуй», ускорение составляет до 1.8 раз на двух потоках и до 3 раз на восьми потоках.

По результатом данной магистерской работы была принята статья на конференцию PPSN 2018 с названием «Towards Large-Scale Multiobjective Optimization: Extremely Fast Hybrid Non-Dominated Sorting».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 *Brockhoff D.*, *Wagner T.* GECCO 2016 tutorial on evolutionary multiobjective optimization. // Proceedings of Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion. — 2016. — С. 201–227.

2 *Zhang Q.*, *Li H.* MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. — 2007. — Т. 11, № 6. — С. 712–731.

3 *Zitzler E.*, *Kunzli S.* Indicator-based selection in multiobjective search. // Parallel Problem Solving from Nature – PPSN VIII. — 2004. — № 3242. — С. 832–842.

4 *Corne D.*, *Jerram N.*, *Knowles J.* PESA-II: Region-based selection in evolutionary multiobjective optimization. // Proceedings of Genetic and Evolutionary Computation Conference. — 2001. — С. 283–290.

5 *Deb K.*, *Pratap A.*, *Agarwal S.* A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II. // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. — 2002. — Т. 6, № 2. — С. 182–197.

6 *Deb K.*, *Jain H.* An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints. // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. — 2013. — Т. 18, № 4. — С. 577–601.

7 *Zitzler E.*, *Laumanns M.*, *Thiele L.* SPEA2: Improving the strength pareto evo- lutionary algorithm for multiobjective optimization. // Proceedings of the EURO-GEN’2001 Conference. — 2001. — С. 91–100.

8 *Coello Coello C.*, *Toscano Pulido G.* A micro-genetic algorithm for multiob- jective optimization. // Proceedings of International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. — 2001. — № 1993. — С. 126–140.

9 *Knowles J.*, *Corne D.* Approximating the nondominated front using the Pareto archived evolution strategy. // Evolutionary Computation. — 2000. — Т. 8, № 2. — С. 149–172.

10 *Fonseca C.*, *Fleming P.* Nonlinear system identification with multiobjective genetic algorithm. // Proceedings of the World Congress of the International Fed- eration of Automatic Control. — 1996. — С. 187–192.

11 *Jensen M.* Reducing the run-time complexity of multiobjective EAs: The NSGA-II and other algorithms. // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. — 2003. — Т. 7, № 5. — С. 503–515.

12 *Srinivas N.*, *Deb K.* Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. // Evolutionary Computation. — 1994. — Т. 2, № 3. — С. 221–248.

13 *Schlunz E.* Multiobjective in-core fuel management optimisation for nuclear research reactors. // Ph.D. thesis, Stellenbosch University. — 2016.

14 *Kung H.*, *Luccio F.*, *Preparata F.* On finding the maxima of a set of vectors. // Journal of ACM. — 1975. — Т. 22, № 4. — С. 469–476.

15 *Zhang X.*, *Tian Y.*, *Cheng R.* An Efficient Approach to Nondominated Sorting for Evolutionary Multiobjective Optimization. // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. — 2015. — С. 201–213.

16 *Fortin F.*, *Grenier S.*, *Parizeau M.* Generalizing the improved run-time com- plexity algorithm for non-dominated sorting. // Proceedings of Genetic and Evo- lutionary Computation Conference. — 2013. — С. 615–622.

17 *Buzdalov M.* A provably asymptotically fast version of the generalized Jensen algorithm for non-dominated sorting. // Parallel Problem Solving from Nature – PPSN XIII. — 2014. — № 8672. — С. 528–537.

18 *Cormen T.*, *Leiserson C.*, *Rivest R.* Introduction to Algorithms, 2nd Ed. // MIT Press, Cambridge, Massachusetts. — 2001.

19 *Roy P.*, *Islam M.*, *Deb K.* Best Order Sort: A new algorithm to non- dominated sorting for evolutionary multi-objective optimization. — 2016.

20 *Gustavsson P.*, *Syberfeldt A.* A new algorithm using the non-dominated tree to improve non-dominated sorting. // Evolutionary Computation. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 89–116.

21 *Blum M.*, *Floyd R. W.*, *Pratt V.* Time bounds for selection. // Journal of Computer and System Sciences. — 1973. — Т. 7, № 4. — С. 448–461.

22 *Markina M.*, *Buzdalov M.* Hybridizing non-dominated sorting algorithms: Divide-and-conquer meets Best Order Sort. // Proceedings of Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion. — 2017. — С. 153–154.