

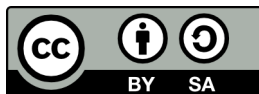
Skript zur Vorlesung Regelungstechnik 1

Modellbildung und Entwurfsmethoden für lineare SISO-Systeme

Fachbereich Technik
Studiengang Automation

Autor: Dr.-Ing. Markus Bell
Dokumentenversion 15. Februar 2024

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz.



Vorwort

Dieses Skript basiert zum Teil auf den Vorlesungsunterlagen von Professoren, welche an der Dualen Hochschule Baden-Württemberg in Mannheim lehren. Ich bedanke mich hiermit vielmals für die Bereitstellung der Unterlagen, ohne welche dieses Skriptums in dieser Form nicht möglich gewesen wäre.

Markus Bell

Mannheim, 15. Februar 2024

Vermerk

Der Urheber gesteht alle aus der CC-BY-04 Lizenz entstehenden Rechte und Pflichten zu und verweist zugleich darauf, dass keine Ansprüche auf die Richtigkeit und Vollständigkeit des vorliegenden Manuskriptes bestehen. Somit besteht sowohl bei privater als auch bei kommerzieller Nutzung, Vervielfältigung, Modifikation, Wiederveröffentlichung der Inhalte kein Rechtsanspruch auf die richtige Funktionalität oder Vollständigkeit hieraus entwickelter Lösungen, Dokumente und Produkte.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	IX
-----------------------	----

Tabellenverzeichnis	XI
---------------------	----

1	Grundbegriffe der Regelungstechnik	1
1.1	Historische Beispiele der Regelungstechnik	2
1.1.1	Antike Wasseruhr	2
1.1.2	Fliehkraftregler von James Watt	3
1.1.3	Regelungstechnik in der Neuzeit bis Heute	4
1.2	Struktur einer Regelung	6
1.2.1	Vollständiger Wirkungsplan einer Regelung	6
1.2.2	Vereinfachter Wirkungsplan einer Regelung	7
1.2.3	Wirkungsplan am Beispiel einer Fahrstuhlregelung	7
1.3	Prinzip der Steuerung in der offenen Wirkungskette	9
1.3.1	Anwendung im Regelkreis als Vorsteuerung	10
1.3.2	Anwendung im Regelkreis als Störgrößenaufschaltung	11
1.4	Klassifikation von Regelungsaufgaben	12
1.4.1	Festwert- oder Störgrößenregelung	12
1.4.2	Folgereglung	12
2	Modellbildung	15
2.1	Einführendes Beispiel	15
2.2	Klassifikation von Übertragungsgliedern	17
2.2.1	Dynamik	17
2.2.2	Linearität	18
2.2.3	Zeitinvarianz	20
2.2.4	Kausalität	21
2.3	Beschreibung lineare Systeme im Zeitbereich	22
2.3.1	Beschreibung lineare Systeme durch Differenzialgleichungen	22
2.4	Beschreibung lineare Systeme im Frequenzbereich	25
2.4.1	Fourier Reihenentwicklung	25
2.4.2	Fouriertransformation	28
2.4.3	Der Frequenzgang eines LZI-Übertragungsgliedes	28
2.4.4	Laplace transformation	33
2.4.5	Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion	36

2.4.6	Lineare Grundglieder zur Beschreibung dynamischer Verhalten . .	39
2.4.7	Bestimmung des Übertragungsverhaltens von Grundgliedern . . .	51
2.5	Modellvereinfachung	54
2.5.1	Normierung	55
2.5.2	Linearisierung	56
2.5.3	Wirkungsplanvereinfachung	60
3	Analyse des Regelkreises	65
3.1	Modell des Standardregelkreis [MSF05, Lun10]	65
3.2	Analyse der Stabilität des geschlossenen Regelkreises	68
3.2.1	Technische Beispiele für Stabilität	68
3.2.2	Stabilitätsprüfung anhand des Frequenzgangs	70
4	Entwurf der Regelung	75
4.1	Forderungen an den geschlossenen Regelkreis	75
4.2	Standard Reglertypen	78
4.2.1	P-Regler	78
4.2.2	PI-Regler	78
4.2.3	PID-Regler	80
4.2.4	Technisch realisierbarer PID-Regler	81
4.3	Entwurfsverfahren für einschleifige Regelkreise	82
4.3.1	Regler Entwurf mittels Einstellregeln	82
4.3.2	Reglerentwurf am Pol- / Nullstellendiagramm (Wurzelortskurve) .	85
4.3.3	Reglerentwurf an der Frequenzkennlinie	89
4.3.4	Reglerentwurf nach Betragsoptimum	92

Abbildungsverzeichnis

1.1	Dynamisches System als Beschreibung eines physikalischen Prozess . . .	1
1.2	Prinzipdarstellung einer antiken Wasseruhr, welche in dieser oder ähnlicher Form zwischen 1500-300 Jahre B.C. zum Einsatz kamen	2
1.3	Prinzipdarstellung einer Dampfmenngenregelung durch einen Fliehkraftregler (Größen der einzelnen Komponenten, nicht maßstabsgetreu)	4
1.4	Wirkungsplandarstellung einer Regelung nach DIN	6
1.5	Vereinfachte Wirkungsplandarstellung	7
1.6	Regelung der Fahrgeschwindigkeit eines Aufzuges (nach [MSF05] Bild 1.14 a))	8
1.7	Vollständige Wirkungsplandarstellung der Fahrstuhlregelung (nach [MSF05] Bild 1.14 b))	8
1.8	Prinzip der Steuerung in der offenen Wirkungskette ohne Rückführung .	9
1.9	Nutzung einer Steuerung, um die Sollwertfolge im geschlossenen Regelkreis zu verbessern	10
1.10	Nutzung einer Störgrößenaufschaltung, um messbare Störung zu kompensieren.	11
1.11	Typisches zeitliches Verhalten der Störsprungantwort $h_z(t)$, für den Fall ohne und mit Regelung	12
1.12	Typisches zeitliches Verhalten der Führungssprungantwort $h_w(t)$, für unterschiedliche Reglerparameter	13
1.13	Lineare Führungsgrößenänderung $w(t)$	13
1.14	Parabelförmige Führungsgrößenänderung $w(t)$	13
2.1	Reihenschaltung aus Induktivität und Widerstand	15
2.3	Wirk Schaltplan des dynamischen Verhaltens des RL-Glieds (vgl. [Foe94])	17
2.4	Vertauschung der Summationstelle bei linearen Übertragungsgliedern . . .	18
2.5	Vertauschung der konstanten Verstärkungsfaktoren bei linearen Übertragungsgliedern	19
2.6	Nichtlineare Kennlinie zur Darstellung der Nichtlinearität	19
2.7	Beispielhafte Darstellung des Verschiebungssatzes	20
2.8	Untersuchung zum Verschiebungssatz bei einem Abtastglied	21
2.9	Feder, Masse, Dämpfer System und dessen Verhalten bei Auslenkung um eine Gleichgewichtslage	26
2.10	Annäherung einer periodischen Rechteckfunktion mittels Fourierreihen, in Anlehnung an [Lun10]	26

2.11	Darstellung der sinus- und cosinus-Funktionen der Fourierreihe mittels Betrag und Phase als diskretes Spektrum	27
2.12	Prinzipdarstellung des Frequenzgangs von LZI-Gliedern, in Anlehnung an [Lun10]	29
2.13	Ortskurve eines dynamischen System	30
2.14	Ortskurve des IT ₁ -Gliedes	31
2.15	Bodediagramm zur Darstellung des Frequenzgangs, exemplarisch für ein dynamisches System	33
2.16	Darstellung der Laplacetransformation zur Lösung von Differenzialgleichungen	33
2.17	Pol- Nullstellen Diagramm gebildet aus einer Übertragungsfunktion . . .	37
2.18	Qualitatives Pol- Nullstellen Diagramm des Integratorgliedes	39
2.19	Qualitative Sprungantwort des Integratorgliedes	40
2.20	Qualitatives Bodediagramm des Integratorgliedes	40
2.21	Symbol, Blockschaltbild des Integratorgliedes	41
2.22	Qualitatives Pol- Nullstellen Diagramm des Differenziergliedes	41
2.23	Qualitatives Bodediagramm des Differenzierglied	42
2.24	Symbol, Blockschaltbild des Differenzierglied	42
2.25	Qualitative Sprungantwort des Totzeitgliedes	43
2.26	Qualitatives Bodediagramm des Totzeitgliedes	43
2.27	Symbol, Blockschaltbild des Totzeitgliedes	44
2.28	Qualitatives Pol- Nullstellen Diagramm des Verzögerungsgliedes 1-Ordnung	44
2.29	Qualitative Sprungantwort des Verzögerungsglied 1-Ordnung	45
2.30	Qualitatives Bodediagramm des Verzögerungsglied 1-Ordnung	45
2.31	Symbol, Blockschaltbild des Verzögerungsglied 1-Ordnung	46
2.32	Qualitatives Pol- Nullstellen Diagramm des Verzögerungsgliedes 2ter-Ordnung für konjugiert komplexe und reelle Polpaare und deren Sprungantworten	47
2.33	Qualitative Sprungantworten des Verzögerungsglied 2ter-Ordnung	48
2.34	Qualitatives Bodediagramm des Verzögerungsglied 2-Ordnung	49
2.35	Symbol, Blockschaltbild des Verzögerungsglied 2-Ordnung	50
2.36	Schätzung der Systemparameter eine PT ₁ -Glieds [Foe94]	52
2.37	Sprungantwort eines PT _N -Glieds und die zu schätzenden Parameter [Foe94]	53
2.38	Sprungantwort eines PT ₂ -Glieds und die zu schätzenden Parameter [Foe94]	54
2.41	Berechnung des stationären Wertepaares anhand des Wirkschaltplans . .	58
2.42	Linearisierung einer nichtlinearen Funktion durch eine Geradenapproximation	58
2.43	Darstellung der Linearisierung im Blockschaltbild	59
2.44	Regeln für die Reihenschaltung von Übertragungsfunktionen nach [Lun10]	60
2.45	Regeln für die Parallelschaltung von Übertragungsfunktionen nach [Lun10]	61
2.46	Regeln für die Rückführung von Übertragungsfunktionen nach [Lun10] .	61
2.47	Regeln für das Umformen von Blockschaltbildern nach [Foe94, Lun10] . .	63

3.1	Abbildung der Komponenten im Standardregelkreis	65
3.2	Vereinfachte Darstellung der Komponenten im Standardregelkreis	67
3.3	RC-Glied als Beispiel eines Zustands und E/A-Stabilen Systems	68
3.4	Mathematisches und mögliche Ausprägung als inverses Pendel	69
3.5	Grafische Darstellung des vereinfachten Nyquist-Kriteriums für einen instabilen Regelkreis	70
3.6	Beispielhafte Ortskurven für stabile Systeme (oben) und instabile Systeme (unten). Das IT_2T_t -System im unteren rechten Bereich, wird durch eine Totzeit instabil	71
3.7	Phasenrandkriterium und Zusammenhand zwischen Ortskurve und Frequenzkennlinie	72
4.1	Führungssprungantwort des geschlossenen Regelkreises [Lun10]	77
4.2	Störgrößensprungantwort des geschlossenen Regelkreises [Lun10]	77
4.3	Symbol, Blockschaltbild des P-Reglers	78
4.4	Parallelstruktur des PI-Reglers	79
4.5	Sprungantwort des PI-Reglers auf einen Regeldifferenzsprung	79
4.6	Blockschaltbild des PI-Reglers	80
4.7	Parallelstruktur des PID-Reglers	80
4.8	Sprungantwort des PID-Reglers auf einen Regeldifferenzsprung	81
4.9	Blockschaltbild des PID-Reglers	81
4.10	Parallelstruktur des PID-Reglers	81
4.11	Sprungantwort des realen PID-Reglers auf einen Regeldifferenzsprung	82
4.12	Blockschaltbild des realen PID-Reglers	82
4.13	Dauerschwingung des geschlossenen Regelkreises an der kritischen Reglerverstärkung $K_{Krit.}$	83
4.14	Sprungantwort eines PT_N -Glieds und die zu schätzenden Parameter [Foe94]	84
4.15	Bestimmung der Polage des geschlossenen Regelkreises im PN-Diagramm	86
4.16	Verlauf von Wurzelortskurven für verschiedene Übertragungsfunktionen $G_0(s)$	88
4.17	Verlauf des approximierten Frequenzgangs der offenen Kette	90
4.18	Schrittweiser Entwurf eines Reglers $G_R(s)$ nach dem Frequenzkennlinienverfahren	91
4.19	Führungssprungantwort nach Auslegung mittels Betragsoptimum (schwarze Linie) und geeignete Approximation als PT_1 -Glied (blaue Linie)	94

Tabellenverzeichnis

1.1	Beispiele für dynamisches Systeme und ihre zugehörigen Systemgrößen . . .	1
4.1	Einstellregeln nach Ziegler-Nichols für Streckenparameter mittels kritischer Verstärkung	83
4.2	Einstellregeln nach Ziegler-Nichols für Streckenparameter nach Sprungantwort	84

1 Grundbegriffe der Regelungstechnik

Ziel der Regelungstechnik ist eine gegebene Regelgröße y auf einen festgelegten Wert zu bringen. In den meisten Fällen lässt sich diese Regelgröße nicht direkt, sondern nur indirekt durch ein Ventil oder ein anderes technisches Stellglied einstellen. Diese indirekte Beeinflussung erfolgt über die Eingangsgröße u eines Systems und wirkt über die inneren Zustände x auf dessen Ausgang y , welcher die Regelgröße darstellt. Die folgende Abbildung 1.1 stellt ein dynamisches System mit den vorgenannten Größen dar [Foe94]. In Tabelle 1.1 werden einige Beispiele gegeben, welche technische Systeme aus unserem

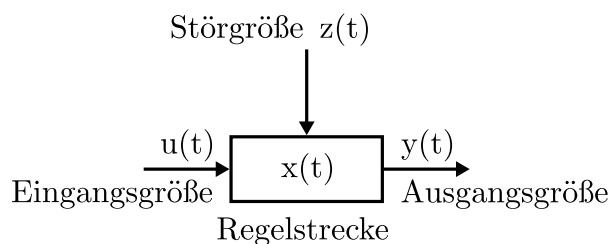


Abbildung 1.1: Dynamisches System als Beschreibung eines physikalischen Prozess

Alltag mit den Kenngrößen aus Abbildung 1.1 verknüpfen.

Tabelle 1.1: Beispiele für dynamisches Systeme und ihre zugehörigen Systemgrößen

Dynamisches System	$u(t)$	$y(t)$	$z(t)$
Gleichstrommaschine	Ankerspannung	Drehzahl	Lastmoment
Raumheizung	Thermostatstellung	Raumtemperatur	Außentemperatur
Füllstandsregelung	Zugflussventilstellung	Füllhöhe	Abfluss
Noise-Cancelling	Gegenmembran	Signal-Rauschverhältnis	Umgebungsgeräusche
Pupille im Auge	Pupillenweite	Lichteinfall	Krankheiten, Alkohol
Population	Raubtiere	Anzahl der Beutetiere	Jäger (Mensch)

bekannt, ihre Grundprinzipien fanden jedoch schon sehr früh Anwendung, wie z.B. in Wasseruhren [Lew00, Lan00]. Der prinzipielle Aufbau solch einer Wasseruhr ist in Abbildung 1.2 dargestellt. Das Regelungsziel war im Falle der Wasseruhr eine gleichmäßige Befüllung des unteren Behälters. Ein Schwimmer mit aufgesetztem Stab bewegt sich durch diese Füllstandsänderung an einer Zeitskala entlang. Je gleichmäßiger sich also der untere Behälter füllt, umso geringer sind die Unterschiede der gezählten Stunden über den Tag. Aus Regelungstechnischer Sicht ist das obere Becken die Regelstrecke:

- Der Wasserzufluss $u'(t)$ wird als konstant angenommen. Der Zufluss $u(t)$ in den oberen Behälter wird durch einen Schwimmer geregelt, welcher durch seine Auftriebskraft relativ zum Pegel als Ventil wirkt.
- Somit ist der Sollwert $w(t)$ ein fester Pegel, welcher zu einem vordefiniertem Durchfluss an Wasser $\dot{m}(t)$ führt.
- Die Regeldifferenz ergibt sich aus dem Sollwert und dem tatsächlichen Pegel $e(t) = w(t) - y(t)$
- Als Eingang auf das Stellglied (Schwimmer) wirkt die Auftriebskraft $F_a(t)$

1.1.2 Fliehkraftregler von James Watt

Ein mechanisches Beispiel wurde von James Watt um 1788 auf der Basis des Prinzips von rotierenden Körpern entwickelt [Unb08]. Der sogenannte Fliehkraftregler war in der Lage, die Drehzahl Watt's Dampfmaschinen zu regeln und so konstant zu halten. Der prinzipielle Aufbau der Regelung ist in Abbildung 1.3 dargestellt. Auf der linken Seite der Abbildung 1.3 ist eine Gleichstrommaschine dargestellt, welche im 18. Jahrhundert noch immer für die Generation von Elektrizität genutzt wurde, um Haushalte und die Industrie zu versorgen. Die Ausgangsspannung der Gleichstrommaschine musste für diesen Fall konstant geregelt werden, um eine gleichbleibende Versorgung der angeschlossenen Verbraucher sicherzustellen. Spannungsschwankungen machten sich sofort in der Helligkeit von Glühlampen oder der Drehzahl der angeschlossenen Maschinen in der Industrie bemerkbar. Da die Drehzahl der Gleichstrommaschine (bei Vernachlässigung der Verluste) der Gleichung 1.1

$$V(t) = \phi \omega \tag{1.1}$$

folgt, kann dies über eine Regelung der Drehzahl erreicht werden. Im rechten Teil der Abbildung 1.3 ist der angesprochene Fliehkraftregler dargestellt. Die Funktion des Reglers kann wie folgt beschrieben werden:

- Eine Rotation der Gelenkstangen mit der Kreisfrequenz $\omega(t)$, welche über ein Kegelzahnrad von der Welle der Dampfmaschine angetrieben werden, führt durch die Fliehkraft $F_F(t)$ zu einem konstanten Kugelabstand $D(t)$.

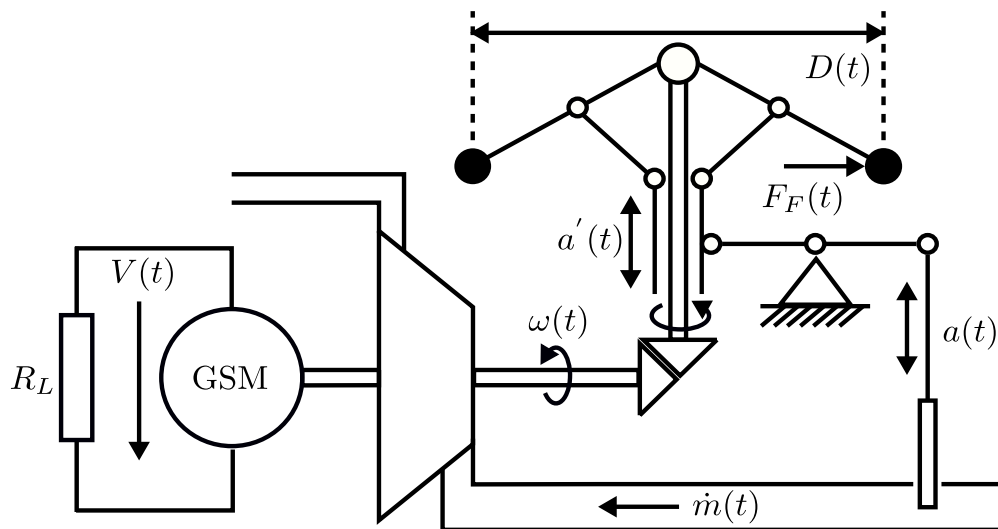


Abbildung 1.3: Prinzipdarstellung einer Dampfmengenregelung durch einen Fliehkraftregler (Größen der einzelnen Komponenten, nicht maßstabsgetreu)

- Ändert sich die Kreisfrequenz $\omega(t)$, so ändert sich auch die Fliehkraft $F_F(t)$ und somit durch die Gelenk Konstruktion der Abstand $D(t)$ der beiden Gewichte des Reglers.
- Das mechanische Umlenksystem übersetzt den Abstand $D(t)$ über die Position $a'(t)$ in die Dampfventilstellung $a(t)$.
- Über die Dampfventilstellung $a(t)$ wird die Dampfmenge $\dot{m}(t)$ und somit das Drehmoment bzw. die Drehzahl der Dampfturbine geregelt.

1.1.3 Regelungstechnik in der Neuzeit bis Heute

Seit den eher intuitiven Ansätzen regelungstechnischer Apparate sind viele mathematische und technische Zusammenhänge erforscht worden, die heute einen wesentlich differenzierten und analytischen Blick auf die Regelungstechnik erlauben. Zunächst bedarf es somit einer Einordnung der Analysen und Grundlagenarbeiten, welche im weiteren zur modernen Regelungstechnik geführt haben [Zom13].

- 1782 Jozef Maximilián Petzval, Pierre-Simon Laplace: *Laplace-Transformation*
- 1868 James Clerk Maxwell: *On Governors*, theoretische Betrachtung des Fliehkraftreglers
- 1877 Edward J. Routh: *Treatise on the stability of a given state of motion*, Arbeit zum Stabilitätsbegriff linearer Systeme

- 1892 Aleksandr M. Lyapunov: *The general problem of the stability of motion*, Verallgemeinerung der Stabilitätsbegriffes für beliebige dynamische Systeme
- 1895 Adolf Hurwitz: *Über die Bedingungen unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt*. (Routh-Hurwitz-Kriterium)
- 1932 Harry Nyquist: *Regeneration theory*
- 1942 J. G. Ziegler, N. B. Nichols: *Optimum settings for automatic controllers*, heuristische Einstellregeln für PID-Regler
- 1945 Hendrik W. Bode: *Network analysis and feedback amplifier design*,
- 1961 Rudolf E. Kálmán, Richard S. Bucy: *New results in linear filtering and prediction theory*, der Kálmán Filter begründet den Zeitpunkt der modernen Regelungstechnik

Besonders durch die theoretischen Arbeiten von Petzval und Laplace in der Laplace-Transformation, aber auch die technischen Untersuchungen zum Fliehkraftregler von Maxwell konnten nun theoretische Konstrukte der Regelungstechnik entwickelt werden. Bis ins Jahr 1940 hatte sich die Regelungstechnik dann zur einer eigenständigen Wissenschaft etabliert. In dieser Vorlesung werden klassische Verfahren der Regelungstechnik eingeführt, welche sich bis 1960 entwickelt hatten.

In der heutigen Zeit ist die Regelungstechnik auch aus unserem Alltag nicht mehr weg zu denken. Unsere batteriebetriebenen Smart-Phones besitzen geregelte Spannungswandler, welche den unterschiedlichen Prozessoren und Komponenten bedarfsgerecht ihre Versorgung bereitstellen. Moderne Personen-Kraft-Wagen (PKW) besitzen Geschwindigkeits-regeleinrichtungen, um per Knopfdruck eine gewisse Fahrgeschwindigkeit einzustellen.

1.2 Struktur einer Regelung

1.2.1 Vollständiger Wirkungsplan einer Regelung

Grundsätzlich gibt es mehrere Möglichkeiten, um eine Regelung zu beschreiben. Zum einen kann sie durch das Aufstellen von mathematischen Gleichungssystemen erfolgen. Dies ist in den meisten Fällen zwar notwendig, jedoch für die strukturelle Aufbereitung zunächst nicht Zielführend. Deshalb wird an dieser Stelle der Wirkungsplan einer Regelung nach DIN IEC 60050-351 (ehemals DIN 19226-4) [DKE14] eingeführt (vgl. Abbildung 1.4).

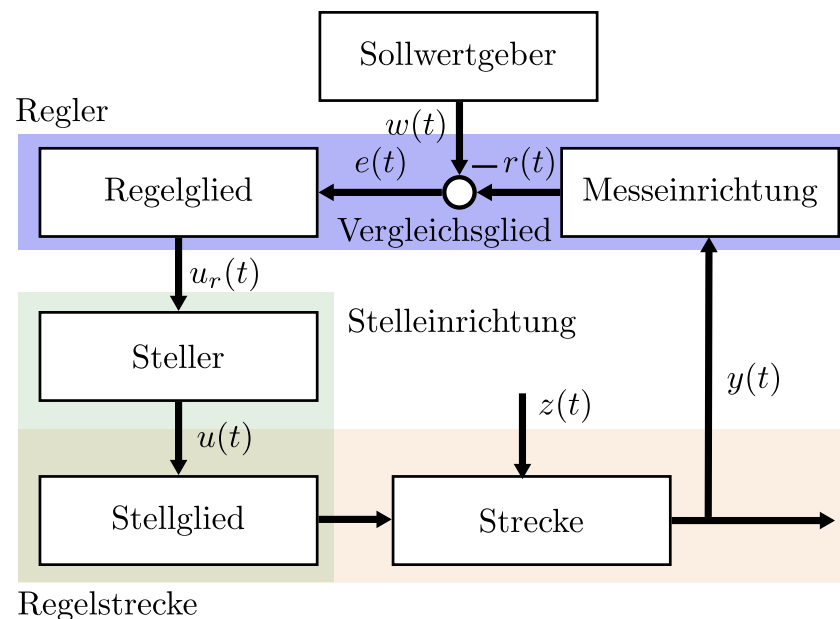


Abbildung 1.4: Wirkungsplandarstellung einer Regelung nach DIN

Folgende Begrifflichkeiten sollen hier näher erläutert werden (siehe auch[Foe94][MSF05]):

- Systemblock Regeleinrichtung

Messeinrichtung: Hat die Aufgabe, die allgemeine Messgröße (Weg, Strom, Drehzahl, Druck) in eine für das Regelungssystem verarbeitbare Form umzuwandeln. Hierbei muss beachtet werden, dass Messglieder auch ein Übertragungsverhalten besitzen.

Sollwertgeber: Erzeugt die Führungsgröße des Regelkreises und gibt sie an die Vergleichsstelle zwischen Messeinrichtung und Regelglied weiter

Vergleichsglied: Bildet die Regeldifferenz $e(t)$ aus Ausgangsgröße $y(t)$ und Sollwert $w(t)$.

Regelglied: Dieser Teil der Regeleinrichtung berechnet aus der Regeldifferenz $e(t)$ eine Referenzgröße für den Steller. Dieser Berechnung liegt das Regelgesetz zugrunde.

- Systemblock Stelleinrichtung

Steller: Ist die ausführende Funktionseinheit und wandelt das Ausgangssignal des Regelglieds in ein für das Stellglied verständliches Signal um.

Stellglied: Ist meist Teil der Regelstrecke und setzt das Stellsignal um, indem es in die zu regelnden Größen $\mathbf{x}(t)$ eingreift.

- Systemblock Regelstrecke

Strecke: Ist der Teil des Regelkreises, in welchem sowohl die Regelgrößen beeinflusst, als auch die Messgrößen abgegriffen werden. Oft wird die Regelstrecke auch als der zu regelnde Prozess bezeichnet.

1.2.2 Vereinfachter Wirkungsplan einer Regelung

Wird die Messeinrichtung und das Stellglied als Teil der Regelstrecke angesehen und der Steller in die Regeleinrichtung integriert, ergibt sich das folgende vereinfachte Blockschaltbild (vgl. Abbildung 1.5), welches den Wirkungsplan auf seine wesentlichen Komponenten vereinfacht [MSF05].

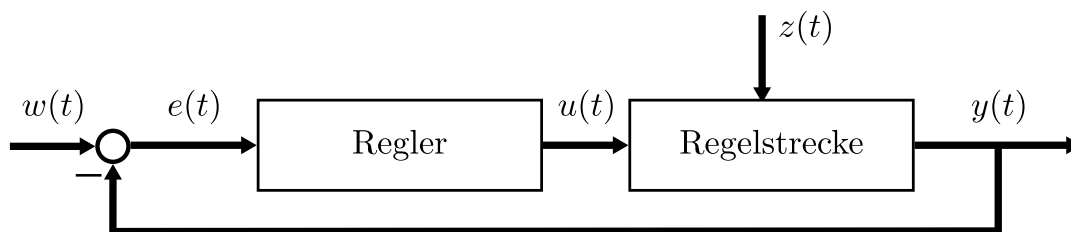


Abbildung 1.5: Vereinfachte Wirkungsplandarstellung

Das Regelglied wird nun vereinfacht als 'Regler' bezeichnet und die Regelstrecke enthält nun die Messeinrichtung so wie das Stellglied.

1.2.3 Wirkungsplan am Beispiel einer Fahrstuhlregelung

Die Vorgehensweise zur Aufstellung des vollständigen und vereinfachten Wirkschaltplanes, soll nun Anhand einer Drehzahlregelung einer Gleichstrommaschine dargestellt werden (aus [MSF05], Beispiel 1.9). In Abbildung 1.6 ist zunächst der technische Prozess mit den jeweiligen Komponenten dargestellt.

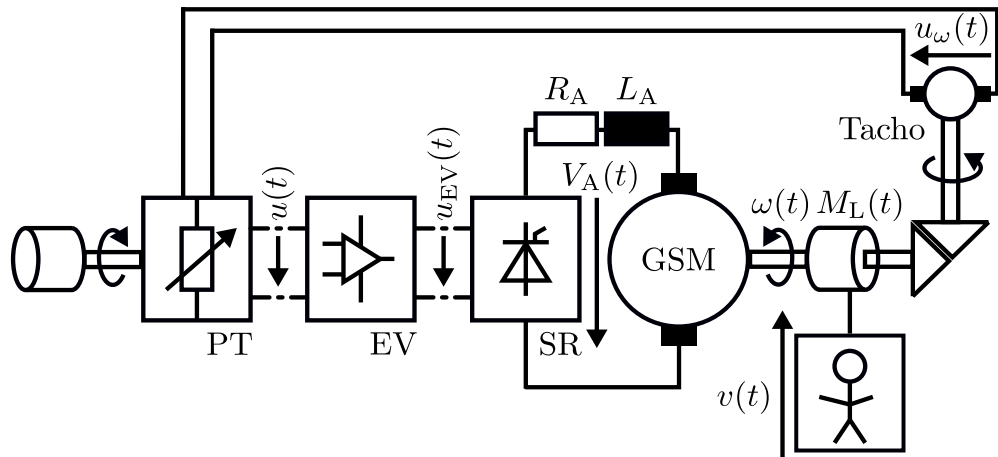


Abbildung 1.6: Regelung der Fahrgeschwindigkeit eines Aufzuges (nach [MSF05] Bild 1.14 a))

Beispiele zum Nachlesen 1

- *Blockschaltbild der Fahrstuhlregelung*

Wird nun der technische Prozess durch seine Wirkungsblöcke dargestellt, ergibt sich folgender vollständiger Wirkungsplan (Abbildung 1.7). Durch die Kombination von Strom-

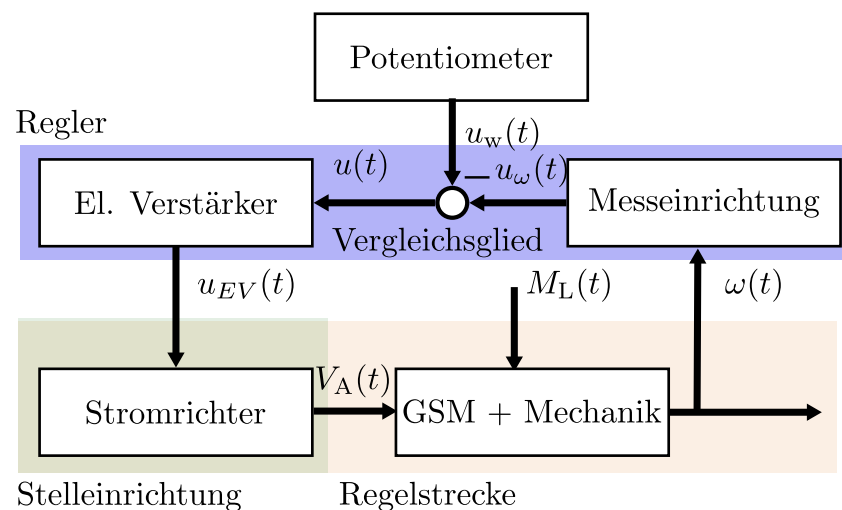


Abbildung 1.7: Vollständige Wirkungsplandarstellung der Fahrstuhlregelung (nach [MSF05] Bild 1.14 b)

richter, Gleichstrommotor, Aufzug und Tachogenerator ergibt sich der vereinfachte Wirkungsplan der Fahrstuhlregelung. Der Vorgang wird an dieser Stelle nicht weiter ausge-

führt, da er dem allgemeinen Prinzip folgt.

