06. 11. 2024

Аналитичка синтеза на затворени САУ со примена на интегрален критериум

* Што претставува **аналитичка синтеза** на затворените САУ? → постапка чија цел е да ја **минимизира грешката** што ја прави системот со помош на дадена **функција на цена (интегрален критериум)**.

→ пример за неколку интегрални критериуми:

1°) $J_1 = \int_0^\infty e(t)\,dt$ 2°) $J_2 = \int_0^\infty |e(t)|\,dt$

3°) $J_3 = \int_0^\infty e^2(t)\,dt$

m-ред на броителот

$$E(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

n-ред на именителот

→ за с-м од II ред: $J = \dfrac{a_0 b_1^2 + a_2 b_0^2}{2 a_0 a_1 a_2}$

→ за с-м од III ред: $J = \dfrac{a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_3 \left(b_1^2 - 2 b_0 b_2\right) + a_2 a_3 b_0^2}{2 a_0 a_3 \left(a_1 a_2 - a_0 a_3\right)}$

→ за с-м од IV ред:

$$J = \frac{b_3^2 (a_0 a_1 a_2 - a_0^2 a_3) + a_0 a_1 a_4 (b_2^2 - 2 b_1 b_3) + a_0 a_3 a_4 \left(b_1^2 - 2 b_0 b_2\right)}{2 a_0 a_4 \left(a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4\right)} + \frac{(a_2 a_3 a_4 - a_1 a_4^2) b_0^2}{2 a_0 a_4 \left(a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4\right)}$$

степен на извод

4°) $J_{4i} = \int_0^\infty \sum_{i=1}^{N} c_i \left[e^{(i)}(t)\right]^2 dt \xRightarrow{\text{за } i=1} J_{41} = \int_0^\infty \left[e^2(t) + e'(t)^2\right] dt$

2.2. Да се изврши синтеза на затворениот систем на автоматско управување од долната слика, ако објектот на управување е опишан со преносната функција:

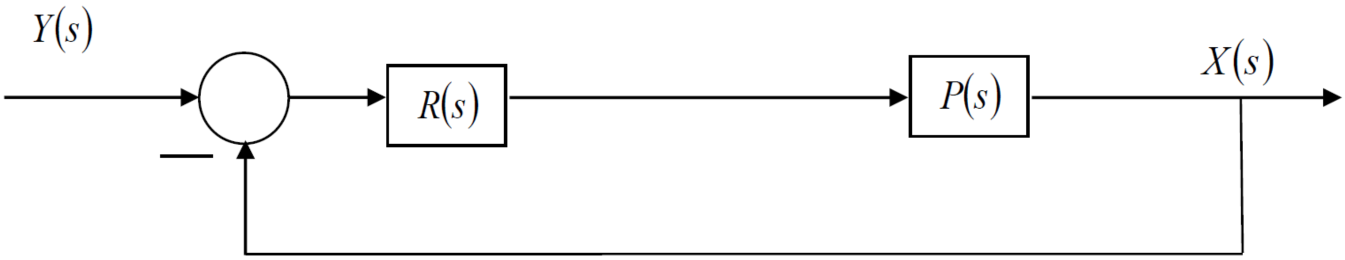
$$P(s)=\frac{1}{s^2+10s+16} \tag{2.21}$$

а за управувач е употребен идеален И-регулатор:

$$R(s)=\frac{K}{s} \tag{2.22}$$

Синтезата да се изврши за отскочен референтен влез според критериумот $J_3=\int\limits_0^{\infty} e^2(t)dt$.

$Y(s)=\frac{1}{s}$



Слика 2.4. Илустрација кон Задача 2.2

$$E(s)=\frac{1}{1+G_0(s)}\cdot Y(s)=\frac{1}{1+\frac{K}{s(s^2+10s+16)}}\cdot\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(s)=\frac{s^2+10s+16}{s^3+10s^2+16s+K}} \quad \Big\} \quad \begin{array}{l} b_2=1;\ b_1=10; \\ b_0=16 \\ \hline a_3=1;\ a_2=10; \\ a_1=16;\ a_0=K \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{J_3=\frac{42K+1280}{K(160-K)}} \leftarrow \underline{\text{од } J_3 \text{ за с-м од III ред}}$$

$$\min J_3 \rightarrow \frac{dJ}{dK}=\frac{42K(160-K)-(42K+1280)(160-2K)}{K^2(160-K)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dJ_3}{dK}=\frac{42K^2+2560K-204800}{K^2(160-K^2)}\underset{\min}{=0}$$

$$\Rightarrow \quad 42k^2 + 2560k - 204.800 = 0 \quad \begin{cases} \nearrow \ \boxed{k_1 = 45,71} \\ \searrow \ \boxed{k_2 = -106,6} \end{cases}$$

