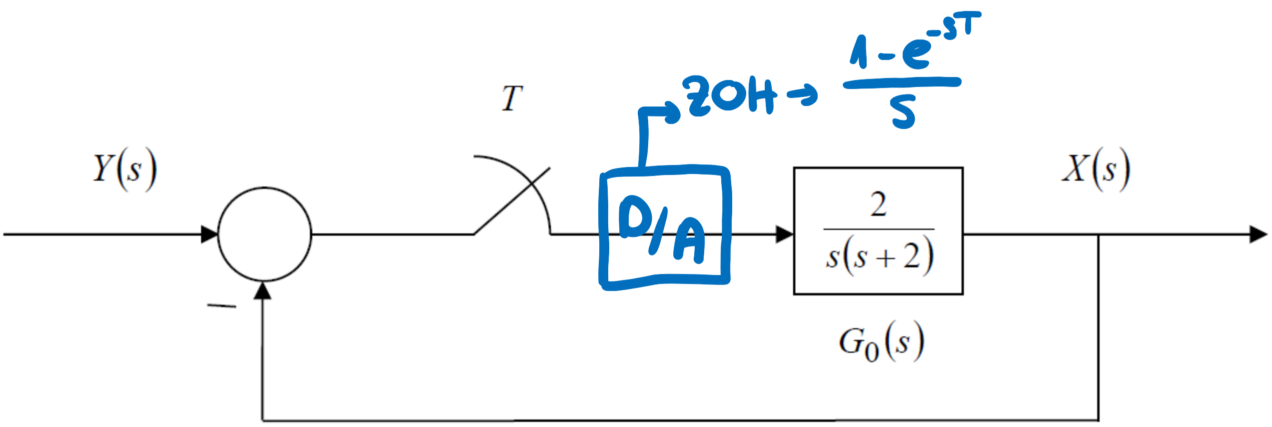
1.11. Да се пресмета времето на смирување и максималниот прескок на отскочниот одзив на затворениот дискретен систем од долната слика, ако: $T = 0.02\,\text{sec.}$, $T = 0.2\,\text{sec.}$ и $T = 1\,\text{sec.}$



Слика 1.14. Илустрација кон Задача 1.11

$T_s = ?$

$M_{p\%} = ?$

$$G_0(z) = Z\left\{\boxed{1-e^{-sT}}\frac{}{s} \cdot \frac{2}{s(s+2)}\right\} =$$

$$= \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{2}{s^2(s+2)}\right\} =$$

$$= \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{C_1}{s^2} + \frac{C_2}{s} + \frac{C_3}{s+2}\right\}$$

$$C_1 = \lim_{s\to 0} \cancel{s^2} \cdot \frac{2}{\cancel{s^2}(s+2)} \Rightarrow \boxed{C_1 = 1}$$

$$C_2 = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left[\cancel{s^2} \cdot \frac{2}{\cancel{s^2}(s+2)}\right] = \lim_{s\to 0} \frac{0 - 2\cdot 1}{(s+2)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = -\frac{1}{2}}$$

$$C_3 = \lim_{s\to -2} (\cancel{s+2}) \frac{2}{s^2\cancel{(s+2)}} \Rightarrow \boxed{C_3 = \frac{1}{2}}$$

$$G_0(z) = \frac{z-1}{z}\, \mathcal{Z}\left\{ \underbrace{\frac{1}{s^2}}_{(kT)h(kT)} - \underbrace{\frac{1/2}{s}}_{\frac{1}{2}h(kT)} + \underbrace{\frac{1/2}{s+2}}_{\frac{1}{2}e^{-2kT}h(kT)} \right\} \Big/ \mathcal{L}^{-1}$$

$$G_0(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \left[\frac{2T}{(z-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-e^{-2T}} \right]$$

$$G_0(z) = \frac{T}{z-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{z-1}{z-e^{-2T}} =$$

$$\boxed{G_0(z) = \frac{(e^{-2T}+2T+1)z + 1 - e^{-2T} - 2Te^{-2T}}{2(z-1)(z-e^{-2T})}}$$