1.3 Prinzip der Steuerung in der offenen Wirkungskette

Eine Steuerung wird meist als offene Wirkungskette bezeichnet und besitzt keine Rückführung der Regelgröße, wie in Abbildung 1.8 dargestellt. Grundsätzlich kann die Ziel-

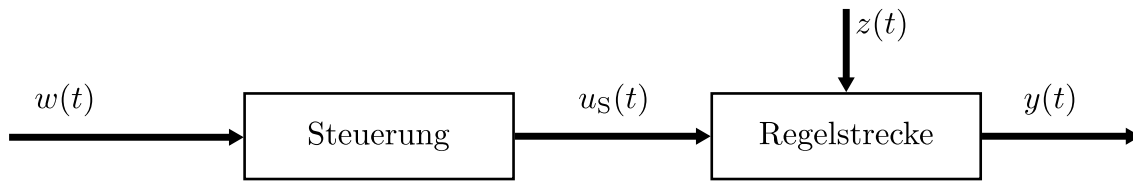


Abbildung 1.8: Prinzip der Steuerung in der offenen Wirkungskette ohne Rückführung

vorgabe, nämlich eine Regelgröße auf einen bestimmten Wert einzustellen, auch ohne Rückführung erreicht werden. Sind sämtliche Störungen abgeklungen oder vernachlässigbar $z(t) = 0, \forall t \in \{0+, \dots, \infty\}$, so kann über die Beziehung (1.2)

$$y(t) = f(u(t)) \quad (1.2)$$

Berechnet werden, welche Führungsgröße $w(t)$ die Stellgröße $u(t)$ so beeinflusst, dass (1.3) gilt

$$w(t) = y(t) \quad (1.3)$$

Dies ist in vielen Fällen nur schwer möglich, da $f(\cdot)$ meist durch eine Differentialgleichung beschrieben werden muss. Das inverse Modell kann nur erstellt werden, wenn die dynamischen Eigenschaften der Regelstrecke ausreichend bekannt sind. Eine Steuerung kann in diesem Fall erstellt werden durch die Vorschrift (1.4).

$$\begin{aligned} u(t) &= f^{-1}(w(t)) \\ y(t) &= f(u(t)) = f(f^{-1}(w(t))) = w(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Jedoch ist es möglich, dass die Funktion $f^{-1}(\cdot)$ nicht existiert, da $f(\cdot)$ nicht invertierbar ist. Ist dies der Fall, kann nur eine Annäherung $\tilde{f}^{-1}(\cdot)$ berechnet werden. Diese Näherung bewirkt, dass nur die Forderung $y(t) \approx w(t)$ erreicht werden kann.

Es wird somit recht schnell klar, dass die Regelung wesentliche Vorteile gegenüber einer Steuerung in der offenen Wirkungskette besitzt. Vor allem ist hier jedoch die Sollwertfolge zu nennen, deren Funktion in der geschlossenen Wirkungskette trotz unterschiedlicher Eigenschaften der Regelstrecke erhalten bleibt [Lun10]. Eine Regelung hat grundsätzlich Vorteile:

- im Falle einer instabilen Regelstrecke.
- bei nicht messbaren Störungen.
- falls die statischen und dynamischen Parameter der Strecke nicht genau bekannt sind.
- falls diese Parameter sich zeitlich ändern.

1.3.1 Anwendung im Regelkreis als Vorsteuerung

Nichts desto trotz findet das Prinzip der Steuerung in der offenen Wirkungskette in moderne Regelkreise Einzug. Ein Beispiel hierfür ist die Vorsteuerung, welche als weiterer Freiheitsgrad der Regelung genutzt werden kann, um Sollwerte schneller zu erreichen [Lun10]. Sowohl der Regler als auch die Vorsteuerung erhalten den gleichen Sollwert $w(t)$ und schalten diesen unterschiedlich auf die Strecke auf, wie in Abbildung 1.9 dargestellt. Die Eingangsgröße $u(t)$ auf die Regelstrecke teilt sich nun in einen Anteil des Reglers

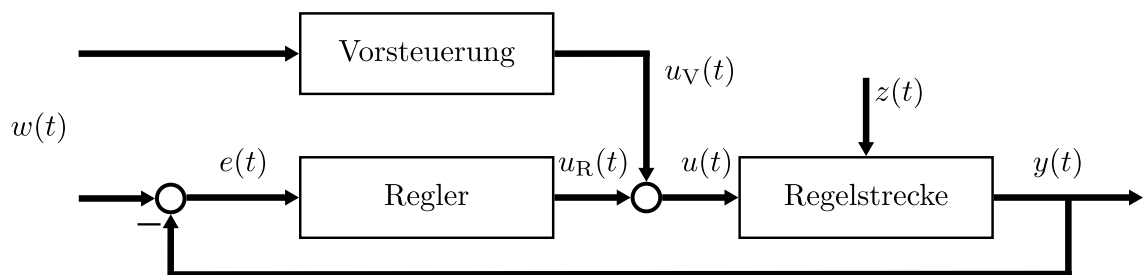


Abbildung 1.9: Nutzung einer Steuerung, um die Sollwertfolge im geschlossenen Regelkreis zu verbessern

$u_R(t)$ und in einen Anteil der Vorsteuerung $u_V(t)$ auf. Beide Kreise können separat entworfen werden, wobei beim Regelkreis nun das Augenmerk auf die Stabilisierung und Störkompensation und bei der Vorsteuerung auf eine möglichst gute Sollwertfolge gelegt wird.

Eigenschaften:

- Verbessert die Umschaltung zwischen zwei Arbeitspunkten.
- Erhöht die Freiheitsgrade in der Regelung.
- Sollwert kann meist schneller erreicht werden, als im Falle der 'einfachen' Regelung.

1.3.2 Anwendung im Regelkreis als Störgrößenaufschaltung

Ein weiteres Anwendungsfeld einer Steuerung ist die Störgrößenaufschaltung oder auch Störgrößenkompensation genannt [Foe94, Lun10]. Zu beachten ist, dass diese nur entworfen werden kann, wenn die zu kompensierenden Störungen $\tilde{z}(t)$ messbar sind bevor sie auf die Regelstrecke wirken. Die Störgrößenkompensation im Regelkreis ist in Abbildung 1.10 dargestellt. Ziel der Kompensation ist eine möglichst gute Unterdrückung der

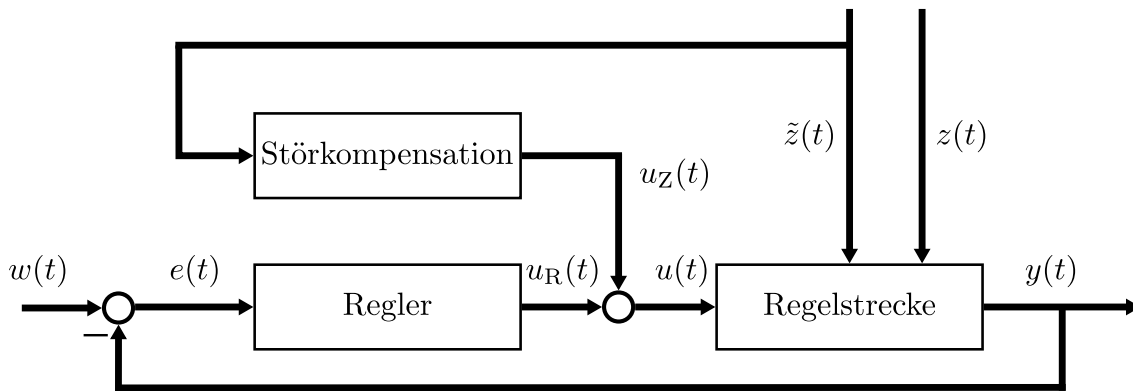


Abbildung 1.10: Nutzung einer Störgrößenaufschaltung, um messbare Störung zu kompensieren.

Störungswirkung $\tilde{z}(t)$ ohne das Führungsverhalten des Regelkreises wesentlich zu beeinflussen. Grundsätzlich kann jeder Regler auf Führungs- und Störverhalten optimiert werden, aber die Störunterdrückung ist in vielen Fällen effektiver.

Eigenschaften:

- Realisierbar für Störungen die sich einfach messen lassen.
- Wirkung der Störung auf den Regelkreis kann unterdrückt werden.
- Eine 100% Unterdrückung ist praktisch nicht möglich, da dynamische Systeme nicht invertierbar sind.

Octave Simulationsbeispiele 1

- *Kurze Einführung in Octave*

1.4 Klassifikation von Regelungsaufgaben

1.4.1 Festwert- oder Störgrößenregelung

Eine Regelung kann zunächst durch ihre vorrangige Aufgabe klassifiziert werden. Diese Aufgabe kann z.B. die Störgrößenregelung bzw. Festwertregelung sein [MSF05, ZR17]. Dies bedeutet, dass der Sollwert der zu regelnden Strecke sich nicht wesentlich ändert. Jedoch sind immer wieder Störungen $z(t)$, welche auf die Strecke wirken, zu erwarten. Der Regelkreis sollte in diesem Fall ein gutes Störverhalten aufweisen. Die Systemantwort $h_z(t)$ auf eine Störgröße ist in Abbildung 1.11 dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen,

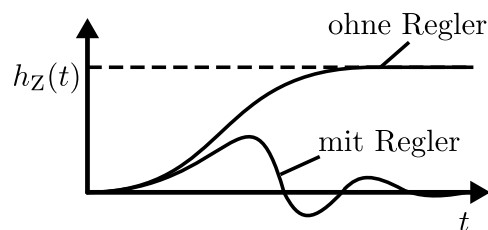


Abbildung 1.11: Typisches zeitliches Verhalten der Störsprungantwort $h_z(t)$, für den Fall ohne und mit Regelung

dass ohne Regler eine bleibende Abweichung entstehen würde. Diese Abweichung ist im Regelkreis nicht erwünscht und sollte durch die geeignete Wahl des Reglers unterdrückt werden.

1.4.2 Folgeregelung

Ändert der Sollwert sich zeitlich, so kann der Regelkreis als Folgeregelung entworfen werden. Die Regelungsaufgabe ist nun, die Regelgröße $y(t)$ dem Sollwert $w(t)$ nachzuführen. Die qualitative Beurteilung der Funktion erfolgt anhand des Führungsverhaltens des Regelkreises [Lun10].

Führungssprungantworten und unterschiedliche Führungsgrößen

Eine klassische Führungsgrößenänderungen ist die Sprungfunktion. Eine CNC-Fräse soll eine neue Position anfahren. Hierfür müssen die Servomotoren ohne Überspringen und ohne bleibende Regelabweichung auf die neue Zielposition verfahren werden. Andernfalls würde zu viel oder zu wenig Material aus dem Werkstück gefräst werden. In Abbildung 1.12 ist dieser Sachverhalt exemplarisch dargestellt.

Jedoch ist es gerade bei Servomotoren üblich, die Position mittels einer festgelegten

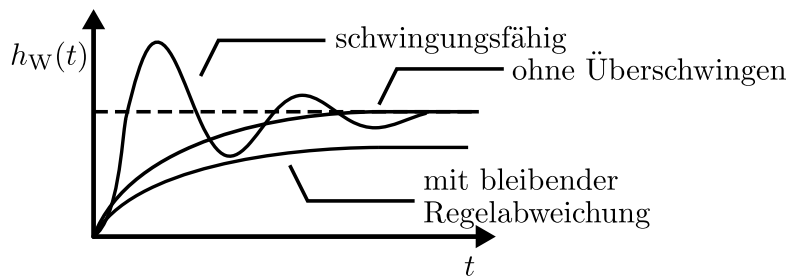


Abbildung 1.12: Typisches zeitliches Verhalten der Führungssprungantwort $h_w(t)$, für unterschiedliche Reglerparameter

Bahn zu erreichen. In diesem Fall kann eine lineare Änderung der Führungsgröße erfolgen, um den neuen Arbeitspunkt anzufahren. Das Verhalten des Regelkreises mit und ohne bleibende Regelabweichung ist in Abbildung 1.13 dargestellt. Eine weitere in der

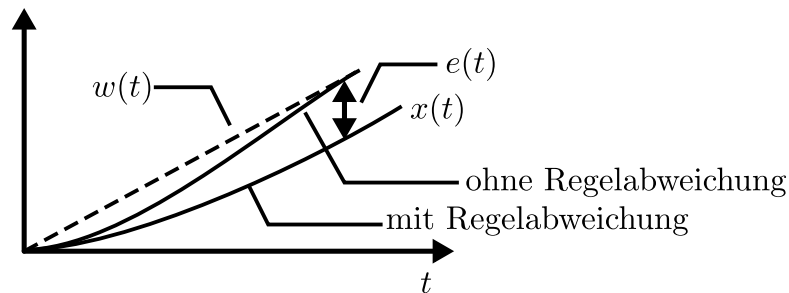


Abbildung 1.13: Lineare Führungsgrößenänderung $w(t)$

Praxis genutzte Führungsgröße ist die Parabelform. Diese Parabelform ist beispielsweise bei Industrierobotern zu finden [Lun10]. Die Position wird dort in Form eines Polynoms vorgegeben und muss durch den Regler eingehalten werden. In vielen Fällen wird diese Aufgabe durch die Kombination mit einer Vorsteuerung gelöst. Das prinzipielle Verhalten ist in Abbildung 1.14 dargestellt. Anmerkung: Es gibt Anwendungen, bei denen

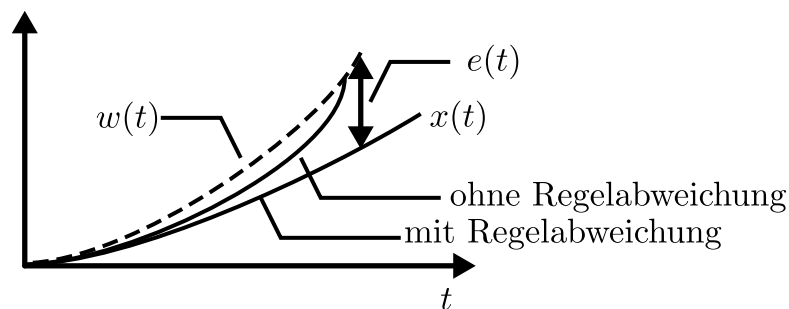


Abbildung 1.14: Parabelförmige Führungsgrößenänderung $w(t)$

trotz der Nutzung einer linearen oder polynomförmigen Führungsgröße keine bleibende

Regelabweichung zulässig ist.

- Fliegende Schere: Durchschneiden einer sich bewegenden Papierbahn.
- Wiederholgenauigkeit von Trajektorien bei Industrierobotern in der Automobilfertigung.

Aufgaben zum Selbststudium 1

- *Welche Komponenten sind im Regelkreis nach DIN enthalten?*
 - *Zeichnen und benennen Sie sämtliche Komponenten*
 - *Kreisen Sie die jeweiligen Gruppen ein*
- *Was ist der Unterschied zwischen offener Wirkungskette und geschlossenem Regelkreis?*
- *Für welche Anwendungszwecke kann eine Steuerung eingesetzt werden?*
 - *Suchen sie zwei technische Beispiele für Vorsteuerungen aus gängiger Literatur*
- *Wie können Regelungsaufgaben grundsätzlich klassifiziert werden?*
- *Welche Auswirkungen haben bleibende Regelabweichungen?*

2 Modellbildung

Die Modellbildung befasst sich mit der mathematischen Beschreibung technischer Systeme. Das hieraus resultierende mathematische Modell soll das Verhalten zwischen Eingangsgröße $u(t)$ und Ausgangsgröße $y(t)$ mit gewünschter Genauigkeit beschreiben. Die meisten technischen Systeme lassen sich durch partielle oder gewöhnliche Differenzialgleichungen darstellen. Im folgenden soll anhand eines einfachen Beispiels die grundsätzliche Vorgehensweise veranschaulicht werden.

2.1 Einführendes Beispiel

Dies soll zunächst anhand eines Beispiels demonstriert werden (basierend auf [Foe94]). In Abbildung 2.1 auf der linken Seite ist ein RL -Glied, bestehend aus Induktivität L und ohmschen Widerstand R dargestellt. Unter Berücksichtigung der Eisensättigung der rea-

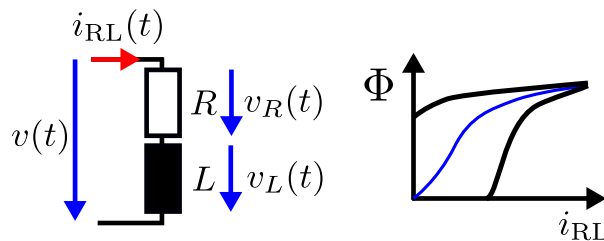


Abbildung 2.1: Reihenschaltung aus Induktivität und Widerstand

len Induktivität würde sich für den magnetischen Fluss eine exemplarische nichtlineare Kurve, wie in Abbildung 2.1 ergeben. Im ersten Schritt werden nun die mathematischen Gleichungen des Systems beginnend mit dem Maschensatz aufgestellt (2.2).

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t). \quad (2.1)$$

Danach können die Gleichungen für die einzelnen Elemente aufgestellt werden

$$\begin{aligned} v_R(t) &= R \cdot i_{RL}(t) \\ v_L(t) &= \frac{d\Phi(t)}{dt} \\ i_{RL}(t) &= f(\Phi(t)) \quad \text{Nichtlinear Zusammenhang} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Im zweiten Schritt können die aufgestellten Systemgleichungen in einzelnen Blöcken grafisch dargestellt und zusammengeführt werden. Dies erleichtert die spätere Darstellung im sogenannten Blockschaltbild. Zunächst muss jedoch noch definiert werden welche Größe den Eingang und welche den Ausgang des Systems beschreiben soll. In diesem Beispiel nutzen wir $v(t)$ als Eingang, das dieser direkt im System beeinflussbar ist und $i_{RL}(t)$ als Ausgang. Alle Gleichungen aus (2.2) werden einem Block zugeordnet und ergeben folgende Schaltbilder:

- Kennlinienglied $i_{RL} = f(\Phi(t))$

Kennlinienglieder beschreiben einen statischen funktionalen Zusammenhang zwischen Eingang und Ausgang (in der Regel nichtlinear).

- Proportionalglied $v_R = R \cdot i_{RL}$

Proportionalglieder beschreiben einen statischen funktionalen Zusammenhang zwischen Eingang und Ausgang (linearer Fall).

- Differentiationsglied $v_L = \frac{d\Phi(t)}{dt}$

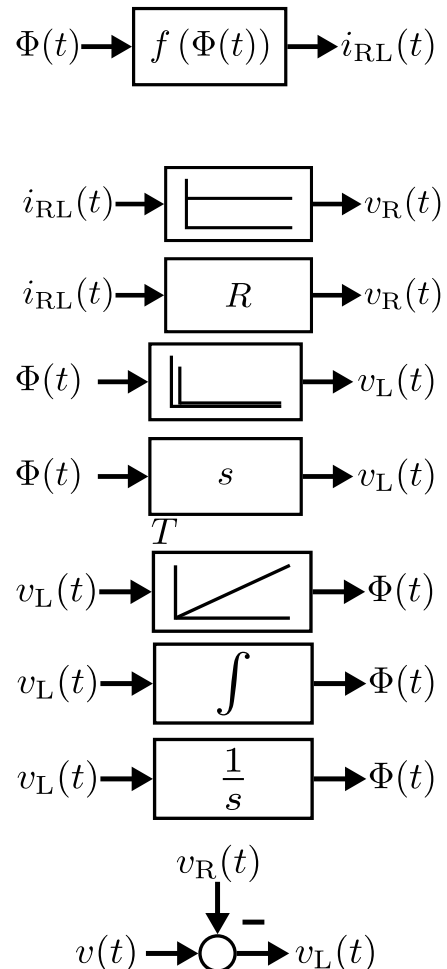
Berechnet die Ableitung des Eingangssignals und stellt es am Ausgang bereit.

- Integrationsglied $\Phi = \frac{1}{T} \int v_L(t) dt$

Integrationsglieder integrieren den Systemeingang auf und bilden daraus den Systemausgang. Die Variable T gibt die Integrationszeitkonstante an.

- Summationsglied $v_L = v - v_R$

Durch ein Summationsglied kann die Addition oder Subtraktion zweier Größen dargestellt werden.



Durch Kombination der einzelnen Blöcke können nun die Gleichungen aus (2.2) als Blockschaltbild dargestellt werden (Abbildung 2.3). Dieses erste anschauliche Beispiel hat nun vier Übertragungsglieder eingeführt, welche in der Darstellung von technischen Systemen genutzt werden können. Die Kennlinien in den Blöcken stellen die Antwort des Block Ausgangs auf einen Sprung am Eingang dar. Es stellt sich jedoch die Frage,

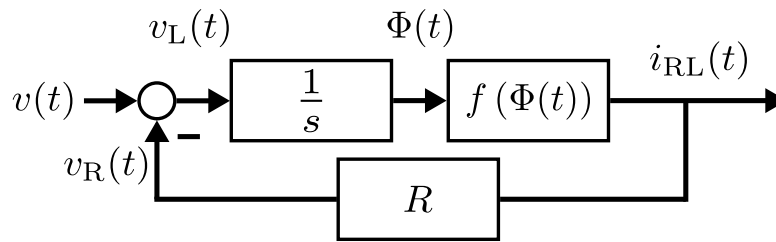


Abbildung 2.3: Wirkschaltplan des dynamischen Verhaltens des RL-Glieds (vgl. [Foe94])

wie Übertragungsglieder etwas allgemeiner klassifiziert werden können. Hierzu sollen die wichtigsten Merkmale im nächsten Kapitel dargestellt werden.

2.2 Klassifikation von Übertragungsgliedern

Ein Übertragungsglied beschreibt eine mathematische Abbildung zwischen Eingangsgröße $u(t)$ und Ausgangsgröße $y(t)$. Die Abbildung kann eine allgemeine Funktion sein z.B. $y(t) = u^3(t)$ aber eben auch eine Differentialgleichung. Letzteres bezieht sich auf den Fall, dass ein dynamisches System durch ein Übertragungsglied dargestellt werden soll. Übertragungsglieder können durch eindeutige Eigenschaften klassifiziert werden [Foe94, Unb08, Lun10, ZR17], welche im Folgenden näher erläutert werden.

2.2.1 Dynamik

Wie schon im einführenden Beispiel (Abbildung 2.1) dargestellt gibt es dynamische und statische Anteile in einem technischen System. Statische Anteile sind z.B.

- Kennlinien für Magnetisierung, Materialfestigkeit, Federsteifigkeit, Reibkonstante (Reifen Bodenkontakt) etc.
- Falls die Dynamik eines Teilsystems wesentlich kleinere Zeitkonstanten aufweist, wie die anderen betrachteten Elemente und deren Einfluss auf das Gesamtverhalten vernachlässigbar ist. In diesem Fall wird meist nur die statische Verstärkung ($h(t)$ für $t \rightarrow \infty$) des vormals dynamischen Teilsystems betrachtet.

Im Falle eines statischen Anteils ist die Abbildung zwischen Ein- und Ausgang konstant und nicht von weiteren Einflussgrößen Abhängig. Dies ist beispielsweise ein Ansatz, wenn Dynamiken des betrachteten technischen Systems so schnell ablaufen, dass sie für deren Modellierung keine Rolle spielen. Bei einem dynamischen Übertragungsglied kann sich die Übertragungseigenschaft zwischen Ein- und Ausgang ändern. Grund für eine Systemdynamik sind die Energiespeicher in einem technischen System. Energiespei-

cher bewirken das einzelne Systemgrößen wie Spannung $v(t)$ oder Strom $i(t)$ sich nicht schlagartig ändern können. So ist beispielsweise in einer realen Induktivität Energie im magnetischen Feld gespeichert. Bei einer konstanten Eingangsspannung würde nach (2.2) der magnetische Fluß Φ linear, jedoch niemals sprungförmig ansteigen.

2.2.2 Linearität

Die Linearität ist die wichtigste Eigenschaft der in dieser Vorlesung untersuchten Klasse von Systemen.

Lineare Übertragungsglieder

Grundsätzlich gehorchen lineare Systeme zwei wesentlichen Eigenschaften. Zum einen gilt das Superpositions- oder Überlagerungsprinzip (2.3).

$$y(t) = f((u_1(t) + u_2(t))) = f(u_1(t)) + f(u_2(t)) \quad (2.3)$$

In Form eines Blockschaltbildes bedeutet dies, dass die Summationsstelle der Eingangsgrößen verschoben werden kann, jedoch die selbe Ausgangsgröße entsteht (Abbildung 2.4). Diese Eigenschaft wird auch **Additivität** genannt. Die zweite wesentliche Eigenschaft

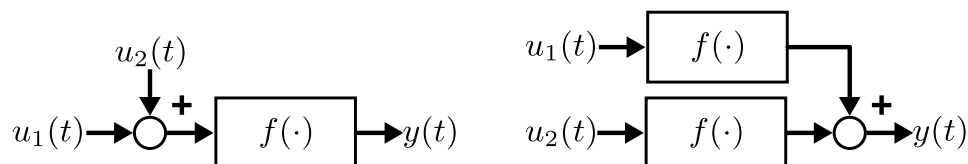


Abbildung 2.4: Vertauschung der Summationstelle bei linearen Übertragungsgliedern

von linearen Systemen ist die **Homogenität**. Diese beschreibt, dass sich konstante Verstärkungsfaktoren aus einer Funktion ausklammern lassen, ohne, dass sich hierdurch deren Wirkung auf den Systemausgang verändern (2.4).

$$y(t) = f(ku_1(t)) = kf(u_1(t)) \quad (2.4)$$

Es ist möglich diesen Zusammenhang wieder in einem Blockschaltbild darzustellen (Abbildung 2.5). Es lässt sich als Merkregel festhalten: Ist eine Funktion aus einer Summe linearer Übertragungsglieder entstanden, so ist die Funktion selbst wieder linear.

Beispiele zum Nachlesen 2

- *Linearitätsnachweis bei Integratorketten*
- *Linearitätsnachweis von MIMO Summationsgliedern*

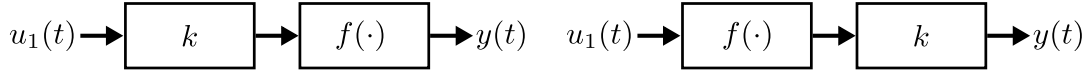


Abbildung 2.5: Vertauschung der konstanten Verstärkungsfaktoren bei linearen Übertragungsgliedern

Nichtlineare Übertragungsglieder

Untersucht man nichtlineare Übertragungsglieder so sind die Beiden vorgenannten Eigenschaften nicht vorzufinden. Als einfaches Beispiel lässt sich hier die Multiplikation von zwei Größen darstellen (2.5)

$$y(t) = f(u_1(t), u_2(t)) = u_1(t) \cdot u_2(t) \quad (2.5)$$

Nehmen wir nun Verstärkungsfaktoren hinzu

$$u_1(t) = \hat{k}\hat{u}_1(t) + \tilde{k}\tilde{u}_1(t)$$

$$u_2(t) = \hat{k}\hat{u}_2(t) + \tilde{k}\tilde{u}_2(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= f(\hat{k}\hat{u}_1(t) + \tilde{k}\tilde{u}_1(t), \hat{k}\hat{u}_2(t) + \tilde{k}\tilde{u}_2(t)) = (\hat{k}\hat{u}_1(t) + \tilde{k}\tilde{u}_1(t))(\hat{k}\hat{u}_2(t) + \tilde{k}\tilde{u}_2(t)) \\ &= \hat{k}^2\hat{u}_1(t)\hat{u}_2(t) + \tilde{k}^2\tilde{u}_1(t)\tilde{u}_2(t) + \hat{k}\tilde{k}\hat{u}_1(t)\tilde{u}_2(t) + \tilde{k}\hat{k}\tilde{u}_1(t)\hat{u}_2(t) \end{aligned}$$

wird die Homogenitätsbedingung in diesem Fall nicht erfüllt. Es kann kein konstanter Verstärkungsfaktor k oder \tilde{k} ausgeklammert werden. Ein weiteres Beispiel stellt eine Kennlinie dar. Trägt man Werte auf der horizontalen Achse mit gleichem Abstand auf, so

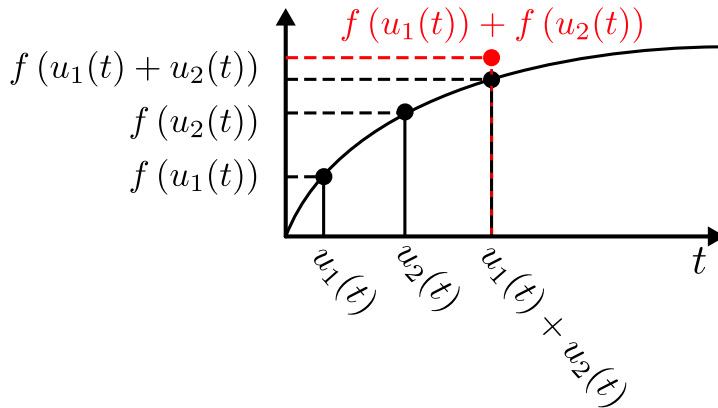


Abbildung 2.6: Nichtlineare Kennlinie zur Darstellung der Nichtlinearität

ist addiert sich nicht zwingend auch der Funktionswert, wie in Abbildung 2.6 dargestellt. Es ist zu erkennen dass die Eigenschaft der Additivität nicht erfüllt ist denn

$$f(u_1(t) + u_2(t)) \neq f(u_1(t)) + f(u_2(t)).$$

Grundsätzlich existiert für nichtlineare Systeme in der Regelungstechnik immer noch keine vollständig zusammenhängende Theorie [Ada09]. Es existieren zudem nicht so zusammenhängende und gut strukturierte Entwurfsverfahren für Regler (mit einigen Ausnahmen). Die Untersuchung der Stabilität ist ein weiteres Themenfeld, welches in der nichtlinearen Regelungstechnik schwierig zu behandeln ist. Nichtlineare Systeme werden deshalb in den meisten praktischen Anwendungsfällen durch eine Linearisierung im Arbeitspunkt 'umgewandelt'. Ihr Verhalten kann dann nahe dieses Arbeitspunktes ausreichen gut durch das Ersatzmodell nachgebildet werden und Entwurfsmethoden für lineare Systeme kommen zum Einsatz.

