МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Лабораторна робота №4

З дисципліни «Математичні методи дослідження операцій»

Виконав:

студент групи КН-210

Бурак Марко

Львів – 2019

Алгоритм знаходження розв’язку двоїстої задачі за допомогою симплекс таблиці прямої задачі

Мета роботи: розглянути алгоритм знаходження розв’язку двоїстої задачі за допомогою симплекс-таблиці прямої задачі. Вивчити алгоритм розв’язування задачі ЛП за допомогою двоїстого симплекс-методу.

3

1.80

$F_{\min} = 6x_1 + 4x_2$

$2x_1 + x_2 \geq 3$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$-x_1 + 2x_2 \geq 1$

$x_1, x_2 \geq 0.$

1. Побудувати двоїсну задачу до існуючої

1.80

$F_{min} \to 6x_1 + 4x_2$

$2x_1 + x_2 \geq 3$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$-x_1 + 2x_2 \geq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

$F_{min} \to 6x_1 + 4x_2$

$2x_1 + x_2 \geq 3$

$-x_1 + x_2 \geq -1$

$-x_1 + 2x_2 \geq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \;\; y_1 \;\; y_2 \;\; y_3 \end{array}$

$F^* = 3y_1 - y_2 + y_3$

1.Проставлємо правильно знаки рівності, якщо функція прямує до максимуму то <=, якщо до мінімуму то >=

2. Формуємо матрицю всіх коефіцієнтів, та матрицю b, вільних членів.

3. Транспонуємо матрицю A, кількість стовпців у матриці дорівнює кількості коефіцієнтів у подальшій системі.

4.Формуємо функцію, коефіцієнти якої сходяться з коефіцієнтами вектора b

5. Записуємо двоїсну задачу, значення вільних членів у новій задачі беремо з значення функції у початковій задачі.

$$F^* = 3y_1 - y_2 + y_3 \to max$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 - y_3 \le 6 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \le 4 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0$$

2. Розв'язати початкову задачу двоїстого симплекс-методу.

1.80

$$F_{min} \Rightarrow 6x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ -x_1 + 2x_2 \ge 1 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

$$F_{max} = -6x_1 - 4x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 \le -3 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 - 2x_2 \le -1 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

Канонічний вигляд

$$F_{max} = -6x_1 - 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = -1 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

1) базис x_3, x_4, x_5

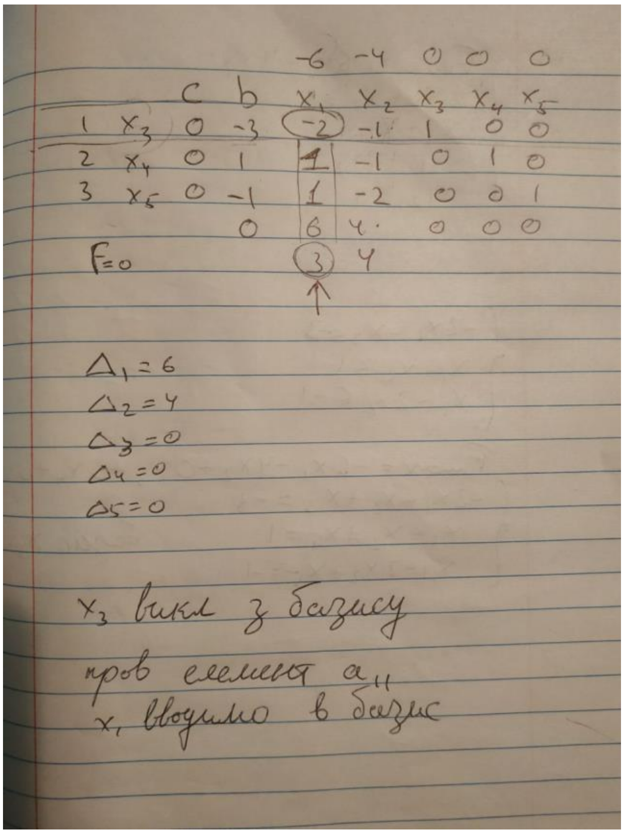
Для початку задачу переведемо до канонічного вигляду, функція має прямувати до максимуму та знаки у нерівностях мають бути <=.

Для цього перемножаю значення функції на -1, отримавши функцію, яка прямує до максимуму, проте, потрібно пам'ятати, що тоді розв'язок потрібно домножити на -1.

