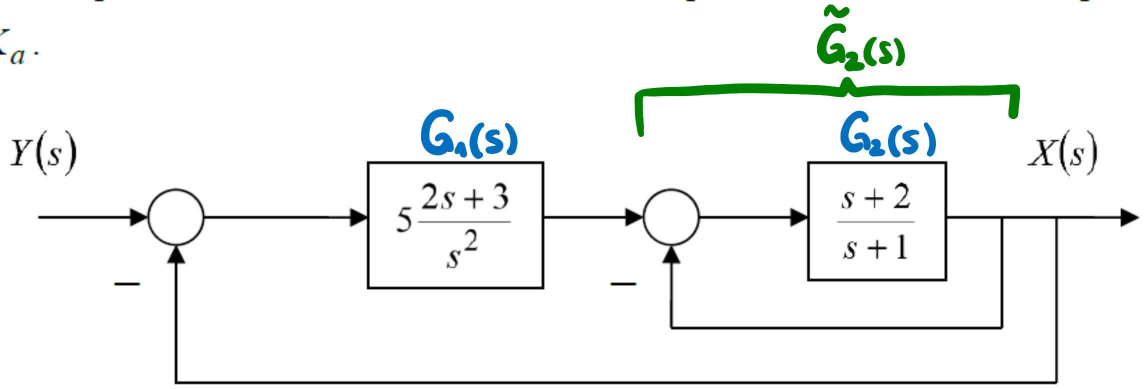
16.10.2024

Проектирање на системи на автоматско управување

Фреквенциски карактеристики на квалитетот на одзивот

1.28. За затворениот систем од Слика 1.29 да се определат константите на грешка K_p, K_v и K_a.



Слика 1.29. Илустрација кон Задача 1.28

Потоа да се определи стационарната грешка на системот, доколку на неговиот влез е доведен референтен сигнал:

$$y(t) = \left(2 + 3t + 5t^2\right)h(t) \tag{1.170}$$

$$\tilde{G}_2(s) = \frac{G_2(s)}{1+G_2(s)} \Rightarrow \boxed{\tilde{G}_2(s) = \frac{s+2}{2s+3}}$$

$$G_0(s) = G_1(s)\cdot\tilde{G}_2(s) = \boxed{\frac{5s+10}{s^2}}$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} G_0(s) \Rightarrow \boxed{K_p = \infty}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_0(s) \Rightarrow \boxed{K_v = \infty}$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G_0(s) \Rightarrow \boxed{K_a = 10}$$

$$\frac{a_0}{2} \Rightarrow a_0 = 10$$

$$y(t) = \underbrace{\overset{C_0}{\boxed{2}}h(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{\overset{V_0}{\boxed{3}}t\,h(t)}_{y_2(t)} + \underbrace{\overset{\frac{a_0}{2}}{\boxed{5}}t^2 h(t)}_{y_3(t)}$$

$$e(t) = e_1(t) + e_2(t) + e_3(t)$$

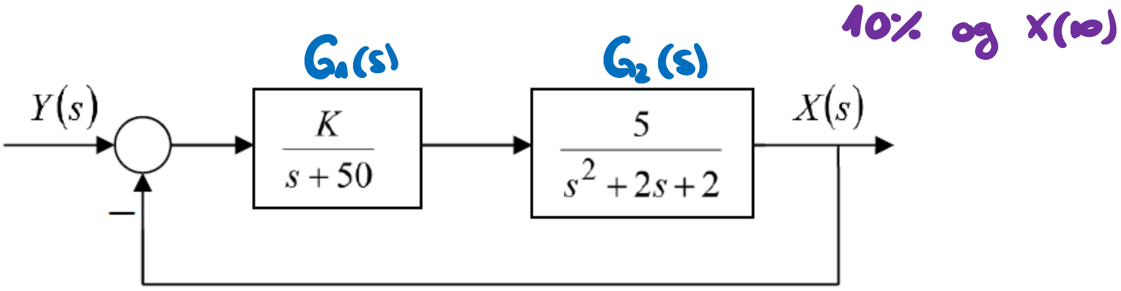
$$e_1(t) = 0$$

$$e_2(t) = 0 \qquad \Rightarrow \quad e(t) = 0 + 0 + 1 = \boxed{1}$$

$$e_3(t) = \frac{10}{10} = 1$$

1.31. Даден е затворениот САУ од Слика 1.32. Да се определи приближниот модел од втор ред за неговиот отворен систем. Потоа, за вака апроксимираниот затворен систем, да се определи вредноста на параметарот K за која стационарната вредност на грешката на неговиот отскочен одѕив ќе изнесува приближно 10% од трајната вредност на одѕивот.