2.2.3 Zeitinvarianz

Formal lässt sich die Zeitinvarianz eines Systems durch eine Unabhängigkeit der zeitlichen Verschiebung klassifizieren [Foe94, Lun10] (2.6).

$$\begin{aligned} y(t) &= f(u(t)) \\ y(t - T) &= f(u(t - T)) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dies bedeutet, dass sich die Systemantwort eines zeitinvarianten Systems auf einen identischen Eingang (bei gleichem Anfangswert!) immer gleich Verhalten wird, unabhängig davon wann die Anregung durch den Eingang erfolgt. In Abbildung 2.7 ist die Sprun-

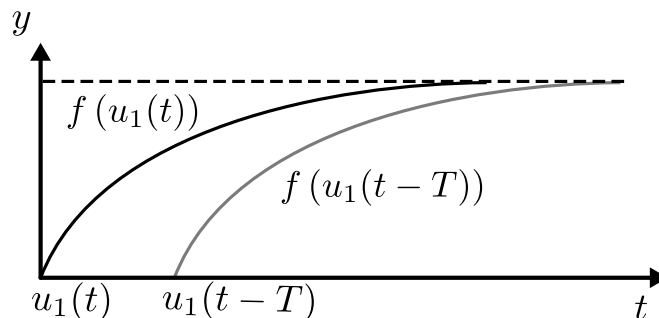


Abbildung 2.7: Beispielhafte Darstellung des Verschiebungssatzes

antwort eines zeitinvarianten Systems dargestellt. Es ist deutlich erkennbar, dass sowohl die Kurvenform als auch der Endwert sich nicht unterscheiden. Wenn ein System sowohl linear als auch zeitinvariant ist, dann spricht man oft von sogenannten 'LZI-System' (lineare und zeitinvariante Systeme) oder Englisch 'LTI-systems' (linear and time-invariant systems). In dieser Vorlesung wird dies die Systemklasse sein, mit der wir uns hauptsächlich beschäftigen.

Beispiele für zeitvariante Systeme

Zeitvariante Systeme sind in der Praxis oft vorzufinden. Ein Beispiel sind zeitlich veränderliche Parameter [Unb08]

- Rakete (Massenänderungen des Treibstoffs während des Flugs)
- Gleichstrommaschine (temperaturabhängiger Widerstand der Ankerwicklung, welcher sich durch Belastung erwärmt)

Ein weiteres Beispiel ist das Abtast-Halte-Glied, welches in der zeit-diskreten Regelung zur Wandlung von analogen Signalen genutzt wird. Dieses misst die Regelgröße $y(t)$ in äquidistanten (konstanter Abstand) Zeitpunkten [Foe94] und hält den gemessenen Wert als $\bar{y}(\tau)$ für einen konstanten Zeitraum t_i fest, wie in Abbildung 2.8 in schwarz dargestellt. Dieses Halteglied bereitet somit ein physisches Signal z.B. für einen Microcontroller auf,

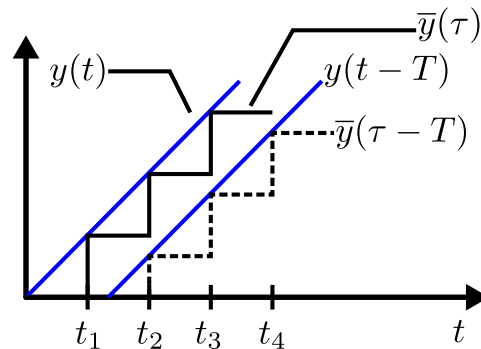


Abbildung 2.8: Untersuchung zum Verschiebungssatz bei einem Abtastglied

in dem die Verarbeitung nicht kontinuierlich stattfindet, sondern in diskreten Zeitabständen. Hinweis: Das Abtast-Halteglied misst und speichert den kontinuierlichen Wert (Abbildung 2.8 in blau) bis zum nächsten Abtastzeitpunkt t und übernimmt dann den Neuen gemessenen. Diese Glied ist somit zwar linear aber nicht zeitinvariant.

Beispiele zum Nachlesen 3

- *PWM Stromregelung Gleichstromsteller*

2.2.4 Kausalität

Die Kausalität eines Systems beschreibt, das Eingangsgrößen zum aktuellen Zeitpunkt bspw. $t = 0$ den Ausgang nur für zukünftige Zeitpunkte beeinflussen können [Lun10].

Praktische Systeme sind immer kausal, weshalb diese Eigenschaft in der Vorlesung nicht weiter behandelt werden soll.

2.3 Beschreibung lineare Systeme im Zeitbereich

2.3.1 Beschreibung lineare Systeme durch Differenzialgleichungen

Ob ein System durch ein Blockschaltbild oder eine Differentialgleichung dargestellt wird ist grundsätzlich gleichwertig [Ame17]. In der Regel macht sich die Modellbildung die physikalischen Gesetzmäßigkeiten zu nutze und leitet aus ihnen die mathematischen Differenzialgleichungen ab, welche das untersuchte technische System beschreiben. Im folgenden sind die physikalischen Prinzipien, welche für die meisten Systeme ausreichend sind, genannt [Ame17]

- Mechanik: also Newtonsche Bewegungseichungen.
- Elektrische Systeme: Sätze von Kirchhoff, Strom-Spannungsbeziehung elektrischer Bauteile.
- Chemie und Biologie: Bilanzgleichungen für Volumen, Stoff, Massen.
- Thermodynamik: Temperatur, Innere Energie, Kreisprozesse

Formuliert man diese nun zusammen mit deren zeitlichen oder räumlichen Beziehungen zueinander, erhält man die beschreibenden Differenzialgleichungen des Systems.

Aufstellen und lösen der linearen Differenzialgleichung

Das Aufstellen und Lösen von Differenzialgleichungen wurde in anderen Grundlagenvorlesungen bereits behandelt, soll hier aber der Vollständigkeit halber nochmals in kurzer Form aufgezeigt werden. Zunächst gehen wir von einer allgemeinen linearen Differenzialgleichung (LDGL) mit konstanten Koeffizienten aus. Diese stellen sich in dieser Vorlesung in folgender Form dar (vgl. Gleichung 2.7)

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \\ b_q \frac{d^q u}{dt^q} + b_{q-1} \frac{d^{q-1} u}{dt^{q-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \end{aligned} \quad (2.7)$$

Mit a_0, \dots, a_n die konstanten Koeffizienten der linken Seite (Ausgang) und b_0, \dots, b_n die konstanten Koeffizienten der rechten Seite (Eingang). Die Variablen q und n stellen

jeweils die Höhe der Ableitungen dar. Für diese (LDGL) müssen wir nun, um die homogene Lösung (Eigendynamik oder Eigenbewegung) zu finden, die rechte Seite zu null setzen. Die rechte Seite beschreibt den Eingang auf das System bzw. die Anregung von Außen.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0 \quad (2.8)$$

Um die LDGL zu lösen wird die charakteristische Gleichung aufgestellt und deren Wurzeln bestimmt. Dabei gilt die Regel: $\frac{d^n y}{dt^n} = \lambda^n$. Beim letzten Element setzt man folglich $\frac{d^0 y}{dt^0} = 1$ (wenn auch mathematisch nicht vollständig korrekt, ist es so leicht zu merken).

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (2.9)$$

Anschließend wird die Lösung des Polynoms (2.9) ermittelt. Diese Lösung kann man bei Polynomen mit $n = 3$ oder $n < 3$ per Hand bestimmen, jedoch werden in der Praxis auch hier meist numerische Verfahren genutzt [Lun10] [Bru], um die Wurzeln zu bestimmen. Wenn die Wurzeln bestimmt wurden, werden Ansatzfunktionen genutzt, um eine Zeitfunktion für die homogene Lösung zu ermitteln. Falls alle Lösungen $\lambda_k = \delta_k$ reellwertig sind und nicht doppelt $\delta_k \neq \delta_{k+1}$ vorkommen, wird eine Summe aus Exponentialfunktionen genutzt.

$$y_{\text{hom}}(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{\delta_k t} \quad (2.10)$$

Falls es sich um ein schwingungsfähiges System handelt, d.h. es existieren Lösungen für die Wurzeln in Form von $\lambda_k = \delta_k \pm j\omega_k$, wobei j die imaginäre Einheit ist, muss dieser schwingungsfähige Anteil in der Lösung berücksichtigt werden.

$$y_{\text{hom}}(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{\delta_k t} + \sum_{l=1}^L e^{\delta_l t} [c_{1,l} \cos(\omega_l t) + c_{2,l} \sin(\omega_l t)] \quad (2.11)$$

Der zweite Schritt beinhaltet das Auffinden der partikulären Lösung, welche je nach Eingangssignal einen anderen Ansatz besitzt. Eine gute Zusammenfassung verschiedener Ansätze ist in [Fur08, Gan03] zu finden. Die wichtigsten Ansätze für die Regelungstechnik sind:

$$\begin{aligned} u(t) &= A, & \text{Ansatz} \rightarrow y_{\text{part}}(t) &= B \\ u(t) &= t^m, & \text{Ansatz} \rightarrow y_{\text{part}}(t) &= A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m \\ u(t) &= A \sin(\omega t), & \text{Ansatz} \rightarrow y_{\text{part}}(t) &= C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nachdem der partikuläre Lösungsansatz ausgewählt wurde, wird dieser in Gleichung 2.7 eingesetzt (Ableitungen beachten!) und durch Koeffizientenvergleich die Vorfaktoren ermittelt. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ergibt sich aus der Summe von homogener und partikulärer Lösung.

$$y(t) = y_{\text{hom}}(t) + y_{\text{part}}(t) \quad (2.13)$$

Um die allgemeine Lösung der DGL nun zu bestimmen, müssen Anfangswerte oder allgemein Randwerte der DGL bekannt sein. Dies könnte z.B. die Anfangsauslegung eines Systems sein. Anfangswerte werden benötigt, um die konstanten Koeffizienten der allgemeinen Lösung des homogenen Anteils zu errechnen. Durch Einsetzen der Anfangswerte lassen sich diese wieder durch einen Koeffizientenvergleich bestimmen. Zusammengefasst ergeben sich für die Vorgehensweise beim lösen der DGL:

- Auffinden der freien Bewegung (homogene Lösung)
- Bestimmung der erzwungenen Bewegung (partikuläre Lösung)
- Aufstellen der allgemeinen Lösung
- Lösungen des Anfangswertproblems

Beispiele zum Nachlesen 4

- *Beispielhafte Lösung der DGL eines mechanischen Systems 2ter-Ordnung*

Gewichtsfunktion und Faltung

Im vorherigen Beispiel haben wir die Auffindung der allgemeinen Lösung einer linearen Differenzialgleichung für ein mechanisches Teilsystem aufgezeigt. Es existiert im Grunde hierfür auch eine kompaktere Schreibweise, denn ein System kann durch eine Lösung der allgemeinen DGL dargestellt werden, welche sich für verschwindende Anfangswerte $y(0) = 0$ ergibt. Durch den Anfangswert 0 ist das System in Ruhe und wird nur durch die Anregung eines Eingangssignals aus der Ruhelage ausgelenkt. Das sogenannte Übertragungsverhalten klassifiziert ein dynamisches Systems. Dies bedeutet, dass das System bei verschwindenden Anfangsbedingungen durch sein Ein- Ausgangsverhalten eindeutig beschrieben wird. Die sich ergebende Zeitfunktion wird dann als Gewichtsfunktion $g(t)$ eines dynamischen Systems bezeichnet. Das Systemverhalten auf ein Eingangssignal ergibt sich durch die Berechnung des folgenden Integrals.

$$y(t) = \int_0^{t_0} g(t)u(t_0 - t)dt \quad (2.14)$$

Das Integral (2.14) wird auch als Faltungsintegral bezeichnet. Die Gewichtsfunktion gibt an, wie stark ein vergangener Wert des Eingangs $u(t_0 - t)$ durch das Systemverhalten (beschrieben durch $g(t)$) gewichtet wird und somit auf den Ausgang $y(t)$ wirkt. Diese Beschreibung wird in der Literatur auch in folgender Weise dargestellt:

$$y(t) = g(t) * u(t) \quad (2.15)$$

Grundsätzlich kann man mit dieser Formulierung die Systemantwort eines dynamischen Systems für beliebige Eingangssignale berechnen. Jedoch ist diese Schreibweise trotz allem sehr abstrakt und soll nachfolgend konkretisiert werden.

Einheitssprung und Sprungantwort

In der Regelungstechnik wird zur Anregung des Eingangs eines Systems meist der Einheitssprung (auch Heaviside-Funktion genannt) heran gezogen, welcher durch folgende Beziehung beschrieben wird:

$$u(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ 1 & \text{falls } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Die Sprungantwort $h(t)$ eines Systems beschreibt die Antwort des jeweiligen Systems auf einen Einheitssprung

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^{t_0} g(t) \underbrace{\sigma(t_0 - t)}_{=1} dt \\ h(t) &= \int_0^{t_0} g(t) dt \end{aligned} \quad (2.17)$$

Somit ist die Sprungantwort $h(t)$ das Integral der Gewichtsfunktion $g(t)$. Dies stellt zusammen mit der Impulsantwort einen wichtigen Zusammenhang in der Regelungstechnik dar. Die Impulsantwort ist definiert als die Antwort des Systems auf einen Einheitsimpuls und wird direkt durch die Gewichtsfunktion $g(t)$ beschrieben. In Abbildung 2.9 wird die Sprungantwort exemplarisch für ein mechanisches System angegeben. Ausgehend von diesen Vorbetrachtungen ist es möglich das dynamische System in einem Zustandsraummodell und Übergangsfunktion (Zeitbereich) oder als Übertragungsfunktion (Frequenzbereich) zu formulieren. Die Zeitbereichsdarstellung bietet für die Regelungstechnik gewisse Vorzüge, soll aber hier aus Zeitgründen nicht weiter betrachtet werden.

2.4 Beschreibung lineare Systeme im Frequenzbereich

2.4.1 Fourier Reihenentwicklung

Die Zerlegung von Funktionen in ihre unterschiedlichen Bestandteile und die Darstellung als Summe dieser Bestandteile sind ein gängiges Mittel, um komplizierte Funktionen zu vereinfachen. Eine Besonderheit stellen periodische Zeitfunktionen dar. Diese können

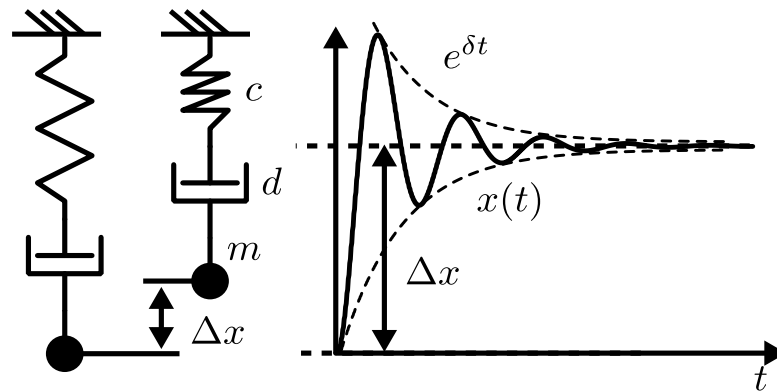


Abbildung 2.9: Feder, Masse, Dämpfer System und dessen Verhalten bei Auslenkung um eine Gleichgewichtslage

durch eine Summe von unendlich vielen Sinus- und Cosinusfunktionen dargestellt werden, da diese ebenfalls periodisch sind. Diese Aussage kennen wir von den sogenannten Fourier-Reihen [Fur08].

$$u(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega_0 t) \quad (2.18)$$

Beispielsweise kann hierdurch eine periodische Rechteckfunktion $u(t)$ durch eine Summe

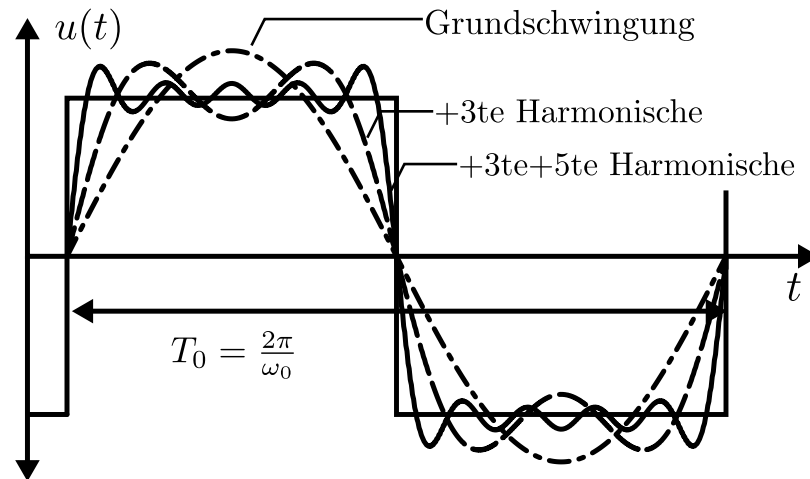


Abbildung 2.10: Annäherung einer periodischen Rechteckfunktion mittels Fourierreihen, in Anlehnung an [Lun10]

von Sinustermen dargestellt werden (Abbildung 2.10). Die Faktoren A_0, A_k und B_k erhält

man aus den Integralbeziehungen

$$A_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) dt$$

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Octave Simulationsbeispiele 2

- *Fourierreihenentwicklung einer Sägezahnfunktion*
- *Fourierreihenentwicklung einer Rechteckschwingung*

Da die Zeitfunktionen sich in diesem Fall nur in Frequenz und Amplitude unterscheiden, können Sie auch als diskretes Frequenzspektrum dargestellt werden, ohne das Informationen verloren gehen (vgl. Abbildung 2.11). Hieraus ergibt sich die Bezeichnung: „im Frequenzbereich beschreiben“. Hierbei können entweder die Amplituden der jeweiligen sinus- und cosinus-Terme in ein Diagramm eingetragen werden, oder es wird eine Darstellung aus Betrag und Phase gewählt. Im Folgenden wird die Darstellung mittels Betrag und Phase angegeben, da sie für die weitere Vorlesung wesentlich interessanter ist. Eine

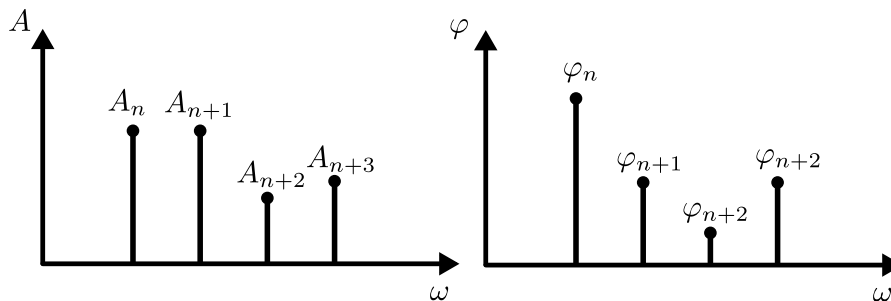


Abbildung 2.11: Darstellung der sinus- und cosinus-Funktionen der Fourierreihe mittels Betrag und Phase als diskretes Spektrum

kompaktere Darstellung im Gegensatz zur Schreibweise mittels getrennter sinus- und cosinus Funktionen, kann durch den Zusammenhang

$$e^{-jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) - j \sin(k\omega_0 t)$$

erreicht werden. Die Berechnung der Koeffizienten wird durch diese Formulierung in komplexer Schreibweise dargestellt

$$F_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} u(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

muss aber nach der Berechnung noch umgewandelt werden in Betrag und Phase, was der vorherigen Darstellung in Abbildung 2.11 entspricht.

2.4.2 Fouriertransformation

Werden nun nichtperiodische Funktionen betrachtet (z.B. Sprung, Impuls), welche quasi eine unendliche Periode T_0 haben, kann die Funktion nicht mehr durch diskrete Frequenzen und Phasenlagen beschrieben werden. Die einzelnen diskreten Fourierkoeffizienten bei periodischen Signalen rücken bei immer größer werdender Periode immer näher zusammen und bilden schlussendlich beim Übergang zu einer unendlichen Periode eine kontinuierliche Funktion. Diese Funktion wird auch als die Fouriertransformierte des jeweiligen Zeitsignals $u(t)$ bezeichnet und beschreibt die Frequenzanteile bezogen auf sinus- und cosinusförmige Signale.

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt$$

Neben Zeitfunktionen lassen sich auch Differentialgleichungen unter gewissen Randbedingungen mittels Fouriertransformation in eine Darstellung im Frequenzbereich transformieren. Dies ist eine der ursprünglichen Intentionen des Erfinders und wurde genutzt, um Lösungen für partielle Differentialgleichungen in der Wärmetheorie zu untersuchen. Die Fouriertransformation führt im wesentlichen dazu, dass ein Differential- in einen algebraischen Zusammenhang überführt wird.

2.4.3 Der Frequenzgang eines LZI-Übertragungsgliedes

Allgemeine Betrachtung des Frequenzgang

Der Frequenzgang $G(j\omega)$ eines LZI-Systems beschreibt wie sich der Systemausgang $y(t)$ auf eine Anregung mit einer Sinusfunktion am Eingang $u(t)$ verhält. Wichtig ist zu vermerken, dass keine Anfangswerte berücksichtigt werden und das, dass Systemverhalten nur für den stationären Fall abgebildet wird (Ausgleichsvorgänge sind abgeklungen). Der Zusammenhang zur Fouriertransformierten entsteht, wenn die Berechnung aus (2.14) mit sinusförmigen Eingangsfunktionen $u(t)$ berechnet wird (ohne Herleitung). Der Frequenzgang eines Systems ist somit die Fouriertransformierte der Gewichtsfunktion.

$$G(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$$

Der Frequenzgang ist in der Regelungstechnik einer der wichtigsten Werkzeuge, da er die Grundlage vieler Analysen bildet. Er lässt sich zudem messtechnisch ermitteln, da er durch Zeitfunktionen am Eingang und der Messung der Systemantworten am Ausgang

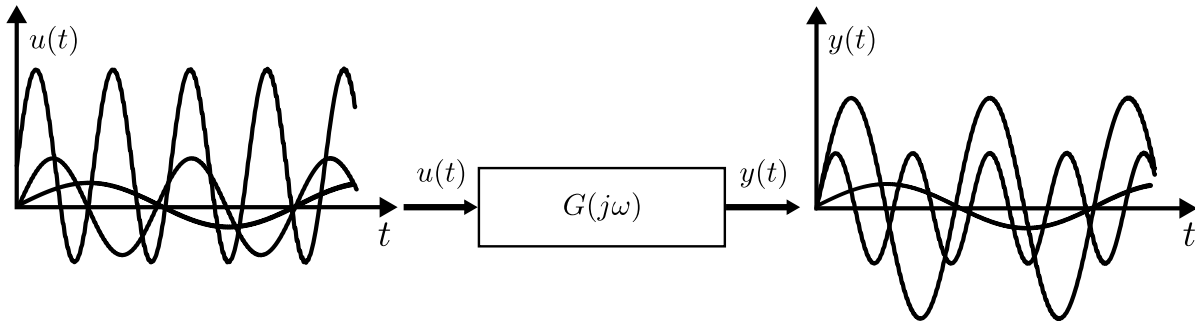


Abbildung 2.12: Prinzipdarstellung des Frequenzgangs von LZI-Gliedern, in Anlehnung an [Lun10]

bestimmt werden kann. Das Ausgangssignal ist lediglich in Amplitude und Phasenlage unterschiedlich zum Eingang, jedoch ändert sich nicht die Frequenz. In der komplexen Darstellung lässt sich der Frequenzgang wie folgt beschreiben

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \\ &= \frac{\hat{y}(j\omega)e^{j\omega}e^{j\varphi_y(j\omega)}}{\hat{u}(j\omega)e^{j\omega}e^{j\varphi_u(j\omega)}} \\ &= \frac{\hat{y}(j\omega)}{\hat{u}(j\omega)}e^{j\varphi_{yu}(j\omega)} \end{aligned}$$

Jedoch gibt es auch die Möglichkeit den Frequenzgang in Betrag und Phase darzustellen

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \Re\{G(j\omega)\} + j\Im\{G(j\omega)\} \\ |G(j\omega)| &= \sqrt{(\Re\{G(j\omega)\})^2 + (\Im\{G(j\omega)\})^2} \\ \angle G(j\omega) &= \arctan\left(\frac{\Im\{G(j\omega)\}}{\Re\{G(j\omega)\}}\right) \end{aligned}$$

Zwei Darstellungen beschreiben den Frequenzgang grafisch.

- Ortskurve, welche ein Zeigerdiagramm in der komplexen Ebene mit ω als Parameter darstellt.
- Bodediagramm oder Frequenzkennliniendiagramm in logarithmischer Darstellung.

Die Ortskurve eines LZI-Übertragungsgliedes

Die Ortskurve stellt den Amplituden- und Phasengang des Frequenzgangs in der komplexen Ebene mit ω als Parameter dar. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 2.13

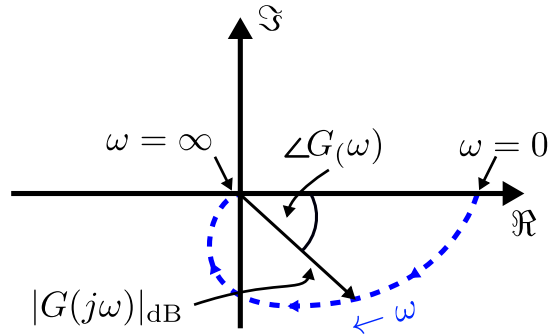


Abbildung 2.13: Ortskurve eines dynamischen System

dargestellt. Über die Grenzwerte im Frequenzbereich lassen sich die Funktionen im Diagramm zeichnen. Nehmen wir das IT₁-Glieder als Beispiel (aus [Lun10]), so erhalten wir für den Frequenzgang

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega T_1 (j\omega T_1 + 1)} \\
 &= \frac{1}{(-\omega^2 T_1 T_1 + j\omega T_1)} \cdot \frac{(-\omega^2 T_1 T_1 - j\omega T_1)}{(-\omega^2 T_1 T_1 - j\omega T_1)} \\
 &= \frac{-\omega T_1 - j}{\omega T_1 (\omega^2 T_1^2 + 1)} \\
 &= \frac{-T_1}{T_1 (\omega^2 T_1^2 + 1)} - j \frac{1}{\omega T_1 (\omega^2 T_1^2 + 1)}
 \end{aligned}$$

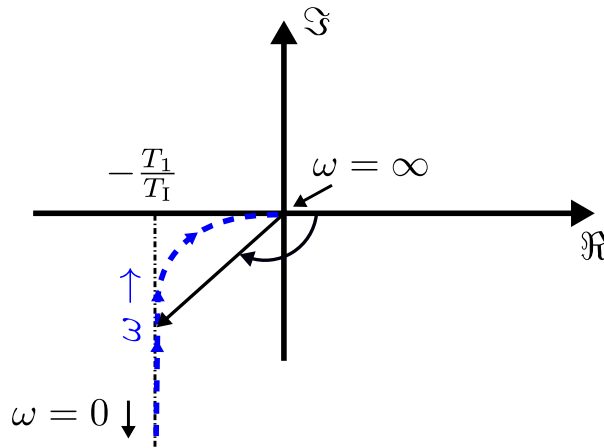
Hieraus lassen sich nun der Anfangs- und Endwert aus der Grenzwertbetrachtung

$$\begin{aligned}
 \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) &= 0 \\
 \lim_{\omega \rightarrow 0} \Re\{G(j\omega)\} &= -\frac{T_1}{T_1} \\
 \lim_{\omega \rightarrow 0} \Im\{G(j\omega)\} &= -\infty.
 \end{aligned}$$

ermitteln und nachfolgend die Ortskurve zeichnen (siehe Abbildung 2.14). Es soll hier zudem erwähnt werden, dass der Verlauf der Amplitude und der Phase von $\omega = 0$ bis $\omega = \infty$ auch durch die bekannten Verfahren der Frequenzkennlinie berechnet werden kann.

Die Frequenzkennlinien oder Bodediagramm eines LZI-Übertragungsgliedes [Lun10]

Die Darstellung in der Ortskurve ist nicht die einzige Möglichkeit, um das Verhalten eines dynamischen Systems im Frequenzbereich zu analysieren. Allgemein wird diese


 Abbildung 2.14: Ortskurve des IT₁-Gliedes

auch als Frequenzkennlinie (FKL) bezeichnet. Eine sehr allgemeine, aber durchaus recht vollständige Darstellung des Frequenzgang kann durch folgende Beschreibung erreicht werden:

$$G(j\omega) = k \cdot \underbrace{\frac{1}{(j\omega)^q}}_{\text{I-Glieder}} \cdot \underbrace{\frac{\prod_{i=1} (j\omega T_i + 1)}{\prod_{\nu=1} (j\omega T_\nu + 1)}}_{\text{PT}_1 \text{-Glieder}} \cdot \underbrace{\frac{\prod_{k=1} \left(\left(\frac{j\omega}{\omega_{0k}} \right)^2 + \frac{j\omega}{\omega_{0k}} 2d_k + 1 \right)}{\prod_{\mu=1} \left(\left(\frac{j\omega}{\omega_{0\mu}} \right)^2 + \frac{j\omega}{\omega_{0\mu}} 2d_\mu + 1 \right)}}_{\text{PT}_2 \text{-Glieder}} \cdot \underbrace{e^{-T_t j\omega}}_{\text{Totzeit-Glied}}$$

gebracht. Durch die Überlagerung dieser Grundglieder lässt sich der Frequenzgang $G(j\omega)$ möglichst genau darstellen. Bedingung hierfür ist jedoch das:

- $0 < d_k, d_\mu < 1$: gedämpft aber schwingungsfähig.
- $\omega_{0k}, \omega_{0\mu}, T_i, T_\nu, T_t > 0$: Kausalitätsbedingung.
- $k > 0$: Gegenkopplungsbedingung.
- $q \leq 2$: Bedingung für Stabilitätsnachweis über vereinfachtes Nyquistkriterium.

Somit ergibt sich, dass $G(j\omega)$ sich aus den Frequenzgängen der Grundglieder und deren Inversen zusammensetzt. Die Rechenregeln hierfür lauten:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi}, \quad \varphi = \angle G(j\omega)$$

Die Inversionsregel ergibt sich zu:

$$G^{-1}(j\omega) = \frac{1}{|G(j\omega)|}e^{-j\varphi}$$

$$|G^{-1}(j\omega)| = \frac{1}{|G(j\omega)|}.$$

Was sich im Amplituden und Phasengang zu:

$$|G^{-1}(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg \left(\frac{1}{|G(j\omega)|} \right) = -20 \lg (|G(j\omega)|)$$

$$\angle G^{-1}(j\omega) = -\angle G(j\omega)$$

ergibt. Es ist ersichtlich, dass die Inversion zu einer Spiegelung der FKL an der Null-Linie führt (0_{dB} bzw. 0°).

Die Multiplikationsregel hingegen ergibt sich zu:

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot \dots \cdot G_n(j\omega)$$

$$G(j\omega) = |G_1(j\omega)|e^{j\varphi_1} \cdot |G_2(j\omega)|e^{j\varphi_2} \cdot \dots \cdot |G_n(j\omega)|e^{j\varphi_n}$$

$$G(j\omega) = (|G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \cdot \dots \cdot |G_n(j\omega)|) e^{j(\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_n)}$$

Was sich im wiederum im Amplituden- bzw. Phasengang zu:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg (|G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \cdot \dots \cdot |G_n(j\omega)|)$$

$$= 20 \lg (|G_1(j\omega)|) + 20 \lg (|G_2(j\omega)|) + \dots + 20 \lg (|G_n(j\omega)|)$$

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) + \dots + \angle G_n(j\omega)$$

ergibt. Das bedeutet, dass eine Multiplikation der Frequenzgänge eine Addition in der FKL zur Folge hat.

Hinweis: Eine Multiplikation ist gleichbedeutend mit der Hintereinanderschaltung einzelner Übertragungsglieder im Wirkschaltplan.