Додавши додаткові змінні знайдемо базис, значення у матриці, стовпці яких заповнені 0 окрім одного коефіцієнта.

Базис - x3 x4 x5

Формуємо початкову симплекс-таблицю.



		c	b	-6	-4	0	0	0
		c	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_3	0	-3	-2	-1	1	0	0
2	x_4	0	1	1	-1	0	1	0
3	x_5	0	-1	1	-2	0	0	1
			0	6	4	0	0	0
F=0				3	4			

$\Delta_1 = 6$
$\Delta_2 = 4$
$\Delta_3 = 0$
$\Delta_4 = 0$
$\Delta_5 = 0$

x_3 викл з базису
пров елемент a_{11}
x_1 вводимо в базис

У колонки 1 2 3 вписуємо значення базису, у колонку c вписуємо коефіцієнти при цих елементах базису.

У колонці b вписуємо значення вільних членів.

Над значеннями аргументів запишимо коефіцієнти при функції.

Усередину в таблицю запишемо значення коефіцієнтів, які стоять при іксах у системі.

У 4 рядку запишемо у колонці b значення функції, яке дорівнює сумі всіх добутків c на b, у першій ітерації – 0.

Наступні значення це дельти, які продемонстровано вище, вони в свою чергу рахуються за формулою суми всіх добутків c*x, які віднімають значення найвищого рядка, а саме значення функції.

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{3} c_i a_{ij} - c_j$$

Таким чином ми майже отримали заповнену таблицю, лишилось знайти значення тети.

Спочатку потрібно вибрати провідний рядок.

Провідний рядок є той де значення b по модулю є максимальне, в мому випадку це рядок 1.

Тепер можна знайти значення тети. Тета рівна значенням мінус дельти поділеної на значення аргумента з провідного рядка. Таким чином отримуємо останній рядок таблиці.

Наступним кроком є вибір провідного стовпця.

Провідний стовпець є той, де значення тети по модулю мінімальне.

Отримавши провідний стовпець(1) можна визначити провідний елемент, a_{11}.

У наступній таблиці виключаємо x3 з базису, тому що це провідний рядок у матриці, введемо x1 елемент в базис, тому що він є у провідному стовпці.

Побудова таблиці 2

Будуємо для початку базис, у нашому випадку замінюємо значення x3 на x1,

Також змінилось значення c для x1, воно рівне значенню коефіцієнта біля x1 при функції.

Спершу я заповнював значення провідного рядка, та значення провідного стовпця.

Значення рядка дорівнюють попереднім значенням з таблиці 1, але поділених на провідний елемент, у мому випадку, поділених на -2.

В свою чергу всі інші значення з провідної колонки рівні 0.

Для перерахування всіх інших значень можна використати правило прямокутника.

Для прикладу нове значення a_{22} буде рівне значенню старого a_{22} – 2 нове значення провідного рядка * на 2 старе значення провідного стовпця, це повторимо для кожного подальшого значення.

Значення b знаходяться аналогічним чином,щоб знайти значення нового b_2, потрібно від значення старого b_2 відняти нове значення b_1 помноженого на 2 старе значення провідного стовпця.

				-6	-4	0	0	0
		c	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	-6	1,5	1	0,5	−0,5	0	0
2	x_4	0	−0,5	0	−1,5	0,5	1	0
→ 3	x_5	0	−2,5	0	$\boxed{-2,5}$	0,5	0	1
			−9	0	1	3	0	0
θ				−	0,4	−6	~~0~~	0

$a'_{22} = a_{22} - 0,5 \cdot a_{21} = -1 - 0,5 = -1,5$

$a'_{23} = a_{23} - (-0,5) \cdot a_{21} = 0 + 0,5 = 0,5$

$a'_{24} = a_{24} - 0 \cdot a_{21} = 1$

$a'_{25} = a_{25} - 0 \cdot a_{21} = 0$

$a'_{32} = a_{32} - 0,5 \cdot a_{31} = -2 - 0,5 = -2,5$

$a'_{33} = a_{33} - (-0,5) \cdot a_{31} = 0 + 0,5 = 0,5$

$a'_{34} = a_{34} - 0 \cdot a_{31} = 0$

$a'_{35} = a_{35} - 0 \cdot a_{31} = 1$

$b'_2 = b_2 - 1,5 \cdot a_{21} = -0,5$

$b'_3 = b_3 - 1,5 \cdot a_{31} = -1 - 1,5 = -2,5$

Перевірка на оптимальність.

Для оптимальності, всі значення у стопці b мають бути додатніми.