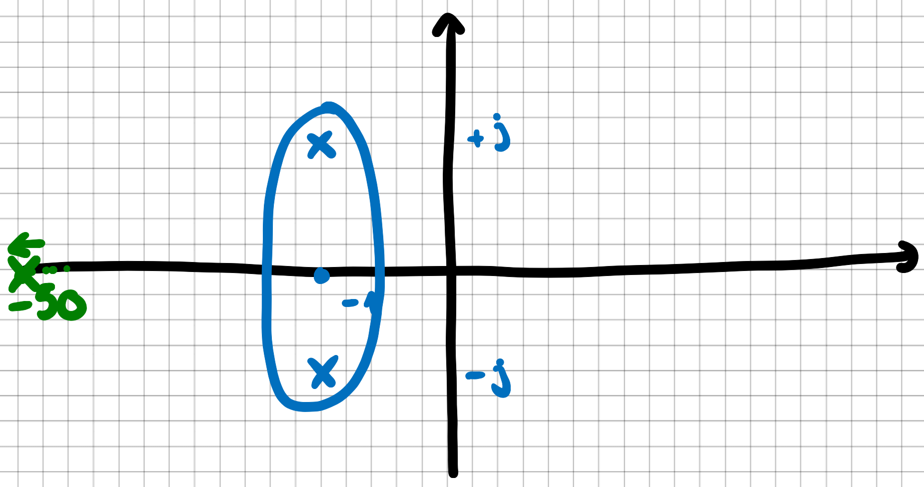
10% од $X(\infty)$



Слика 1.32. Илустрација кон Задача 1.31

$$G_0(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{5K}{(s+50)(s^2+2s+2)}$$

а) $\boxed{s_{1/2} = -1 \pm j}$ $\boxed{s_3 = -50}$



$$\tilde{K} = \frac{\cancel{5}K}{5\cancel{0}} = \boxed{\frac{K}{10}}$$

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{\tilde{K}}{s^2+2s+2}$$

б) $K = ?$ т.ш. $e(\infty) = 0{,}1 \cdot X(\infty)$

$$Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

$$X(s) = \tilde{G}(s) \cdot Y(s)$$

$$\tilde{G}(s) = \frac{\tilde{G}_0(s)}{1+\tilde{G}_0(s)} \Rightarrow \boxed{X(s) = \frac{\tilde{k}}{s(s^2+2s+2+\tilde{k})}}$$

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} s X(s) = \boxed{\frac{\tilde{k}}{2+\tilde{k}}}$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} \tilde{G}_0(s) = \frac{\tilde{k}}{2} \Rightarrow e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = \boxed{\frac{2}{2+\tilde{k}}}$$

$$e(\infty) = 0{,}1 \cdot x(\infty)$$

$$\frac{2}{\cancel{2+\tilde{k}}} = 0{,}1 \cdot \frac{\tilde{k}}{\cancel{2+\tilde{k}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{k} = 20} \Rightarrow K = 10 \cdot \tilde{k} = \boxed{200}$$

1.14. Да се определат резонантниот врв M_r и резонантната фреквенција ω_r за континуалниот систем со преносна функција:

$$G(s)=\frac{5}{s^2+2s+5} \tag{1.110}$$

$\underline{s \to j\omega}$

$$G(j\omega)=\frac{5}{(j\omega)^2+2j\omega+5}$$

$$G(j\omega)=\frac{5}{\underbrace{(5-\omega^2)}_{Re}+j\underbrace{2\omega}_{Im}}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{5}{\sqrt{25-10\omega^2+\omega^4+4\omega^2}}$$

$$\boxed{|G(j\omega)|=\frac{5}{\sqrt{\omega^4-6\omega^2+25}}}$$

$\underline{M_r \to \max|G(j\omega)| \text{ при } \omega=\omega_r}$

$$\omega_r = \frac{d}{d\omega}|G(j\omega)|=0$$

$$\frac{d}{d\omega}|G(j\omega)|=\frac{0-5\cdot\frac{4\omega^3-12\omega}{2\sqrt{\omega^4-6\omega^2+25}}}{\omega^4-6\omega^2+25}=0$$

$$\frac{d}{d\omega}|G(j\omega)|=\frac{10\omega(\omega^2-3)}{(\omega^4-6\omega^2+25)^{3/2}}=0 \Rightarrow 10\omega(\omega^2-3)=0$$