Für den Betrag und die Phase eines PT₁ Übertragungsgliedes, lassen sich folgende Berechnungsschritte aufzeigen.

$$G(j\omega) = \frac{K_P}{T_1 j\omega + 1} = \frac{K_P}{T_1 j\omega + 1} \cdot \frac{-T_1 j\omega + 1}{-T_1 j\omega + 1} = \frac{K_P (1 - T_1 j\omega)}{T_1^2 \omega^2 + 1}$$

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \left(\frac{K_P}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}} \right)$$

$$= 20 \lg (K_P) - 20 \lg \left(\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} \right)$$

$$\angle G(j\omega) = \arctan \left(\frac{-\frac{K_P \omega T_1}{T_1^2 \omega^2 + 1}}{\frac{K_P}{T_1^2 \omega^2 + 1}} \right) = \arctan (-\omega T_1) = -\arctan (\omega T_1)$$

Zur grafischen Darstellung wird auf der horizontalen Achse die Frequenz und auf der vertikalen die Amplitude aufgetragen. Die Frequenz wird meist in einer logarithmischen Skala angegeben. D.h. in linearer Unterteilung als $\lg \omega$ oder als Zehnerpotenzen mit ω . Der Amplitudengang wird in Dezibel gegen die logarithmische Frequenz aufgetragen während der Phasengang unverändert auf der vertikalen Achse gegen die logarithmische Frequenz aufgetragen wird. Es bietet sich an die beiden Diagramme bei der Konstruktion untereinander zu zeichnen und die Frequenz in gleicher Skalierung aufzutragen. Die vorgenannte Formalen Zusammenhänge sind in Abbildung 2.15 qualitativ dargestellt.

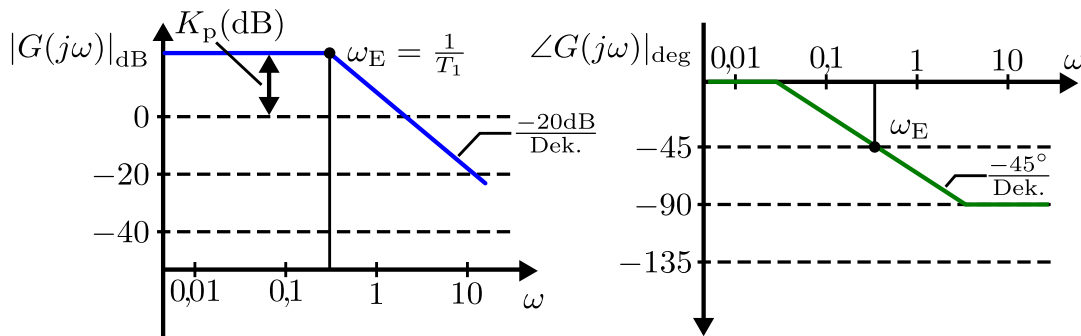


Abbildung 2.15: Bodediagramm zur Darstellung des Frequenzgangs, exemplarisch für ein dynamisches System

2.4.4 Laplacetransformation

Die Laplacetransformation kann als Erweiterung der Fouriertransformationen verstanden werden. Diese Erweiterung ermöglicht es z.B. Differenzialgleichungen über den sogenannten Bildbereich zu lösen (vgl. Abbildung 2.16). Der Bildbereich stellt sämtliche Differentiale aus dem Zeitbereich in algebraischen Gleichungen dar. Nun tritt z.B. beim

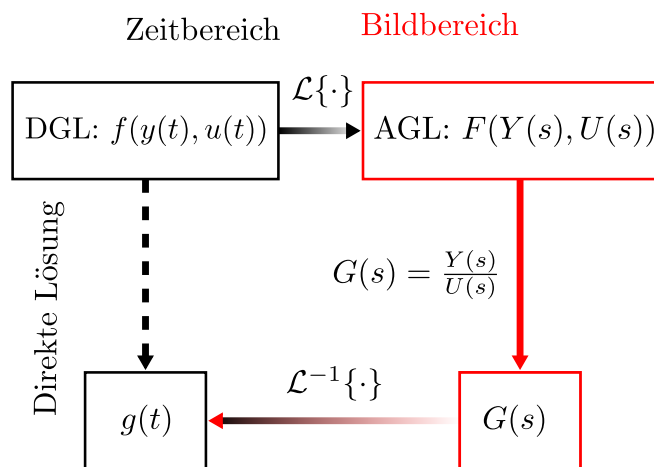


Abbildung 2.16: Darstellung der Laplacetransformation zur Lösung von Differenzialgleichungen

Feder-Masse-Dämpfer in Abbildung 2.9 eine Dämpfung der Schwingung in Form einer Exponentialfunktion auf, die dafür sorgt, dass die sich ergebende Schwingung abklingt und das System nach einer endlichen (theoretisch unendlichen) Zeit wieder in eine Ruhelage übergeht. Dieses Verhalten, dass sogenannte Übergangsverhalten kann durch den Frequenzgang nicht abgebildet werden. Um diese Eigenschaft eines Systems jedoch trotzdem im Frequenzbereich (Bildbereich) mit all seinen Vorteilen zu erfassen, erweitert die Laplacetransformation (2.19) den Frequenzbereich der Fouriertransformation um Expo-

nentialfunktionen mit $s = \delta + j\omega$ zu

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.19)$$

Zudem ist zu beachten, dass die Integral Grenzen nun nur von 0 bis ∞ reichen, da wir annehmen, dass alle nicht periodischen Signale kausal und somit für $t < 0$ nicht definiert sind. Das Hauptaugenmerk für die Behandlung in der Regelungstechnik ist, wie bereits oben erwähnt, dass sich mit Hilfe der Beziehung (2.19) Differentialgleichungen nun durch algebraische Gleichungen darstellen lassen. Hierfür gibt es meist Rechentabellen, welche die wichtigsten Beziehungen zwischen Zeitbereich und Bildbereich darstellen.

Die Laplace-Transformation hat auch eine grafische Interpretation, denn sie erweitert das kontinuierliche Spektrum der Fouriertransformation für Signale mit abklingenden e-Funktionen.

Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion eines Systems ist die Laplacetransformierte der Gewichtsfunktion (2.20).

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (2.20)$$

Auch hier ist wieder zu erwähnen, dass keine Anfangswerte berücksichtigt werden, jedoch können Einschwingvorgänge abgebildet werden. Dies ist besonders wichtig, wenn keine sinusförmigen Eingänge auf das System wirken. Der Übergang zurück zum Frequenzgang entsteht, wenn wir eine sinusförmige Anregung an ein System anlegen und alle Einschwingvorgänge abgeklungen sind $t \rightarrow \infty$, oder wenn es im System keine Dämpfung gibt $\delta = 0$. Aus diesem Grund können beide Übertragungseigenschaften zur Analyse von Regelung und Regelstrecke herangezogen werden. Auch die Übertragungsfunktion lässt sich messtechnisch ermitteln, jedoch ist dies meist schwieriger wie im Falle des Frequenzgangs und wird deshalb im späteren Verlauf der Vorlesung nur für einige Spezialfälle behandelt. Die Darstellung der Übertragungsfunktion kann folgendermaßen aussehen:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \frac{\hat{y}(s)e^{j\varphi_y(s)}}{\hat{u}(s)e^{j\varphi_u(s)}} \\ &= \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} e^{j\varphi_y(s) - \varphi_u(s)} \end{aligned}$$

Jedoch gibt es auch die Möglichkeit der Übertragungsfunktion in Betrag und Phase darzustellen

$$\begin{aligned} G(s) &= \Re\{G(s)\} + j\Im\{G(s)\} \\ |G(s)| &= \sqrt{(\Re\{G(s)\})^2 + (\Im\{G(s)\})^2} \\ \angle G(s) &= \arctan\left(\frac{\Im\{G(s)\}}{\Re\{G(s)\}}\right) \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion wird hauptsächlich zur Reglerauslegung verwendet.

- Pol-Nullstellen Diagramm → Analyse der Pollage und Stabilitätsuntersuchung der offenen Wirkungskette.
- Wurzelortsurve → Reglerauslegung anhand der Pollage bei veränderlicher Verstärkung

Allgemeine Berechnung der Übertragungsfunktion aus der Differentialgleichung

Mittels der Laplacetransformation lassen sich gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen in algebraische Gleichungen 'umwandeln'.

- Schritt 1: Aufstellen der Differenzialgleichung.

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \\ b_q \frac{d^q u}{dt^q} + b_{q-1} \frac{d^{q-1} u}{dt^{q-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \end{aligned}$$

- Schritt 2: Transformation in den Bildbereich durch Rechentabelle und Ableitungsregel (Anfangswerte vernachlässigen).

$$\begin{aligned} a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = \\ b_q s^q U(s) + b_{q-1} s^{q-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \end{aligned}$$

- Schritt 3: Ausklammern und umstellen

$$\begin{aligned} Y(s) (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) = \\ = U(s) (b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0) \end{aligned}$$

- Schritt 4: Übertragungsfunktion aufstellen

$$G(s) = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Beispiel: Feder-Masse-Dämpfer

Nehmen wir zunächst die Differentialgleichung des Feder-Masse-Dämpfers ohne äußere Anregung

$$m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + d \cdot \frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = 0$$

so ließe sich durch Anwendung der Laplacetransformation folgender Zusammenhang finden

$$\underbrace{s^2X(s) - sx(0) - \frac{dx(0)}{dt}}_{s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - \frac{df(0)}{dt}} + \underbrace{\frac{d}{m}(sX(s) - x(0))}_{s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)} + \frac{c}{m}X(s) = 0$$

Da Anfangswerte vernachlässigt werden, können wir die Gleichung umwandeln in

$$s^2X(s) + \frac{d}{m}X(s)s + \frac{c}{m}X(s) = 0$$

Durch Umstellen der Gleichung erhalten wir nun die Übertragungsfunktion des Systems im Laplace Bereich

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{c}{m}}$$

Und die Übergangsfunktion durch hinzufügen eines Einheitssprung am Eingang

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{c}{m})}$$

Abbildung 2.9 stellt die Sprungantwort $h(t)$ des schwingungsfähigen Systems dar. Die Anregung erfolgt in diesem Fall durch eine Auslenkung um die Ruhelage.

2.4.5 Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion

Der Pol- Nullstellenplan ermöglicht die Eigenschaften der Regelstrecke graphisch zu analysieren. Um die Pole und Nullstellen auszurechnen, müssen die Polynome der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{b_qs^q + b_{q-1}s^{q-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

in ihre einzelnen Bestandteile zerlegt werden.

$$G(s) = k \frac{(s - s_{N,1})(s - s_{N,2}) \dots (s - s_{N,q})}{(s - s_{P,1})(s - s_{P,2}) \dots (s - s_{P,n})} = k \frac{\prod_{i=1}^q (s - s_{N,i})}{\prod_{i=1}^n (s - s_{P,i})} \quad (2.21)$$

Jeder dieser Pole und Nullstellen, welche Beispielsweise durch Partialbruchzerlegung errechnet wurden, kann nun in das Pol- Nullstellendiagramm Abbildung 2.17 eingetragen

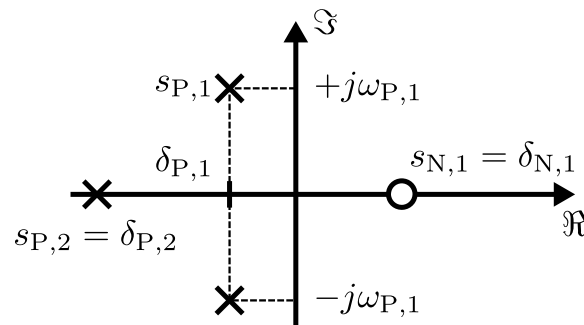


Abbildung 2.17: Pol- Nullstellen Diagramm gebildet aus einer Übertragungsfunktion

werden. Wie in Abbildung 2.17 zu erkennen können Pole und Nullstellen sowohl reell als auch konjugiert komplex sein. Aus diesem Diagramm lassen sich jetzt direkt die zeitlichen Eigenschaften eines Systems ablesen.

• **Dynamisches Verhalten:**

- Sind die Pole reell ($s = \delta, j\omega = 0$)?
- Oder konjugiert komplex mit Dämpfung ($s = \delta \pm j\omega$)?
- Oder konjugiert komplex ohne Dämpfung ($s = \pm j\omega$)?
- Wie nahe sind sie der Imaginären Achse?

• **Stabilität:**

- Sind alle Pole links der Imaginären Achse?

Beispiele zum Nachlesen 5

- *Einige Beispiele von Pol- Nullstellen Diagrammen und zugehörigen Zeitverläufen*

Berechnung der Sprungantwort aus der Übertragungsfunktion

Es stellt sich die Frage, wie die Sprungantwort eines Systems nun aus der Übertragungsfunktion berechnet werden kann und welche Vorteile dies bietet. Berechnen wir mittels Partialbruchzerlegung aus der Multiplikation von (2.21) und einem sprungförmigen Eingangssignal $U(s)$ nun die einzelnen Pole, ergibt sich folgende Gleichung

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{k_1}{(s - s_{P,1})} + \frac{k_2}{(s - s_{P,2})} + \dots + \frac{k_n}{(s - s_{P,n})}, \quad k_0 = \frac{b_q}{c_p} \quad (2.22)$$

Diese einzelnen Terme lassen sich mittels Laplace Rücktransformation nun in den Zeitbereich zurück übersetzen. Da wir in dieser Vorlesung lediglich LZI-Systeme betrachten, können die Einzeltermen sowohl im Bild- als auch im Zeitbereich linear überlagert werden. Die Sprungantwort im Zeitbereich aus (2.22) ergibt sich zu

$$y(t) = h(t) = g(t) * u(t) = k_0 + k_1 e^{s_{P,1}t} + k_2 e^{s_{P,2}t} + \dots + k_n e^{s_{P,n}t} \quad (2.23)$$

Diese Formulierung gilt nur für reellwertige Pole. Tauchen konjugiert komplexe Pole auf und sollen diese reellwertig dargestellt werden, so muss die Darstellung (2.23) erweitert werden, zu

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k_1}{(s - s_{P,1})} + \frac{k_2}{(s - s_{P,2})}$$

mit $s_{P,12} = \delta_{12} \pm j\omega_{12}$, $k_{12} = \alpha_{12} \pm j\beta_{12}$

Ausmultiplizieren und mittels eines Ansatzes lösen

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k_1 (s - s_{P,1}) + k_2 (s - s_{P,1})}{(s - s_{P,1})(s - s_{P,2})} = \dots = \frac{B_1 s + B_0}{s^2 + A_1 s + A_0}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man nun die reellen Koeffizienten

$$\begin{aligned} B_0 &= -2(\delta_{12}\alpha_{12} + \omega_{12}\beta_{12}) \\ B_1 &= 2\alpha_{12} \\ A_0 &= \delta_{12}^2 + \omega_{12}^2 \\ A_1 &= -2\delta_{12} \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist für die Rücktransformation günstiger da sie nur reelle Koeffizienten enthält und direkt über die Korrespondenztabelle abgelesen werden kann.

2.4.6 Lineare Grundglieder zur Beschreibung dynamischer Verhalten

Im folgenden werden die wichtigsten linearen Grundglieder, welche für die Regelungstechnik Bedeutung haben vorgestellt. Die Inhalte dieses Kapitels können in [Foe94, Unb08, MSF05, Lun10] nachgelesen werden.

Integratorglied (I-Glied)

Das I-Glied integriert den Eingang fortlaufend auf. $K_I = \frac{1}{T_I}$ stellt den Integrationsbeiwert dar. Dieser ist aufgrund der Eigenschaften der Laplace Transformation im Zeit und im Bildbereich identisch.

- Funktionalbeziehung und Darstellung im Zeitbereich

$$y(t) = K_I \int_0^t u(\tau) d\tau \text{ oder } y(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t u(\tau) d\tau$$

- Laplacetransformierte und Übergangsfunktion im Bildbereich

$$Y(s) = \frac{K_I U(s)}{s}, \quad G(s) = \frac{K_I}{s}, \quad H(s) = \frac{K_I}{s^2}$$

- Pol- Nullstellen Diagramm im Bildbereich in Abbildung 2.18: Eine Polstelle im Ursprung vorhanden, zwar keinen negativen Realteil, aber definitionsgemäß instabil.

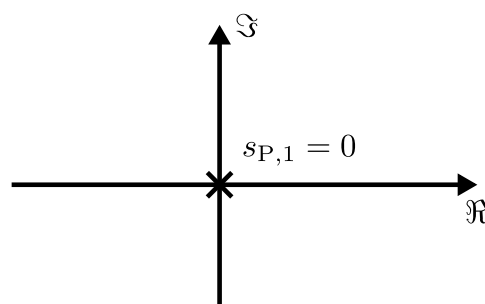


Abbildung 2.18: Qualitatives Pol- Nullstellen Diagramm des Integratorgliedes

- Sprungantwort im Zeitbereich: Ergibt sich aus der Rücktransformation von $H(s) \bullet \circ h(t) = K_I t$

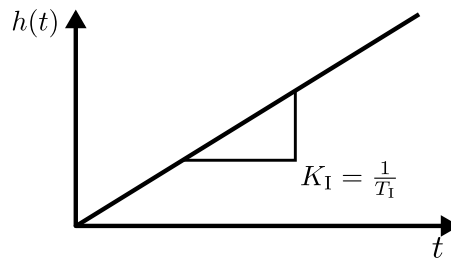


Abbildung 2.19: Qualitative Sprungantwort des Integratorgliedes

- Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

$$G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega} = -j \frac{K_I}{\omega}$$

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \left(\frac{K_I}{\omega} \right)$$

$$= 20 \lg (K_I) - 20 \lg (\omega)$$

$$\angle G(j\omega) = \arctan \left(\frac{-\frac{K_I}{\omega}}{0} \right) = -90^\circ$$

- Bodediagramm in Abbildung 2.20: Die Durchtrittskreisfrequenz ω_D markiert den Punkt bei der die Verstärkung gleich 1 oder 0 dB ist. Der Amplitudengang kennzeichnet sich durch eine negative Steigung von $\frac{-20\text{dB}}{\text{Dek.}}$. Da der Phasengang sich nur aus negativen komplexen Anteilen zusammensetzt ist die Phase von Anfang an -90° .

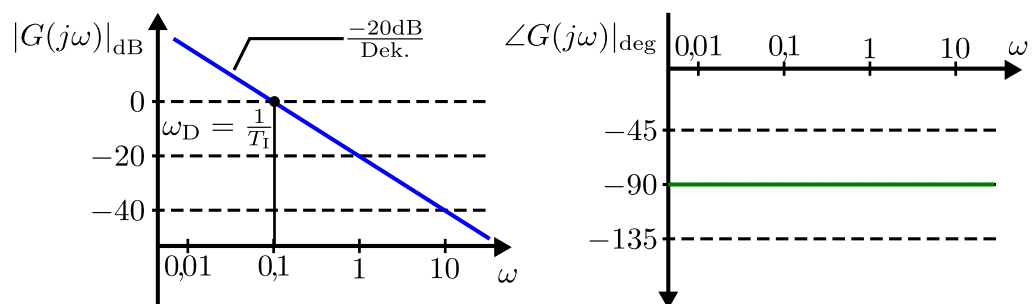


Abbildung 2.20: Qualitatives Bodediagramm des Integratorgliedes

- Symbol bzw. Blockschaltbild in Abbildung 2.21

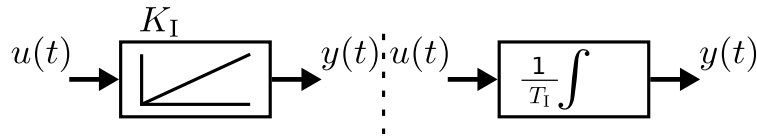


Abbildung 2.21: Symbol, Blockschaltbild des Integratorglieds

Differenzierglied (D-Glied)

Das Differenzierglied leitet den Eingang $u(t)$ kontinuierlich ab. Zudem existiert ein Verstärkungsfaktor K_D . Dieser ist aufgrund der Eigenschaften der Laplace Transformation im Zeit und im Bildbereich identisch.

- Funktionalbeziehung und Darstellung im Zeitbereich

$$y(t) = K_D \frac{du(t)}{dt}$$

- Laplacetransformierte und Übergangsfunktion im Bildbereich

$$Y(s) = K_D U(s) s, \quad G(s) = K_D s, \quad H(s) = K_D$$

- Pol- Nullstellen Diagramm im Bildbereich in Abbildung 2.22: Differenzierglied besitzt eine Nullstelle im Ursprung. Das System ist je nach Definition stabil; Zustandsstabil da kein Pol in der rechten Halbebene, jedoch nicht E/A-stabil, da auch Sprungstellen des Eingangssignals abgeleitet werden. Somit können unbegrenzte Ableitungen auftreten (theoretisch).

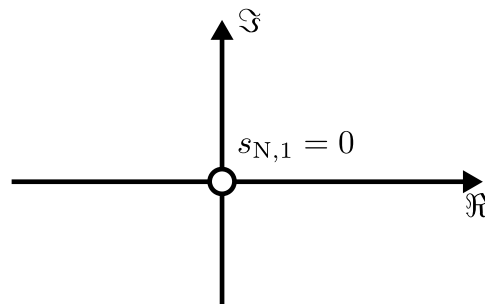


Abbildung 2.22: Qualitatives Pol- Nullstellen Diagramm des Differenzierglieds

- Sprungantwort im Zeitbereich: Ergibt sich aus der Rücktransformation von $H(s) \bullet \rightarrow h(t) = K_D \delta(t)$. Eigenschaft des Dirac-Impuls

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = K_D$$

Ist ein Rechteck mit der Fläche K_D , welches infinitesimal schmal ist.

- Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

$$G(j\omega) = K_D j\omega$$

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg (K_D \omega) = 20 \lg (K_D) + 20 \lg (\omega)$$

$$\angle G(j\omega) = \arctan \left(\frac{K_D \omega}{0} \right) = +90^\circ$$

- Bodediagramm: Die Durchtrittskreisfrequenz ω_D markiert den Punkt bei der die Verstärkung gleich 1 oder 0 dB ist. Der Amplitudengang kennzeichnet sich durch eine positive Steigung von $\frac{+20\text{dB}}{\text{Dek.}}$. Da der Phasengang sich nur aus positiven komplexen Anteilen zusammensetzt ist die Phase von Anfang an $+90^\circ$.

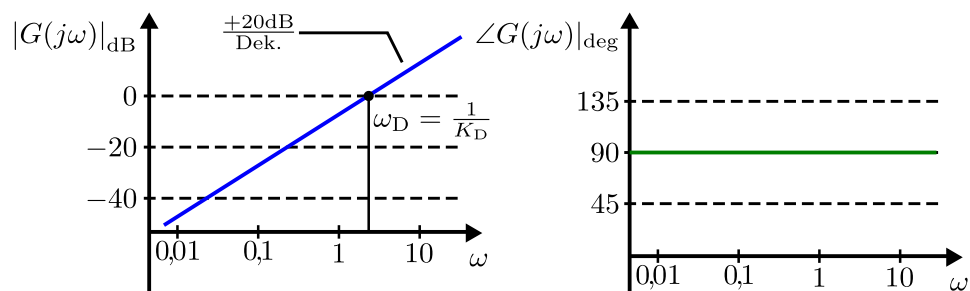


Abbildung 2.23: Qualitatives Bodediagramm des Differenzierglied

- Symbol bzw. Blockschaltbild

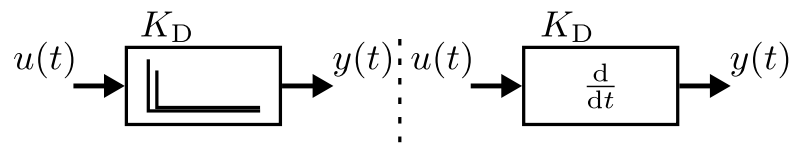


Abbildung 2.24: Symbol, Blockschaltbild des Differenzierglied

Totzeitglied (T_t -Glieder)

Das Totzeitglied, zeichnet sich durch eine durch eine Verschiebungsfunktion aus, welche eine beliebige Zeitfunktion um einen konstanten Wert T_t nach rechts verschiebt.

- Funktionalbeziehung

$$y(t) = u(t - T_t)$$

- Laplacetransformierte und Übergangsfunktion im Bildbereich

$$Y(s) = e^{-T_t s} U(s), \quad G(s) = e^{-T_t s}, \quad H(s) = \frac{e^{-T_t s}}{s}$$

- Pol- Nullstellen Diagramm im Bildbereich: Das Totzeitglied hat kein eigenes Diagramm, da es keine Pole oder Nullstellen besitzt.
- Sprungantwort im Zeitbereich in Abbildung 2.25: Ergibt sich aus der Rücktransformation von $H(s) \bullet \text{---} \circ h(t) = \sigma(t - T_t)$.

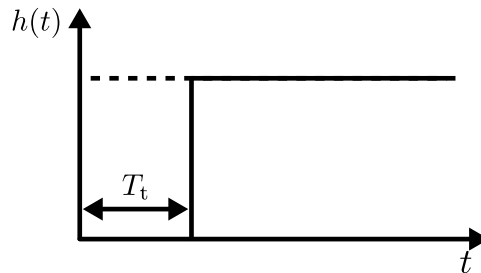


Abbildung 2.25: Qualitative Sprungantwort des Totzeitgliedes

- Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

$$G(j\omega) = e^{-T_t j\omega} = \cos(\omega T_t) - j \sin(\omega T_t)$$

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \left(\underbrace{\sqrt{\cos^2(\omega T_t) + \sin^2(\omega T_t)}}_{=1} \right) = 0$$

$$\angle G(j\omega) = \arctan \left(\frac{-\sin(\omega T_t)}{\cos(\omega T_t)} \right) = -\omega T_t$$

- Bodediagramm in Abbildung 2.26: Der Amplitudengang des Totzeitgliedes ist eine konstante Linie mit der Verstärkung 1 in dB. Der Phasengang auf der anderen Seite ergibt sich als eine stark abfallende Funktion der Kreisfrequenz ω . Der Phasengang hat bei $\omega = \frac{1}{T_t}$ eine Phase von -57° .

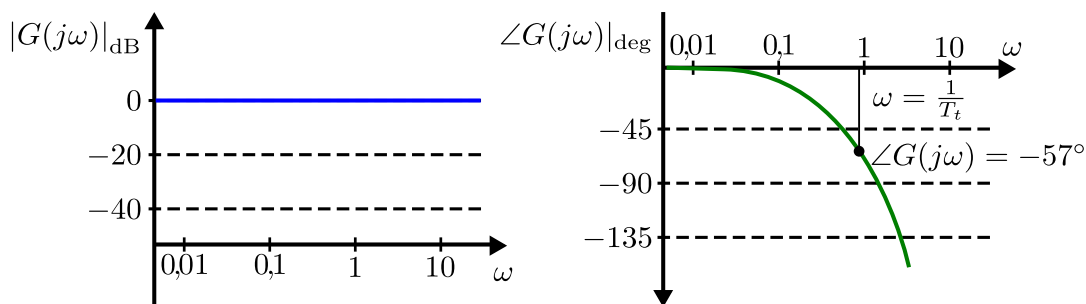


Abbildung 2.26: Qualitatives Bodediagramm des Totzeitgliedes

- Symbol bzw. Blockschaltbild

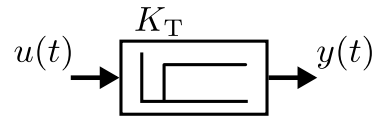


Abbildung 2.27: Symbol, Blockschaltbild des Totzeitgliedes

Verzögerungsglied 1-Ordnung (PT₁-Glied)

Das Verzögerungsglied erster Ordnung beschreibt ein dynamisches Verhalten wie es bei einer Differentialgleichung erster Ordnung vorkommt. Die beiden beschreibenden Variablen sind die Zeitkonstante T_1 und der Verstärkungsfaktor K_p .

- Funktionalbeziehung im Zeitbereich

$$T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_p u(t)$$

- Laplacetransformierte, Übertragungsfunktion und Übergangsfunktion im Bildbereich

$$Y(s) = \frac{K_p}{T_1 s + 1} U(s), \quad G(s) = \frac{K_p}{T_1 s + 1}, \quad H(s) = \frac{K_p}{s(T_1 s + 1)}$$

- Pol- Nullstellen Diagramm im Bildbereich in Abbildung 2.28: Das PT₁-Glied besitzt eine Polstelle in der negativen Halbebene bei $s_{P,1} = -\frac{1}{T_1}$ und keine Nullstelle. Da technische Systeme immer eine positive (physikalische) Zeitkonstante besitzen ist dieses Glied zunächst einmal stabil.

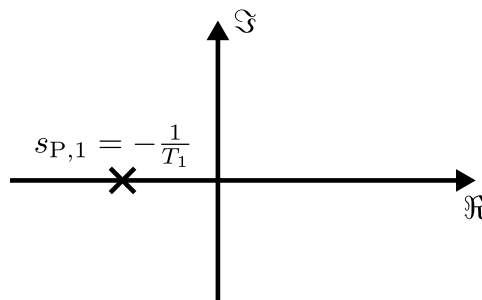


Abbildung 2.28: Qualitatives Pol- Nullstellen Diagramm des Verzögerungsgliedes 1-Ordnung

- Sprungantwort im Zeitbereich in Abbildung 2.29: Ergibt sich aus der Rücktransformation von $H(s)$ $\bullet \rightarrow h(t) = K_p \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$. Sowohl K_p als auch T_1 lassen sich aus der Sprungantwort ermitteln.

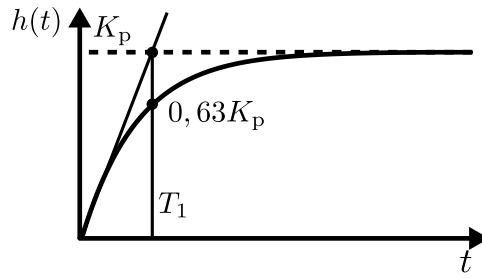


Abbildung 2.29: Qualitative Sprungantwort des Verzögerungsglied 1-Ordnung

- Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

$$G(j\omega) = \frac{K_P}{T_1 j\omega + 1} = \frac{K_P}{T_1 j\omega + 1} \cdot \frac{-T_1 j\omega + 1}{-T_1 j\omega + 1} = \frac{K_P (1 - T_1 j\omega)}{T_1^2 \omega^2 + 1}$$

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \left(\frac{K_P}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}} \right)$$

$$= 20 \lg (K_P) - 20 \lg \left(\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} \right)$$

$$\angle G(j\omega) = \arctan \left(\frac{-\frac{K_P \omega T_1}{T_1^2 \omega^2 + 1}}{\frac{K_P}{T_1^2 \omega^2 + 1}} \right) = \arctan (-\omega T_1) = -\arctan (\omega T_1)$$

- Bodediagramm in Abbildung 2.30: Bis zum Erreichen der Knickfrequenz ω_E verläuft der Amplitudengang Frequenz unabhängig mit der Verstärkung K_P in dB. Durch die Vergrößerung der Frequenz ω wird nun auch der zweite (frequenzabhängige) Term des Amplitudengangs relevant und er neigt sich bis zu einer negativen Steigung von $\frac{-20\text{dB}}{\text{Dek.}}$. Der Phasengang verhält sich zunächst auch konstant und nimmt den Wert 0° an. Er fällt auf einen Wert von -90° für $\omega \rightarrow \infty$. In Höhe der Knickfrequenz ω_E ist die Phase -45° .