* $\underline{a(s) = s^3 + 10s^2 + 16s + k}$

* Рут - Хурвиц:

$$\begin{array}{c|cccc}
s^3 & 1 & 16 & 0 & \\
s^2 & 10 & k & 0 & \\
s^1 & B_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 10 & k \end{vmatrix}}{10} = \dfrac{-k+160}{10} & & B_2 = \dfrac{-\begin{vmatrix} 16 & 0 \\ k & 0 \end{vmatrix}}{10} = 0 & 0 \\
s^0 & C_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix} 10 & k \\ B_1 & 0 \end{vmatrix}}{B_1} = k & & 0 & 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad B_1 > 0 \quad \wedge \quad C_1 > 0$$

$$B_1 > 0 \ \Downarrow \ \frac{-k+160}{10} > 0 \ \Rightarrow \ \boxed{k < 160}$$

$$C_1 > 0 \ \Downarrow \ \boxed{k > 0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0 < k < 160}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{k_1 = 45,71}$$

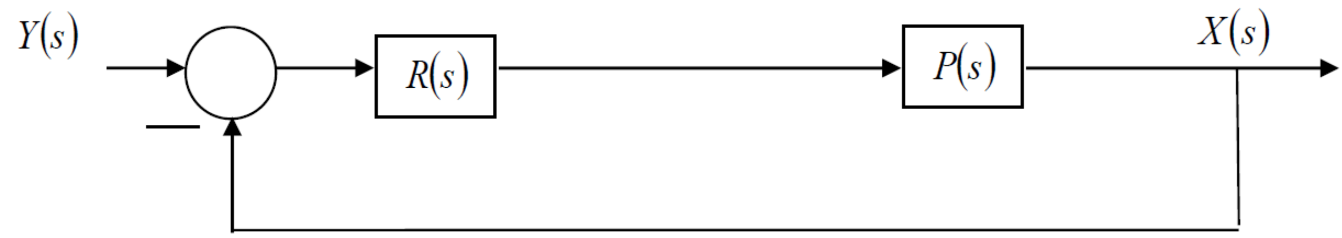
2.5. Да се проектира затворен систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска како на Слика 2.8, во кој за управувач е усвоен идеален И-регулатор:

$$R(s) = \frac{K}{s} \tag{2.35}$$

а објектот на управување е систем од втор ред, опишан со следната преносна функција:

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \tag{2.36}$$

Синтезата на управувањето да се изврши за отскочен референтен влез најнапред според критериумот $J_3 = \int_0^\infty e^2(t)dt$, а потоа и според критериумот $J_{41} = \int_0^\infty \{e^2(t) + [e'(t)]^2\}dt$.



Слика 2.8. Илустрација кон Задача 2.5

$$E(s) = \frac{1}{1 + R(s)P(s)} \cdot Y(s) = \boxed{\frac{s^2 + 2s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s + K}}$$

$b_2 = 1$; $b_1 = 2$; $b_0 = 5$

$a_3 = 1$; $a_2 = 2$; $a_1 = 5$; $a_0 = K$

a) $\boxed{J_3 = \frac{50 - K}{2K(10 - K)}}$

$$\frac{dJ}{dK} \Rightarrow -2K^2 + 200K - 1000 = 0$$

$$K^2 - 100K + 500 = 0$$

$$K_{1/2} = \frac{100 \pm \sqrt{10.000 - 2000}}{2}$$

$\boxed{K_1 \approx 5}$

$\boxed{K_2 \approx 95}$

* Руш - Хурвиц: $a(s) = s^3 + 2s^2 + 5s + k$

s^3	1	5	0
s^2	2	k	0
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & k \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{-k+10}{2}$	0	0
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 2 & k \\ B_1 & 0 \end{vmatrix}}{B_1} = k$	0	0