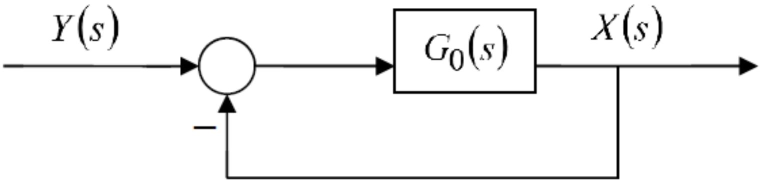
$\omega^2=3$ $\qquad$ $\omega=0$ ✗

$\boxed{\omega_r=\sqrt{3}}$ ✓

$$M_r=|G(j\omega_r)|=\boxed{\frac{5}{4}}$$

1.15. Даден е затворениот континуален систем со единична негативна повратна врска од Слика 1.18. Преносната функција на соодветниот отворен систем е:

$$G_0(s)=\frac{(6s+1)}{(2s+1)(4s+1)} \tag{1.115}$$



Слика 1.18. Илустрација кон Задача 1.15

Да се определат пресечната фреквенција на засилување и резервата на фаза за овој систем.

$\omega_1 = ?$

$\varphi_r = ?$

$$G_0(j\omega) = \frac{\overbrace{(1+j6\omega)}^{+}}{\underbrace{(1+j2\omega)(1+j4\omega)}_{-}}$$

$$\varphi_r = 180^\circ + \arg[G_0(j\omega_1)]$$

$$\arg[G_0(j\omega)] = +\,\mathrm{atan}\left(\frac{6\omega}{1}\right) - \mathrm{atan}\left(\frac{2\omega}{1}\right) - \mathrm{atan}\left(\frac{4\omega}{1}\right)$$

a) $\omega_1 = ?$

$$|G_0(j\omega)| = 1 \rightarrow \omega_1$$

$$|G_0(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+36\omega^2}}{\sqrt{1+4\omega^2}\,\sqrt{1+16\omega^2}} = 1$$

$$\sqrt{1+36\omega^2} = \sqrt{1+4\omega^2}\,\sqrt{1+16\omega^2} \quad \Big/^{2}$$

$$4\omega^4 - \omega^2 = 0$$

$$\omega^2 (4\omega^2 - 1) = 0$$

$$\omega^2 = 0 \quad \times \qquad\qquad 4\omega^2 = 1$$

$$\omega^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \frac{1}{2} \, \text{rad/s}}$$

δ) $\varphi_r = ?$

$$\varphi_r = 180^\circ + \underbrace{\operatorname{atan}(3) - \operatorname{atan}(1) - \operatorname{atan}(2)}_{\approx -36{,}87^\circ}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_r = 143{,}13^\circ}$$

1.16. Да се определи резервата на засилување d на еден затворен континуален САУ, ако соодветниот отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \tag{1.121}$$

1.17. Да се определи резервата на фаза φ_r на системот од претходната задача.

за дома!

1.18. Да се определи врската помеѓу резервата на фаза и факторот на релативно придушување на затворениот систем од втор ред со преносна функција:

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad G_0(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \tag{1.130}$$

$$|G_0(j\omega)|=\frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega^4+4\zeta^2\omega_n^2\cdot\omega^2}}$$

$$\arg[G_0(j\omega)]=-90^\circ-\operatorname{atan}\left(\frac{2\zeta\omega_n}{\omega}\right)$$

$\underline{\omega_1}$:

$$|G_0(j\omega)|=\frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega^4+4\zeta^2\omega_n^2\cdot\omega^2}}=1$$

$$\Rightarrow \quad \omega_n^4=\omega^4+4\zeta^2\omega_n^2\cdot\omega^2$$

$$(\omega^2)_{1/2}=\frac{-\cancel{4}\zeta^2\omega_n^2\,\cancel{\pm}\sqrt{\cancel{16}\zeta^4\omega_n^4+\cancel{4}\omega_n^4}}{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2=-2\zeta^2\underbrace{\omega_n^2}+\sqrt{4\zeta^4\underbrace{\omega_n^4}+\underbrace{\omega_n^4}}$$

$$\boxed{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}=-2\zeta^2+\sqrt{4\zeta^4+1}}$$

$$\arg[G_0(j\omega_1)]=-90^\circ-\operatorname{atan}\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2+\sqrt{4\zeta^4+1}}}$$

$$\varphi_r = 180^\circ + \arg\left[G_o(j\omega_1)\right]$$

$$\boxed{\varphi_r = 90^\circ - \operatorname{atan} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}}}$$

για $\zeta < 0{,}6$: $\boxed{\varphi_r \approx 100 \cdot \zeta}$