Домашняя работа

Урок 10. Видеоурок “Интеграл. Ряды”
Курс “Введение в математический анализ”
Тема 7 “Ряды”

1. Исследовать ряд на сходимость, используя признак д’Аламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

Определим предел отношения $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

а) если предел отношения меньше единицы (*l<1)*, то ряд сходится;

б) если предел отношения больше единицы (*l>1)*, то ряд расходится;

в) если предел отношения равен единице (*l=1)*, то вопрос о сходимости ряда остаётся нерешённым.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!^2}}{\frac{(n)^n}{(n)!^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n)!^2\,(n+1)^{n+1}}{(n)^n(n+1)!^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n)!^2}{(n!)^2 + 2n! + 2} < 1$$

Ряд сходится.

2. Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Пусть существует предел корня *n*-й степени из общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = p$$.

Тогда

- если предел меньше единицы ($p<1$), то ряд сходится,
- если предел больше единицы ($p>1$), то ряд расходится,
- если же предел равен единице ($p=1$), то ничего определённого о сходимости ряда сказать нельзя: радикальный признак Коши здесь не годится и нужно использовать другой признак.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = p$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(\frac{2^n}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{2^n}{n}\right)} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

Ряд сходится.

3. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\ln n}$$

Признак Лейбница: Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по модулю, то ряд сходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\ln n} = -1+\frac{1}{2+\ln 2}-\frac{1}{3+\ln 3}+\frac{1}{4+\ln 4}$$

Очевидно, что члены ряда монотонно убывают по модулю. Ряд сходится.

4. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n}$$

Если $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(k\cdot\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)\right)<1$, то числовой ряд расходится, если $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(k\cdot\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)\right)>1$, то ряд сходится. Признак Раабе обычно применяется тогда, когда рассмотренные выше достаточные признаки сходимости числовых рядов не приводят к результату.

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{\frac{3^n}{2^n}}{\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} n\frac{3^n 2^{n+1}}{3^{n+1}2^n} = \frac{2}{3} < 1$$

Ряд расходится

5. Разложить функцию по Тейлору в единице

$$f(x) = \ln(16x^2)$$

$$f(x)' = \ln(16x^2)' = \frac{2}{x}$$

$$f(x)'' = \ln(16x^2)'' = \left(\frac{2}{x}\right)' = \frac{-2}{x^2}$$

$$f(x)''' = \ln(16x^2)''' = \left(\frac{2}{x}\right)'' = \left(\frac{-2}{x^2}\right)' = \frac{4}{x^3}$$

$$f(x)'''' = \ln(16x^2)'''' = \left(\frac{2}{x}\right)''' = \left(\frac{-2}{x^2}\right)'' = \left(\frac{4}{x^3}\right)' = \frac{-12}{x^4}$$

$$f(x)^{5\prime} = \ln(16x^2)^{5\prime} = \left(\frac{2}{x}\right)^{4\prime} = \left(\frac{-2}{x^2}\right)''' = \left(\frac{4}{x^3}\right)'' = \left(\frac{-12}{x^4}\right)' = \frac{48}{x^5}$$

$$f(x) = \ln(16x^2) + \frac{2/x}{1!}x - \frac{2/x^2}{2!}x^2 + \frac{4/x^3}{3!}x^3 - \frac{12/x^4}{4!}x^4 + \frac{48/x^5}{5!}x^5 \cdots$$

$$f(1) = \ln(16) + \frac{2}{1!} - \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} - \frac{12}{4!} + \frac{48}{5!} \cdots$$

6. Задание 6 пропущено

Тема 8 “Понятие об интеграле”

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int(2x^2 - 2x - 1 + \sin x - \cos x + \ln x + e^x)dx$$

$$\int(2x^2 - 2x - 1 + \sin x - \cos x + \ln x + e^x)dx = 2\frac{x^3}{3} - x^2 + e^x + x(\ln(x) - 1) - \cos x - \sin x - x + C$$

2. Найти неопределенный интеграл:

$$\int(2x + 6xz^2 - 5x^2y - 3\ln z)dx$$

$$\int(2x - 6xz^3 - 5x^2y - 3\ln z)dx = -\frac{5x^3y}{3} - 3x^2z^2 + x^2 - 3x(\ln(x)) + C$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^\pi 3x^2 \sin(2x)dx$$

$$\int_0^\pi 3x^2 \sin(2x)dx = x^3 - \frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

$$F(\pi) = -\frac{1}{2} + \pi^3$$

$$F(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\int_0^\pi 3x^2 \sin(2x)dx = x^3 - \frac{1}{2}\cos(2x)\,|_0^\pi = -\frac{1}{2} + \pi^3 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \pi^3$$

4. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = 2\sqrt{x+1} + C$$