Rotierte Sinuskurve

Funktion der Transformation einer Sinuskurve

Mark Narain Enzinger

Email: mark.enzinger@stud.plus.ac.at

Created: October 18, 2024

Last change: November 3, 2024

Inhaltsangabe

Abbildungsverzeichnis

1 Fragestellung

1.1 Definition

Es sei:

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$$

mit:

$$a, b, c, d \in \mathrm{R}$$

$$a, b = 1$$

Man drehe jeden Punkt $(x, f(x))$ der Funktion $f(x)$ im Kartesischen Koordinatensystem um den Winkel α um den Ursprung $(0, 0)$ entlang eines Kreisbogens, sodass der Abstand des Punktes zum Ursprung erhalten bleibt.

Folgende Gleichung stellt diese Aktion dar:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{-}\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Man finde nun eine Funktion der Form f(x) = y, wobei

$$45° \geq \alpha \geq 0°$$

Wenn $\alpha = 45°$ ist, wird die Funktionsdefinition noch nicht verletzt, da die maximale Steigung dieser funtion 90° betragen würde und sich jedem x-Wert ein eindeutiger y-Wert zuordnen ließe. Sobald α über 45° hinauswächst, wäre es grundsätzlich nicht mehr möglich eine Funktion zu definieren.

Folgende Grafik stellt ein Beispiel einer solchen Kurve dar (mit $\alpha \leq 45°$).

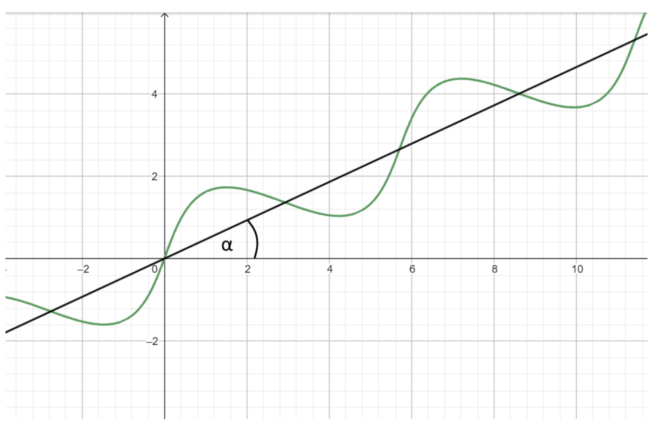

Abbildung 1: Gedrehter Sinus

2 Lösungsansätze

2.1 Mittels Rotationsmatrix

2.1.1 Ansatz

Es soll versucht werden, Punkte der Sinuskurve $(x, \sin(x))$ mithilfe einer Rotationsmatrix um einen Winkel α zu drehen. Anschließend wird aus den neu berechneten Punkten eine Funktion $f(x')$ hergeleitet, die die transformierte Kurve als Funktion von x' darstellt, sodass $f(x')$ ausschließlich von x' abhängt.

2.1.2 Rechenweg

$$\begin{pmatrix} x' \\ f(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{-}\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ sin(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ f(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x * \cos(\alpha) - \sin(\alpha) * \sin(x) \\ x * \sin(\alpha) + \sin(\alpha) * \sin(x) \end{pmatrix}$$

$$x' = x * \cos(\alpha) - \sin(\alpha) * \sin(x)$$

$$f(x') = x * \sin(\alpha) + \sin(\alpha) * \sin(x)$$

2.1.3 Vorläufige Schlussfolgerung

Da die Formel für x' sowohl x als auch $\sin(x)$ enthält, ist eine einfache algebraische Lösung hier nicht möglich.

2.2 Geometrischer Ansatz

2.2.1 Ansatz

Mit dieser Variante wird versucht, die Eigenschaften der gedrehten Sinuskurve geometrisch zu analysieren, um einer Lösung näher zu kommen. Die beschrifteten Abschnitte in der folgenden Zeichnung verdeutlichen die betrachteten Eigenschaften. Dabei hat die Variable x in diesem Ansatz eine andere Bedeutung als im Lösungsansatz 2.1.

