Урок 8. Вебинар “Производная функции нескольких переменных. Часть 1

Домашняя работа

Производные функций нескольких переменных.

Найти частные производные первого и второго порядка.
Убедиться в равенстве смешанных производных

$$1. U = x^3 + 3xy^2 + z^2 - 39x - 36y + 2z + 26$$

$$U'_x = 3x^2 + 3y^2 + z^2 - 39 - 36y + 2z$$

$$U'_y = x^3 + 6xy + z^2 - 39x - 36 + 2z$$

$$U'_z = x^3 + 3xy^2 + 2z - 39x - 36y + 2$$

$$U''_{xy} = 3x^2 + 6y + z^2 - 36 + 2z$$

$$U''_{xz} = 3x^2 + 3y^2 + 2z - 36y + 2$$

$$U''_{yz} = x^3 + 6xy + 2z - 39x + 2$$

$$U''_{yx} = 3x^2 + 6y + z^2 - 39 + 2z$$

$$U''_{zy} = x^3 + 6xy + 2z - 39x - 36$$

$$U''_{zx} = 3x^2 + 3y^2 + 2z - 39 - 36y$$

$$U'''_{xyz} = 3x^2 + 6y + 2z + 2$$

$$U'''_{yxz} = 3x^2 + 6y + 2z + 2$$

$$U'''_{yzx} = 3x^2 + 6y + 2z - 39$$

$$U'''_{zyx} = 3x^2 + 6y + 2z - 39$$

$$2. U = \frac{256}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + z^2$$

$$U'_x = -\frac{256}{x^2} + \frac{2x}{y} + \frac{y^2}{z} + z^2$$

$$U'_y = \frac{256}{x} - \frac{x^2}{y^2} + 2\frac{y}{z} + z^2$$

$$U'_z = \frac{256}{x} + \frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{z^2} + 2z$$

$$U''_{xy} = -\frac{256}{x^2} - \frac{x}{y^2} + \frac{2y}{z} + z^2$$

$$U''_{xz} = -\frac{256}{x^2} + \frac{2x}{y} - \frac{y^2}{z^2} + 2z$$

$$U''_{yx} = -\frac{256}{x^2} - \frac{2x}{y^2} + 2\frac{y}{z} + z^2$$

$$U''_{yz} = \frac{256}{x} - \frac{x^2}{y^2} - 2\frac{y}{z^2} + 2z$$

$$U'''_{xyz} = -\frac{256}{x^2} - \frac{x}{y^2} - \frac{2y}{z^2} + 2z$$

$$U'''_{xzy} = -\frac{256}{x^2} - \frac{2x}{y^2} - \frac{2y}{z^2} + 2z$$

$$U''_{yxz} = -\frac{256}{x^2} - \frac{2x}{y^2} - 2\frac{y}{z^2} + 2$$

3.Найти производную функции $U{=}x^2{+}y^2{+}z^2$ по направлению вектора $c{-}9{,}8{,}{-}12$ в точку $M(8;{-}12;9)$.

$$U'_x = 2x + y^2 + z^2$$

$$U'_y = x^2 + 2y + z^2$$

$$U'_z = x^2 + y^2 + 2z$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-9)^2 + 8^2 + (-12)^2} = \sqrt{81 + 64 + 144} = 17$$

$$\overrightarrow{c_0} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \left(\frac{-9}{17}, \frac{8}{17}, \frac{-12}{17}\right)$$

$$grad\ U|_M = (2x + y^2 + z^2, x^2 + 2y + z^2, x^2 + y^2 + 2z) =$$
$$= (2\cdot 8 + (-12)^2 + 9^2, 8^2 - 2\cdot 12 + 9^2, 8^2 + (-12)^2 + 2\cdot 9) =$$
$$= (241, 121, 226)$$

$$U'_{\vec{c}} = (\overrightarrow{c_0} \cdot grad\ U|_M) = \left(\frac{-9}{17}\cdot 241, \frac{8}{17}\cdot 121, \frac{-12}{17}\cdot 226\right) = \left(-\frac{2169}{17}, \frac{968}{17}, \frac{-2712}{17}\right)$$
$$= \left(-127\frac{10}{17}, 56\frac{16}{17}, -159\frac{9}{17}\right)$$

4.Найти производную функции $U = e^{x2+y2+z2}$ по направлению вектора $d = 4, -13, -16$ в точку $L(-16; 4; -13)$.

$$U'_x = U'_y = U'_z = \left(e^{x^2+y^2+z^2}\right)' = e^{x^2+y^2+z^2}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{(4)^2 + (-13)^2 + (-16)^2} = \sqrt{16 + 169 + 256} = 21$$

$$\overrightarrow{d_0} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \left(\frac{4}{21}, \frac{-12}{21}, \frac{-16}{21}\right)$$

$$grad\ U|_M = \left(e^{x^2+y^2+z^2}, e^{x^2+y^2+z^2}, e^{x^2+y^2+z^2}\right)$$
$$= \left(e^{(-16)^2+4^2+(-13)^2}, e^{(-16)^2+4^2+(-13)^2}, e^{(-16)^2+4^2+(-13)^2}\right)$$
$$= \left(e^{256+16+169}, e^{256+16+169}, e^{256+16+169}\right) = \left(e^{441}, e^{441}, e^{441}\right)$$

$$U'_{\vec{d}} = \overrightarrow{(d_0} \cdot grad\ U|_L) = \left(\frac{4}{21}e^{441}, \frac{-12}{21}e^{441}, \frac{-16}{21}e^{441}\right)$$