$$\boxed{a(z) = 1 + G_0(z) = 2z^2 + (2T - 3 - e^{-2T})z + 1 + e^{-2T} - 2Te^{-2T}}$$

a) $\underline{T = 0{,}02\,s}$: $\underline{a(z) = 2z^2 - 3{,}9208z + 1{,}9224}$

б) $\underline{T = 0{,}2\,s}$: $\underline{a(z) = 2z^2 - 3{,}2703z + 1{,}4022}$

в) $\underline{T = 1\,s}$: $\underline{a(z) = 2z^2 - 1{,}1353z + 0{,}8646}$

$$z = e^{sT} \rightarrow s = \frac{1}{T}\ln(z)$$

$$s_{1/2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1^\circ)\ \zeta\omega_n = |Re\{s\}| \\ 2^\circ)\ \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = |Im\{s\}| \end{array}}$$

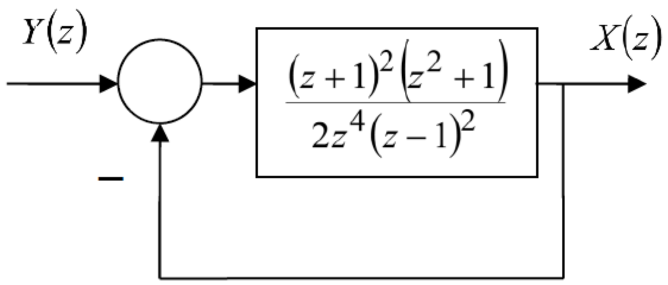
1.29. Да се определат константите на грешка и стационарната грешка за затворениот дискретен систем од сл.1.30, ако на неговиот влез дејствуваат сигналите:

$$y_1(kT)=\frac{1}{2}h(kT) \quad /Z \rightarrow \quad Y_1(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-1} \tag{1.184}$$

$$y_2(kT)=\frac{1}{2}kTh(kT) \quad /Z \rightarrow \quad Y_2(z)=\frac{1}{2}\;\frac{zT}{(z-1)^2} \tag{1.185}$$

$$y_3(kT)=\frac{1}{2}(kT)^2 h(kT) \quad /Z \rightarrow \quad Y_3(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{T^2}{2}\cdot\frac{z(z+1)}{(z-1)^2} \tag{1.186}$$

соодветно.



Слика 1.30. Илустрација кон Задача 1.29

$$G_0(z)=\frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4\underbrace{(z-1)^2}}$$ → астатизам од II ред

$$K_p=\lim_{z\to 1} G_0(z) \Rightarrow \boxed{K_p=\infty}$$

$$K_v=\lim_{z\to 1}(z-1)G_0(z) \Rightarrow \boxed{K_v=\infty}$$

$$K_a=\lim_{z\to 1}(z-1)^2 G_0(z)=\frac{(1+1)^2(1^2+1)}{2\cdot 1^4} \Rightarrow \boxed{K_a=4}$$

1) $Y_1 = \underbrace{\frac{1}{2}}_{C_0} \cdot \frac{z}{z-1} \Rightarrow \underline{C_0 = \frac{1}{2}}$

$$e_1(\infty) = \frac{C_0}{1 + \cancel{K_p}^{\infty}} \Rightarrow \boxed{e_1(\infty) = 0}$$

2) $Y_2 = \underbrace{\frac{1}{2}}_{V_0} \cdot \frac{z\boxed{T}}{(z-1)^2} \Rightarrow \underline{V_0 = \frac{T}{2}}$

$$e_2(\infty) = \frac{V_0}{\cancel{K_v}^{\infty}} \Rightarrow \boxed{e_2(\infty) = 0}$$

3) $Y_3 = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{T^2}{2}}_{\frac{a_0}{2}} \cdot \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{T^2}{4}$

