Курс “Введение в математический анализ”

Тема 6 “Понятие о производной”

Практическая работа

1. Найти производную выражения:

a. $\sin x \cdot \cos x$

b. $\ln(2x+1)^3$

c. $\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}$

d. $\dfrac{x^4}{\ln(x)}$

a. $(\sin x \cdot \cos x)' = -\sin^2 x + \cos^2 x$

b. $\ln(2x+1)^{3\prime} = \frac{6\ln(2x+1)^2}{2x+1}$

c. $\sqrt{sin^2(ln(x^3))}' = \frac{1}{2}(\sin(9 \cdot \ln(x)^2))^{\frac{1}{2}-1}((\sin(9 \cdot \ln(x)^2)))' = 9\ln(x)\frac{\cos(9\cdot\ln(x)^2)}{x\sqrt{\sin(9\cdot\ln(x)^2)}} =$

d. $\frac{x^4}{\ln(x)}' = 4\frac{x^3}{\ln(x)} - \frac{x^3}{\ln(x)^2}$

2. Найти выражение производной функции и ее значение в точке:

$$f(x) = \cos(x^2+3x), x_0 = \sqrt{\pi}$$

$$\cos(x^2+3x)' = \cos\big(x(x+3)\big)' = \cos\big(x(x+3)\big)'\big(x(x+3)\big)' = -(2x+3)\sin\big(x(x+3)\big) =$$

$$-(2x+3)\sin(x^2+3x) = -(2x+3)(\sin x^2 \cos 3x + \cos x^2 \sin 3x)$$

найдем значение производной в точке

$$-\big(2\sqrt{\pi}+3\big)\left(\sin\sqrt{\pi}^2\cos 3\sqrt{\pi} + \cos\sqrt{\pi}^2\sin 3\sqrt{\pi}\right) = -\big(2\sqrt{\pi}+3\big)\big(\sin\pi\cos 3\sqrt{\pi} + \cos\pi\sin 3\sqrt{\pi}\big) =$$
$$= -\big(2\sqrt{\pi}+3\big)\big(\sin 3\sqrt{\pi}\big)$$

3. * Найти значение производной функции в точке:

$$f(x) = \frac{x^3-x^2-x-1}{1+2x+3x^2-4x^3}, x_0 = 0$$

$$\left(\frac{x^3-x^2-x-1}{1+2x+3x^2+4x^3}\right)' =$$

$$= \frac{(-12x^2-6x-2)(x^3-x^2-x-1)}{(4x^3+3x^2+2x+1)^2} + \frac{3x^2-2x-1}{4x^3+3x^2+2x+1}$$

найдем значение производной в точке $x = 0$

$$\frac{(-12\cdot 0^2-6\cdot 0-2)(0^3-0^2-0-1)}{(4\cdot 0^3+3\cdot 0^2+2\cdot 0+1)^2} + \frac{3\cdot 0^2-2\cdot 0-1}{4\cdot 0^3+3\cdot 0^2+2\cdot 0+1} = \frac{-2\cdot(-1)}{1} + \frac{-1}{1} = 2-1 = 1$$

4. Найти угол наклона касательной к графику функции в точке:

$$f(x) = \sqrt{3x} \cdot \ln x, x_0 = 1$$

Определим производную и ее значение в заданной точке.

$$(\sqrt{3x} \ \cdot \ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(x) + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

найдем значение производной в точке *x* = 1

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(x) + \frac{\sqrt{x}}{x} \ \Rightarrow \ \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot \ln(1) + \frac{\sqrt{1}}{1} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{1} = 1$$

Поскольку производная в точке равняется tg(a), где a - касательная к графику функции в точке, нам нужно взять арктангенс от значения производной в заданной точке arctg(f(x)').

arctng(1) = π/4 или 45 градусов