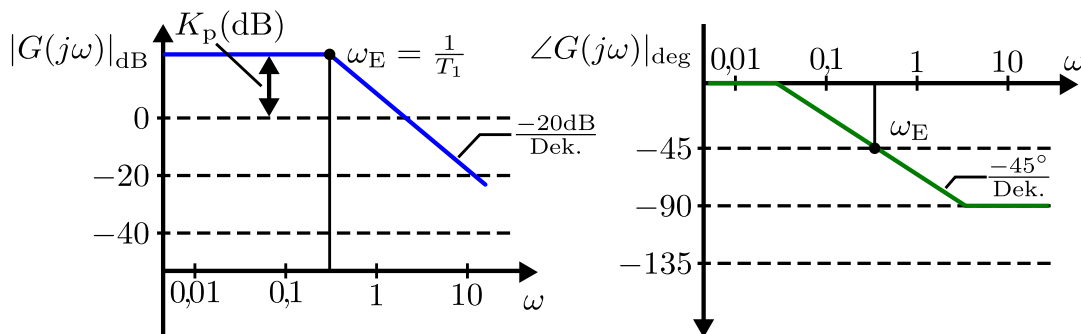


Abbildung 2.30: Qualitatives Bodediagramm des Verzögerungsglied 1-Ordnung

- Symbol bzw. Blockschaltbild

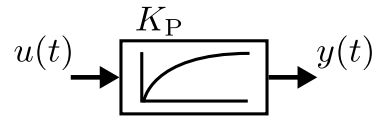


Abbildung 2.31: Symbol, Blockschaltbild des Verzögerungsglied 1-Ordnung

Verzögerungsglied 2ter-Ordnung (PT₂-Glied)

Das Verzögerungsglied zweiter Ordnung kann genutzt werden, um dynamische Systeme darzustellen, welche durch eine lineare Differentialgleichung 2ter-Ordnung ausgedrückt werden können (z.B. elektrischer Schwingkreis oder Kette von RC-Gliedern).

- Funktionalbeziehung im Zeitbereich

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2dT \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_p u(t)$$

Laplacetransformierte und Übergangsfunktion im Bildbereich

$$Y(s) = \frac{K_p}{T^2 s^2 + 2dT s + 1} U(s), \quad G(s) = \frac{K_p}{T^2 s^2 + 2dT s + 1}$$

$$H(s) = \frac{K_p}{s(T^2 s^2 + 2dT s + 1)}$$

Die Übertragungsfunktion lässt sich durch Umformung folgendermaßen darstellen

$$G(s) = \frac{K_p}{T^2 s^2 + 2dT s + 1}$$

$$= \frac{K_p}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2d}{\omega_0} s + 1}, \quad \omega_0 = \frac{1}{T}$$

$$= \frac{K_p \omega_0^2}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Und die Pole nach folgender Vorschrift berechnen

$$s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_{P,12} = -d\omega_0 \pm \sqrt{d^2 \omega_0^2 - \omega_0^2}$$

$$s_{P,12} = -d\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1}$$

- Pol- Nullstellen Diagramm im Bildbereich in Abbildung 2.32: Das PT_2 – Glied hat, je nachdem welche Dämpfung d das System besitzt, unterschiedliche Pole und keine Nullstelle. In Abbildung 2.32 sind die beiden Fälle für $d < 1$ (konjugiert komplexe Polpaar) und $d = 1$ (doppelter Reeller Pol) dargestellt. Für $d > 1$ ergeben sich zwei unterschiedliche reelle Polstellen. Für eine negative Dämpfung $d < 0$ schwingt das system auf und wird instabil. Jenachdem welchen negativen Dämpfungswert das System hat ist es entweder aperiodisch oder schwingend.

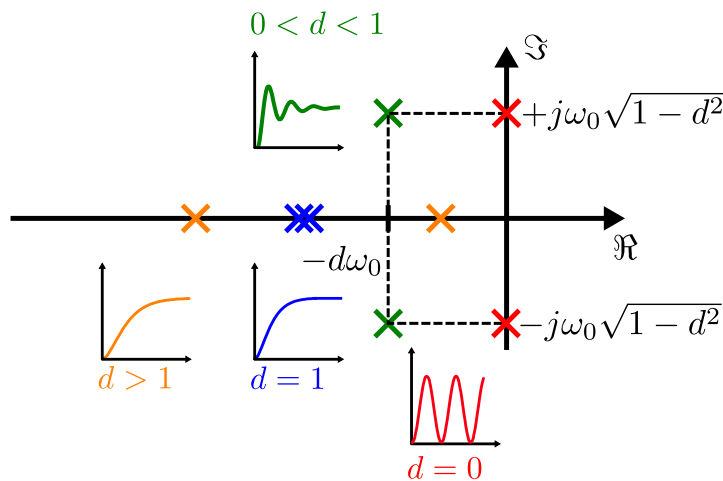


Abbildung 2.32: Qualitatives Pol- Nullstellen Diagramm des Verzögerungsgliedes 2ter-Ordnung für konjugiert komplexe und reelle Polpaare und deren Sprungantworten

- Sprungantwort im Zeitbereich: Hierfür muss zunächst eine Fallunterscheidung getroffen werden

$$\begin{aligned}
 0 < d < 1 &\rightarrow H(s) \circ \bullet h(t) = \\
 &K_p \left[1 - \frac{1}{\sqrt{d^2 - 1}} \cdot e^{-d\omega_0 t} \cdot \sin \left(\left(\omega_0 \sqrt{d^2 - 1} \right) t + \arccos(d) \right) \right] \\
 d > 1 &\rightarrow H(s) \circ \bullet h(t) = K_p \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \\
 d = 1 &\rightarrow H(s) \circ \bullet h(t) = K_p \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \left(1 + \frac{t}{T} \right) \right) \\
 d = 0 &\rightarrow H(s) \circ \bullet h(t) = K_p (1 - \cos(\omega_0 t))
 \end{aligned}$$

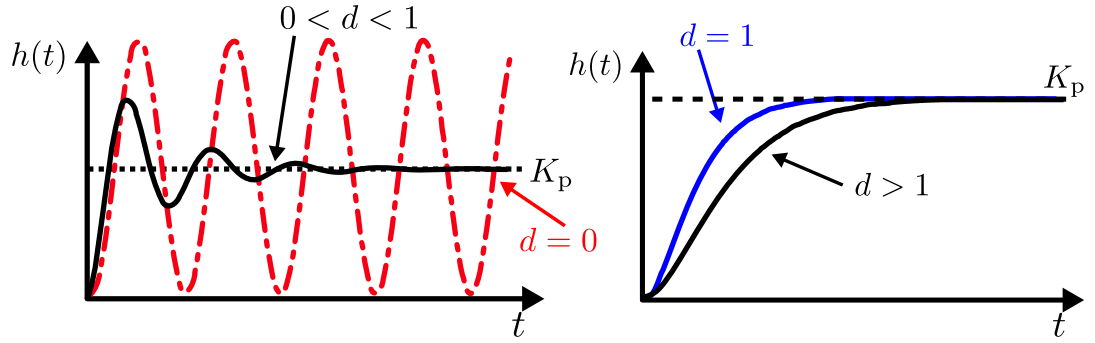


Abbildung 2.33: Qualitative Sprungantworten des Verzögerungsglied 2ter-Ordung

- Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{K_p}{\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} + 2d\frac{j\omega}{\omega_0} + 1} \\
 &= \frac{K_p}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j2d\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{K_p \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right] - jK_p \left[2d\frac{\omega}{\omega_0}\right]}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left[2d\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2} \\
 |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \left(\frac{K_p}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left[2d\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}} \right) \\
 &= 20 \lg(K_p) - 20 \lg \left(\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left[2d\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2} \right) \\
 \angle G(j\omega) &= \arctan \left(\frac{-\left[2d\frac{\omega}{\omega_0}\right]}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]} \right) = -\arctan \left(\frac{\left[2d\frac{\omega}{\omega_0}\right]}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]} \right)
 \end{aligned}$$

- Bodediagramm Anmerkungen zum Bodediagramm: Der Amplituden- und Phasengang ist je nach Dämpfung unterschiedlich:
 - $0 < d < 1$ **Konjugiert komplexes Polpaar**: Das Verhalten im Bodediagramm ist vergleichbar mit der Resonanz beim Reihenschwingkreis, die Amplitude wird durch den elektrischen Widerstand in der Schaltung begrenzt. Hier ist die Dämpfung d der entscheidende Faktor. Der asymptotische Amplitudengang knickt bei $\omega_E = \omega_0$ um $\frac{-40\text{dB}}{\text{Dek.}}$ ab. Der tatsächliche Amplitudengang ist in Abbildung 2.34 links unten dargestellt. Die Resonanzüberhöhung entsteht bei $\omega = \omega_e \neq \omega_0$. Der Phasengang ist ebenso vom Dämpfungsbeiwert abhängig, je kleiner der Wert, desto steiler verläuft der Phasengang. Der Pha-

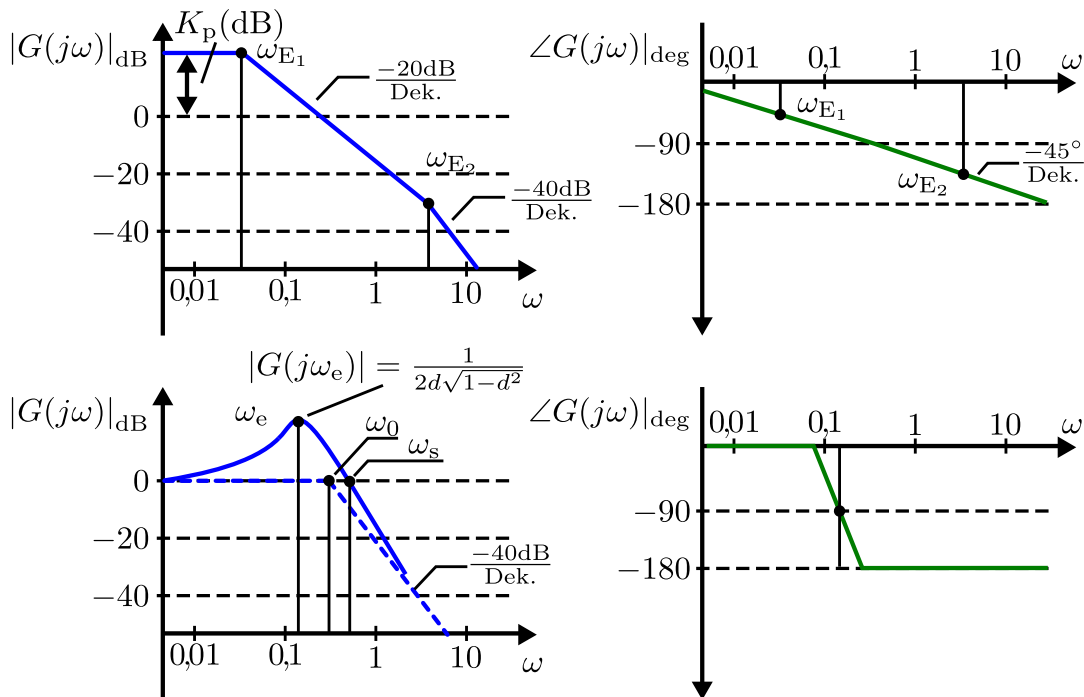


Abbildung 2.34: Qualitatives Bodediagramm des Verzögerungsglied 2-Ordnung

sengang startet bei 0° und verläuft für $\omega \rightarrow \infty$ gegen -180°

- $d = 1$ **Doppelter reeller Pol**: Aperiodischer Grenzfall, der asymptotische Amplitudengang knickt bei $\omega = \omega_0$ um $\frac{-40\text{dB}}{\text{Dek.}}$ ab. Die Durchtrittskreisfrequenz ω_D wird durch den Verstärkungsbeiwert K_p und durch die Knickfrequenz ω_E festgelegt. Die Knickfrequenz ω_E ist bei einer Dämpfung $d = 1$ identisch mit ω_0 . Der Phasengang verläuft wie beim PT_1 – Glied jedoch mit einer Steigung von $\frac{-90^\circ}{\text{Dek.}}$. In Höhe der Knickfrequenz ist die Phase -90° . Der Phasengang startet bei 0° und verläuft für $\omega \rightarrow \infty$ gegen -180°
- $d > 1$ **Zwei unterschiedliche reelle Pole**: In diesem Fall lässt sich der Amplitudengang wie bei zwei hintereinander geschalteten PT_1 – Gliedern realisieren. Das bedeutet das jedes PT_1 – Glied einen Beitrag zum Amplitudengang ab der jeweiligen Knickfrequenz $\omega_{E,1}$ von $\frac{-20\text{dB}}{\text{Dek.}}$ liefert. Die Steigungen der einzelnen Anteile addieren sich auf, sodass nach der zweiten Knickfrequenz $\omega_{E,2}$ der Amplitudengang eine negative Steigung von $\frac{-40\text{dB}}{\text{Dek.}}$ aufweist. Gleiches gilt für den Phasengang, welcher sich analog zum PT_1 – Glied realisieren lässt. Es muss beachtet werden, dass sich die Wirkung der beiden Pole auf den Phasengang auch überlagern, was bei sehr nahe aneinander liegenden Polen zu einer Steigung der Phasengangs von bis zu $\frac{-90^\circ}{\text{Dek.}}$ führt. Der Phasengang startet bei 0° und verläuft für $\omega \rightarrow \infty$ gegen -180°

- Symbol bzw. Blockschaltbild

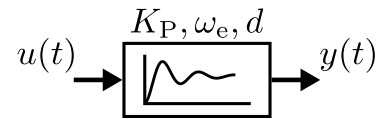


Abbildung 2.35: Symbol, Blockschaltbild des Verzögerungsglied 2-Ordnung

Octave Simulationsbeispiele 3

- *Verzögerungsglied 2-Ordnung*

Aufgaben zum Selbststudium 2

- Berechnen und zeichnen Sie $\angle G(j\omega)$ und $|G(j\omega)|_{dB}$ eines IT_1 -Gliedes.
- Berechnen und zeichnen Sie $\angle G(j\omega)$ und $|G(j\omega)|_{dB}$ eines PT_3 -Gliedes.
- Berechnen und zeichnen Sie $\angle G(j\omega)$ und $|G(j\omega)|_{dB}$ der Reihenschaltung eines PT_1 -Gliedes mit einem Totzeitglied.

2.4.7 Bestimmung des Übertragungsverhaltens von Grundgliedern

Nach dieser allgemeinen Übersicht sollen nun im Anschluss einige konkrete Beispiele folgen. Es werden allerdings nur einfache Fälle betrachtet; Bestimmung der Parameter von PT₁, PT₂ Gliedern über graphische Auswertung der Sprungantwort.

Anfangs- und Endwerte der Sprungantwort

Aus dem Endwert- bzw. Anfangswertsatz kann anhand der Sprungantwort ein spezifisches Verhalten ermittelt werden. Ausgehend von der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

ergibt sich der Endwertsatz zu:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{b_0}{a_0}.$$

Der Anfangswertsatz zu:

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s).$$

Um den Anfangswertsatz zu bestimmen, kann es notwendig sein die Regeln von l'Hospital anzuwenden und Zähler so wie Nenner getrennt voneinander abzuleiten. Grundsätzlich können unterschiedliche Verhalten der Sprungantwort so Klassifiziert werden.

- Integrales Verhalten $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$
- Proportionales Verhalten $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = K_P$
- Differenzierendes Verhalten $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$

Strecken mit PT₁ Verhalten

Strecken die ein PT₁ Verhalten aufweisen, können mittels der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{K}_P}{\hat{T}_1 s + 1}$$

dargestellt werden. Hierbei signalisiert der $\{\hat{\cdot}\}$ Operator, dass es sich nur um einen geschätzten und nicht um den Wahren Wert handelt. Beide Werte lassen sich aus der

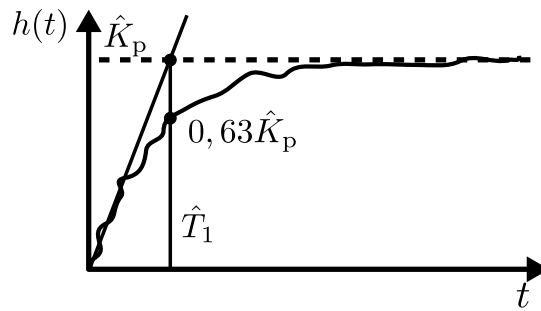


Abbildung 2.36: Schätzung der Systemparameter eine PT₁-Glieds [Foe94]

Sprungantwort des Systems rekonstruieren, wie in Abbildung 2.36 dargestellt. \hat{K}_P ergibt sich aus der stationären Verstärkung bzw. dem Endwert. \hat{T}_1 wiederum, ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Tangente an den linearen Teil die Anstiegskurve und dem stationären Endwert. Je nachdem wie hoch der Rauschanteil des Signals ist ergeben sich bessere oder schlechtere Werte bei der graphischen Bestimmung.

Strecken mit PT_N Verhalten

In der Praxis existieren oft Strecken, welche als Summe von mehreren Verzögerungsgliedern 1-Ordnung dargestellt werden können. Nun sind die Zeitkonstanten in der Regel unterschiedlich, was aber nicht differenziert analysiert werden kann. Stattdessen wird eine sogenannte Summenzeitkonstante gebildet und die unterschiedlichen Zeitkonstante in einer abgebildet.

$$G(s) = \frac{\hat{K}_P}{(\hat{T}_1 s + 1)(\hat{T}_2 s + 1) \cdots (\hat{T}_N s + 1)} \approx \frac{\hat{K}_P}{(\hat{T} s + 1)^N} e^{-T_t s}$$

Bei der experimentellen Bestimmung geht es hauptsächlich darum eine möglichst gute Summenzeitkonstante und Systemtotzeit zu ermitteln. Die Verfahren zur Bestimmung der Systemparameter von PT_N Verhalten sind zum Teil sehr Aufwendig und sollen hier nur kurz skizziert werden.

- Wendetangentenverfahren: Bestimmung einer Tangente im linearen Teil der Sprungantwort. Ermittlung von Anstiegszeit \hat{t}_g und Verzugszeit \hat{t}_u . Approximation mittels PT₁T_t-Glied.
- Strejc Verfahren: Bestimmung zweier Punkte $(\hat{t}_1, \hat{h}_1), (\hat{t}_2, \hat{h}_2)$ im linearen Bereich der Sprungantwort. Ermittlung der Systemparameter anhand einer Entwurfsfor-

mel.

$$\hat{T} = \frac{\hat{t}_2 - \hat{t}_1}{\ln \left(\frac{\hat{K}_P - \hat{h}_1}{\hat{K}_P - \hat{h}_2} \right)}$$

$$\hat{T}_t = \hat{T} \ln \left(1 - \frac{\hat{h}_2}{\hat{K}_P} \right) + \hat{t}_2$$

Bestimmung der stationären Verstärkung aus dem Endwert und Approximation mittels PT_1T_t -Glied.

- Zeitprozentwertverfahren nach Schwarz [ZR17]: Es werden drei Prozentwerte der Sprungantwort bei 10%, 50% und 90% des Endwertes gebildet.

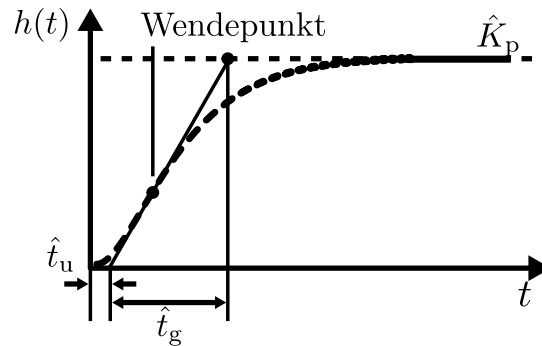


Abbildung 2.37: Sprungantwort eines PT_N -Glieds und die zu schätzenden Parameter [Foe94]

Strecken mit schwingungsfähigem PT_2 Verhalten

Handelt es sich bei der Sprungantwort eines Systems um eine abklingende Schwingung, so existieren auch hierfür Verfahren, um die Parameter der Kurve zu ermitteln. Hierbei werden sowohl die Frequenz der Schwingung als auch die Reduktion der Amplitude der Schwingung zu Bestimmung herangezogen, wie in Abbildung 2.38 dargestellt. Bei schwingungsfähigen Systemen muss zudem ein Toleranzband für die Erreichung des stationären Endwertes festgelegt werden. Dieses liegt in der Regel bei 3% oder 5% bezogen auf den Endwert. Die Strecke wird durch folgende angenäherte Übertragungsfunktion dargestellt.

$$G(s) = \frac{\hat{K}_P}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\hat{d}\frac{s}{\omega_0} + 1}$$

Folgende Parameter werden benötigt

- Anregelzeit \hat{t}_{An} ist erreicht, wenn die Sprungantwort das erste Mal den Endwert schneidet.

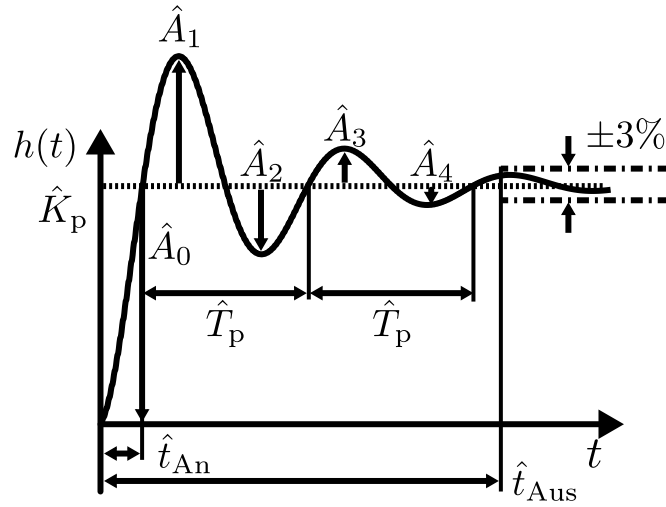


Abbildung 2.38: Sprungantwort eines PT2-Glieds und die zu schätzenden Parameter [Foe94]

- Ausregelzeit \hat{t}_{Aus} ist erreicht, wenn die Sprungantwort in den 3% oder 5% Schlauch um den Endwert eintritt.
- Periodendauer \hat{T}_p , ermittelt sich aus der Eigenschwingung der Systemantwort.
- Amplituden $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4, \dots, \hat{A}_N$
- Prozentuale Überswingweite \hat{u}

Nach Auswertung der Sprungantwort sind die Dämpfung \hat{d} und die Kreisfrequenz $\hat{\omega}_0$ gesucht. Mittels folgender Formeln lassen sich nun die Parameter bestimmen [Foe94].

$$\begin{aligned} \hat{K}_p &= h_\infty, & j\hat{\omega}_e &= j\hat{\omega}_0 \sqrt{1 - \hat{d}^2}, \quad \forall \hat{d} \in \{0 < \hat{d} < 1\} \\ \hat{u} &= \frac{\hat{A}_{k+1}}{\hat{A}_k}, & \hat{d} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\pi}{\ln(\hat{u})} \right]^2}} \\ \hat{\omega}_0 &= \frac{2\pi}{\hat{T}_p \sqrt{1 - \hat{d}^2}}, & \hat{T}_p &= \frac{2\pi}{\hat{\omega}_0} \sqrt{1 - \hat{d}^2} \end{aligned}$$

2.5 Modellvereinfachung

Bis zum jetzigen Zeitpunkt wurde die Regelstrecke durch ein mathematisches Modell dargestellt oder durch Messung der Systemantwort bestimmt. Dies kann jedoch unter Umständen zu sehr komplexen, oder auch nichtlinearen Blöcken führen. Im folgenden

soll gezeigt werden, wie diese Modelle vereinfacht werden können, um sie leichter in der Regelung einzusetzen.

2.5.1 Normierung

Ziel der Normierung ist es die Einheiten aus den Systemgleichungen zu eliminieren und einen einheitlichen Zahlenraum für physikalische Größen zu erhalten. Besonders beim Einsatz in Rechnergestützten Programmen oder einer Regelung per Microcomputer, verhilft die Normierung den Wertebereich der Regel- und Stellgrößen bestmöglich zu nutzen. Denn je nach Variablen Typ (z.B. 8 Bit Integer) kann es leicht zu einem Überlauf kommen. Nutzen wir wieder das Beispiel der Gleichstrommaschine, so würden die Normierten Größen sich bezogen auf ihren Maximalwert oder Nennwert ergeben [SML14]

$$\frac{i_A}{I_{A,\text{Nenn}}} = \tilde{i}_A \quad \text{entspricht} \quad \frac{u_A}{U_{A,\text{Nenn}}} = \tilde{u}_A \quad \text{mit} \quad -1 \leq \{i_A, u_A\} \leq +1$$

Alle Größen sind ab diesem Zeitpunkt auf die Basis SI-Einheiten normiert und somit dimensionslos. Hierdurch wird jedoch auch eine bessere Vergleichbarkeit zwischen unterschiedlichen Maschinensätzen unterschiedlicher Größe gegeben, da ja die Struktur der Maschine gleich bleibt.

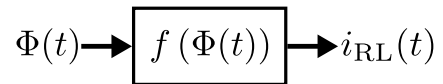
Beispiele zum Nachlesen 6

- *Normierung der Gleichstrommaschine*
- *Normierung einer Wechselstromimpedanz*

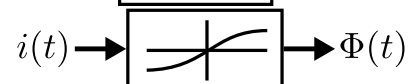
2.5.2 Linearisierung

Viele in der Praxis vorkommende Systeme haben nichtlineares Verhalten. Jedoch bietet die Regelungstechnik für LZI-Glieder ein wesentliches breiteres Spektrum an Methoden an. Einige Beispiele von nichtlineare Gliedern die in vielen Standard-Regelkreisen eingesetzt werden, sind im folgenden aufgezeigt [Foe94, Lan00].

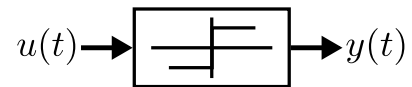
- Kennlinienglied



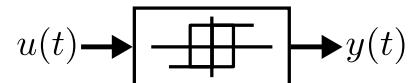
- Magnetisierungskennlinie



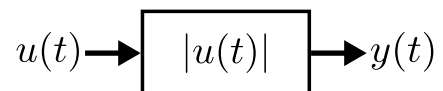
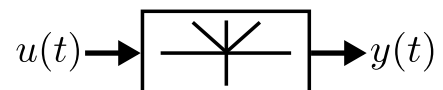
- Zweipunktschalter



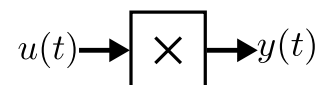
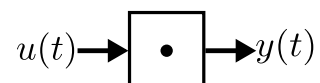
- Zweipunktschalter mit Hysterese



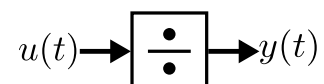
- Betragsbildner



- Multiplizier Glied

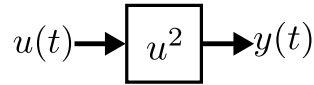


- Dividier Glied

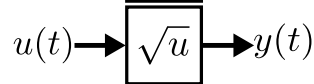


Des Weiteren zeigt sich in vielen Fällen, dass es ausreicht ein System in der Nähe eines Arbeitspunktes zu betrachten und es um diesen Arbeitspunkt zu linearisieren [Lun10, MSF05]. Dabei ist der Arbeitspunkt als ein beliebiger stationärer Zustand des

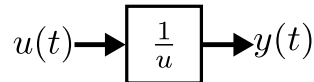
- Quadrier Glied



- Wurzel Glied



- Invertierer



Systems zu verstehen. Dies kann zum Beispiel der stationäre Endwert der Sprungantwort eines Systems sein, welcher sich aus der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

und der Anwendung des Endwertsatzes ergibt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h_\infty = \frac{a_0}{b_0}.$$

Im Weiteren gehen wir davon aus, dass wir einen beliebigen stationären Zustand eines Systems, definiert durch y_0, u_0 haben.

Bestimmung von stationären Zuständen aus dem Wirkungsplan

Per Definition sind alle zeitveränderlichen Größen im stationären Zustand konstant. Ein Sonderfall wäre der Integrator, welcher gesondert betrachtet werden muss, da sich für einen konstanten Eingang u_0 kein konstanter Ausgang y_0 einstellt. Die Vorgehensweise zur Bestimmung der stationären Werte erfolgt nach folgendem Muster:

- Eingänge aller Integrator Glieder zu 0 setzen.
- In anderen Blöcken $s = 0$ setzen.
- Stationäre Gleichungen aus dem Wirkungsplan ablesen.
- Sollwerte der Ausgangsgröße einsetzen.
- Berechnung der übrigen Größen.

Exemplarisch soll dies anhand des RL-Glieds und dessen Wirkschaltplan dargestellt werden (siehe Abbildung 2.41)

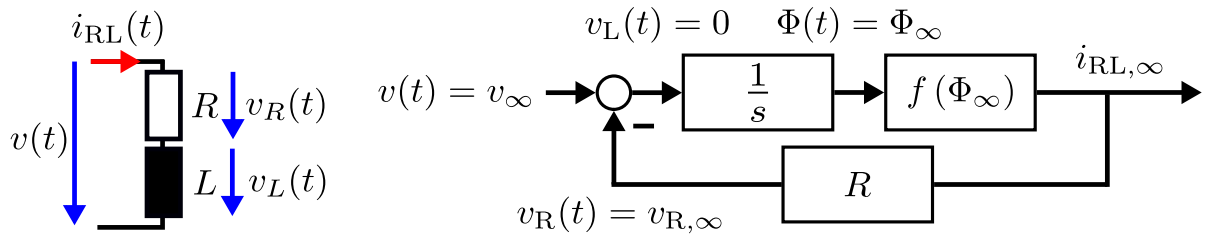


Abbildung 2.41: Berechnung des stationären Wertepaares anhand des Wirkschaltplans

Beispiele zum Nachlesen 7

- Berechnung des stationären Zustandes aus dem Wirkschaltplan

Berechnung des linearisierten Systems

Durch den stationären Punkt wird eine Tangente gelegt welcher einer Näherung des nichtlinearen Verhaltens durch eine lineare Funktion entspricht (vgl. Abbildung 2.42).

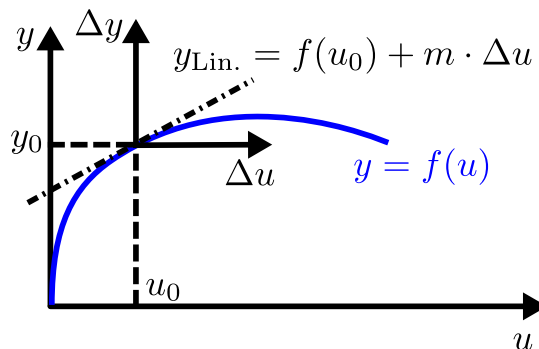


Abbildung 2.42: Linearisierung einer nichtlinearen Funktion durch eine Geradenapproximation

Formal wird die Linearisierung durch eine Approximation mittels Taylorreihe beschrieben

$$f(u) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{df^n(u)}{du^n} \right|_{u=u_0} (u - u_0)^n,$$

welches jedoch nach dem linearen Glied abgebrochen wird und sich somit auf folgende Gleichung reduziert

$$f(u) \approx f(u_0) + \underbrace{\left. \frac{df(u)}{du} \right|_{u=u_0}}_m \underbrace{(u - u_0)}_{\Delta u},$$

Dies ist jedoch nur möglich wenn die Funktion im Arbeitspunkt stetig differenzierbar ist. D.h. Knickstellen oder Sprünge können nicht als Arbeitspunkt genutzt werden. Durch die Verschiebung in ein neues Koordinatensystem ist das linearisierte Modell nur relativ zum Arbeitspunkt aussagekräftig. Um diese Eigenschaft im Blockschaltbild zu berücksichtigen müssen die Arbeitspunkte mit in das Modell einfließen, um nach außen hin vergleichbare Werte zum nichtlinearen Verhalten zu erhalten (vgl. Abbildung 2.43). Dieser Ansatz lässt sich auch für Funktionen mehrerer Veränderlicher realisieren. Als

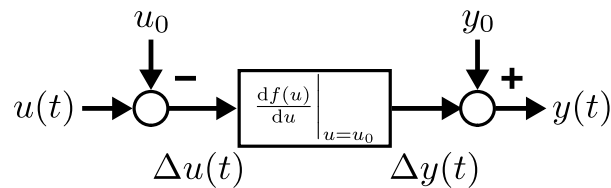


Abbildung 2.43: Darstellung der Linearisierung im Blockschaltbild

Beispiel soll ein System mit mehreren Eingängen und einem Ausgang dienen. Die Taylor Reihe wird nun partiell für sämtliche Variablen entwickelt und nach dem ersten Glied abgebrochen.

$$f(u_1, \dots, u_N) \approx f(u_{10}, \dots, u_{N0}) + \sum_{\nu=1}^N \left. \frac{\partial f(\cdot)}{\partial u_\nu} \right|_{u_\nu=u_{\nu 0}} (u_\nu - u_{\nu 0})$$

Wie aus vorherigen Kapiteln bekannt ist die Summenbildung in Gleichung 2.5.2 linear. Für das linearisierte System gilt somit das Überlagerungsprinzip.