$B_1 > 0 \ \wedge \ C_1 > 0$

$\Downarrow$

$\boxed{0 < k < 10}$

$\Downarrow$

$\boxed{k_1 \approx 5}$ ✓

δ) $J_{41} = \int_0^\infty \{e^2(t) + [e'(t)]^2\} dt =$

$= \int_0^\infty e^2(t) dt + \int_0^\infty [e'(t)]^2 dt =$ J_3

$= J_3 + \int_0^\infty [e'(t)]^2 dt = \boxed{J_3 + \underline{J_4}}$

$J_4 \rightarrow \quad e'(t) = e_1(t)$

$\Rightarrow J_4 = \int_0^\infty e_1^2(t)\,dt$

$E_1(s) = \mathcal{L}\{e_1(t)\} =$

$= \mathcal{L}\{e'(t)\} = sE(s) - e(0)$

$$e(0) = ? \Rightarrow \lim_{s\to\infty} sE(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^3+2s^2+5s}{s^3+2s^2+5s+k} =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{\cancel{s^3}\left(1+\cancel{\frac{2}{s}}^{\,0}+\cancel{\frac{5}{s^2}}^{\,0}\right)}{\cancel{s^3}\left(1+\cancel{\frac{2}{s}}^{\,0}+\cancel{\frac{5}{s^2}}^{\,0}+\cancel{\frac{k}{s^3}}^{\,0}\right)} \Rightarrow \boxed{e(0) = 1}$$

$$E_1(s) = sE(s) - 1 = \boxed{\frac{-k}{s^3+2s^2+5s+k}}$$

$b_0 = -k$

$a_3 = 1;\ a_2 = 2;$

$a_1 = 5;\ a_0 = k$

$$\Rightarrow \boxed{J_4 = \frac{2k^2}{2k(10-k)}}$$

$$J_{41} = J_3 + J_4 = \frac{50-k}{2k(10-k)} + \frac{2k^2}{2k(10-k)}$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{41} = \frac{2k^2-k+50}{2k(10-k)}}$$

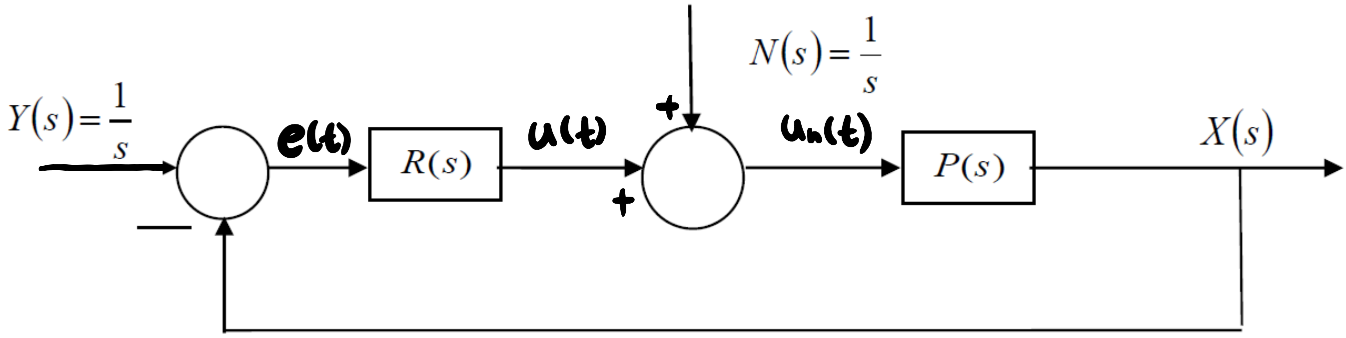
$$\frac{dJ_{41}}{dk} \Rightarrow 19k^2 + 100k - 500 = 0$$

$\boxed{k_1 = 3{,}134}$

$\boxed{k_2 = -8{,}397}$

$$\Rightarrow \boxed{k_1 = 3{,}134}$$

2.15. Да се изврши комбинирана синтеза на затворениот систем на автоматско управување прикажан на долната слика, во кој објектот на управување $P(s)=\frac{1}{s+2}$ е управува со неидеален И-регулатор $R(s)=\frac{k}{s(s+1)}$. Синтезата да се изврши според интегралниот критериум $J=\int_0^{\infty} e^2(t)dt$.