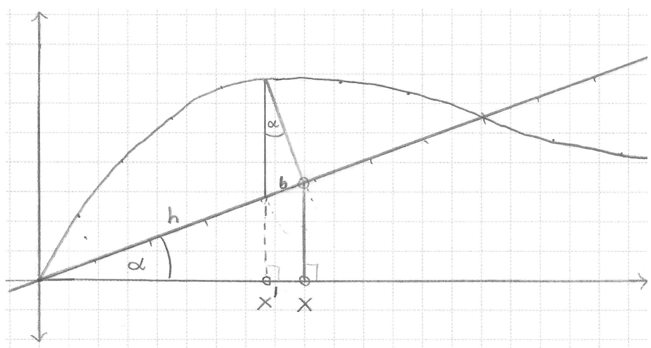

Abbildung 2: Geometrischer Ansatz

2.2.2 Rechenweg

$$b = \sin \frac{x}{\cos \alpha} * \tan \alpha$$

$$x' = x - b * \cos \alpha$$
$$x' = x - \sin \frac{x}{\cos \alpha} * \tan \alpha * \cos \alpha$$
$$x' = x - \sin \frac{x}{\cos \alpha} * \sin \alpha$$

$$f(x') = \tan \alpha * x' + \frac{b}{\sin \alpha}$$
$$f(x') = \tan \alpha * x + \sin \frac{x}{\cos \alpha} * \tan \alpha * \frac{1}{\sin \alpha}$$
$$f(x') = \tan \alpha * x + \sin \frac{x}{\cos \alpha} * \frac{1}{\cos \alpha}$$

2.2.3 Vorläufige Schlussfolgerung

Da die Formel für x' sowohl x als auch $\sin(\frac{x}{\cos\alpha})$ enthält, ist eine einfache algebraische Lösung hier nicht möglich.

3 Zusammenfassung

In den beiden Lösungsansätzen stehen wir vor dem Problem, dass die Variable x sowohl unabhängig als auch innerhalb einer trigonometrischen Funktion vorkommt. Dieses gleichzeitige Vorkommen erschwert eine direkte Lösung, da die üblichen algebraischen Umformungen nicht anwendbar sind.

Die Schwierigkeit liegt darin, dass die Trennung der Variablen und die Umformung in eine analytisch lösbare Form nicht ohne Weiteres möglich sind, da x sowohl isoliert als auch als Argument einer trigonometrischen Funktion auftritt.

Nun gilt es, diese Behauptung entweder zu belegen oder zu widerlegen. Es soll entweder die funktion f(x) hergeleitet werden, oder bewiesen werden, dass eine solche Herleitung nicht möglich ist.

4 Zeichnen der Kurve

4.1 Übersicht

Um nun beide Ansätze vergleichen zu können und entstandene Kurven zu analysieren, wurden diese bei einer Drehung von 45° anhand Mengen von x und y Werten geplottet. Diese Werte wurden durch die Formeln beider Lösungsansätze berechnet und anschließend im Koordinatensystem aufgetragen. Betrachtet wurden hierbei bei jeder Zeichnung 22 x-Werte im Bereich von 0 bis 2π (einschließlich dieser beiden Werte).