Octave Simulationsbeispiele 4

- *Linearisierung am Beispiel des Fliehkraftpendel nach [MSF05], Seite 54*

Zusammenfassend ergeben sich folgende Besonderheiten:

- Das Koordinatensystem des linearisierten Modells hat seinen Ursprung im Arbeitspunkt (y_0, u_0) und seine Variablen sind nun relative Größen $(\Delta y, \Delta u)$.
- Je weiter wir uns vom Arbeitspunkt entfernen, um so schlechter approximiert das lineare, das ursprüngliche Modell.
- Der Wirkschaltplan muss die Koordinatenverschiebung berücksichtigen.
- Bei Linearisierung von Funktion mehrerer Veränderlicher gilt für die einzelnen Approximationen das Linearistätsprinzip.
- Lineare Übertragungsglieder bleiben erhalten, da sie durch die Taylor Reihe exakt beschrieben werden.

2.5.3 Wirkungsplanvereinfachung

Übertragungsfunktionen ermöglichen ein einfaches Rechnen mit dynamischen Systemen, welche aus mehreren Teilsystemen bestehen. Ziel ist es die Gesamtübertragungsfunktion bspw. der Regelstrecke zu finden, um den Regler hierfür auslegen zu können. Die drei am häufigsten vorkommenden Verschaltungen von Übertragungsfunktionen werden im folgenden vorgestellt (nach [Lun10]).

Reihenschaltung von Übertragungsfunktionen

Bei der Reihenschaltung von Übertragungsfunktionen wirkt der jeweilige Ausgang des vorherigen Blockes auf den Eingang des nachgeschalteten, wie in Abbildung 2.44 dargestellt. D.h. es gilt zunächst für die Teilübertragungsfunktionen

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= G_1(s)U_1(s) \\ Y_2(s) &= G_2(s)U_2(s) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Aus der Verschaltung in Abbildung 2.44, wird ersichtlich das

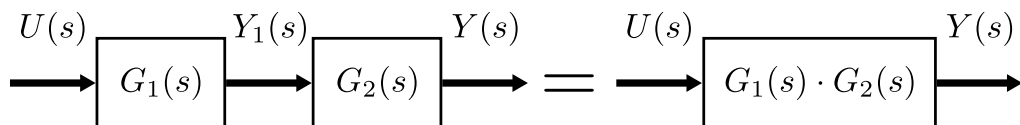


Abbildung 2.44: Regeln für die Reihenschaltung von Übertragungsfunktionen nach [Lun10]

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_2(s) \\ U_2(s) &= Y_1(s) \\ U_1(s) &= U(s) \end{aligned}$$

Setzt man diesen Zusammenhang in Gleichung 2.24 ein, erhält man das Ergebnis der Reihenschaltung.

$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)U(s)$$

Diese besagt, dass eine Reihenschaltung von zwei Übertragungsfunktionen einer Multiplikation gleicht. Würde man dies mit Zeitfunktionen realisieren, so müssten die beiden Gewichtsfunktionen mit dem Faltungsintegral verrechnet werden.

Parallelschaltung von Übertragungsfunktionen

Bei der Parallelschaltung von Übertragungsfunktionen wirken die jeweiligen Ausgänge der einzelnen Blöcke in Summe auf den Gesamtausgang, wie in Abbildung 2.45 dargestellt. D.h. es gilt zunächst für die Teilübertragungsfunktionen

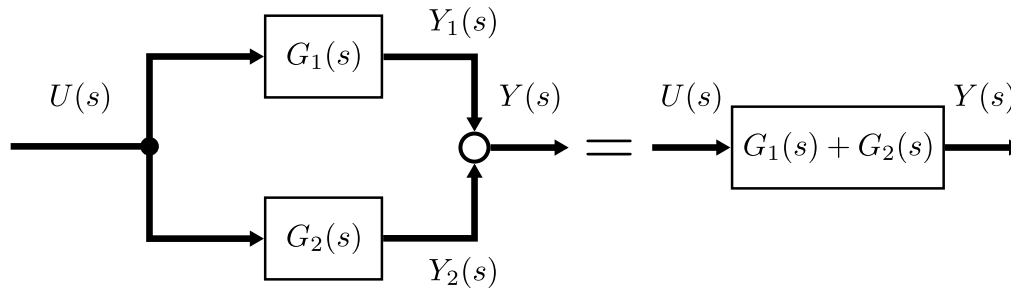


Abbildung 2.45: Regeln für die Parallelschaltung von Übertragungsfunktionen nach [Lun10]

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) \\
 U(s) &= U_1(s) = U_2(s) \\
 Y_1(s) &= G_1(s)U_1(s) \\
 Y_2(s) &= G_2(s)U_2(s)
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Aus der Verschaltung in Abbildung 2.45 und Gleichung 2.25, wird ersichtlich das

$$Y(s) = (G_1(s) + G_2(s)) U(s)$$

Das Ergebnis besagt, dass eine Parallelschaltung von zwei Übertragungsfunktionen einer Addition gleicht. Im Zeitbereich würden die gleichen Regeln für die Gewichtsfunktionen gelten.

Schaltung von Übertragungsfunktionen mit Rückführung

Werden verschiedene Übertragungsfunktionen in einem geschlossenen Regelkreis zusammengeführt, so entstehen oft Rückführungen. Da die Regelgröße zudem gemessen werden muss, kann es vorkommen das, dass Messglied in der Rückführung auftaucht, wie in Abbildung 2.46 dargestellt. Für die Signale lässt sich folgende Beziehung aufstellen

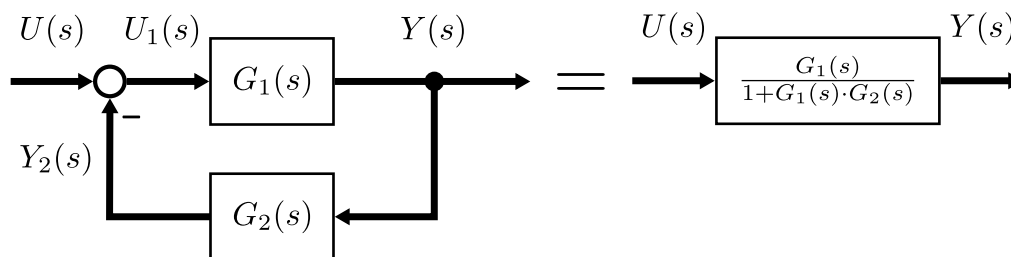


Abbildung 2.46: Regeln für die Rückführung von Übertragungsfunktionen nach [Lun10]

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= Y_1(s) \\
 U_1(s) &= U(s) - Y_2(s)
 \end{aligned}$$

Woraus sich ergibt das

$$Y(s) = (U(s) - Y_2(s)) G_1(s)$$

$$Y(s) = (U(s) - Y(s)G_2(s)) G_1(s)$$

$$Y(s) = G_1(s)U(s) - G_2(s)G_1(s)Y(s)$$

$$Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)}U(s)$$

Im Zeitbereich würde man hingegen nur eine nicht sehr anschauliche implizite Gleichung bekommen. Es existieren noch weitere Umformungsregeln welche genutzt werden können, um Blöcke zusammenzufassen Verknüpfungspunkte zu verschieben, oder Additionen zu vertauschen. In Abbildung 2.47 sind einige wichtige Rechenregeln zusammengefasst.

Aufgaben zum Selbststudium 3

- Nutzen Sie Abbildung 1.9 und überlegen Sie, welche Veränderung das Signal $u_v(t)$ erfährt, wenn es am Ausgang wirken soll.
- Überprüfen Sie die Linearitätsbedingung für die Parallelschaltung in Abbildung 2.45.

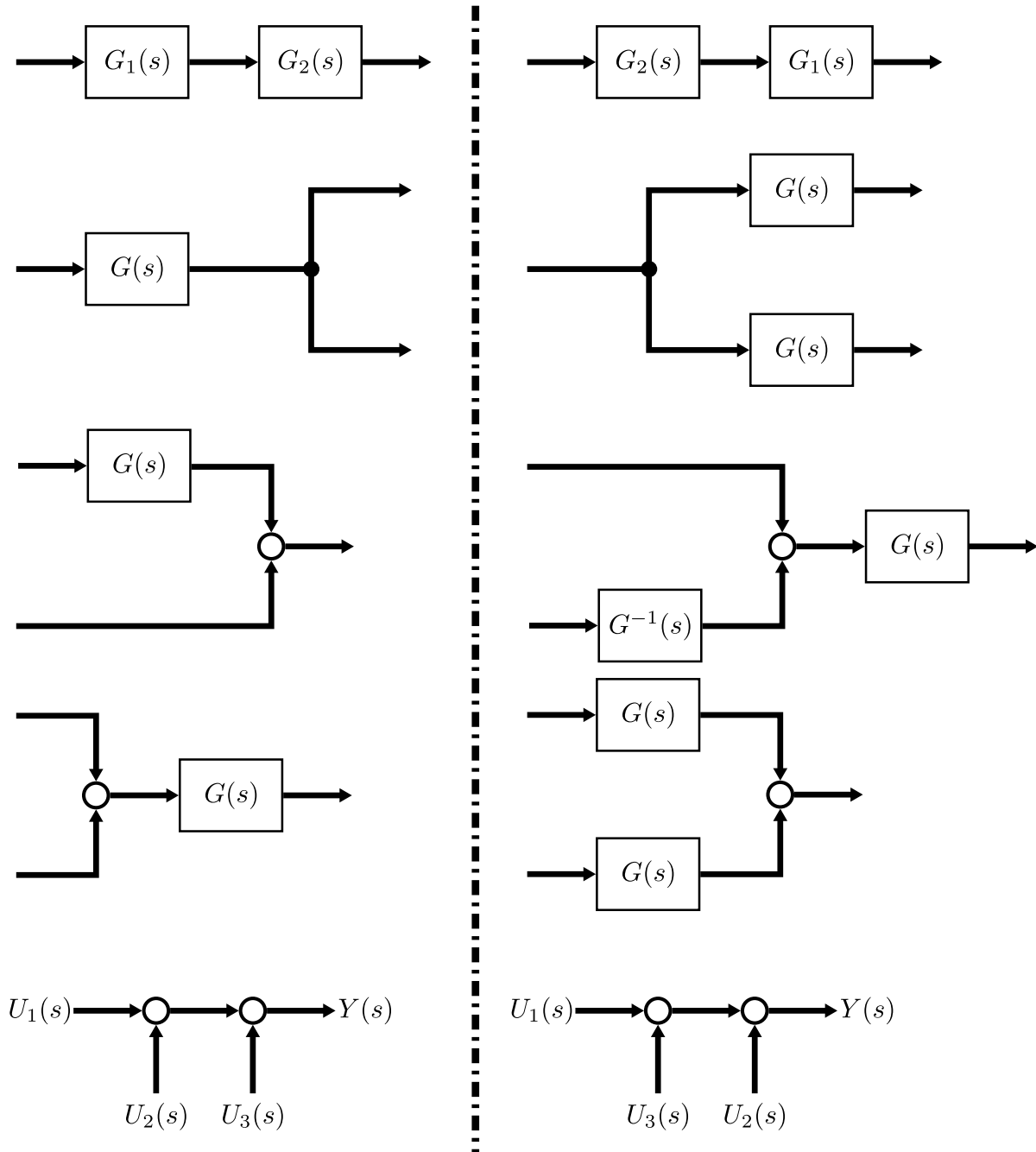


Abbildung 2.47: Regeln für das Umformen von Blockschaltbildern nach [Foe94, Lun10]

3 Analyse des Regelkreises

Um einen Regelkreis auslegen zu können, benötigt es zunächst Methoden, um dessen Verhalten zu beschreiben. Diese Analysemethoden werden verwendet, um den Regelkreis zu quantifizieren und somit später für die jeweilige Regelstrecke zu entwerfen.

3.1 Modell des Standardregelkreises [MSF05, Lun10]

In den letzten Kapiteln wurden die Grundglieder des Regelkreises erläutert und die grundsätzlichen dynamischen Modelle eingeführt. Dies bildet die Grundlagen, um nun die Eigenschaften des Regelkreises einzuführen. Der Standardregelkreis im Laplacebereich, kann mit folgenden Komponenten dargestellt werden, siehe Abbildung 3.1. Die

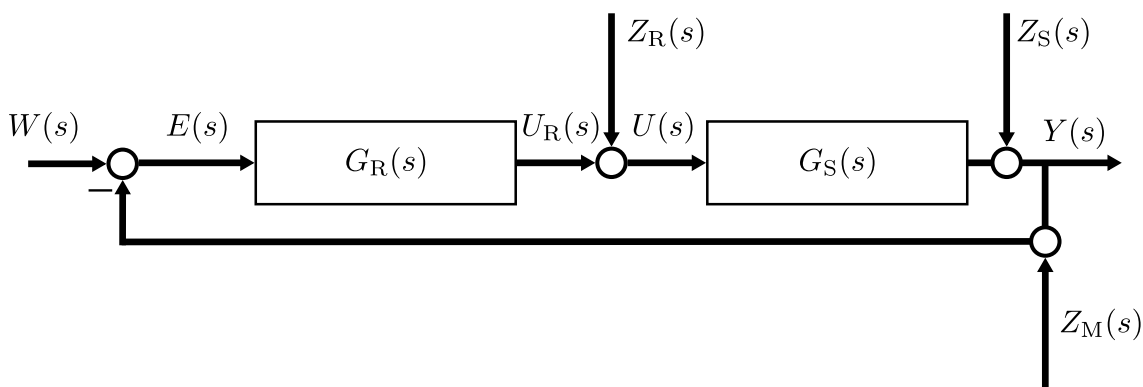


Abbildung 3.1: Abbildung der Komponenten im Standardregelkreis

Gesamtübertragungsfunktion des Regelkreises ergibt sich aus der Summe der einzelnen beteiligten Signale zu

$$Y(s) = G_W(s)W(s) + G_{Z_R}(s)Z_R(s) + G_{Z_S}(s)Z_S(s) + G_{Z_M}(s)Z_M(s)$$

Hierbei sind die beteiligten Übertragungsfunktionen

- $G_R(s)$ die Übertragungsfunktion des Reglers.
- $G_S(s)$ die Übertragungsfunktion der Regelstrecke.

- $G_W(s)$ die Führungsübertragungsfunktion.
- $G_{ZR}(s)$ die Störübertragungsfunktion für Störsignale am Streckeneingang.
- $G_{ZS}(s)$ die Störübertragungsfunktion für Störsignale am Streckenausgang.
- $G_{ZM}(s)$ die Störübertragungsfunktion für Störsignale im Messsignal der Regelgröße.

Zentraler Bestandteil der genannten Übertragungsfunktionen ist das Verhalten des offenen Kreises. Dieses ist definiert als Hintereinanderschaltung des Reglers und der Strecke ohne eine Rückführung.

$$G_0(s) = G_R(s)G_S(s)$$

Verfolgt man die Signalpfade der Regelung aus Abbildung 3.1, so lassen sich durch Umformen die bereits genannten Übertragungsfunktionen bilden

$$\begin{aligned} G_W(s) &= \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \\ G_{ZR}(s) &= \frac{G_S(s)}{1 + G_0(s)} \\ G_{ZS}(s) &= \frac{1}{1 + G_0(s)} \\ G_{ZM}(s) &= \frac{1}{1 + G_0(s)} \end{aligned}$$

Die Störübertragungsfunktionen werden meist in eine gemeinsame Darstellung $G_Z(s) = \frac{1}{1+G_0(s)}$ überführt, da ja durch die Linearität die Wirkungen der Störungen, immer auch vor oder nach der Strecke verschoben werden können, wie in Abbildung 3.2 dargestellt. Hiermit ergibt sich die Gesamtübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises zu

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}}_{G_W(s)} W(s) + \underbrace{\frac{1}{1 + G_0(s)}}_{G_Z(s)} Z(s)$$

Die Forderungen an den Regelkreis kann nun auf die einzelnen Übertragungsfunktion abgebildet werden. Die Führungssprungantwort soll $G_W(s \rightarrow 0) = h_W(t \rightarrow \infty) \approx 1$ sein, so dass gilt $Y(s \rightarrow 0) = W(s \rightarrow 0)$, während die Störübertragungsfunktionen $G_{ZR}(s \rightarrow 0) \approx 0$, $G_{ZS}(s \rightarrow 0) \approx 0$, $G_{ZM}(s \rightarrow 0) \approx 0$ sein sollen, so dass Störungen des Regelkreises abklingen. Nehmen wir nun weiter an, dass der Regelkreis eingeschwingen ist, und sämtliche Störgrößen abgeklungen sind. Des Weiteren soll $G_R(s) = K_P$ sein und die Regelstrecke durch ihre stationäre Verstärkung beschrieben werden $G_S(s \rightarrow 0) = K_S$.

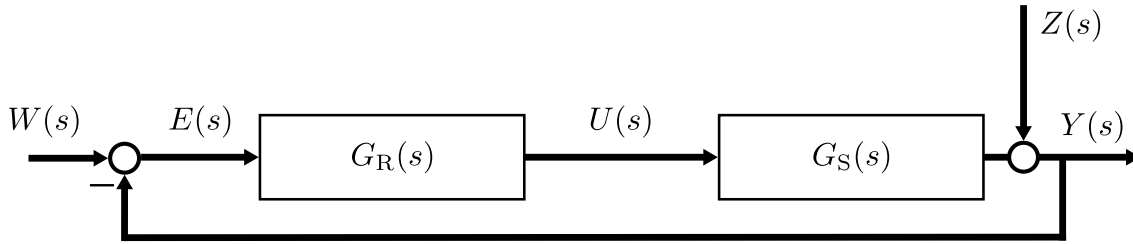


Abbildung 3.2: Vereinfachte Darstellung der Komponenten im Standardregelkreis

Die Führungsübertragungsfunktion ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} h_W(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s H_W(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G_W(s) = \frac{K_P K_S}{1 + K_P K_S} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{K_P K_S} + 1} \end{aligned}$$

Die Forderung nach Sollwertfolge $G_W(s \rightarrow 0) \approx 1$ kann hier nur erfüllt werden, wenn $K_P \rightarrow \infty$. Allgemein gilt: falls die Regelstrecke proportionales Verhalten besitzt, so benötigt der Regler einen integralen Anteil, um eine bleibende Regelabweichung zu kompensieren. Dies lässt sich in gleicher Form auch für die Regeldifferenz aufstellen, um das Störverhalten zu analysieren

$$\begin{aligned} E(s) &= W(s) - (Z(s) + G_0(s)E(s)) \\ E(s) &= \frac{1}{1 + G_0(s)} W(s) - \frac{1}{1 + G_0(s)} Z(s) \end{aligned}$$

Über den Endwertsatz lässt sich hieraus eine Bedingung für die stationäre Genauigkeit ableiten.

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \\ e_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_0(s)} W(s) - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_0(s)} Z(s) \end{aligned}$$

Wird nun angenommen, dass es sich um sprungförmige Stör- und Führungssignale handelt, so kann die Gleichung vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_0(s)} (w_0 - z_0) \\ &= \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s)} (w_0 - z_0) \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung wird ersichtlich, dass der Grenzwert $\lim_{s \rightarrow 0} G_0(s)$, darüber entscheidet, ob die stationäre Regeldifferenz e_∞ verschwindet. Allgemein gesprochen muss die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises in der Form

$$G_0(s) = \tilde{G}_0(s) \frac{1}{s}$$

dargestellt werden können. Ist dies der Fall so hat der Regelkreis für sprungförmige Stör- und Führungssignale keine bleibende Regelabweichung und ist somit stationär genau. Diese Beobachtung lässt sich auch auf weitere Signaltypen erweitern. Zusammengefasst ergibt sich

- Bei impulsförmigen Stör- und Führungssignalen ($w_0\delta(t), z_0\delta(t)$) muss der offene Regelkreis nur stabil sein.
- Bei sprungförmigen Stör- und Führungssignalen ($w_0\sigma(t), z_0\sigma(t)$) muss der offene Regelkreis ein I-Glied enthalten.
- Bei rampenförmigen Stör- und Führungssignalen (w_0t, z_0t) muss der offene Regelkreis ein I₂-Glied enthalten.

3.2 Analyse der Stabilität des geschlossenen Regelkreises

3.2.1 Technische Beispiele für Stabilität

Die Stabilität technischer Systeme beschreibt die Eigenschaft auf eine bestimmte, jedoch beschränkte, Systemgröße mit einem beschränkten Ausgangssignal zu reagieren.

Der Stabilitätsbegriff soll im Folgenden Anhand einer Reihenschaltung aus Kondensator und elektrischen Widerstand veranschaulicht werden. In Abbildung 3.3 ist die Schaltung mit einer Spannungsquelle, einem Schalter, so wie den konzentrierten Elementen Kondensator und Widerstand dargestellt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter auf die

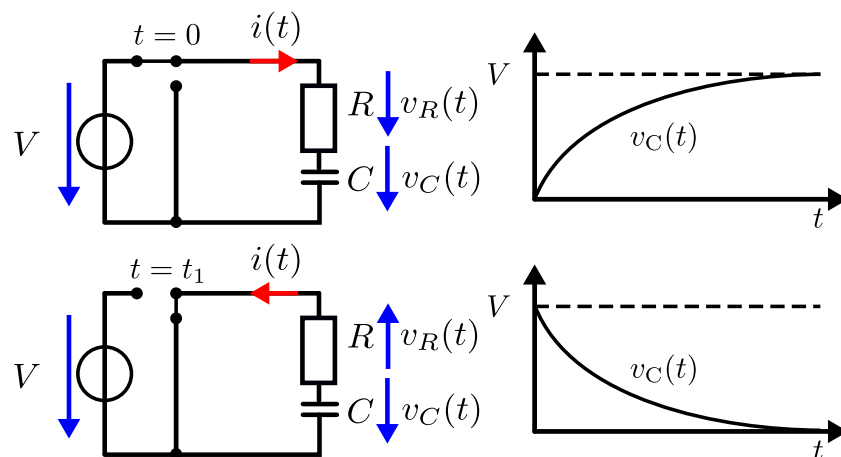


Abbildung 3.3: RC-Glied als Beispiel eines Zustands und E/A-Stabilen Systems

Spannungsquelle umgeschaltet und der Kondensator auf die Spannung V aufgeladen. Die sprungförmige Anregung durch die Spannungsquelle V kann als beschränktes Eingangssignal interpretiert werden. Der Ausgang des Systems, hier mit $v_c(t)$ gewählt, strebt gegen diesen endlichen Wert, das System ist somit E/A-Stabil. Wird nun zum Zeitpunkt $t = t_1$ der Schalter umgelegt (siehe Abbildung 3.3 unten) und der Kondensator über den Widerstand entladen, klingt die Spannung am Kondensator ab. Die Kondensatorspannung zum Zeitpunkt $t = t_1$ stellt den Anfangswert des nicht angeregten Systems dar. Somit kann für dieses Beispiel auch die asymptotische Stabilität gewährleistet werden.

Beispiele für instabile Systeme

Ein häufig verwendetes Beispiel für instabile Systeme ist das inverse Pendel. Es handelt sich hierbei um ein mathematisches Pendel (aus dem Physikunterricht), welches an der horizontalen Achse gespiegelt wurde. Es besitzt somit nicht mehr den Gleichgewichtspunkt $\varphi = 0$, wie in Abbildung 3.4, links dargestellt. Stattdessen ist das Pendel für diesen Arbeitspunkt nun instabil und fällt von diesem Punkt aus in eine Richtung um. Es gibt die Möglichkeit das inverse Pendel durch einen Regler zu stabilisieren und somit für technische Anwendungen verwendbar zu machen. Beispiele hierfür sind Roboter auf zwei Rädern [Lun10] oder eine schwebende Kugel im Magnetfeld [DMOM13].

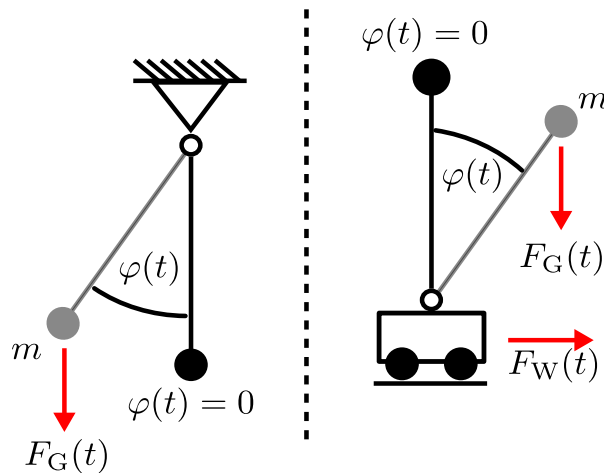


Abbildung 3.4: Mathematisches und mögliches inverses Pendel

Python Simulationsbeispiele 1

- *Animation: inverses Pendel mit freier Bewegung (Darstellung der Instabilität)*

3.2.2 Stabilitätsprüfung anhand des Frequenzgangs

Das vereinfachte Nyquist-Kriterium

Anhand dieses Kriteriums kann durch die Analyse des offenen Regelkreises auf die Stabilität des geschlossenen Regelkreises geschlussfolgert werden. Das vereinfachte Nyquist-Kriterium ist ein Spezialfall des allgemeinen Nyquist Kriteriums und ist nur auf stabile Strecken $G_S(s)$ und resultierende kausale $G_0(s)$ mit maximal zwei enthaltenen I-Gliedern anwendbar. Der offene Regelkreis muss sich folgendermaßen darstellen lassen:

$$G_0(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \tilde{G}_0(s).$$

Mit $\tilde{G}_0(s)$ dem Teil der offenen Kette die kein I-Glied enthält. Da die meisten offenen Regelkreise jedoch diese Anforderung erfüllen, ist dieses zur Betrachtung der Stabilität ausreichend. Das Nyquist-Kriterium nutzt die Ortskurve, um die Gegenkopplungsbedingung der Rückführung im geschlossenen Kreis zu prüfen. Die Gegenkopplungsbedingung besagt vereinfacht, dass das Rückführungssignal der Regelgröße $y(t)$ und der Sollwert bzw. die Führungsgröße $w(t)$ ein am Additionspunkt stationär entgegengesetztes Vorzeichen besitzen müssen. Dies ist aus dem Standardregelkreis (Abbildung 3.2) ersichtlich, da gilt $E(s) = W(s) - Y(s)$ oder im Zeitbereich $e(t) = w(t) - y(t)$.

Die Gegenkopplungsbeziehung kann somit als eine Phasenverschiebung der beiden Signale von 180° zueinander interpretiert werden. Eine weitere Phasenverschiebung führt zu einer Mitkopplung, wenn die Kreisverstärkung $|G_0(j\omega_{180^\circ})| = K_0$ größer als eins ist. Hierdurch wird der Regelkreis instabil. In der Ortskurve lässt sich dieser Zusammenhang an der Umschlingung des Punktes $-1 + j0$ analysieren. Eine Ortskurve, welche diesen Punkt umschlingt, ist in Abbildung 3.5 dargestellt.

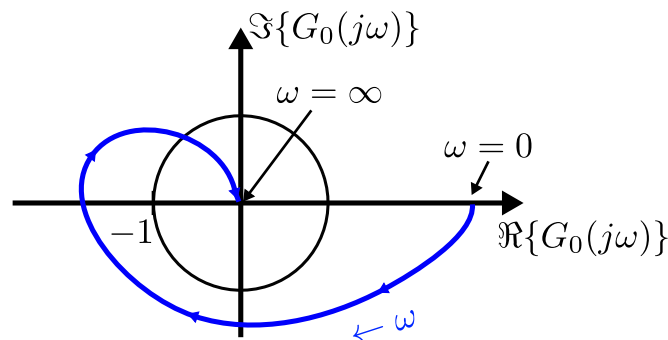


Abbildung 3.5: Grafische Darstellung des vereinfachten Nyquist-Kriteriums für einen instabilen Regelkreis

- **Merke:** Ein Regelkreis ist genau dann stabil, wenn der Punkt $-1 + j0$ im Bereich $0 < \omega < \infty$ von der Ortskurve der offenen Kette $G_0(j\omega)$ weder umschlossen noch durchlaufen wird [Foe94]

Erweiterung auf Regelkreise mit Totzeit

Enthält die offene Kette ein Totzeit-Glied $G_0(s) = \frac{1}{s^2} \tilde{G}_0(s) \cdot e^{-T_t s}$, so kann das Kriterium immer noch angewendet werden. Dies ist eine Stärke des vereinfachten Nyquist-Kriteriums, denn für diesen Fall wäre das Hurwitz-Kriterium nicht mehr anwendbar. Es sollte berücksichtigt werden, dass durch das Totzeit-Glied lediglich die Phase verändert wird, nicht jedoch die Amplitude des Frequenzgangs. Im folgenden sind vier Beispiele für Ortskurven und deren zugehörigen qualitativen Übertragungsfunktionen dargestellt (siehe Abbildung 3.6).

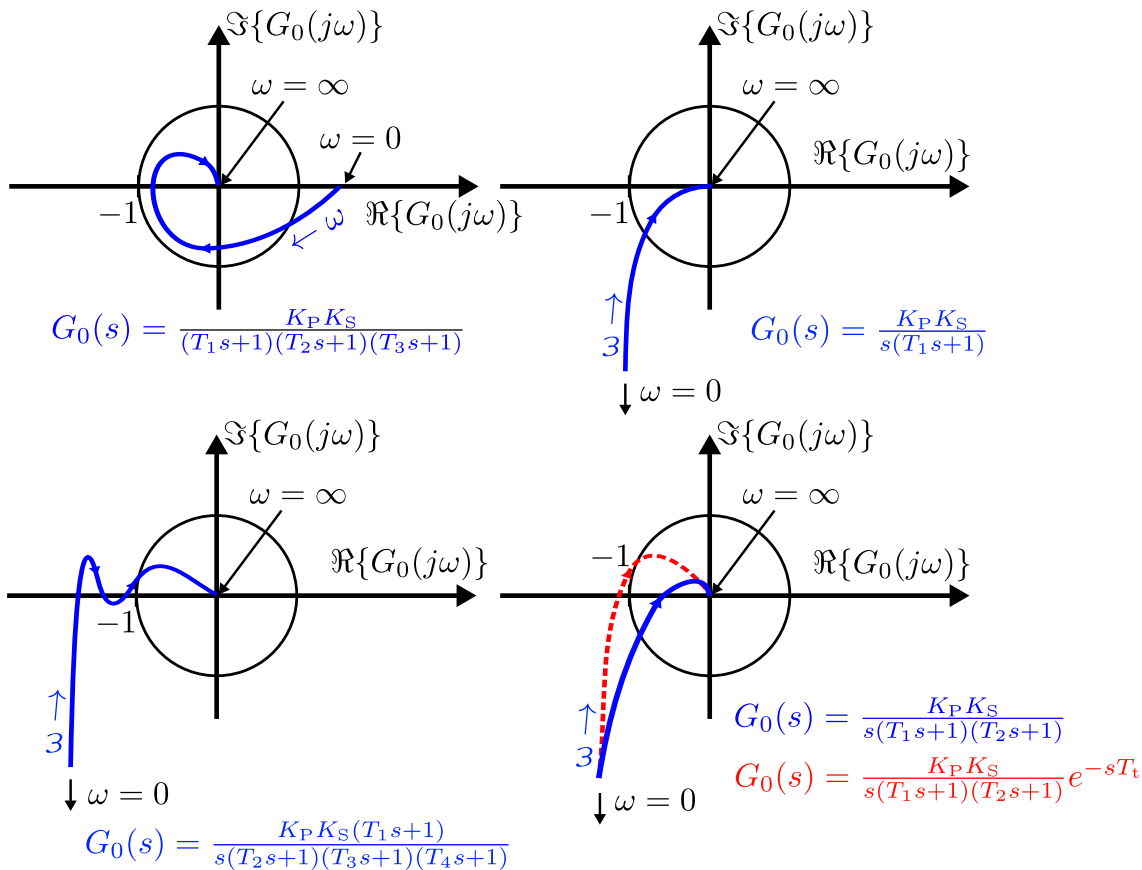


Abbildung 3.6: Beispielhafte Ortskurven für stabile Systeme (oben) und instabile Systeme (unten). Das IT₂T_t-System im unteren rechten Bereich, wird durch eine Totzeit instabil

Zusammenfassung der Stabilitätsanalyse:

- Nur möglich für offene Regelkreise die aus einer stabilen Strecke mit maximal zwei I-Gliedern entstehen
- Totzeitglieder können berücksichtigt werden.
- Umschlingung des Punktes $-1 + j0$ durch die Ortskurve bestimmt die Stabilität des geschlossenen Kreises.
- Für die Auswertung der Ortskurve sind immer rechnergestützte Verfahren notwendig.