$\Rightarrow \underline{a_0 = \frac{T^2}{2}}$

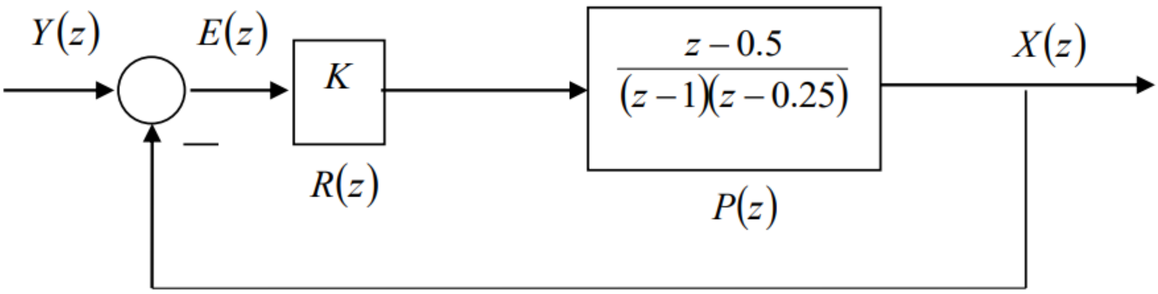
$$e_3(\infty) = \frac{a_0}{K_a} \Rightarrow \boxed{e_3(\infty) = \frac{T^2}{8}}$$

$T \nearrow$, $e(\infty) \nearrow$

$T \searrow$, $e(\infty) \searrow$

Задача 3.14. Даден е затворениот дискретен систем од Слика 3.31. Под претпоставка, $T = 1s.$ и $0 < K < \frac{5}{3}$. Да се определи дали овој систем може да следи влезна возбуда од облик $y(kT) = kTh(kT)$ и да се пресмета големината на евентуалната стационарна грешка во зависност од параметарот K.

$$Y(z) = \frac{zT}{(z-1)^2}$$



Слика 3.31. Илустрација кон Задача 3.14

$$G_o(z) = R(z) \cdot P(z) = \frac{K(z-0{,}5)}{(z-1)(z-0{,}25)} \cdot \frac{4}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_o(z) = \frac{2K(2z-1)}{(z-1)(4z-1)}}$$

$$E(z) = X(z) - Y(z) = \frac{1}{1+G_o(z)} Y(z)$$

$$E(z) = \frac{1}{\frac{(z-1)(4z-1)+2K(2z-1)}{\cancel{(z-1)}(4z-1)}} \cdot \frac{z\overset{T=1s.}{T}}{(z-1)^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{E(z) = \frac{z(4z-1)}{(z-1)\left[4z^2+(4K-5)z+1-2K\right]}}$$

$$a(z) = 1 + G_0(z) = \underbrace{4}_{a_2}z^2 + \underbrace{(4k-5)}_{a_1}z + \underbrace{1-2k}_{a_0}$$

<u>Jury</u>:
$$\begin{cases} a(1) > 0 & 1^\circ \\ (-1)^n \cdot a(-1) > 0 & 2^\circ \\ |a_2| > |a_0| & 3^\circ \end{cases}$$

1°, 2° } потребни услова

3° } доволен услов

1°) $a(1) = 4 \cdot 1^2 + (4k-5) \cdot 1 + 1 - 2k > 0$

$\Rightarrow 2k > 0$

$\boxed{k > 0}$

2°) $a(-1) = 4 \cdot (-1)^2 + (4k-5) \cdot (-1) + 1 - 2k > 0$

$\Rightarrow 4 - 4k + 5 + 1 - 2k > 0$

$-6k > -10$

$k < \cancel{\frac{10}{6}}$ $\boxed{k < \frac{5}{3}}$

3°) $|a_2| > |a_0| \Rightarrow |4| > |1 - 2k|$

$2k > -3$

$\boxed{k > -\frac{3}{2}}$

* од 1°), 2°) и 3°) $\Rightarrow$ $\boxed{0 < k < \frac{5}{3}}$

$$e(\infty) = \lim_{z\to 1} (z-1)E(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z(4z-1)}{4z^2+(4k-5)z+1-2k}$$

$$\Rightarrow \boxed{e(\infty) = \frac{3}{2k}} \Rightarrow \begin{array}{l} k \nearrow,\ e(\infty) \searrow \\ k \searrow,\ e(\infty) \nearrow \end{array}$$