4.2 Gezeichnete Kurven

4.2.1 Berechnung eines Sets von Punkten mittels Rotationsmatrix

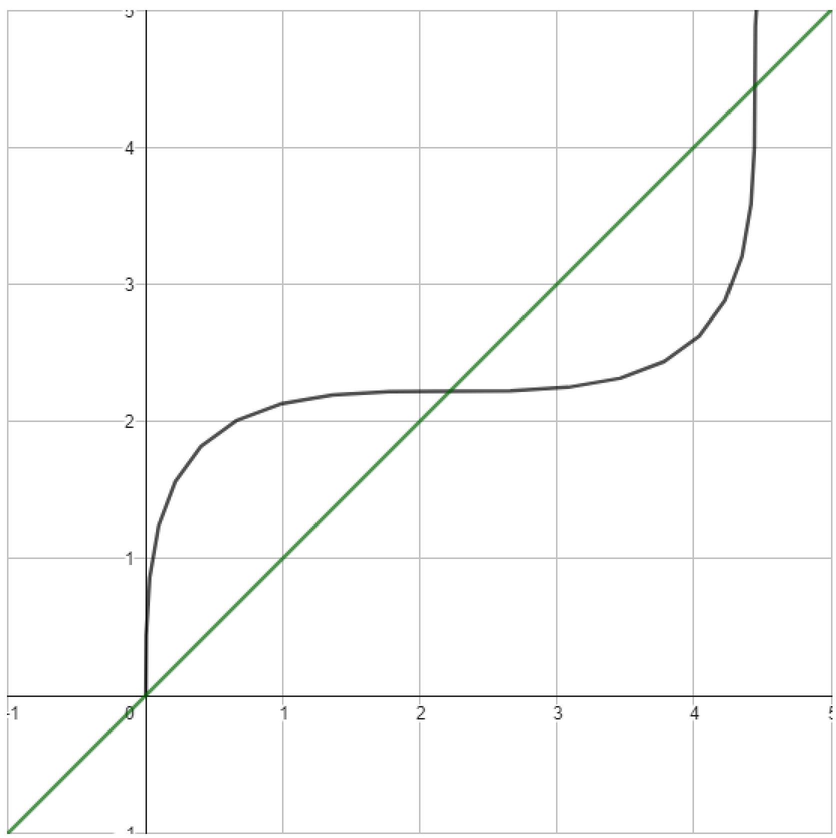

Abbildung 3: 45° Drehung einer Sinuskurve mittels Rotationsmatrix

4.2.2 Berechnung eines Sets von Punkten durch den geometrischen Ansatz

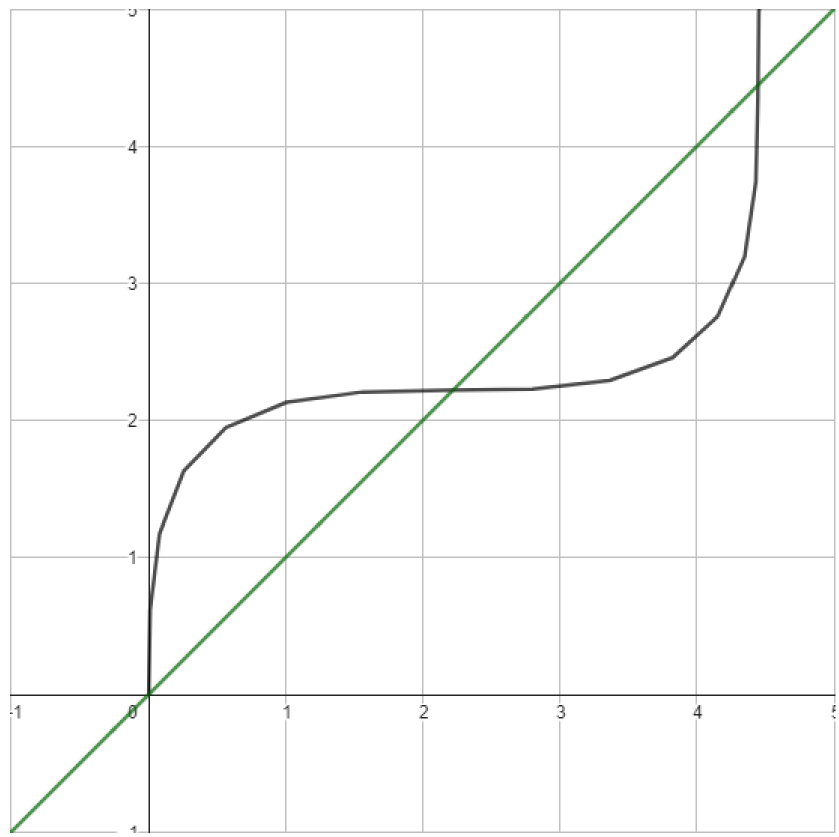

Abbildung 4: 45° Drehung einer Sinuskurve mittels Geometrischem Ansatz

4.2.3 Gedrehte Kurve ohne y-Anteil der um α gedrehten Geraden

Hierbei wird die Gedrehte Kurve abzüglich dem y-Anteil der Geraden aufgetragen. Folgende Grafik stellt diesen Vorgang dar. Es wird versucht eine Periodische Funktion zu erhalten.