Слика 2.32. Илустрација кон Задача 2.15

$$\left.\begin{aligned} X(s) &= P(s)\cdot U_n(s) \\ U_n(s) &= N(s) + U(s) \\ U(s) &= R(s)E(s) \\ E(s) &= Y(s) - X(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1+R(s)P(s)}\cdot Y(s) - \frac{P(s)}{1+R(s)P(s)}\cdot N(s)$$

$$\boxed{E(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^3+3s^2+2s+k}} \quad \begin{aligned} b_2&=1\\ b_1&=2\\ b_0&=1\\ a_3&=1\\ a_2&=3\\ a_1&=2\\ a_0&=k\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{J_3 = \frac{4k+3}{2k(6-k)}}$$

$$\frac{dJ_3}{dk} \Rightarrow 2k^2+3k-9=0 \quad \begin{aligned} &\nearrow \boxed{k_1=-3} \\ &\searrow \boxed{k_2=1{,}5} \end{aligned}$$

* **Рут - Хурвиц**: за дома $\Rightarrow$ $\boxed{0<k<6}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{k_2 = 1{,}5}$$ ✓

2.22. Да се изврши синтеза на затворениот систем на автоматско управување од долната слика според интегралниот критериум $J=\int_0^\infty e^2(t)dt$. Еден математички модел на објектот $P(s)$ во просторот на состојби е:

$$\underline{v}'(t)=\overset{A}{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}}\underline{v}(t)+\overset{B}{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}u(t) \tag{2.171}$$

$$x(t)=\underset{C}{[1 \quad 0]}\underline{v}(t) + 0\cdot u(t) \tag{2.172}$$

$B_{[n\times m]}$ → бр. на влезови

↳ ред на с-м

$C_{[p\times n]}$

↳ бр. на излези

додека регулаторот $R(s)$ е опишан со равенките:

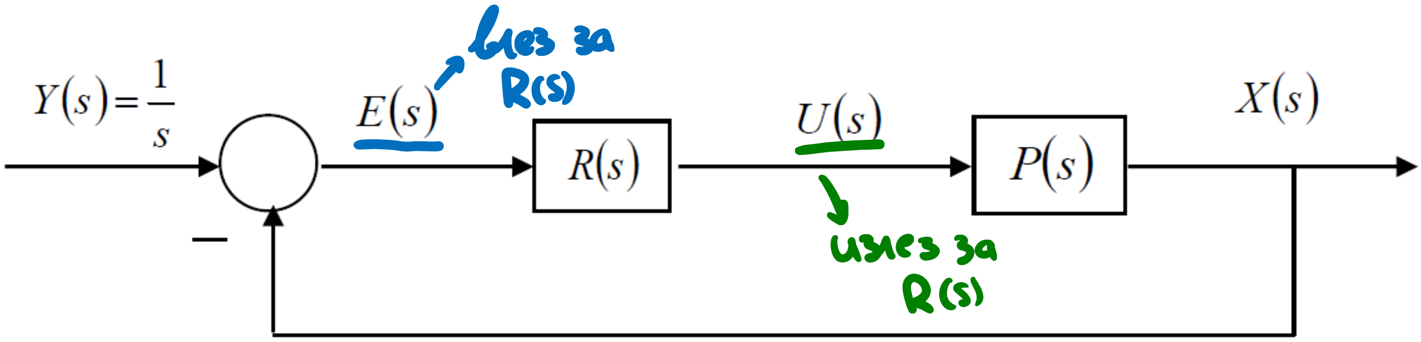
$$G(s)=C\underbrace{\Phi(s)}B+D$$

$$\Phi(s)=[sI-A]^{-1}$$

$$w_1'(t)=-2w_1(t)+e(t) \tag{2.173}$$

$$w_2'(t)=w_1(t) \tag{2.174}$$

$$u(t)=Kw_2(t) \tag{2.175}$$



Слика 2.40. Илустрација кон Задача 2.22

a) $P(s)=[1 \quad 0]\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=$

$$=[1 \quad 0]\cdot\frac{1}{\det(\Phi)}\cdot\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(s)=\frac{1}{s^2+s+2}}$$

δ)

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -2\omega_1 + e \\ \dot{\omega}_2 &= \omega_1 \\ u &= k\omega_2 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & k \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$R(s) = \begin{bmatrix} 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{R(s) = \frac{k}{s(s+2)}}$$

$$\Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + R(s)P(s)} \cdot Y(s) = \boxed{\frac{s^3 + 3s^2 + 3s + 2}{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 4s + k}} \left\{ \begin{aligned} b_3 &= 1 \\ b_2 &= 3 \\ b_1 &= 3 \\ b_0 &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$a_4 = 1 \quad a_3 = 3 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 4 \quad a_0 = k$$

$$\Rightarrow \boxed{J_3 = \frac{-3k^2 + 19k + 32}{k(32 - 9k)^2}}$$

$$\frac{dJ_3}{dk} = 0 \Rightarrow 75k^2 + 576k - 1024 = 0 \; \begin{cases} \boxed{k_1 = -9{,}17} \\ \boxed{k_2 = 1{,}49} \end{cases}$$