Отже, можна зробити висновок, що таблиця неоптимальна.

Побудова 3 симплекс таблиці.

Використовуємо те й ж алгоритм, що і для другої таблиці, одержуємо.

		c	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	-6	1	1	0	$-2/5$	0	$1/5$
2	x_4	0	1	0	0	$1/5$	1	$-3/5$
3.	x_2	-4	1	0	1	$-1/5$	0	$-2/5$

a_{32}

$$a'_{11} = a_{11} - 0 \cdot a_{12} = 1$$
$$a'_{13} = a_{13} - (-1/5) \cdot a_{12} = -2/5$$
$$a'_{14} = a_{13} - 0 \cdot a_{12} = 0$$
$$a'_{15} = a_{15} - (-(2/5)) \cdot a_{12} = 1/5$$
$$a'_{21} = a_{21} - 0 \cdot a_{22} = 0$$
$$a'_{23} = a_{23} - (-1/5) \cdot a_{22} = 1/5$$
$$a'_{24} = a_{24} - 0 \cdot a_{22} = 1$$
$$a'_{25} = a_{25} - (-(2/5)) \cdot a_{22} = -3/5$$

$$b'_1 = b_1 - 1 \cdot a_{12} = 1$$
$$b'_2 = b_2 - 1 \cdot a_{22} = 1$$

Перевірка на оптимальність.

Значення у колонці b більші 0, тому таблиця оптимальна.

Порахуємо значення функції

F = $\sum c * b$ F= 1*-6+1*-4 =-10

Значення функції = -10 в точках (1,1),це видно зі значень вектора b, проте, я на початку завдання зазначав, що результат буде протилежний, через те, що я ділив функцію на -1, для отримання канонічного вигляду.

Значення функції набуває мінімуму у точках (1,1), та дорівнює 10.

3. Розв'язати початкову задачу двоїстого симплекс-методу.
   Використаю умову задачі у пункті 1.

$$F^* = 3y_1 - y_2 + y_3 \to max$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 - y_3 \le 6 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \le 4 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0$$

$$F^* = 3y_1 - y_2 + y_3 + 0y_4 + 0y_5 \to max$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 - y_3 + y_4 = 6 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + y_5 = 4 \end{cases}$$

Зведемо функцію до канонічного вигляду.

Перша таблиця, з порвідним елементом y_{23}.

				3	-1	1	0	0
			b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	y_4	0	6	2	-1	-1	1	0
→	y_5	0	4	1	1	2	0	1
			0	-3	1	-1	0	0
				-3		$-1/2$ ↑		

$\Delta_1 = -3$

$\Delta_2 = 1$

$\Delta_3 = -1$

$\Delta_4 = 0$

$\Delta_5 = 0$

Друга симплекс-таблиця.

виводимо з базису y_5

вводимо y_3

провідний елемент a_{23}

			3	-1	1	0	0
		b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
→ 1	y_4	8	5/2	-0,5	0	1	1/2
2	y_3	2	1/2	0,5	1	0	0,5
		2	-5/2	3/2	0	0	0,5
			-1 ↑	-3	-	0	1

Все ще не оптимальна таблиця, томуповідним елементом стає y_{11}.

виводимо з базису y_4

вводимо y_1

провідний a_{11}

			3	-1	1	0	0
		b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1	y_1	16/5	1	-1/5	0	2/5	1/5
2	y_3	2/5	0	3/5	1	-1/5	2/5
		10	0	1	0	1	1

$y_1 = \frac{16}{5}$ $y_2 = 0$ $y_3 = 2/5$ $F = 3 \cdot 3\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 10$

З останньої таблиці, бачимо, що цей план є оптимальним, адже всі значення b є додатними, а також значення всіх індексим є додатними.

Оптимальний план буде тоді, коли y1 = 16/5 =3.2 y2= 0 y3 = 2/5 =0.4 , а також, якщо підставити всі значення у функцію, отримуємо значення 10, те саме, яке знайшли у попередньому пункті, отже це завдання виконано правильно.

Висновок: На цій лабораторній роботі, я ознайомився з алгоритмом знаходження розв’язку двоїстої задачі за допомогою симплекс таблиці прямої задачі. Навчився змінювати прямування функції з мінумуму до максимуму. Навчився зводити умову задач до канонічного вигляду, також освоїв як отримати двоїстну задачу. Зрозумів як застосовувати симплекс таблиці для отримання оптимального плану.