Задание 5 пропущено

Исследовать на экстремум следующие функции:

$$6.\ U = x^2y + \frac{1}{3}y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1$$

$$U'_x = 2xy + \frac{1}{3}y^3 + 4x + 3y^2$$

$$U'_y = x^2 + y^2 + 2x^2 + 6y$$

$$U''_{xy} = 2x + y^2 + 4x + 6y$$

$$U''_{yx} = 2x + y^2 + 4x + 6y$$

$$U''_{xx} = 2y + \frac{1}{3}y^3 + 4 + 3y^2$$

$$U''_{yy} = x^2 + 2y + 2x^2 + 6$$

$$\begin{cases} U'_x = 2xy + \frac{1}{3}y^3 + 4x + 3y^2 = 0 \\ U'_y = x^2 + y^2 + 2x^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Есть, как минимум, один корень (0, 0)

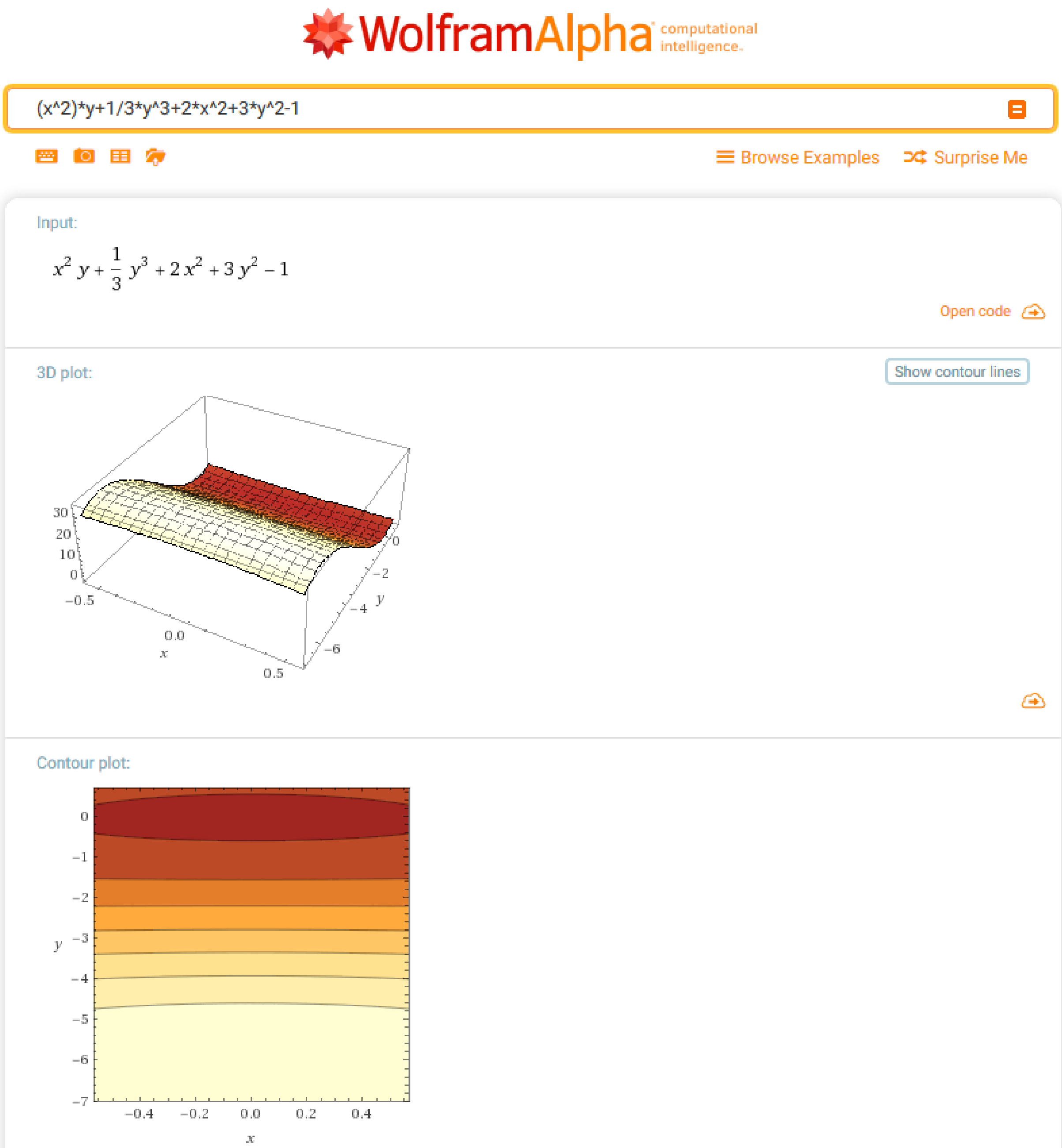
$$U''_{xy} = U''_{yx} = 0$$

$U''_{xx} = 4;\ U''_{yy} = 6$

$$\begin{pmatrix} U''_{xx} & U''_{xy} \\ U''_{yx} & U''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 4 > 0;\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - 0 \cdot 0 = 24\ > 0$$

Поскольку оба минора больше 0, то в найденной точке (0, 0) находится минимум рассматриваемой функции.



Задание 7 и 8 пропущены