Das Phasenrandkriterium

Eine weitere anschauliche Darstellung kann durch den Vergleich von Ortskurve und Frequenzkennlinie erfolgen. Da die Frequenzkennlinie ja genutzt werden kann, um die Ortskurve zu skizzieren, enthält sie alle Informationen für eine Untersuchung der Stabilität. Sie ist jedoch gegenüber der Ortskurve wesentlich einfacher zeichnerisch zu konstruieren. Im folgenden ist die Frequenzkennlinie und die zugehörige Ortskurve nebeneinander

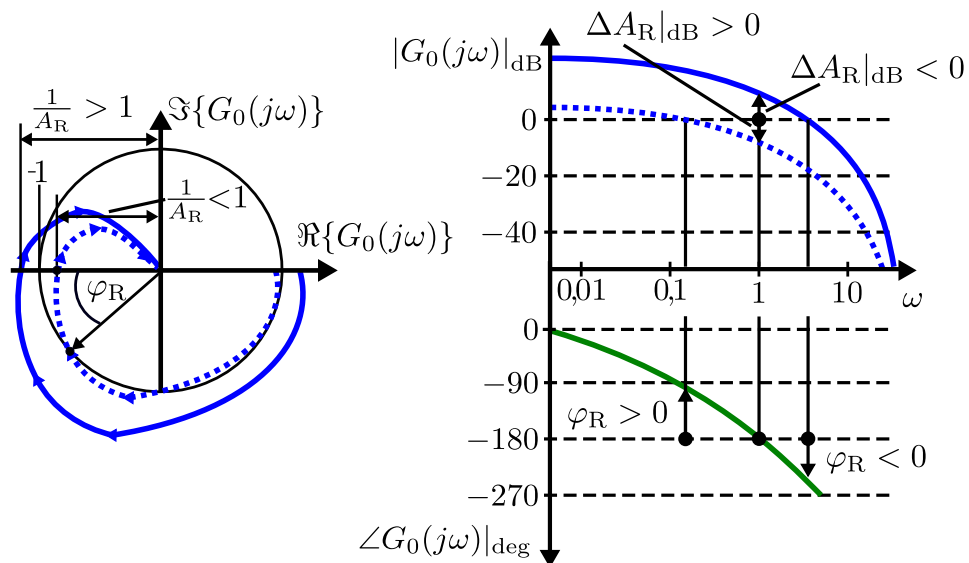


Abbildung 3.7: Phasenrandkriterium und Zusammenhang zwischen Ortskurve und Frequenzkennlinie

dargestellt (siehe Abbildung 3.7). Durch eine Änderung der Reglerverstärkung wird in der Frequenzkennlinie der Amplitudengang nach oben oder unten verschoben (rechter Teil der Abbildung 3.7; gestrichelte blaue Linie), ohne dass sich der Phasengang ändert. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass die Reglerverstärkung lediglich die Ortskurve

skaliert (linker Teil der Abbildung 3.7). Um die Stabilität des geschlossenen Regelkreises anhand der offenen Kette zu untersuchen (was im vorherigen die Umschlingung des Punktes $-1 + j0$ bedeutete) wird nun die Durchtrittskreisfrequenz ω_D verwendet. Sie markiert den Punkt an dem der Betrag des Frequenzgangs gleich eins ist.

$$|G(j\omega_D)| = 1 \quad \text{und} \quad |G(j\omega_D)|_{\text{dB}} = 0$$

Der Regelkreis ist dann stabil, wenn an der Frequenz ω_D die Phase größer als -180° ist. Die Phasendifferenz, bei $|G(j\omega_D)| = 1$ bis zum Erreichen der -180° wird als Phasenrand φ_R bezeichnet.

$$\varphi_R = 180^\circ - |\angle G_0(j\omega_D)|$$

- **Merke:** Ein stabiler offener Regelkreis führt genau dann auf einen E/A-stabilen Regelkreis, wenn an der Durchtrittskreisfrequenz ω_D der Phasenrand positiv ist: $\varphi_R > 0^\circ$.

Grundsätzlich sind die Parameter der zu regelnden Strecke nicht immer konstant und meist auch nicht vollständig bekannt. Es kann somit in der Praxis aufgrund dieser Modellunsicherheiten auch zu einer Instabilität kommen, obwohl der Punkt $-1 + j0$ bei der theoretischen Betrachtung nicht umschlungen wird. Es bietet sich daher an, eine gewisse Reserve zu definieren, die sowohl die Dynamik der Sprungantwort als auch die Robustheit des Regelkreises verbessert. In Abbildung 3.7 ist diese Amplitudenreserve A_R dargestellt. Die Amplitudenreserve beschreibt den Abstand der Ortskurve zum Punkt $-1 + j0$. Da die Amplitudenreserve genau bei -180° abgelesen wird, wird die zugehörige Frequenz auch hier mit ω_{180° bezeichnet. Falls mit der FKL gearbeitet wird, wird sie in dB in Relation zu 0 dB Achse angegeben.

$$\Delta A_R|_{\text{dB}} = 20 \lg \left(\frac{1}{|G_0(j\omega_{180^\circ})|} \right)$$

$$\Delta A_R|_{\text{dB}} = -20 \lg (|G_0(j\omega_{180^\circ})|)$$

Der Regelkreis ist stabil für $A_R > 1$, jedoch wird in der Praxis meist mit dem Wert $A_R > 2$ gearbeitet. Auch bezogen auf die Phasenreserve ist der Regelkreis für $\varphi_R > 0^\circ$ stabil, jedoch wird er für gutes Störverhalten meist auf $\varphi_R = 30^\circ$ bzw. für Führungsverhalten auf $\varphi_R = 60^\circ$ ausgelegt.

Zusammenfassung der Stabilitätsanalyse:

- Nur möglich für offene Regelkreise die aus einer stabilen Strecke mit maximal zwei I-Gliedern entstehen.
- Totzeitglieder können berücksichtigt werden.
- Phasenreserve muss größer als 0° sein.
- Die Auswertung der Stabilität anhand der Frequenzkennlinie kann qualitativ ohne Rechner erfolgen (Approximation durch Asymptoten).

Octave Simulationsbeispiele 5

- *Beispiele für stabile und instabile Systeme*

Aufgaben zum Selbststudium 4

- Zeichnen Sie die Reihenschaltung eines PT_1 Glieds und eines Totzeitglieds in der Ortskurve.
- Wie verändert sich die Ortskurve für verschiedene Werte von T_t ?
- Welche Grundidee steckt hinter dem Hurwitz-Kriterium?
- Identifizieren Sie aus der Literatur weitere instabile Systeme!

4 Entwurf der Regelung

Der Regelungsentwurf bzw. auch Reglersynthese genannt, beschäftigt sich nun mit der Frage wie der Regler für eine gegebene Strecke entworfen werden kann. Hierfür werden zunächst die Forderungen quantifiziert und danach geeignete Methoden ausgewählt, mit denen die Regler Parameter entsprechend ermittelt werden können.

4.1 Forderungen an den geschlossenen Regelkreis

Ein Regelkreis wird nach vier Gesichtspunkten ausgelegt [MSF05, Lun10]

- Stabilität des geschlossenen Regelkreises
- Sollwertfolge und Störunterdrückung
- Dynamikanforderungen an den Regelkreis
- Robustheit des Regelkreises

Im Weiteren werden die genannten Anforderungen an den Regelkreis erläutert.

Stabilität des geschlossenen Regelkreises

Als Grundsatz gilt, dass der geschlossene Regelkreis stabil sein muss. Dies bedeutet, dass er bei einer Anregung von außen (Sollwertsprung, Störgröße) nur endliche Ausgangssignale erzeugt. Mathematisch bedeutet dies, dass die harmonischen und partikulären Lösungen der Differenzialgleichung Realteile $\Re\{\lambda_i\} < 0$ besitzen und somit das Einschwingverhalten stabil ist und abklingt. Für $t \rightarrow \infty$ geht das Ausgangsverhalten auf das stationäre Verhalten des Regelkreises über. Für die Analyse des geschlossenen Regelkreises existieren grundsätzlich zwei Stabilitätsbegriffe:

- **Asymptotische Stabilität:** Ein geschlossener Regelkreis wird als asymptotisch stabil bezeichnet, wenn alle Polstellen einen negativen Realteil besitzen.

$$\Re\{\lambda_i\} < 0, \forall \lambda_i \in \mathcal{N} \quad (4.1)$$

- **Eingangs/Ausgangs Stabilität:** Der geschlossene Regelkreis wird als E/A-Stabil bezeichnet, wenn das Integral der Gewichtsfunktion nicht gegen ∞ strebt.

$$\int_0^\infty |g(t)| dt < \infty \quad (4.2)$$

Dies ist für Eingrößensysteme jedoch meist gleichbedeutend mit der asymptotischen Stabilität.

Sollwertfolge und Störunterdrückung

Um Sollwertfolge im geschlossenen Regelkreis zu sichern, muss der Regelkreis zunächst stabil sein. Im Weiteren wird gefordert, dass die Regelgröße $y(t)$ der Führungsgröße $w(t)$ asymptotisch folgt. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{(w(t) - y(t))}_{e(t)} = 0.$$

Für diese Forderung muss allerdings bekannt sein, für welche Art von Signalen (sprungförmig, rampenförmig, parabelförmig) der Regelkreis ausgelegt werden soll, wie bereits in Kapitel 1.4.1 angesprochen. In der Praxis ist die Auslegung auf sprunghörmige Führungs- und Störsingale üblich, da sie eine breite Klasse von Signalen abdeckt. Man spricht auch davon, dass der Regelkreis keine bleibende Regelabweichung besitzt

$$e(t \rightarrow \infty) = 0$$

bzw. stationär genau ist. Es ist interessant zu erwähnen, dass diese Eigenschaft nur von der strukturellen Auswahl des Reglers abhängt (Reglertyp), jedoch nicht von den Parametern des Reglers [Lun10].

Dynamikanforderungen an den Regelkreis

Die Dynamikanforderungen an den Regelkreis legen fest, wie schnell der Regelkreis den Sollwert erreichen soll oder wie er auf ein Störsignal reagieren darf. Diese Anforderungen werden oft in Bezug auf die Größe der Führungs- und Störsignale formuliert (als normierte Größen). Die Führungsprungantwort $h_W(t)$ des geschlossenen Regelkreises ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Es können Vorgaben für gewisse Zeitwerte der Antwort, nämlich die Anstiegszeit T_A (90% des stationären Endwerts) und die Überschwingzeit $T_{\bar{U}}$ (Auf-treten der höchsten Überschwingung) bestehen. In gewissen Fällen kann es sinnvoll sein, auch eine Beruhigungszeit T_B festzulegen, die angibt, ab wann die Sprungantwort einen gewissen Wertbereich um den Sollwert nicht mehr verlässt. Nicht immer ist es zwingend notwendig $w(t) - y(t) = 0$ zu fordern und so kann in manchen Fällen auch eine bleibende

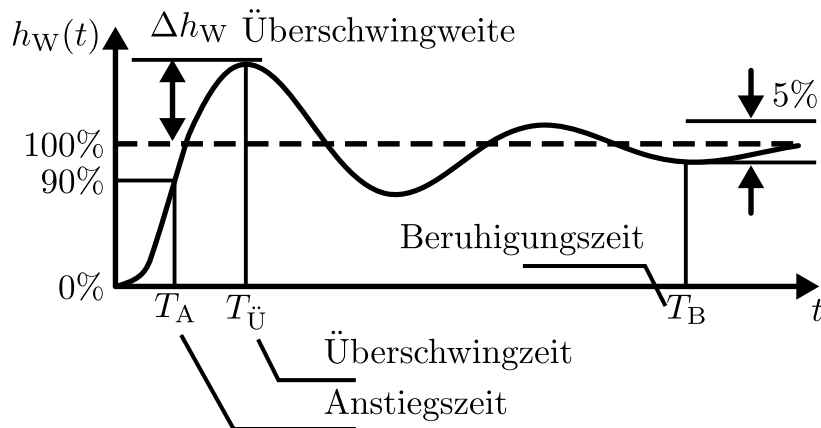


Abbildung 4.1: Führungssprungantwort des geschlossenen Regelkreises [Lun10]

Regelabweichung zulässig sein. Jedoch wird auch gleichzeitig gefordert, dass Störgrößen ausgeregelt werden. Auch für diesen Fall gibt es Anforderungen hinsichtlich der Dynamik und des Überschwings der Störsprungantwort $h_Z(t)$, siehe Abbildung 4.2. Der Regel-

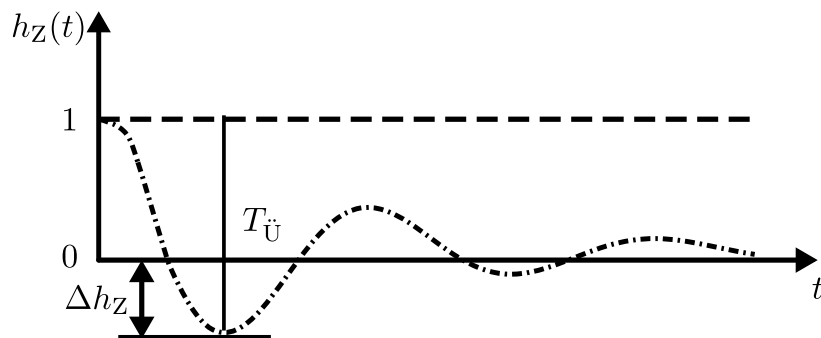


Abbildung 4.2: Störgrößensprungantwort des geschlossenen Regelkreises [Lun10]

kreis unterdrückt die sprungförmige Störung, welche zum Zeitpunkt $t = 0$ auftritt, mit einem gewissen zeitlichen Verhalten. Dies bedeutet, dass für $t \rightarrow \infty$ die Wirkung der Störung auf den Regelkreis vollständig ausgeregelt wird.

Python Simulationsbeispiele 2

- *Inverses Pendel mit geregelter Bewegung*

Robustheit des Regelkreises

Die Robustheit eines Regelkreises beschäftigt sich mit der Frage: Wie verhält sich der Regelkreis, wenn das Modell der Strecke nicht genau genug ist? Wenn z.B. das Stre-

ckenmodell aus der Vereinfachung eines sehr komplexen Modells entstanden ist. Oder wenn sich die Parameter der Strecke mit der Zeit ändern? All diese Unsicherheiten kann man in Modellunsicherheiten oder Modellunbestimmtheiten zusammenfassen [Lun10]. Die Robustheit des Regelkreises wird in dieser Vorlesung nicht weiter berücksichtigt. Es soll nur so viel angemerkt werden, dass stationär genaue Regelkreise immer ein gewisses Maß an Robustheit gegenüber Unsicherheiten besitzen, was nicht zuletzt am Rückführungsprinzip des geschlossenen Regelkreises liegt.

4.2 Standard Reglertypen

4.2.1 P-Regler

Der P-Regler stellt den grundlegendsten Reglertyp dar. Er ist sehr einfach zu realisieren, hat keine verzögernde Eigenschaft, kann aber je nach Streckentyp nicht ausreichend sein, um alle Anforderungen an den Regelkreis zu erfüllen. So ist es nur mit hoher Reglerverstärkung möglich die Regeldifferenz e_∞ , bei proportional wirkenden Strecken auszuregeln. In manchen Fällen kann eine bleibende Regeldifferenz in Kauf genommen werden, z.B. wenn ein übergeordneter Regelkreis diese Aufgabe übernimmt. Ein Beispiel hierfür ist die Drehmomentenregelung von elektrischen Maschinen. Hier sorgt eine überlagerte Drehzahlregelung für die stationäre Genauigkeit.

- Übertragungsfunktion

$$G_R(s) = K_p$$

- Idealisierte Sprungantwort → siehe Kapitel 2, Abbildung ??
- Symbol bzw. Blockschaltbild

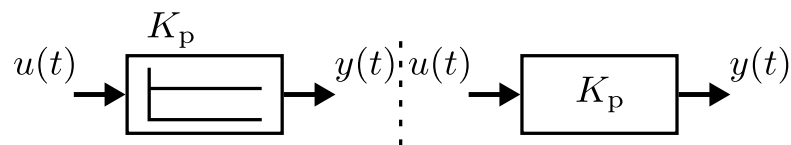


Abbildung 4.3: Symbol, Blockschaltbild des P-Reglers

4.2.2 PI-Regler

Der meistgenutzte Regler in der klassischen Regelungstechnik ist der PI-Regler. Er vereint die Eigenschaften eines I-Gliedes und eines P-Gliedes und sorgt somit auch bei proportional wirkenden Strecken für stationäre Genauigkeit (vgl. Kapitel 3.1). Zudem kann

durch die Nullstelle des Reglers eine Streckenzeitkonstante gekürzt werden, wodurch langsame dominante Polstelle kompensiert werden können. Dies bietet einen Freiheitsgrad für die Erfüllung der Dynamikanforderungen.

- Übertragungsfunktion

$$G_R(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

$$G_R(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_N s} \right), \quad T_N = \frac{K_P}{K_I}$$

- Struktur des Reglers, mit der Nachstellzeit T_N und der Verstärkung K_P . Die Nachstellzeit gibt an, wie lange der I-Anteil des Reglers benötigt, um die gleiche Stellgröße wie der P-Anteil zu erzeugen.

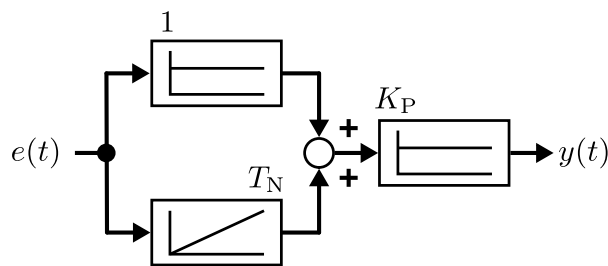


Abbildung 4.4: Parallelstruktur des PI-Reglers

- Idealisierte Sprungantwort auf einen Regeldifferenzsprung $e_0 \sigma(t)$

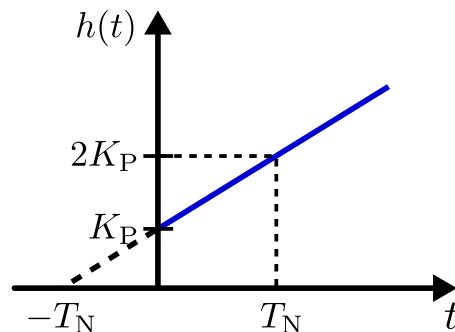


Abbildung 4.5: Sprungantwort des PI-Reglers auf einen Regeldifferenzsprung

- Symbol bzw. Blockschaltbild

Beispiele zum Nachlesen 8

- *Stellgrößenbeschränkung (Anti-Windup) für Regler mit I-Anteil*

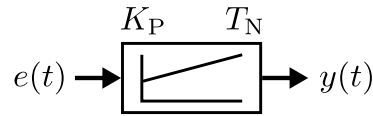


Abbildung 4.6: Blockschaltbild des PI-Reglers

4.2.3 PID-Regler

Der PID-Regler wird bei schwingungsfähigen Strecken eingesetzt, da die Nullstellen auch konjugiert komplex ausgelegt werden können und somit das Stecken verhalten teilweise kompensiert werden kann (durch geschicktes kürzen der Pole). Zudem werden sie eingesetzt wenn es hohe Anforderungen an die Dynamik des Regelkreises gibt, da sämtliche langsame Pole eliminiert werden können.

- Übertragungsfunktion

$$G_R(s) = K_P + \frac{(1 + T_N s)(1 + T_V s)}{T_N s}$$

$$G_R(s) = K_P \left(\frac{T_N + T_V}{T_N} + \frac{1}{T_N s} + T_V s \right), \quad T_V = \text{Vorhaltezeit}$$

- Struktur des Reglers, mit der zusätzlichen Vorhaltezeit T_V .

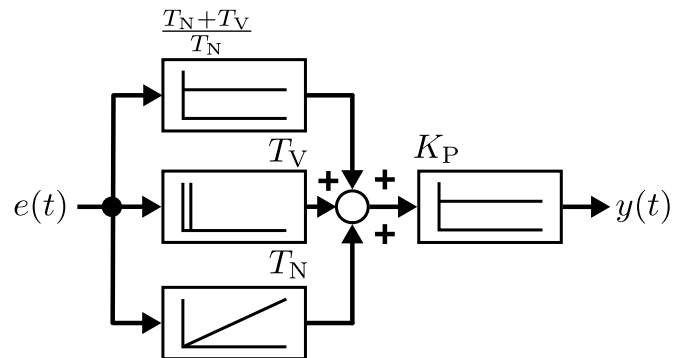


Abbildung 4.7: Parallelstruktur des PID-Reglers

- Idealisierte Sprungantwort auf einen Regeldifferenzsprung $e_0 \sigma(t)$
- Symbol bzw. Blockschaltbild

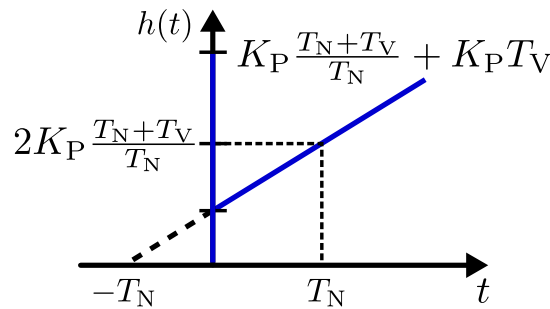


Abbildung 4.8: Sprungantwort des PID-Reglers auf einen Regeldifferenzsprung

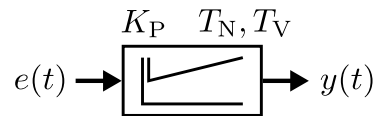


Abbildung 4.9: Blockschaltbild des PID-Reglers

4.2.4 Technisch realisierbarer PID-Regler

Das reine Differenzierglied des idealen PID-Reglers ist technisch nicht realisierbar, deshalb wird meist ein DT_1 -Glieder verwendet. Die Übertragungsfunktion in Parallelstruktur ergibt sich für diesen Fall zu

- Übertragungsfunktion

$$G_R(s) = K_P \left(\frac{T_N + T_V}{T_N} + \frac{1}{T_N s} + \frac{T_V s}{(T_1 s + 1)} \right), \quad T_1 = \text{Zeitkonstante}$$

- Struktur des Reglers, mit der zusätzlichen Zeitkonstante T_1 .

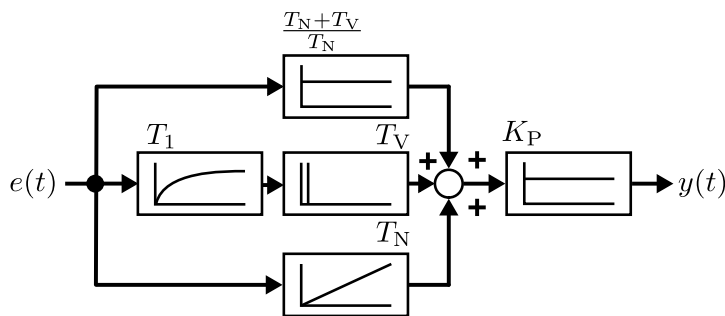


Abbildung 4.10: Parallelstruktur des PID-Reglers

- Idealisierte Sprungantwort auf einen Regeldifferenzsprung $e_0 \sigma(t)$
- Symbol bzw. Blockschaltbild

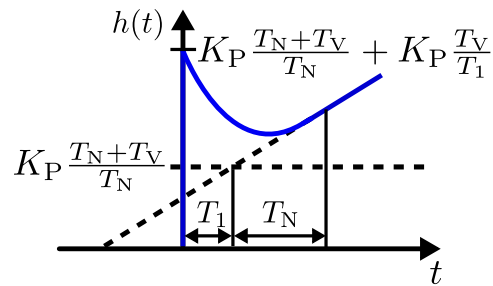


Abbildung 4.11: Sprungantwort des realen PID-Reglers auf einen Regeldifferenzsprung

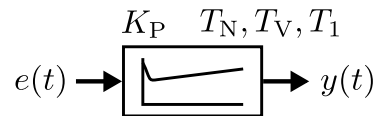


Abbildung 4.12: Blockschaltbild des realen PID-Reglers

4.3 Entwurfsverfahren für einschleifige Regelkreise

Für einschleifige Regelkreise – Das sind Strukturen in denen es nur eine Regelgröße und eine Stellgröße gibt – existieren eine Reihe von Entwurfsverfahren, um die Parameter des Reglers zu bestimmen, sodass der geschlossene Regelkreise vorgegebenes Verhalten nach Kapitel 4.1 besitzt. Hierfür ist es nicht immer notwendig die Streckenparameter vollständig zu kennen, wie im weiteren Verlauf des Kapitels ersichtlich werden wird.

4.3.1 Regler Entwurf mittels Einstellregeln

Es existieren viele Einstellregeln für Standartregler (P-, PI-, PID-Regler), welche durch praktische Versuche an realen System entwickelt wurden. Die Beiden bekanntesten Vertreter sind jedoch das Verfahren von Ziegler-Nichols und dessen Weiterentwicklung nach Chien, Hrones und Reswick [Foe94, MSF05, Lun10]. Die Beiden Verfahren können auf stabile, träge Regelstrecken ohne I-Anteil und mit Totzeit angewendet werden. Im folgenden werden zwei Ausprägungen vorgestellt, wobei zunächst das Verfahren der kritischen Verstärkung gewählt wird.

Bestimmung der Reglerparameter bei unbekannten Strecken nach Ziegler-Nichols

Die zu regelnde Strecke wird mit einem P-Regler geschlossen und die Verstärkung K_P des Regler so lange erhöht, bis eine Dauerschwingung auftritt, wie in Abbildung 4.13 dargestellt. Der Verstärkungswert des Reglers an diesem Punkt wird als kritische Ver-

stärkung $K_{\text{Krit.}}$ bezeichnet. Es sei zu erwähnen, dass diese Vorgehensweise nur bei Stre-

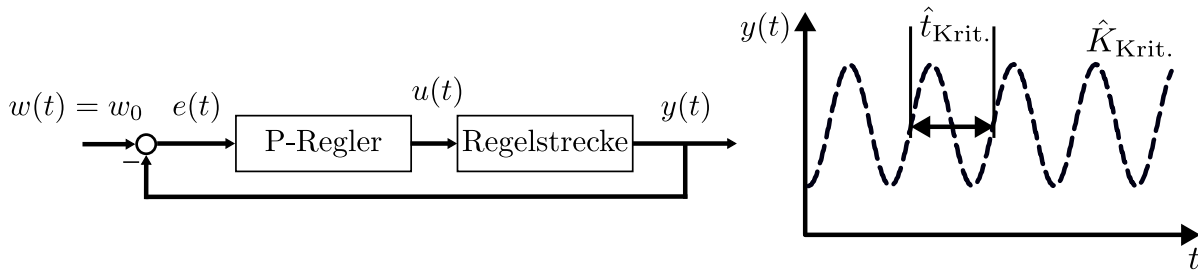


Abbildung 4.13: Dauerschwingung des geschlossenen Regelkreises an der kritischen Reglerverstärkung $K_{\text{Krit.}}$.

cken geeignet ist, die zumindest kurzfristig an der Stabilitätsgrenze betrieben werden können [Lun10]. Ist die kritische Verstärkung bestimmt, so kann über die Einstellregeln der Regler ausgelegt werden, wie in Tabelle 4.1 dargestellt. Dieser Teil des Verfahrens ist für Führungsverhalten optimiert, wobei ein leicht schwingendes Verhalten der Führungssprungantwort zu erwarten ist.

Tabelle 4.1: Einstellregeln nach Ziegler-Nichols für Streckenparameter mittels kritischer Verstärkung

Regler	K_P	T_N	T_V
P	$0.5 K_{\text{Krit.}}$	-	-
PI	$0.45 K_{\text{Krit.}}$	$0.85 \hat{t}_{\text{Krit.}}$	-
PID	$0.6 K_{\text{Krit.}}$	$0.5 \hat{t}_{\text{Krit.}}$	$0.12 \hat{t}_{\text{Krit.}}$

Entwurf bei vorheriger experimenteller Bestimmung einiger Streckenparameter

In diesem Fall wird eine experimentelle Bestimmung der Streckenparametern mittels Wendetangentenverfahren (Abbildung 4.14) vorgenommen und danach die Parameter des Reglers aus diesen experimentell bestimmten Werten berechnet. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Regelstrecke durch ein zeitliches Verhalten der folgenden Form approximiert werden kann:

$$G_S(s) \approx \frac{K_S}{(1 + T_N s)} e^{-s T_t}$$

Die Parameter des Wendetangentenverfahrens entsprechen $T = \hat{t}_g$ und $T_t = \hat{t}_u$. Es können auch andere in Kapitel ?? vorgestellte Verfahren eingesetzt werden, um die

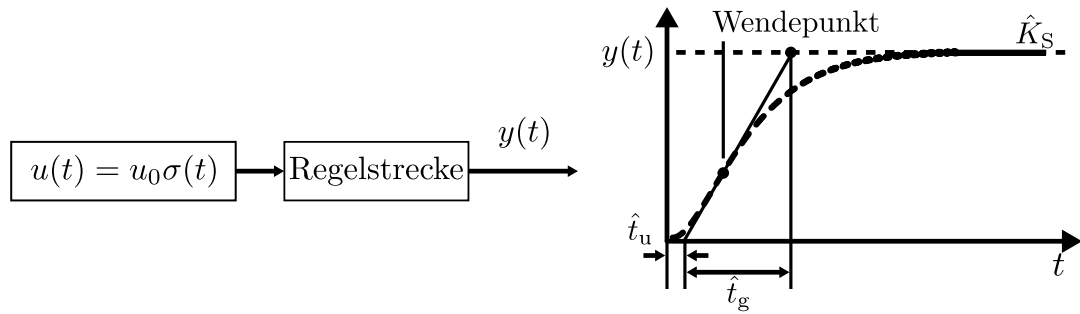


Abbildung 4.14: Sprungantwort eines PT_N -Glieds und die zu schätzenden Parameter [Foe94]

Tabelle 4.2: Einstellregeln nach Ziegler-Nichols für Streckenparameter nach Sprungantwort

Regler	K_P	T_N	T_V
P	$\frac{\hat{t}_g}{\hat{K}_S \hat{t}_u}$	-	-
PI	$0.9 \frac{\hat{t}_g}{\hat{K}_S \hat{t}_u}$	$3.3 \hat{t}_u$	-
PID	$1.2 \frac{\hat{t}_g}{\hat{K}_S \hat{t}_u}$	$2 \hat{t}_u$	$0.5 \hat{t}_u$

Parameter zu bestimmen. Dieser Teil des Verfahrens ist für Störverhalten optimiert und besitzt eine Dämpfung $0.2 < d < 0.3$. Es bleibt zu erwähnen, dass dieses Verfahren auch dann angewendet werden, wenn die Strecke nicht an der Stabilitätsgrenze betrieben werden darf.