1°) ako $k = 0 + \xi$ $\bar{\text{m}}.\text{m}.$ $\xi \to 0$

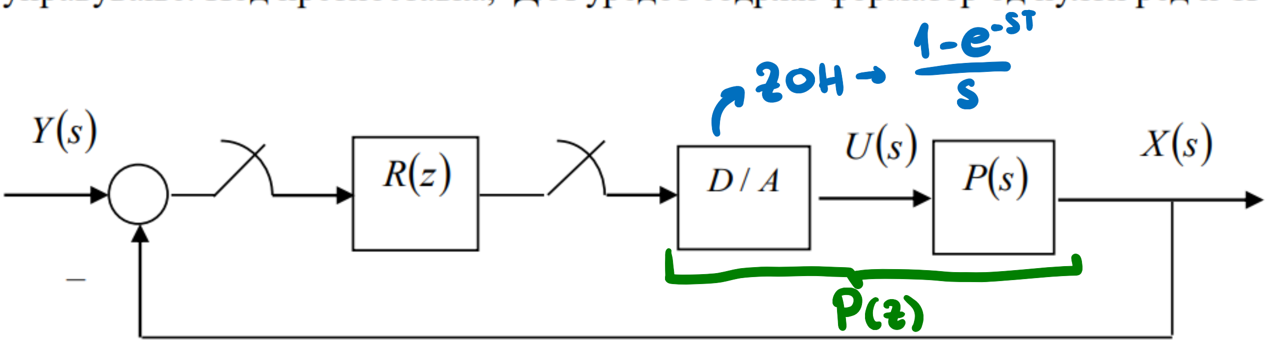
$$e(\infty) = \frac{3}{2\cdot(0+\cancel{\xi}^{\,0})} \approx \infty$$

2°) ako $k = \frac{5}{3} - \xi$ $\bar{\text{m}}.\text{m}.$ $\xi \to 0$

$$e(\infty) = \frac{3}{2\cdot(\frac{5}{3} - \cancel{\xi}^{\,0})} \approx \frac{3}{\frac{10}{3}} \approx \frac{9}{10} \approx 0{,}9$$

$$\boxed{e(\infty) \in (0{,}9\ ,\ \infty)}$$

Задача 3.15. Да се определат дискретните вредности $x(kT)$ на одзивот $x(t)$ на затворениот дискретен систем на автоматско управување од Слика 3.32, $(k=0,1,2,\dots;T=const.>0)$, доколку на неговиот влез дејствува отскочната возбуда $y(t)=h(t)$, а дигиталниот регулатор $R(z)$ реализира дискретен еквивалент на конвенционалниот И-управувачки закон $y(t)=K_i\int_0^t e(\tau)d\tau=\int_0^t e(\tau)d\tau$. Објектот на управување е опишан со преносната функција $P(s)=\frac{K}{T_0 s+1}e^{-Ts}$, каде што $T=1s$ е периодот на дискретизација, а $T_0=\frac{T}{\ln 2}$ е временската константа на објектот на управување. Под претпоставка, Д/А уредот содржи форматор од нулти ред и $K=\frac{1}{8}$.



Слика 3.32. Илустрација кон Задача 3.15

$$P(s)=\underbrace{\frac{K}{T_0 s+1}}_{P_0(s)}\cdot\underbrace{e^{-Ts}}_{\text{временско доцнење}} \quad /\mathcal{L}^{-1}$$

$$p(t)=p_0(t)\Big|_{t=t-T}$$

$$p(t)=p_0(t-T)$$

$\underline{t=kT}$ $\Rightarrow$ $p(kT)=p_0(kT-T)=p_0[(k-\underbrace{1}_{\text{задоцнување}})T]$ $/\mathcal{Z}$