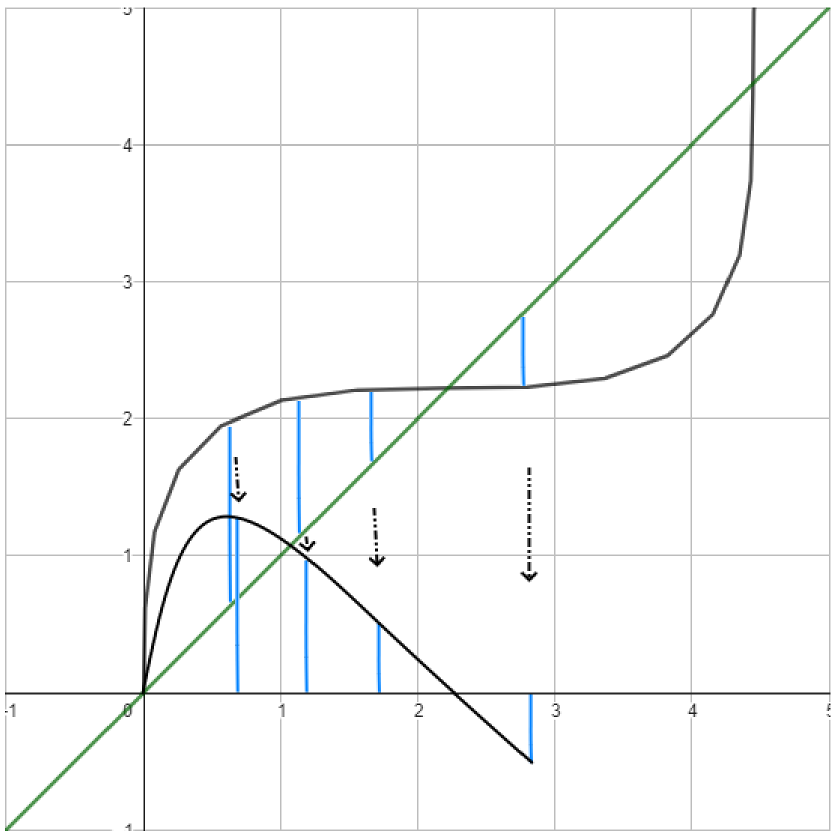

Abbildung 5: Erklärung der Kurve aus Abbildung 6

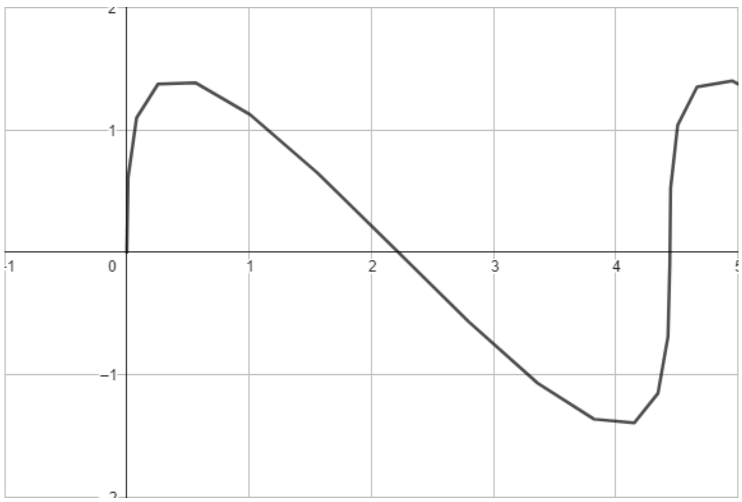

Abbildung 6: Gedrehte Kurve ohne y-Anteil der um α gedrehten Geraden

Folgende Grafik zeigt den Versuch, sich der Kurve aus Abbildung 6 mit einem Polynom 6. Ordnung anzunähern:

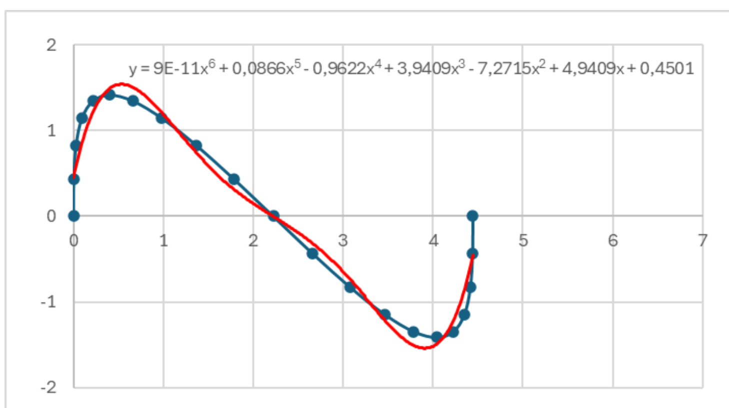

Abbildung 7: Versuch einer Annäherung an die Kurve durch ein Polynom

Bei diesem Versuch ist folgendes Polynom entstanden:

$$y = 9E - 11x6 + 0,0866x5 - 0,9622x4 + 3,9409x3 - 7,2715x2 + 4,9409x + 0,4501$$