- Vorteile:
 - Sehr einfach umsetzbar.
 - Regelstrecke muss nicht vollständig bzw. gar nicht bekannt sein.
 - Vollständig Systematischer Entwurf.
- Nachteile:
 - Nur für Regelkreise geeignet die keine hohen Dynamikanforderungen haben.
 - Die Regelstrecke muss an der Systemgrenze (Grenzstabilität) betrieben werden können, falls keine Messungen erfolgen können.
 - Die Regelstrecke darf keinen I-Anteil enthalten.
 - Nur für Standardregler geeignet.

4.3.2 Reglerentwurf am Pol- / Nullstellendiagramm (Wurzelortskurve)

Beim Wurzelortskurvenverfahren wird die Lage des dominierenden Polpaars des geschlossenen Regelkreises aus den Dynamikanforderungen berechnet. Danach wird mittels verschiedener Entwurfsregeln versucht, einen Regler zu finden, mit dem diese Lage erreicht werden kann. Der Entwurf selbst erfolgt vollständig im Pol-Nullstellen Diagramm und schließt von der Lage der Pole des offenen Regelkreises und der Wurzelorte, die sich durch Variation der Reglerverstärkung ausbilden, auf das dominante Polpaar des geschlossenen Regelkreises.

Zunächst werden die Dynamikanforderungen an den geschlossenen Regelkreis quantifiziert. Hierfür wird angenommen, dass die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$ durch ein PT₂-Glied approximiert werden kann.

$$\begin{aligned} G_W(s) &\approx \frac{1}{(T^2 s^2 + 2dT s + 1)} \\ &\approx \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2} \end{aligned}$$

Für diese Übertragungsfunktion kann nun eine approximierte Führungssprungantwort der Form

$$h_W(t) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} \cdot e^{-d\omega_0 t} \cdot \sin\left(\left(\omega_0 \sqrt{1-d^2}\right) t + \arccos(d)\right)$$

abgeleitet werden. Die Parameter dieser Sprungantwort, die in Abbildung 4.1 eingeführt wurden, lassen sich aus den folgenden Gleichungen bestimmen

$$\text{Dämpfungsgerade} \rightarrow \cos(\varphi_d) = d$$

$$\text{Überschwingweite} \rightarrow \Delta h_W = e^{-\frac{\pi d}{\sqrt{1-d^2}}} = e^{-\pi \cot(\varphi_d)}$$

$$\text{Überschwingzeit} \rightarrow T_{\ddot{U}} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-d^2}} = \frac{\pi}{\omega_e}$$

$$\text{Beruhigungszeit 5 \% um den Endwert} \rightarrow T_{5\%} \approx \frac{3}{\omega_0 d}.$$

Die genannten Parameter werden nun in eine Pollage im PN-Diagramm übersetzt (siehe Abbildung 4.15) und ergeben einen Bereich in dem sich die Pole des geschlossenen Regelkreises befinden sollen. Hierbei sollte darauf geachtet werden, dass ein Bereich ausgewählt wird in welchem das Zeitverhalten liegen darf. Beispielsweise eine minimale und maximale Überschwingzeit bzw. Überschwingweite, denn der exakte Entwurf für ein definiertes Polpaar ist nur in Sonderfällen möglich. Danach wird der Entwurf durchgeführt. Hierfür wird ein geeigneter Regler ausgewählt und dessen Nullstellen und Pole so platziert,

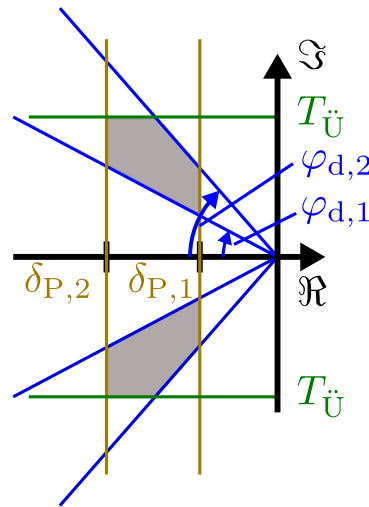


Abbildung 4.15: Bestimmung der Polage des geschlossenen Regelkreises im PN-Diagramm

dass die gewünschte Polage des geschlossenen Regelkreises bestmöglich erreicht werden kann. Für die Konstruktion der Wurzelortskurve nutzt man die Information aus der charakteristischen Gleichung

$$F_0(s) = 1 + G_R(s)G_S(s) = 1 + G_0(s)$$

$$F_0(s) = 1 + K\tilde{G}_R(s)G_S(s) = 1 + K\tilde{G}_0(s)$$

Welche die Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises eindeutig beschreiben. Denn die Lösungen (Wurzelorte) der Gleichung $1 + K\tilde{G}_0(s) = 0$ ergeben die Pole des geschlossenen Regelkreises. Durch den Verstärkungsfaktor K , welcher dem Regler beigemessen wird, kann folglich die Lage der Pole verändert werden. Rein rechnerisch erfüllen die Wurzelorte im PN-Diagramm folgende Gleichung

$$K \frac{\prod_{i=1}^q (s - s_{N,i})}{\prod_{i=1}^n (s - s_{P,i})} = -1$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich die wesentlichen Konstruktionsregeln, welche in dieser Vorlesung jedoch nicht weiter untersucht werden sollen. Vielmehr soll ein Augenmerk auf die anschauliche Erläuterung des Verlaufs der Wurzelortskurve gelegt werden. Dieser kann folgendermaßen erläutert werden:

- Die Wurzelorte (Polagen des geschlossenen Regelkreises) starten für die Verstär-

kung $K = 0$ in den Polen des offenen Regelkreises, denn

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + K\hat{G}_0(s) = 1 + K\frac{\hat{Z}_0(s)}{\hat{N}_0(s)} \\ &= \hat{N}_0(s) + K(\rightarrow 0)\hat{Z}_0(s) \\ &= \hat{N}_0(s) \end{aligned}$$

- Wird die Verstärkung erhöht verschieben sich die Pole, bis sie für eine unendlich große Verstärkung $K \rightarrow \infty$ entweder in den Nullstellen des offenen Regelkreises (bei gleicher Anzahl von Polen und Nullstellen) oder im unendlichen. Meist gibt es eine geringere Anzahl Nullstellen, sodass q Äste der Wurzelortskurve in Nullstellen und $n - q$ Äste im unendlichen enden.

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + K\hat{G}_0(s) = 1 + K\frac{\hat{Z}_0(s)}{\hat{N}_0(s)} \\ \text{bei } n = q &= \hat{N}_0(s) + K(\rightarrow \infty)\hat{Z}_0(s) \\ &= \hat{Z}_0(s) \\ \text{oder ohne Nullstellen} &= \hat{N}_0(s) + K(\rightarrow \infty), \quad \text{denn } \hat{Z}_0(s) = 1 \\ &= \hat{N}_0(s) + \infty \end{aligned}$$

Für die Konstruktion der Wurzelortskurve sind zudem die Asymptoten wichtig, welche wie beim Bodediagramm den ungefähren Verlauf bestimmen lassen. Dieser ergeben sich je nach Anzahl der Pole und Nullstellen, denn jeder Polüberschuss bildet eine Asymptote aus. Im folgenden sind beispielhaft (siehe Abbildung 4.16) Übertragungsfunktionen offener Ketten und deren zugehörige Wurzelortskurve eingezeichnet. Beim allgemeinen Entwurf geht man wie folgt vor:

- Bestimmung der Parameter des geschlossenen Regelkreises bzw. der Führungssprungantwort aus den Dynamikanforderungen.
- Einzeichnen der ungefähren Pollage in das PN-Diagramm.
- Einzeichnen der Pole der Regelstrecke $G_S(s)$ in das PN-Diagramm.
- Festlegung des Reglers, sodass die Wurzelorte für die gewünschte Pollage des geschlossenen Regelkreises über eine Veränderung der Reglerverstärkung erreicht werden können.
- Vorteile:
 - Sehr anschaulich.
 - Grafische Bestimmung der Wurzelorte nicht aufwendig.

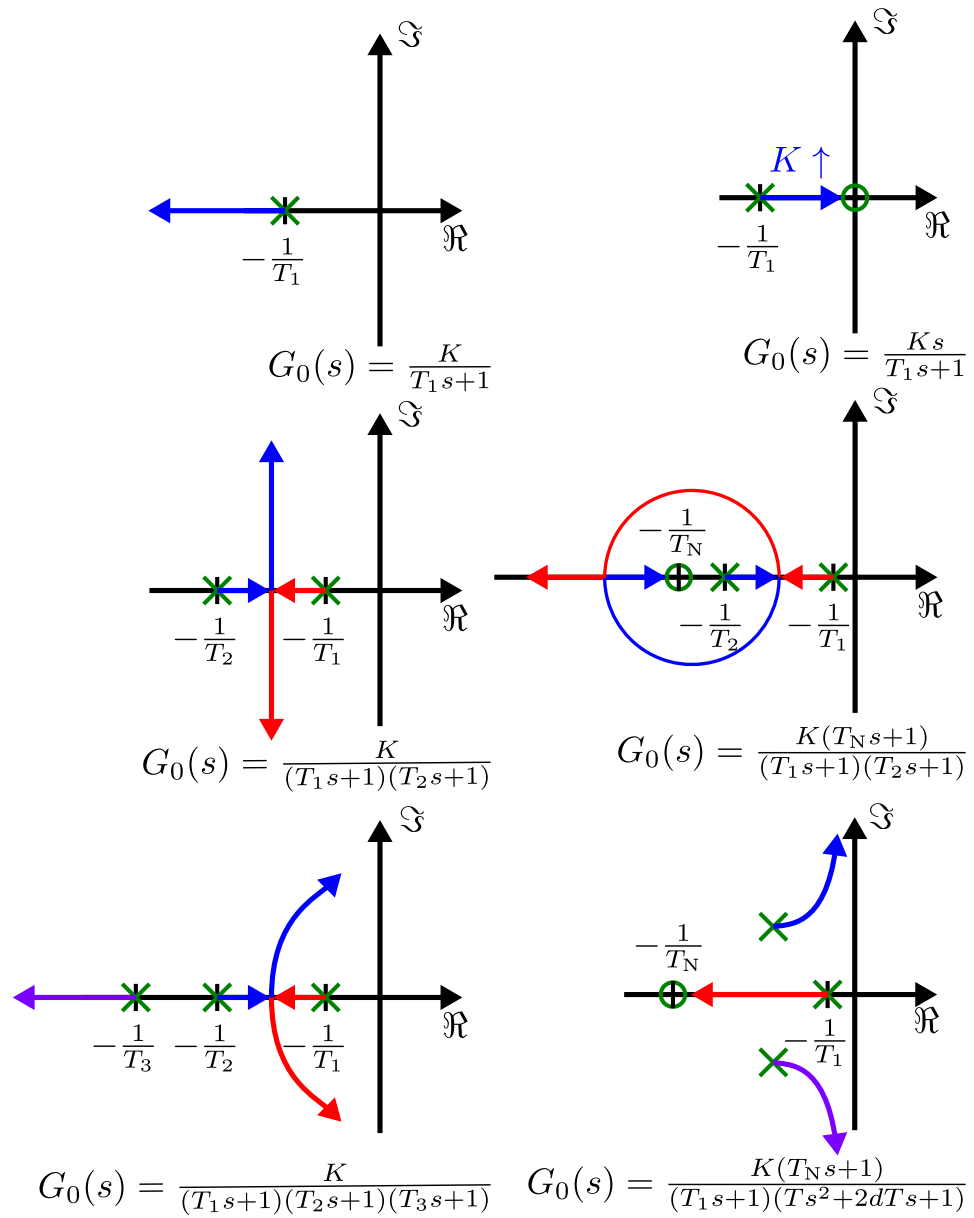


Abbildung 4.16: Verlauf von Wurzelortskurven für verschiedene Übertragungsfunktionen $G_0(s)$

- Computergestützte Werkzeuge für die analytische Bestimmung der Wurzelorte vorhanden.
- Nachteile:
 - Nur qualitative Auslegung des Regelkreises möglich.
 - Strecken mit Totzeit lassen sich nur schwer auslegen, Totzeitglied muss approximiert werden.
 - Kein systematischer Entwurfsweg möglich, benötigt Erfahrung.

4.3.3 Reglerentwurf an der Frequenzkennlinie

Eine weitere Möglichkeit den Regelkreis zu entwerfen, bietet das Verfahren der Frequenzkennlinie. Bei diesem Verfahren wird wie bereits bei vorherigen Kapitel wiederum der geschlossene Regelkreis als ein schwingungsfähiges PT2-Glied approximiert

$$G_W(s) \approx \frac{1}{(T^2 s^2 + 2dT s + 1)}$$

Rechnet man nun von dieser Führungsübertragungsfunktion auf die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises zurück erhält man

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \frac{G_W(s)}{1 - G_W(s)} \approx \frac{1}{T_1 s (T_1 s + 1)} \\ T_1 &= 2dT = \frac{2d}{\omega_0}, \quad T_1 = \frac{T}{2d} = \frac{1}{2d\omega_0}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Diese Formulierung zeigt, dass der offene Regelkreis $G_0(s)$ für die approximierte Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ als IT₁-Glied dargestellt werden kann. Ziel des Entwurfs ist es, für eine beliebig geartete Strecke $G_S(s)$ einen Regler $G_R(s)$ zu finden, mit dem $G_0(s)$ ein IT₁-Verhalten besitzt. Werden nun noch die allgemeinen Forderungen für Sollwertfolge, Dynamik und Stabilität hinzugefügt, ergeben sich klare Regeln für die Ausgestaltung des Verlaufs der Frequenzkennlinie, wie in Abbildung 4.17 dargestellt. Hierbei wird die Frequenzkennlinie in drei charakteristische Bereiche unterteilt:

Unterer Frequenzbereich: In diesem Bereich soll $|G_0(j\omega)|_{\text{dB}}$ möglichst groß sein. Dies entspricht der Forderung, dass $G_W(s) \approx 1$. Denn die 1 im Nenner der Führungsübertragungsfunktion wird dann ausgeblendet. Dieser Bereich ist für das stationäre Verhalten maßgeblich. Gekennzeichnet ist dieser Bereich durch eine Phasenlage $\leq -90^\circ$, D.h. der Bereich in dem die Zeitkonstante T_1 noch keine Auswirkung auf die Phasenlage hat.

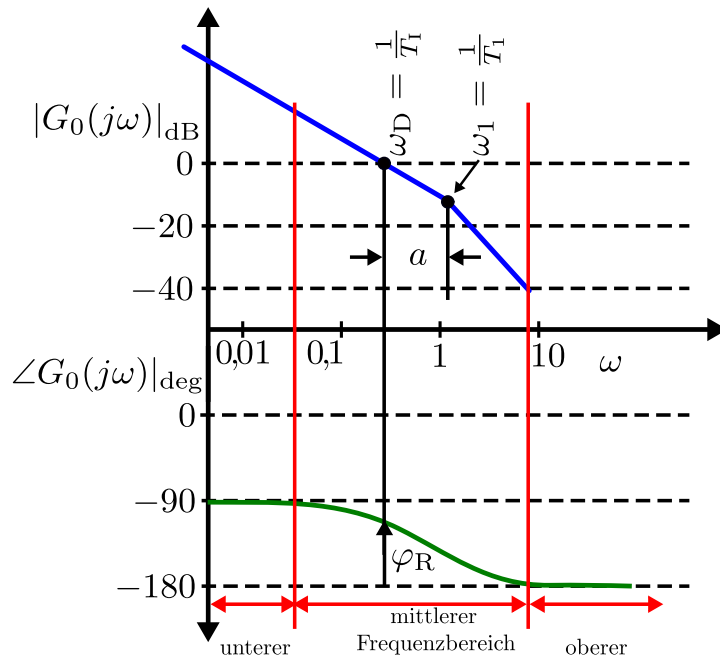


Abbildung 4.17: Verlauf des approximierten Frequenzgangs der offenen Kette

Mittlerer Frequenzbereich: In diesem Frequenzbereich soll die Durchtrittskreisfrequenz ω_D liegen und die zugehörige Phasenreserve φ_R zumindest positiv sein. Der mittlere Frequenzbereich erstreckt sich ca. zwischen $\omega = \{0.5\omega_D, \dots, 2\omega_D\}$. Im besten Fall ist die Steigung der offenen Kette in diesem Bereich nicht größer als $-20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek.}}$. Dieser Bereich legt das dynamische Verhalten des Regelkreises fest.

Oberer Frequenzbereich: Für große Frequenzen hingegen soll die Frequenzkennlinie sowohl sehr steil verlaufen mind. $-40 \frac{\text{dB}}{\text{Dek.}}$, als auch kleine Amplitudenwerte aufweisen um hochfrequente Störung bestmöglich zu unterdrücken. Somit beeinflusst dieser Bereich wesentlich das Störverhalten des geschlossenen Regelkreises. Zudem soll in diesem Bereich die Phase bereits auf -180° abgesunken sein.

Der Abstand a der beiden Zeitkonstanten hat maßgeblichen Einfluss auf die Überschwingweite Δh_W . Dies kann genutzt werden, um die Anzahl der Freiheitsgrade zu reduzieren und somit die Auswahl eines geeigneten Reglers zu erleichtern. Wird nun Gleichung 4.3 mit dem Parameter a ergänzt ergibt sich die Darstellung

$$G_0(s) \approx \frac{1}{aT_1s(T_1s + 1)}. \quad (4.4)$$

Diese bildet die Grundlage für das allgemeine Entwurfsverfahren. Es ergeben sich folgende Zusammenhänge für die bereits beim Wurzelortskurvenverfahren (Kapitel 4.3.2)

eingeführten Parameter der Führungssprungantwort:

$$\text{Knickpunkt Abstand} \rightarrow a = 4 \frac{(\ln \Delta h_W)^2}{\pi^2 + (\ln \Delta h_W)^2}$$

$$\text{Exakte Dämpfung} \rightarrow d = \frac{\sqrt{a}}{2}$$

$$\text{Dämpfung am Phasenrand} \rightarrow d \approx \frac{\varphi_d}{100^\circ}$$

$$\text{Überschwingzeit} \rightarrow T_{\ddot{u}} \approx \frac{\pi}{\omega_D}$$

$$\text{Beruhigungszeit 5 \% um den Endwert} \rightarrow T_{5\%} \approx 6T_1.$$

Beim allgemeinen Entwurf geht man wie folgt vor:

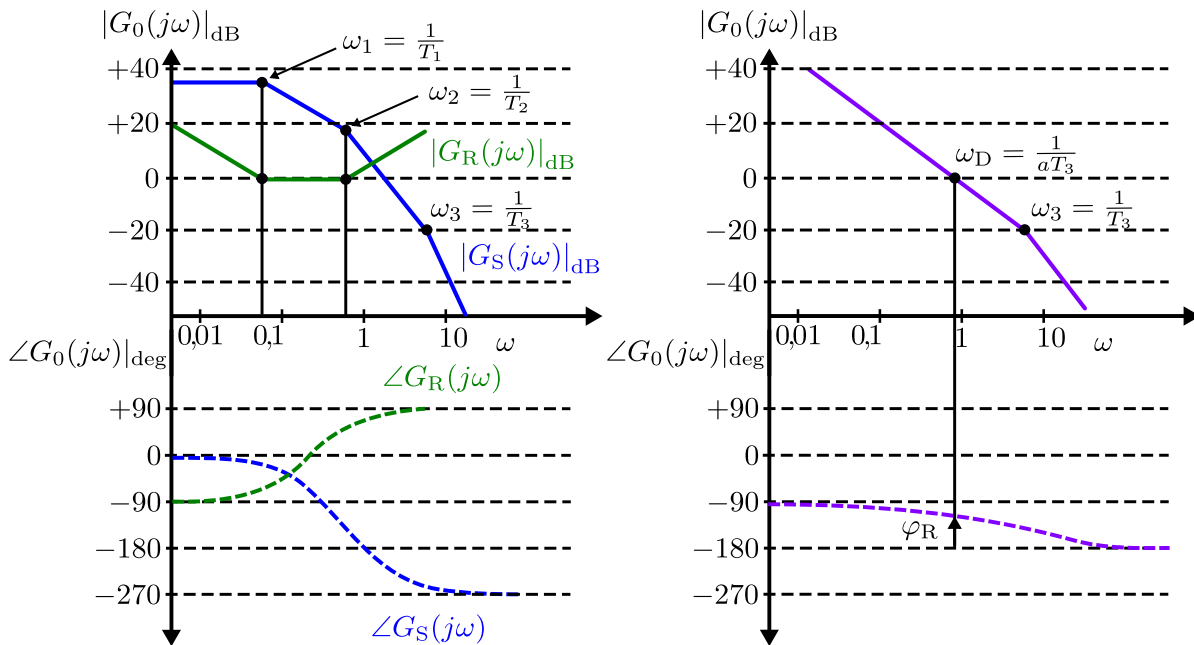


Abbildung 4.18: Schrittweiser Entwurf eines Reglers $G_R(s)$ nach dem Frequenzkennlinienverfahren

- Einzeichnen der Asymptoten des Frequenzgangs der offenen Kette $G_0(s)$ unter der Annahme, dass der Regelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = 1$ geschlossen würde. Hinweis: Direkt die Regelstrecke $G_S(s)$ einzeichnen!
- Bestimmung der Parameter a , T_1 aus den Anforderungen an die Dynamik des geschlossenen Regelkreises (Δh_W , $T_{5\%}$).
- Einfügen eines geeigneten Reglers, um die Frequenzkennlinie der offenen Kette in ein IT₁-Verhalten mit T_1 , T_1 zu überführen. Hierfür sind auch weitere Korrektur-

glieder erlaubt, falls die Nullstellen des Reglers nicht ausreichen, um die langsamen Pole der Strecke zu kompensieren.

- Bestimmung der Parameter K_P des Reglers um die Anforderungen an die Dynamik des geschlossenen Regelkreises zu justieren (φ_R , $T_{\ddot{U}}$).
- Vorteile:
 - Grafische Bestimmung mittels Bodediagramm.
 - Totzeit kann berücksichtigt werden → Erweiterung notwendig.
 - Kann grundsätzlich auch für offene Regelkreise ohne IT₁-Verhalten eingesetzt werden.
- Nachteile:
 - Nicht vollständig systematisch → nachjustieren mittels Reglerverstärkung bzw. Parameteranpassung.
 - Unter Umständen müssen viele zusätzliche Übertragungsglieder (Regler, Korrekturglieder) eingesetzt werden.
 - Modell der Strecke muss vollständig bekannt sein.

4.3.4 Reglerentwurf nach Betragsoptimum

Der Entwurf nach Betragsoptimum ist eine systematische Anwendung des Frequenzkennlinienverfahrens, welche besonders in der Antriebsregelung zum Einsatz kommt. Der sich ergebende Regelkreis erreicht schnell den geforderten Sollwert und hat eine kurze Anstiegszeit. Zudem ist der Regelkreis gut gedämpft, wodurch nur ein sehr geringes Überspringen der Regelgröße auftritt. Die Idee zum Entwurf basiert auf der Eliminierung der dominierenden, meist langsamen Zeitkonstante T_A der Regelstrecke und der Vorgabe des gewünschten Verhaltens durch die weiteren Reglerparameter. Besonders geeignet ist dieses Verfahren, wenn die Regelstrecke sich in zwei Zeitkonstanten aufteilen und in folgender Form schreiben lässt.

$$G_S(s) \approx \frac{K_S}{(T_A s + 1)(T_{\Sigma} s + 1)} \quad (4.5)$$

mit $T_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n T_k \rightarrow n$ kleine Streckenzeitkonstanten

Durch T_{Σ} werden die kleineren auftretenden Zeitkonstanten der Strecke durch ein gemeinsames PT₁-Glied approximiert. Treten Totzeiten im Streckenverhalten auf, müssen diese ebenfalls approximiert werden, da im Entwurf keine Systematik für dies Art von

Übertragungsgliedern enthalten ist. Eine gute Näherung des Totzeitgliedes lässt sich durch ein PT_n -Glied der folgenden Form erreichen.

$$G_{T_i}(s) \approx \frac{1}{\left(\frac{T_i}{n} + 1\right)^n}$$

Eine Approximation für $n = 2$ und die Addition zur Summenzeitkonstante T_Σ bietet bereits gute Ergebnisse.

Das gewünschte Verhalten des geschlossenen Regelkreises ist nun, dass der Betrag der Führungsübertragungsfunktion $|G_W(j\omega)| \approx 1$ bis hin zu hohen Frequenzen gilt. Der Betrag der Führungsübertragungsfunktion ergibt sich aus Gleichung 4.3 durch die Kompensation der Streckenzeitkonstante T_A aus Gleichung 4.5 mit einem PI-Regler ($T_N = T_A = T_1$). Die Zeitkonstante T_1 wiederum wird gleichgesetzt mit T_Σ .

$$|G_W(j\omega)| \approx \frac{K_S^2 K_P^2 + 0 \cdot \omega^2 + 0 \cdot \omega^4}{\sqrt{T_1^2 T_1^2 \omega^4 + (T_1^2 - 2T_1 T_1 K_S K_P) \omega^2 + K_S^2 K_P^2}} = 1 \quad (4.6)$$

Aus der Forderung in Gleichung 4.6 ergibt sich, dass folgende Bedingungen hierzu erfüllt werden müssen:

- Verstärkungsfaktoren im Nenner und Zähler müssen gleich sein $K_S^2 K_P^2 = K_S^2 K_P^2$
- Faktoren für den mittleren Frequenzbereich sollen gleich sein. $(T_1^2 - 2T_1 T_1 K_S K_P) \omega^2 = 0 \cdot \omega^2$ und somit genau dann erfüllt, wenn $K_P = \frac{T_1}{2T_1 K_S}$
- Faktoren für den oberen Frequenzbereich sollen gleich sein. $T_1^2 T_1^2 \omega^4 = 0 \cdot \omega^4 \rightarrow$ ist nicht erfüllbar.

Setzen wir dieses Ergebnis nun in Gleichung 4.6 ein, erhalten wir die sich ergebende Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises zu

$$G_W(s) = \frac{1}{2T_1^2 s^2 + 2T_1 s + 1} \approx \frac{1}{\frac{T_1}{K_S K_P} s + 1} \quad (4.7)$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit den Parametern des PT_2 -Gliedes, so erhalten wir

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}T_1} \quad (4.8)$$

Es ist ersichtlich, dass die Dämpfung des sich ergebenden Regelkreises mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ recht hoch ist, dies ist jedoch wie erwähnt ein Ziel des Entwurfsverfahrens. Im folgenden ist die qualitative Führungssprungantwort des geschlossenen Regelkreises dargestellt (siehe Abbildung 4.19). Die Überschwingweite beträgt lediglich 4,3% und nach zirka dem achtfachen der Summenzeitkonstante ist ein Sollwertsprung bereits durch die Regelgröße erreicht. Es sei noch erwähnt, dass die Summenzeitkonstante in der Regel recht klein ist.

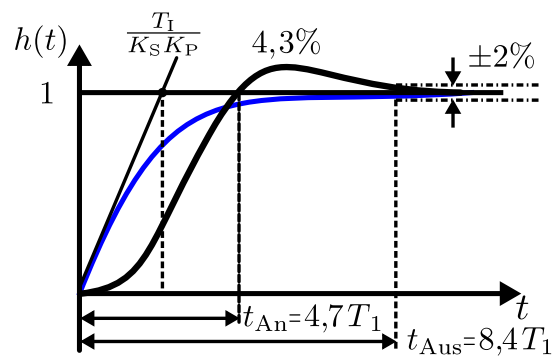


Abbildung 4.19: Führungssprungantwort nach Auslegung mittels Betragsoptimum (schwarze Linie) und geeignete Approximation als PT_1 -Glied (blaue Linie)

Literaturverzeichnis

- [Ada09] ADAMY, Jürgen: *Nichtlineare Regelungen*. 1. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009
- [Ame17] AMENT, Christoph: *Skript zur Vorlesung Mess- und Regelungstechnik*. <https://www.informatik.uni-augsburg.de/lehrstuehle/rt/lehre/Skript/Skript-Mess--und-Regelungstechnik-13-web.pdf>. Version: 2017. – Zuletzt abgerufen 26.02.2020, 06:48 Uhr
- [Bru] BRUENNER, Arndt: *Mathematik Seiten*. <https://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/polynome.htm>. – Zuletzt abgerufen: 18.08.2021, 10:55 Uhr
- [DKE14] DKE (Hrsg.): *DIN IEC 60050-351:2014-09 Internationales Elektrotechnisches Woerterbuch - Teil 351: Leittechnik*. 2014
- [DMOM13] DASTYCH, J. ; MOSEBACH, A. ; ORTMANN, C. ; MAU, C.: *Versuch 4: Modellbildung der schwebenden Kugel*. https://www.ruhr-uni-bochum.de/atp/downloads/lehre/praktikum_ss/BeschreibungV4.pdf. Version: 2013. – Zuletzt abgerufen 26.02.2020, 06:06 Uhr
- [Foe94] FOELLINGER, Otto: *Regelungstechnik: Einfuehrung in die Methodne und ihre Anwendungen*. 1994
- [Fur08] FURLAN, Peter: *Das Gelbe Rechenbuch*. Bd. 3. Verlag Martina Furlan, 2008
- [Gan03] GANGSTER, Maximilian: *Partikulaere Loesungen der inhomogenen Differentialgleichung*. https://www.math.tugraz.at/~ganster/lv_analysis_2/18_partikulaere_loesungen.pdf. Version: 2003. – Zuletzt aufgerufen a, 03.03.2020, 19:54 Uhr
- [Lan00] LANDES, David: *Revolution in Time: Clocks and the Making of the Modern World*. Harvard University Press, 2000
- [Lew00] LEWIS, Michael: *Theoretical Hydraulics, Automata, and Water Clocks*. 2000
- [Lun10] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Bd. 8. Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2010

- [MSF05] MANN, Heinz ; SCHIFFELGEN, Horst ; FRORIEP, Rainer: *Einführung in die Regelungstechnik: Analoge und digitale Regelung*,. 10. Hanser Verlag, 2005
- [SML14] SCHUMACHER, W ; MAUERER, M. ; LEONHARD, W.: *Regelungstechnisches Praktikum 1*. https://www.ifr.ing.tu-bs.de/static/files/lehre/labore/rtp1/Skript_Lineare_Systeme.pdf. Version: 2014. – Abgerufen am 29.09.2020, 06:02
- [Sta] STAUDT, Volker: Vorlesungsskript Elektrische Antriebe / Lehrstuhl für Erzeugung und Anwendung elektrischer Energie. – Forschungsbericht
- [Unb08] UNBEHAUEN, Heinz: *Regelungstechnik I: Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, Fuzzy-Regelsysteme*. 15. Vieweg Verlag, 2008
- [Zom13] ZOMOTOR, Zoltán: *(T1S5RT) 4 Geschichte der Regelung*. https://www.youtube.com/watch?v=jUXCi_5NZ-c. Version: 2013
- [ZR17] ZACHER, Serge ; REUTER, Manfred: *Regelungstechnik für Ingenieure; Analyse, Simulation und Entwurf von Regelkreisen*. 15. Springer Vieweg, 2017