$$\boxed{P(z)=P_0(z)\cdot z^{-1}}$$

$$P(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{\boxed{1-e^{-sT}}}{s} \cdot \frac{K}{T_0 s + 1} \cdot \underbrace{e^{-sT}}\right\}$$

$$P(z) = \frac{z-1}{z} \cdot z^{-1} \cdot \mathcal{Z}\left\{\frac{K}{s(T_0 s + 1)}\right\}$$

$$P(z) = \frac{z-1}{z^2} \cdot \mathcal{Z}\left\{\frac{K}{T_0 s\left(s + \frac{1}{T_0}\right)}\right\}$$

$$P(z) = \frac{z-1}{z^2} \cdot \mathcal{Z}\left\{\frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s + \frac{1}{T_0}}\right\}$$

$$C_1 = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{K}{T_0 \cancel{s}\left(s + \frac{1}{T_0}\right)} \Rightarrow \boxed{C_1 = K}$$

$$C_2 = \lim_{s \to -\frac{1}{T_0}} \cancel{\left(s + \frac{1}{T_0}\right)} \frac{K}{T_0 s \cancel{\left(s + \frac{1}{T_0}\right)}} \Rightarrow \boxed{C_2 = -K}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{z-1}{z^2} \mathcal{Z}\left\{\underbrace{\frac{K}{s}}_{K\,h(kT)} - \underbrace{\frac{K}{s + \frac{1}{T_0}}}_{-Ke^{-\frac{1}{T_0}kT}\,h(kT)}\right\}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{z-1}{z^2}\left[\frac{Kz}{z-1} - \frac{Kz}{z - e^{-\frac{T}{T_0}}}\right] =$$

$$= \frac{K}{z} - \frac{K(z-1)}{z\left(z - e^{-\frac{T}{T_0}}\right)}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{K\left(1 - e^{-\frac{T}{T_0}}\right)}{z\left(z - e^{-\frac{T}{T_0}}\right)}$$

$$* \quad \left. \begin{array}{l} T_0 = \dfrac{T}{\ln 2} \\ T = 1 \text{ s.} \\ K = \dfrac{1}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P(z) = \frac{1}{8z(2z-1)}}$$

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$x(kT) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$$

$$X(z) = G(z) \cdot Y(z) = \frac{R(z)P(z)}{1 + R(z)P(z)} \cdot Y(z)$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{z}{(z-1)(16z^2 - 24z + 9)}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(z) = \frac{z}{(z-1)\left(z - \frac{3}{4}\right)^2}}$$

$$x(kT) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} =$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{\left(z - \frac{3}{4}\right)^2}\right\} =$$

$$= \underbrace{\operatorname{Res}_{z \to 1} X(z) z^{k-1}} + \underbrace{\operatorname{Res}_{z \to \frac{3}{4}} X(z) z^{k-1}}$$

1°) $\underset{z\to 1}{\mathrm{Rez}}\, X(z)\, z^{k-1} = \left[\cancel{(z-1)} \cdot \frac{z \cdot z^{k-1}}{\cancel{(z-1)}(z-\frac{3}{4})^2}\right]_{z=1} =$

$$= \left[\frac{z^k}{(z-\frac{3}{4})^2}\right]_{z=1} \Rightarrow \boxed{16}$$

2°) $\underset{z\to \frac{3}{4}}{\mathrm{Rez}}\, X(z)\, z^{k-1} = \frac{d}{dz}\left[(z-\frac{3}{4})^2 \cdot \frac{z^k}{(z-1)(z-\frac{3}{4})^2}\right]_{z=\frac{3}{4}} =$

$$= \frac{d}{dz}\left[\frac{z^k}{z-1}\right]_{z=\frac{3}{4}} =$$

$$= \boxed{-16\left[1+\frac{1}{3}k\right]\left(\frac{3}{4}\right)^k}$$

$$\boxed{x(kT) = \begin{cases} 0, & kT < 0 \\ 16 - 16\left[1+\frac{1}{3}k\right]\left(\frac{3}{4}\right)^k, & kT > 0 \end{cases}}$$