* Ρyū - Χyρbuy: $a(s) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 4s + k$

$$\Rightarrow \boxed{0 < k < 3{,}55}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{k_2 = 1{,}49} \; ✓$$

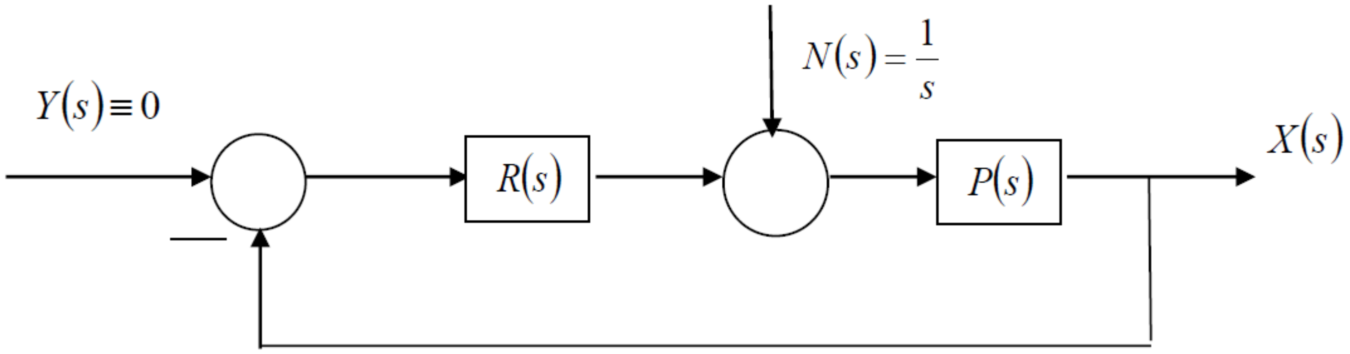
2.12. Со помош на интегралниот критериум $J=\int_0^{\infty} e^2(t)dt$, да се проектира затворен систем на автоматско управување како на сл.2.21, ако објектот на управување има динамика од четврти ред од облик:

$$P(s)=\frac{1}{4s^3+9s^2+2s+1} \tag{2.93}$$

додека за управувач е употребен идеален ПИ-регулатор:

$$R(s)=K_1+\frac{K_2}{s} \tag{2.94}$$

Синтезата има за цел да се минимизира влијанието на пречките во системот.



*** Во MATLAB:**

$$E_n(s)=\frac{-P(s)}{1+R(s)P(s)}\cdot N(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(s)=\frac{1}{4s^4+9s^3+2s^2+(k_1+1)s+k_2}}$$

$b_{3,2,1}=0$

$b_0=1$

$a_4=4$

$a_3=9$

$a_2=2$

$a_1=k_1+1$

$a_0=k_2$

$$\Rightarrow \boxed{J_3=\frac{56-16k_1}{8k_2\left[18k_1-81k_2-4(k_1+1)^2+18\right]}}$$

* се бара минимум и по k_1 и по k_2!

$$\frac{dJ_3}{dk_1} = 0 \Rightarrow -4k_1^2 + 28k_1 + 81k_2 - 49 = 0 \quad \text{I}$$

$$\frac{dJ_3}{dk_2} = 0 \Rightarrow (2k_1 - 7)(-2k_1^2 + 5k_1 - 81k_2 + 7) = 0 \quad \text{II}$$

* се решава систем со р-ките I и II и се добива:

1°) $\boxed{(k_1, k_2) = \left(\frac{7}{2}, 0\right)}$ 2°) $\boxed{(k_1, k_2) = \left(2, \frac{1}{9}\right)}$

* Рут-Хурвиц : $a(s) = 4s^4 + 9s^3 + 2s^2 + (k_1 + 1)s + k_2$

$$\Rightarrow \boxed{-1 < k_1 < \frac{7}{2}}$$

$$\boxed{k_2 < \frac{4k_1^2 + 12k_1 + 7}{81}}$$

* за k_2: