Univerza v Ljubljani
Fakulteta za Matematiko in Fiziko

Fotonika

skripta

prof. dr. Martin Čopič

Ljubljana, 2011

Kazalo

1 Koherenca

Pojem koherence svetlobe je povezan s pojavom interference. Ohlapno pravimo, da je svetloba, s katero se posrečijo interferenčni poskusi, koherentna. Poskusimo definirati pojem koherence bolj natančno.

Da bomo razumeli, zakaj ni mogoče z vsakim svetlobnim izvorom opazovati interferenčnih pojavov, vzemimo interferenco na dveh režah. Pri običajni enostavni obravnavi predpostavimo, da sta obe reži osvetljeni z ravnim valovanjem, tako da imata delni valovanji, ki izhajata iz rež, ves čas poskusa enako fazno razliko. Interferenčni vzorec na oddaljenem zaslonu je tedaj le posledica razlike poti obeh valovanj od rež do dane točke zaslona. Predpostavka konstantne faze valovanja, ki vpada na reži, pa je do neke mere upravičena le, če je izvor kvaliteten laser, kot bomo videli kasneje, pri običajnih svetilih pa ne.

Faza svetlobe običajnega svetila se slučajno spreminja s karakterističnim časom, ki je skoraj vedno bistveno krajši kot čas, v katerem lahko opazujemo interferenco. Če je zakasnitev enega delnega valovanja proti drugemu, ki nastane zaradi različno dolgih poti, večja kot karakteristični čas spreminjanja faze, bomo na danem mestu zaslona imeli zdaj konstruktivno, zdaj destruktivno interferenco in v dolgem času opazovanja interferenca ne bo vidna.

Spreminja se tudi fazna razlika valovanja v obeh režah. To moramo prišteti fazni razliki zaradi različno dolgih poti do zaslona, zaradi česar se na zaslonu interferenčna proga nekoliko premakne. Ker se fazna razlika na režah s časom spreminja, poplesavanje interferenčnih prog delno ali v celoti izpovpreči interferenčni vzorec, odvisno od povprečne velikosti fazne razlike med obema režama.

Razložimo, zakaj se faza svetlobe običajnih svetil slučajno spreminja. Naj bo izvor plinska razelektritvena cev. Z ustreznim filtrom izberimo eno samo spektralno črto, ki ima seveda končno frekvenčno širino. V splošnem je ta posledica naravne širine, razširitve zaradi trkov in zaradi Dopplerjevega pojava. Da bo razaprava kar se da enostavna, naj dominira razširitev zaradi trkov, Dopplerjevo pa zanemarimo.

Električna poljska jakost v izbrani točki prostora je vsota delnih valov, ki izvirajo iz raznih delov izvora. Vsak atom, naj jih bo N, seva neodvisno, zato so tudi delna valovanja med seboj neodvisna. Konstantno fazo ohranjajo v času med dvema trkoma atoma, recimo mu t_c. Njihovo vsoto je moč predstaviti v kompleksni ravnini, kjer je amplituda delnih valovanj modul, faza pa argument, kot kaže slika 2.1. Faza celotnega polja je očitno tudi slučajna in se gotovo povsem spremeni v času, ko se spremeni faza posameznih pripsevkov, to je t_c, povprečna velikost skupne amplitude je nič, povprečni kvadrat skupnega polja, ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka, pa je NE_1^2, kjer je E_1 amplituda sevanega polja posameznega atoma. Shematično kaže amplitudo celotnega polja kot funckijo časa slika 2.2, gostoto toka pa slika 2.3. Približno konstantna faza se v izbrani točki ohranja v času t_c, ki ga imenujmo koherenčni čas. S tako svetlobo bomo videli interferenco, če bo razlika poti delnih valovanj manjša od $c\,t_c$.

Koherenčni čas je zvezan s spektralno širino svetlobe. Rekli smo, da je t_c čas, ki ga imajo atomi na voljo, da nemoteno sevajo. Valovni paket dolžine t_c mora vsebovati frekvence v pasu $\Delta\omega$, za katerega velja $t_c\Delta\omega \sim 1$. Koherenčni čas je torej kar reda velikosti obratne vrednosti spektralne širine svetlobe.

Kako pa je s fazno razliko valovanj v dveh točkah, ki sta nekoliko razmaknjeni v smeri pravokotno na širjenje svetlobe? Prispevki iz različnih delov svetila opravijo do obeh točk različno dolgo pot, zato se tudi faza med njima spremeni. Razlika faz bo tem večja, čim bolj sta razamaknjeni točki in čim razsežnejše je svetilo. Obenem se seveda spreminja v času t_c. Interferenco na dveh režah dobimo, če sta razmaknjeni le toliko, da je povprečna fazna razlika manjša od 2π. Največjemu prečnemu razmiku, ki še da interferenco, recimo prečna koherenčna razdalja d_c. Ta je sorazmerna z velikostjo svetila, kot bomo podrobneje videli v razdelku 1.3.

Velja poudariti, da je pojem koherence statističen. V času, ki je kratek v primerjavi s t_c, se vedno seštevajo amplitude valovanj in dobimo neko interferenčno sliko. Ta se slučajno spreminja z značilnim časom t_c in če je čas opazovanja mnogo daljši, dobimo le povprečeno sliko, pri kateri interferenčne proge izignejo, kadar so razlike poti večje od ct_c ali razmik rež večji od d_c.

1.1 Časovna koherenca

Časovno koherenco je najlažje obravnavati na primeru Michelsonovega interferometra, ki ga kaže slika 2.4. Valovanje iz točke P razdelimo na polprepustnem zrcalu na dva delna snopa in enega s premikanjem zrcala zakasnimo. Z zaslonko dosežemo, da na interferometer res pade le valovnaje iz točke P, s kolimacijsko lečo pa doesežemo, da je čim več žarkov, ki izhajajo iz P, paralelnih z osjo interferometra. Moč, ki jo zazna detektor, je sorazmerna s kvadratom električne poljske jakosti obeh delnih valovanj:

$$|E_d(t)|^2 = |E(t) + E(t+\tau)|^2 = |E(t)|^2 + |E(t+\tau)|^2 + 2ReE(t)E^*(t+\tau)\ . \qquad (1.1.1)$$

Zakasnitev τ je določena s premikom pomičnega zrcala, $\tau = 2x/c$. Navadno opazujemo v času T, ki je dolg v primerjavi s koherenčnim časom, zato moramo še povprečiti po času:

$$\begin{aligned} \langle |E|_d|^2\rangle &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |E|_d(t)|^2\,dt \\ &= 2\langle |E|^2\rangle + 2Re\langle E(0)E^*(\tau)\rangle \\ &= 2[I_0 + Re\,G(\tau)]\ . \end{aligned} \qquad (1.1.2)$$

Prvi člen je vsota povprečnih moči obeh delnih snopov, drugi pa opisuje interferenco. V njem smo predpostavili, da je polje v povprečju satcionarno in je zato povprečje neodvisno od izbire začetka štetja časa. Ta interferenčni člen je časovna avtokorelacijska fukcija električnega polja, ki izhaja iz točke P.

Ugotovili smo, da se električna poljska jakost svetlobe naključno spreminja. Za dovolj velike zakasnitve τ sta polji $E(0)$ in $E(\tau)$ statistično neodvisni in je povprečje produkta enako produktu povprečij. Ker je $\langle E \rangle$ enako 0, pri velikih zakasnitvah torej ne dobimo interference in se seštevajo le moči delnih snopov. Koherenčni čas t_c sedaj lahko definiramo kot tisto zakasnitev, pri kateri postane vrednost avtokorelacijske funkcije majhna.

Zakasnitev delnih valov je navadno posledica različno dolgih optičnih poti, zato pogosto uporabljamo namesto koherenčnega časa tudi koherenčno dolžino $l_c = ct_c$. Pri tem moramo biti toliko pozorni, da koherenčne dolžine ne zamešamo s prečno koherenčno razdaljo, o kateri bo govora nekoliko kasneje.

1.2 Zveza med avtokorelacijsko funkcijo in spektrom

Časovna avtokorelacijska funkcija polja svetlobe, ki smo jo srečali v prejšnjem razdelku, je zvezana s spektrom svetlobe. Spekter definiramo kot gostoto svetlobne moči na frekvenčni interval. Izračunamo ga lahko kot absolutni kvadrat Fourierove transformacije polja. Pri tem je potrebno nekaj previdnosti; za stacionarno svetlobo, pri kateri je povprečna moč konstantna, Fourierova transformacija v običajnem smislu ne obstaja.

Postopajmo takole. Vzemimo vzorec časovne odvisnosti svetlobnega polja, ki traja čas T. T mora biti mnogo daljši od t_c, na koncu računa bi morali pravzaprav napraviti limito $T \to \infty$, da rezultat ni odvisen od konkretnega vzorca svetlobnega polja. Polje razvijmo v Fourierovo vrsto:

$$E(t) = \sum_n A(n)\, e^{in\Delta\omega t} \;, \qquad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \;. \tag{1.2.1}$$

Amplitude $A(n)$ so

$$A(n) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)\, e^{in\Delta\omega t}\, dt \;. \tag{1.2.2}$$

$|A(n)|^2$ je sorazmeren moči komponente pri frekvenci $n\Delta\omega$; da dobimo spekter, moramo še deliti s frekvenčnim intervalom $\Delta\omega$. Tako je spekter

$$S(\omega) = \frac{T}{2\pi}|A(n)|^2 \;. \tag{1.2.3}$$

Zapišimo sedaj spekter z upo"tevanjem izraza 1.2.2 za amplitudo $A(n)$:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi T}\int\int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t')\, e^{i\omega(t-t')}\, dt\, dt' \tag{1.2.4}$$

Uvedimo novo spremenljivko $\tau = t' - t$. Integral po t nam da ravno korelacijsko funkcijo $G(\tau)$. Ker je $T \gg t_c$, je korelacijska funkcija na mejah druge integracije po τ nič in lahko meje raztegnemo do neskončnosti. S tem dobimo iskano zvezo

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau \;. \tag{1.2.5}$$

Spekter je torej Fourierova transformacija avtokorelacijske funkcije svetlobnega polja. V prejšnjem razdelku smo videli, da časovno avtokorelacijsko funkcijo merimo z Michelsonovim interferometrom. Dobljena zveza s spektrom je osnova za Fourierovo spektroskopijo, ki ima nekatere pomembne prednosti pred drugimi metodami in se danes precej uporablja, posebej v infrardečem področju. Iz 1.2.5 seveda tudi sledi, da je koherenčni čas t_c približno enak obratni vrednosti spektralne širine svetlobe.

1.3 Prostorska koherenca

Vrnimo se k obravnavi interference na dveh ozkih režah, ki ju osvetljuje svetilo končnih razsežnosti. Svetilo naj še vedno sveti skoraj enobarvno svetlobo in naj bo na simetrali med režama, kot kaže slika. Žarka, ki izhajata iz sredine svetila, opravita do obeh rež v ravnini A enako dolgo pot in dasta na zaslonu B interferenčne proge. Žarka, ki izahjata iz roba izvora, imata do rež različno dolgo pot, zato nastane med njima fazna razlika že tudi do ravnine A, ki se prišteje fazni razliki v ravnini B. Interferenčne proge, ki jih tvorita robna žarka, so zato premaknjene glede na proge centralnih žarkov. Žarki z roba so pri našem svetilu statistično neodvisni od žarkov is sredine in z njimi ne interferirajo. Celoten interferenčni vzorec zato dobimo tako, da seštejemo interferenčne vzorce žarkov iz različnih delov svetila. Če bo razlika poti za žarke z roba reda velikosti valovne dolžine λ ali več, se bo torej celotna interferenčna slika na zaslonu B izpovprečila. Iz slike razberemo, da velja za razdaljo d_c med obema režama, pri kateri interferenčne proge izginejo, približno

$$\frac{R}{z} d_c = \Delta s \simeq \lambda \;\Rightarrow\; d_c \simeq \frac{z\lambda}{R} \tag{1.3.1}$$

d_c imenujmo prečno koherenčno razdaljo. Pogosto uporabljajo tudi pojem koherenčne ploskve, to je območja, v katerem je fazna razlika v povprečju konstantna. Velikost te ploskve je približno d_c^2. V območju koherenčne ploskve so tudi valovne fronte približno gladke.

Merjenje prečne koherenčne razdalje svetlobe zvezd je osnova za Michelsonovo metodo določanja zvezdnih premerov. Svetlobo izbrane zvezde zberejo v teleskop preko dveh manjših parov zrcal, kjer sta zunanji zrcali na pomičnih rokah, tako da jih je mogoče razmikati. Glavno zrcalo teleskopa zbere svetlobna snopa v goriščni ravnini, kjer nastanejo interferenčne proge, če le pomični zrcali nist preveč razmaknjeni. Iz razmika, pri katerem interferenčne proge izginejo, je mogoče dolčiti premere bližnjih svetlih zvezd. Za zvezdo velikosti 10^6 km v razdalji 10 svetlobnih let je prečna koherenčna razdalja za zeleno svetlobo okoli 10 m, kar je Michelsonovim zvezdnim interferometrom mogoče izmeriti. Pri zvezdah, ki so dlje od nekaj deset svetlobnih let, metoda odpove.

Zapišimo gornje približne ugotovitve nekoliko bolj strogo. Na zaslonu B izmerimo gostoto svetlobnega toka, ki je sorazmerna povprečju kvadrata električne poljske jakosti valovanj, ki izhajata iz odprtin:

$$\langle |E|_d|^2 \rangle = |K_1|^2 \langle |E_1|^2 \rangle \langle + |K_2|^2 \langle |E_2|^2 \rangle + 2ReK_1K_2^* \langle E_1(0)E_2^*(\tau) \rangle \tag{1.3.2}$$

kjer je $\tau = a \sin\varphi / c$ zakasnitev valovanja iz druge odprtine glede na valovanje iz prve. Faktorja K_1 in K_2 sta določena z uklonom na posameznih odprtinah in se nam zanju ni treba posebej zanimati. Interferenčna slika je vsebovana v podobnem členu kot pri Michelsonovem interferometru, le da imamo sedaj namesto avtokorelacijske medsebojno korelacijsko funkcijo polj E_1 in E_2 iz obeh odprtin.

Kako je interferenčni člen povezan z lastnostmi svetila, brez težav doženemo v izbranem primeru skoraj enobarvne svetlobe s srednjo frekvenco ω. Tedaj lahko za zakasnitve τ manjše od koherenčnega časa zapišemo

$$E_2(\tau) = E_2(0)\, e^{-i\omega\tau} \tag{1.3.3}$$

in

$$\langle E_1(0)E_2^*(\tau)\rangle = \langle E_1(0)E_2^*(0)\rangle\, e^{i\omega\tau} = J(P_1, P_2)\, e^{i\omega\tau}\ . \tag{1.3.4}$$

Re $e^{-i\omega\tau} = \cos(ka \sin\varphi)$ nam da ravno interferenčne proge za koherentno osvetlitev zaslona A, povprečje produkta polj v odprtinah ob istem času $J(P_1, P_2) = \langle E(P_1, 0)E^*(P_2, 0)\rangle$ pa meri stopnjo prečne koherence med obema odprtinama in je od njega odvisen kontrast interferenčnih prog.

Polje v odprtinah je vsota prispevkov iz vsega izvora:

$$E(P_j) = \frac{i}{\lambda}\int E(\xi, \eta)\frac{e^{iks_j}}{s_j}\, d\xi\, d\eta\ . \tag{1.3.5}$$

Faktor pred integralom i/λ smo dobili iz uklonske teorije. Tako je

$$J(P_1, P_2) = \frac{1}{\lambda^2}\int\int \langle E(\xi, \eta)E^*(\xi', \eta')\rangle \frac{e^{ik(s_1-s_2')}}{s_1 s_2'}\, d\xi\, d\eta\, d\xi' d\eta'\ . \tag{1.3.6}$$

V našem svetilu sevajo atomi neodvisno. Po drugi strani se svetlobno polje gotovo ne more znatno spremeniti na razdalji, manjši od valovne dolžine. Od tod sledi, da sta valovanji, ki izhajta iz dveh točk svetila, razmaknjenih za več kot λ, neodvisni in je povprečje njunega produkta enako nič. Tako približno velja

$$\langle E(\xi, \eta)E^*(\xi', \eta')\rangle = \frac{\lambda^2}{\pi}\delta(\xi - \xi', \eta - \eta')\langle |E(\xi, \eta)|^2\rangle\ . \tag{1.3.7}$$

Faktor λ^2/π poskrbi za ustrezno normalizacijo funkcije delta. Naj bo še oddaljenost svetila od zaslona A mnogo večja od dimenzije svetila, da lahko imenovalec pod integralom v izrazu 1.3.6 nadomestimo z z^2 in postavimo pred integral, pa dobimo

$$J(P_1, P_2) = \frac{1}{\pi z^2}\int \langle |E(\xi, \eta)|^2\rangle e^{ik(s_1-s_2)}\, d\xi\, d\eta\ . \tag{1.3.8}$$

Dobljeni izraz lahko še nekoliko poenostavimo, če razvijemo s_1 in s_2 do drugega reda:

$$s_j = \sqrt{z^2 + (x_j - \xi)^2 + (y_j - \eta)^2} \simeq z + \frac{(x_j - \xi)^2 + (y_j - \eta)^2}{2z}\ , \tag{1.3.9}$$

kjer sta $x_j, y_j)$ koordinati točke P_j. Pišimo še $\langle |E(\xi, \eta)|^2\rangle = I(\xi, \eta)$ ter $\delta x = x_2 - x_1$ in $\delta y = y_2 - y_1$. S tem dobimo znani rezultat Van Citterta in Zernikea

$$J(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{e^{-i\phi}}{\pi z^2}\int I(\xi, \eta) \exp\left[ik(\Delta x\xi + \Delta y\eta)\right]\, d\xi\, d\eta\ , \tag{1.3.10}$$

kjer je faza

$$\phi = \frac{\pi}{\lambda z}[(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)] \qquad (1.3.11)$$

različna od nič, kadar odprtini v zaslonu A in svetilo ne ležijo simetrično na isti osi.

Dobljeni rezultat si je vredno nekoliko ogledati. Prečno prostorsko korelacijsko funkcijo $J(P_1, P_2)$, ki določa kontrast interferenčih prog, smo izrazili kot Fourierovo transformacijo intenzitete svetlobe na samem svetilu. Ob tem se spomnimo, da velja podobna zveza med poljem v osvetljeni odprtini in njeno Fraunhofferjevo uklonsko sliko, pri čemer pa so količine, ki nastopajo v obeh zvezah, povsem različne. Različna je tudi veljavnost obeh formul; medtem ko je Fraunhofferjeva uklonska formula dobra le v veliki oddaljenosti, bližje odprtine pa je treba uporabiti Fresnelov izraz, je rezultat za $J(P_1, P_2)$ veljaven v obeh območjih.

Velikost svetila je končna, zato pri dovolj veliki razdalji med točkama $J(P_1, P_2)$ gotovo pade na nič. Največjo razdaljo, do katere je $J(P_1, P_2)$ še različna od nič, smo imenovali prečno koherenčno razdaljo d_c, ustrezno ploskev pa koherenčno ploskev S_c. Očitno velja ocena

$$S_c \simeq \frac{(\lambda z)^2}{S_0} \simeq \frac{\lambda^2}{\Omega_0}\ , \qquad (1.3.12)$$

kjer je S_0 površina svetila, Ω_0 pa prostorski kot, ki ga tvori svetilo v ravnini A.

Faza ϕ meri skupni premik interferenčnih prog, do katerega pride, kadar svetilo ni na isti osi kot odprtini v zaslonu A.

Doslej smo obravnavali le razmere v centru interferenčne slike na zaslonu B, to je pri tako majhnih kotih φ, da je zakasnitev manjša od koherenčnega časa. Pri večjih kotih moramo upoštevati še vpliv končnega koherenčnega časa, zaradi česar se kontrast interferenčnih prog še dodatno zmanjšuje.

Oglejmo si primer. Naj bo svetilo okroglo, s polmerom R, spekter pa naj bo Lorentzove oblike s širino γ. Obe odprtini v zaslonu naj imata y koordinati enaki nič. Časovna korelacijska funkcija polja, ki je Fourierova transformacija spektra, je tedaj oblike $e^{-\gamma\tau}$. Za prečno korelacijsko funkcijo dobimo iz enačbe 1.3.10

$$J(x_1, 0, x_2, 0) = 2\frac{R^2 I_0}{z^2}\,\frac{J_1(kR\Delta x/z)}{kR\Delta x/z}\ , \qquad (1.3.13)$$

kjer je J_1 Besselova funkcija.

Interferenčna slika na zaslonu B je produkt časovnega in prostorskega dela. Za nekaj razmikov med odprtinama je prikazana na sliki **??**. Če je $\Delta x \ll \lambda z/R$, je modulacija interferenčnih prog v sredini popolna in se zmanjšuje le pri večjih kotih φ zaradi končnega koherenčnega časa. Pri nekaj večjem razmiku tudi v centru kontrast ni več popoln. Obenem se seveda interferenčne proge tudi zgostijo. Kadar je $\Delta x = 0.61\lambda z/R$, smo v prvi ničli Besselove fukncije in interferenčni vzorec prvič izgine. Pri še večjih razmikih je Besselova funkcija negativna, tako da spet dobimo slabše izražene interferenčne proge, vendar z nasprotno fazo, to je, v sredini imamo temno progo. V tem primeru je za prečno koherenčno razdaljo smiselno vzeti ravno prvo ničlo, to je $d_c = 0.61\lambda z/R$.

LITERATURA

Goodman, Statistical optics

2 Koherentni snopi svetlobe

Pri obravnavi elektromagnetnega valovanja zelo pogosto uporabljamo približek ravnih valov. Ti so v smeri pravokotno na smer širjenja neomejeni in so lahko le idealizacija. Omejeno valovanje, to je snop svetlobe, lahko dobimo tako, da ravno valovanje omejimo z odprtino v zaslonu. Za zaslonom valovna čela ne bodo več ravna in snop ne vzporeden, ampak se bo zaradi uklona širil (slika 2.0.1).

V veliki oddaljenosti od zaslona lahko za račun polja uporabimo Fraunhoferjevo uklonsko teorijo. Vendar pa za hitro oceno kota širjenja snopa podrobnega računa niti ne potrebujemo. Velja približno

$$\theta \simeq \frac{\lambda}{a} \ , \tag{2.0.1}$$

kjer je a polmer zaslonke. Opis polja bližje zaslona je nekoliko težavnejši, treba je uporabiti Fresnelov približek. Iz slike 2.1 pa lahko ocenimo, da seže območje bližnjega polja do razdalje

$$b \simeq \frac{a}{\theta} = \frac{a^2}{\lambda} \tag{2.0.2}$$

Včasih ti približni oceni zadoščata. Bolj kvantitativen opis omejenih snopov bi lahko dobili s Fraunhoferjevo in Fresnelovo uklonsko teorijo, kar pa ni najudobnejša pot. Lotimo se naloge raje preko zelo uporabnega približka običajne valovne enačbe.

2.1 Obosna valovna enačba

Pričnimo s časovno neodvisno valovno enčbo za valovanje s frekvenco ω:

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0 \tag{2.1.1}$$

kjer je $k = n\omega/c$ valovno število in n lomni količnik sredstva, po katerem se valovanje širi. Zaradi enostavnosti obravnavajmo le eno polarizacijo, tako da je E kar skalar. Iščemo rešitev, ki se širi približno vzdolž osi z. Zapišimo jo v obliki

$$E = E_0 \psi(\vec{r}, z) e^{ikz} \tag{2.1.2}$$

kjer je $\vec{r}$ krajevni vektor v ravnini xy. Glavni del odvisnosti od z koordinate smo napisali posebej v faktorju e^{ikz}, tako da lahko privzamemo, da se ψ v smeri z le počasi spreminja in zato lahko zanemarimo druge odvode po z $\partial^2\psi/\partial z^2$ v primeri s $k\partial\psi/\partial z$ in $k^2\psi$.

Postavimo tako obliko polja v valovno enačbo. Potem, ko zanemarimo druge odvode ψ po z, dobimo

$$\nabla_\perp^2 \psi = -2ik\frac{\partial \psi}{\partial z} \ . \tag{2.1.3}$$

Slika 2.0.1: Omejen snop dobimo z uklonom ravnega vala na odprtini

Enačbi pravimo obosna ali paraksialna valovna enačba in je prav taka kot Schrodingerjeva enačba za prost delec v dveh dimenzijah, v kateri ima z koordinata vlogo časa. Ena družina rešitev, ki v kvantni mehaniki predstavljajo lastne funkcije energije in gibalne količine, so spet ravni valovi

$$\psi = e^{ik_1 x + k_2 y} \, e^{-i\beta z} \quad . \tag{2.1.4}$$

β ustreza energiji v kvantni mehaniki, k_1 in k_2 pa komponentam gibalne količine. Da bo izraz 2.6 rešitev obosne enačbe 2.5, mora veljati zveza

$$\beta = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k} \tag{2.1.5}$$

Ko postavimo tak ψ v izraz 2.4 za celotno polje E, dobimo raven val, v katerem ima zveza z komponente valovnega vektorja s prečnimi komponentami in valovnim številom k obliko

$$k_3 = k - \beta = k - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k} \tag{2.1.6}$$

Za ravni val, ki je rešitev prvotne točne valovne enačbe 2.1, je zveza seveda

$$k_3 = \sqrt{k^2 - (k_1^2 + k_2^2)} \tag{2.1.7}$$

Očitno dobimo enačbo 2.8 iz 2.9 z razvojem korena, kar seveda ni nič nepričakovanega. Ta ugotovitev nam tudi pove, da je obosna enačba dobra, kadar je razmerje prečne in vzdolžne komponente valovnega vektorja, to je kot širjenja glede na os z, dovolj majhno, da lahko zanemarimo v razvoju člene, višje od kvadratnih. To pa je tudi območje veljavnosti Fresnelove uklonske teorije, zato rešitve obosne valovne dajo enako dober približek.

Časovno odvisnost poljubnega začetnega stanja v kvantni mehaniki običajno izračunamo tako, da v nekem začetnem trenutku paket razvijemo po lastnih stanjih energije -

ravnih valovih, katerih časovna odvisnost je enostavna. Rešitev v poljubnem trenutku je potem dana v obliki Fourierovega integrala. Ta pot je zelo uporabna tudi v optiki in je osnova sklopa računskih metod, znanih pod imenom Fourierova optika. V našem primeru po njej brez težav pridemo nazaj do Fresnelove uklonske formule (Naloga). Omejenemu snopu v kvantni mehaniki ustreza lokaliziran delec - valovni paket. Ta se s časom širi, kar ustreza pojavu uklona v optiki.

2.2 Osnovni Gaussov snop

Naše glavne naloge poiskati take rešitve obosne enačbe, ki bodo predstavljale omejene snope, se lotimo nekoliko drugače. Vemo, da najpočasneje leze narazen valovni paket Gaussove oblike. Zato poskusimo najti rešitev obosne enačbe 2.1.3 v obliki

$$\psi(r,z) = e^{-\frac{kr^2}{2}\alpha(z)}\, e^{-i\phi(z)} \quad , \tag{2.2.1}$$

kjer funkcija $\alpha(z)$ meri, kako se snop širi v prečni smeri, $\phi(z)$ pa dovoljuje, da se tudi faza snopa vzdolž osi z počasi spreminja. Postavimo nastavek 2.2.1 v enačbo 2.1.3. Velja

$$\nabla_\perp^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\, r\,\frac{\partial\psi}{\partial r} = k\alpha(k\alpha r^2 - 2)\psi \tag{2.2.2}$$

in

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = (-\frac{kr^2}{2}\alpha' - i\phi')\psi \tag{2.2.3}$$

Tako iz obosne enačbe 2.1.3 dobimo

$$k\alpha(k\alpha r^2 - 2) = ik(k\alpha' r^2 + 2i\phi') \tag{2.2.4}$$

Gornji izraz mora veljati pri vsakem r, zato morajo biti koeficienti pri r^2 in konstanti posebej enaki 0:

$$\alpha^2 - i\alpha' = 0 \qquad \text{in} \qquad \phi' = \alpha \tag{2.2.5}$$

Z integracijo dobimo najprej

$$\frac{1}{\alpha} = z_0 + iz \tag{2.2.6}$$

kjer je z_0 integracijska konstanta, ki jo s primerno izbiro izhodišča lahko naredimo realno. Sedaj lahko integriramo še enačbo za fazo:

$$\phi = \int_0^z \frac{dz}{z_0 + iz} = -i\ln(1 + i\frac{z}{z_0}) \quad . \tag{2.2.7}$$

Predpisali smo, da je faza v izhodišču 0. Tako imamo

$$\begin{aligned} \psi &= \exp\left[-\frac{kr^2}{2(z_0+iz)}\right]\exp\left[-\ln(1+i\frac{z}{z_0})\right] \\ &= \frac{1}{1+i\frac{z}{z_0}}\exp\left[-\frac{kr^2 z_0}{2(z_0^2+z^2)} + \frac{ikr^2 z}{2(z_0^2+z^2)}\right] \quad . \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Realni del eksponenta očitno opisuje širjenje snopa. Definirajmo zato polmer snopa w:

$$w^2 = \frac{2z_0}{k}\left[1+(\frac{z}{z_0})^2\right] = w_0^2\left[1+(\frac{z}{z_0})^2\right] \ , \tag{2.2.9}$$

kjer je w_0 polmer snopa na najožjem delu, to je v izhodišču. Najožji del imenujmo *grlo snopa*. Odvisnost w od z je hiperbola, pri čemer je z_0 polovična dolžina grla oziroma razdalja, pri kateri preide snop v asimptotično enakomerno širjenje. Pri z_0 tudi preidemo v območje veljavnosti Fraunhoferjevega uklonskega približka. Med w_0 in z_0 velja zveza

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \ . \tag{2.2.10}$$

Iz izraza 2.2.9 za w razberemo še kot divergence snopa v asimptotičnem območju:

$$\theta = \arctan(\frac{2}{kw_0}) \simeq \frac{\lambda}{\pi w_0} \tag{2.2.11}$$

Dobljeni izrazi so v skladu z ocenami, ki smo jih napravili v začetku poglavja, pri čemer je faktor $1/\pi$ pri divergenci značilen za Gaussov snop, ki ima od vseh možnih oblik najmanjšo divergenco.

Vrnimo se k imaginarnemu delu eksponenta v drugi enačbi **??**. Količina

$$R = z[1+(\frac{z_0}{z})^2] \tag{2.2.12}$$

meri ukrivljenost valovnih front snopa v razdalji z. To najlažje uvidimo, če krogelni val razvijemo po majhnih odmikih r od osi z:

$$\frac{1}{R}e^{ikR} = \frac{1}{R}e^{ik\sqrt{z^2+r^2}} \simeq \frac{1}{R}e^{ik(z+\frac{r^2}{2R})} \tag{2.2.13}$$

Upoštevali smo, da je na osi $z = R$.

Faktor pred eksponentom v izrazu **??** meri zmanjševanje amplitude snopa in s tem poskrbi za ohranitev energijskega toka, poleg tega pa da še dodatno spremembo faze. Zapišimo ga v obliki

$$\frac{1}{1+i\frac{z}{z_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{z_0}{z})^2}}e^{-i\eta(z)} = \frac{w_0}{w}e^{-i\eta(z)} \ , \tag{2.2.14}$$

$$\eta(z) = \arctan(\frac{z}{z_0}) \tag{2.2.15}$$

Dodatna faza η je posledica povečane fazne hitrosti valovanja, kadar je omejeno v prečni smeri. Pojav je najizrazitejši v bližini grla snopa. Srečamo ga tudi pri valovanju po valovodih.

S tem lahko končno zapišemo izraz za polje *osnovnega Gaussovega snopa*:

$$E = E_0\frac{w_0}{w}\exp\{i[kz-\eta(z)] - r^2[\frac{1}{w^2(z)} - \frac{ik}{2R(z)}]\} \ . \tag{2.2.16}$$

Za računanje je prikladno vpeljati še *kompleksni krivinski radij* q:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R} + i\frac{2}{kw^2} = i\alpha(z) \tag{2.2.17}$$

Ker je po 2.2.6 funkcija $1/\alpha(z)$ linearna, je taka tudi odvisnost kompleksnega krivinskega radija od z:

$$q(z) = z - iz_0 \ . \tag{2.2.18}$$

2.3 Snopi višjega reda

Osnovni Gaussov snop je le ena od mnogih v prečni smeri omejenih rešitev obosne valovne enačbe. V kartezičnih koordinatah jo rešijo tudi funkcije

$$\psi = \frac{w_0}{w} H_n(\frac{\sqrt{2}x}{w}) H_m(\frac{\sqrt{2}y}{w}) \exp[\frac{ik(x^2+y^2)}{2q} - i\eta_{n,m}] \ , \tag{2.3.1}$$

kjer so H_n Hermitovi polinomi stopnje n. V to se brez težav prepričamo, če izraz vstavimo v obosno enačbo in upoštevamo, da Hermitovi polinomi zadoščajo enačbi

$$H_n'' - 2H_n' + 2nH_n = 0 \ . \tag{2.3.2}$$

Osnovni Gaussov snop je očitno poseben primer gornje rešitve za $m = n = 0$. Polmer snopa $w(z)$ in kompleksni krivinski radij $q(z)$ sta za vse m in n enaka kot za osnovni snop in podana z enačbama 2.2.9 in 2.2.18. Faza je odvisna tudi od n in m:

$$\eta_{n,m}(z) = (n + m + 1) \arctan(\frac{z}{z_0}) \tag{2.3.3}$$

To hitrejše spreminjanje faze v bližnjem polju snopov višjega reda je analogno večji fazni hitrosti valov višjega reda v valovodih.

Gauss-Hermitovi snopi 2.3.1 tvorijo popoln ortogonalen sistem funkcij koordinat x in y. Kakšno je polje nekega valovanja, ki ga poznamo v ravnini $z = 0$, pri poljubnem z, lahko doženemo z razvojem po Gauss-Hermitovih snopih. Pri tem je izbira premera grla w_0 poljubna, bo pa seveda vplivala na hitrost konvergence razvoja. Na tak način lahko obravnavamo uklon na odprtini, kjer je očitno smiselno vzeti w_0 približno enak dimenziji odprtine. Dobljeni rezultat je enako natančen kot Fresnelov uklonski integral.

Pri velikih z, kjer je dobra Fraunhoferjeva uklonska teorija, je polje Fourierova transformacija polja pri $z = 0$. Gauss-Hermitovi snopi ohranjajo prečno obliko, ki se le širi. Od tod vidimo, da je Fourierova transformacija Gauss-Hermitove funkcije $H_n(x)e^{-x^2/2}$ zopet Gauss-Hermitova funkcija.

Za kasnješo rabo ugotovimo še, da pri enakem w narašča efektivni polmer snopa, to je oddaljenost od osi, kjer po zadnjem maksimu postane polje majhno, približno kot $\sqrt{n}$.

V cilindričnih kordinatah imajo snopi višjega reda obliko

$$\psi(r, \phi, z) = \frac{w_0}{w} \left(\sqrt{2}\frac{r}{w}\right)^l L_p^l(2r^2/w^2) e^{\pm il\phi} \exp[\frac{ikr^2}{2q} - i\eta_{l,p}] \tag{2.3.4}$$

Slika 2.3.1: Preseki snopov višjega reda kjer je L_p^l pridruženi Laguerrov polinom in $\eta_{p,l} = (2p + l + 1)\arctan(z/z_0)$.

Polinom stopnje n ima n ničel. Zato je v prečnem preseku snopa višjega reda $n+m$ (ali $l + p$ v cilindričnem primeru) vozelnih črt, kjer je gostota svetlobnega toka nič. Na sliki 2.3.1 je prikazanih nekaj oblik $|\psi_{n,m}(x, y)|^2$ in $|\psi_{l,m}(r, \phi)|^2$. Iz laserjev navadno želimo dobiti čim čistejši osnovni snop, vendar lahko pogosto opazimo tudi snope višjega reda. Da dobimo le osnovni snop, je treba posebej paziti pri konstrukciji laserja.

2.4 Transformacije snopov z lečami

Pri prehodu skozi optične naprave se parametri snopa spremenijo. Začnimo z enostavno tanko lečo z goriščno razdaljo f. V geometrijski optiki je krivinski radij sferičnega vala, ki izhaja iz točke na osi, kar enak razdalji do točke. Leča preslika točko na osi v točko na osi, od tod pa sledi, da se sferični val s krivinskim radijem R_1 po prehodu skozi lečo spremeni v val s krivinskim radijem R_2, pri čemer velja zveza

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f} \ , \tag{2.4.1}$$

pri čemer je krivinski radij v točki z pozitiven, če je središče pri $z' \leq z$.

Polmer snopa w se pri prehodu skozi tanko lečo ne spremeni, zato sledi iz 2.2.17, da velja tudi za kompleksni krivinski radij tik pred in tik za lečo

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f} \ . \tag{2.4.2}$$

Kompleksni krivinski radij je po 2.2.18 linearna funkcija z. To nam skupaj z gornjo enačbo 2.4.2 omogoča račun prehoda snopa skozi poljuben sistem leč brez aberacij. Kot primer poglejmo, kako z zbiralno lečo ponovno zberemo snop.

Vpadni snop naj ima grlo s polmerom w_{01} in dolžino z_{01} v točki, ki je oddaljena za x_1 od levega gorišča leče (slika 2.4.1). Izračunati želimo položaj in polmer grla na desni strani leče. Naj bosta

$$q_1^F = x_1 - iz_{01} \qquad \text{in} \qquad q_2^F = -x_2 - iz_{02} \tag{2.4.3}$$

kompleksna krivinska radija v levem in desnem gorišču. Velja tudi

$$q_1 = q_1^F + f \qquad \text{in} \qquad q_2 = q_2^F - f \ . \tag{2.4.4}$$

Od tod dobimo z uporabo 2.4.2 enačbo za q v goiščih v kompaktni obliki

$$q_1^F q_2^F = -f^2 \ , \tag{2.4.5}$$

ki je po obliki podobna enačbi za oddaljenost slike od gorišča v geometrijski optiki, pomen pa ima drugačen. Zapišimo posebej realni in imaginarni del

$$x_1 x_2 = f^2 - z_{01} z_{02} \tag{2.4.6}$$

Slika 2.4.1: Prehod Gaussovega snopa skozi tanko lečo

in

$$\frac{x_1}{z_{01}} = \frac{x_2}{z_{02}} \qquad \text{ali} \qquad \frac{w_{01}^2}{w_{02}^2} = \frac{x_1}{x_2} \quad , \tag{2.4.7}$$

od koder izračunamo položaj grla na desni:

$$x_2 = \frac{x_1 f}{x_1^2 + z_{01}^2} \quad . \tag{2.4.8}$$

Gornja enačba se ujema z izrazom za preslikavo točke v geometrijski optiki le, kadar je $z_{01} \ll x_1$. Kadar je $z_{01} \gg f$, je val na leči pri vsakem x_1 skoraj raven in dobimo grlo na desni v gorišču. V praksi dobimo Gaussove snope iz laserjev in pogosto ne velja ne prva ne druga limita, temveč je treba uporabiti izraz 2.4.8. Tudi povečava polmera grla na desni, podana z 2.4.7, je precej drugačna kot v geometrijski optiki.

Za primer vzemimo snop iz He-Ne laserja, ki ima grlo s polmerom 0.5 mm na izhodnem ogledalu in je 50 cm pred lečo z $f = 25$ cm. Tedaj je $z_{01} = 124$ cm in po 2.4.8 dobimo grlo za lečo v oddaljenosti 4 cm od gorišča in s polmerom 0.2 mm. Enačbe geometrijske optike bi dale popolnoma napačen položaj grla 25 cm za goriščem s polmerom 0.5 mm, medtem ko bi približek, da je vpadni snop kar raven, dal grlo na desni v gorišču s približno pravim polmerom.

Največje razmerje polmerov grl na eni in drugi strani leče dobimo, kadar je $x_1 = 0$. Tedaj je tudi $x_2 = 0$ in je $\lim x_2/x_1 = f^2/z_{01}^2$. Velikost grla na desni strani je $w_{02} = \lambda f/(\pi w_{01})$, torej tem manjša, čim večji je polmer grla na levi, kjer je lahko največ enak polmeru leče a. Najmanjša velikost grla na levi je tako $\lambda f/a$. Dobri objektivi (mikroskopski in fotografski) dosegajo numerično odprtino $f/a \simeq 1$ in je z njmi Gaussov snop mogoče zbrati v piko velikosti λ. Seveda je treba pred lečo snop dovolj razširiti. To napravimo s teleskopom (naloga).

2.5 Linearne racionalne transformacije kompleksnega krivinskega radija

Gaussove snope povsem opišemo, če v izbrani ravnini z podamo kompleksni krivinski radij q. Ugotovili smo že, da je q linearna funkcija premika po z. Vemo tudi, kako se spremeni pri prehodu skozi tanko lečo. V tem razdelku skušajmo ta rezultata posplošiti.

Pri premiku iz ravnine z v ravnino z', ki je za d premaknjena, se q spremeni

$$q' = q + d \quad . \tag{2.5.1}$$

Po 2.4.2 je pri prehodu skozi lečo

$$q' = \frac{qf}{f-q} = \frac{q}{-\frac{q}{f}+1} \quad . \tag{2.5.2}$$

Eanko kot leča seveda deluje sferično ogledalo s krivinskim radijem R_0, pri katerem je $f = R_0/2$. Leča in premik dasta skupaj

$$q' = \frac{q}{-\frac{q}{f}+1} + d = \frac{q(1-\frac{d}{f})+d}{-\frac{q}{f}+1} \quad . \tag{2.5.3}$$

V vseh treh primerih lahko transformacijo q zapišemo v obliki ulomljene linearne preslikave

$$q' = \frac{Aq+B}{Cq+D} \quad . \tag{2.5.4}$$

Koeficiente preslikave razvrstimo v matriko

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} \tag{2.5.5}$$

Imejmo zaporedje dveh optičnih sistemov s koeficienti A_1, B_1, C_1, D_1 in A_2, B_2, C_2, D_2. Brez težav se prepričamo, da je skupna transformacija zopet oblike 2.5.4 in da jo dobimo z množenjem matrik posameznih sistemov:

$$\begin{aligned} \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} &= \begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{Vmatrix} \\ &= \begin{Vmatrix} A_2A_1 + B_2C_1 & A_2B_1 + B_2D_1 \\ C_2A_1 + D_2C_1 & C_2B_1 + D_2D_1 \end{Vmatrix} \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Gornji matrični formalizem je zelo prikladen za računanje zapletenih optičnih sistemov, saj ga je prav lahko izvesti na računalnik. Poleg tega je enolično povezan z matričnim formalizmom v geometrijski optiki in daje možnost prenosa rezultatov računov geometrijske optike v optiko snopov.

Sliko v geometrijski optiki dobimo kot presečišče geometrijskih žarkov, ki izhajajo iz točke predmeta pred optičnim sistemom. Geometrijski žarek je normala na valovne ploskve, pri čemer moramo vzeti še limito, ko gre valovna dolžina proti nič. Ukrivljenost

Slika 2.5.1: K matrični obravnavi prehoda žarka skozi lečo

valovne fronte je neposredno povezana s spreminjanjem naklona žarkov. Snop žarkov geomtrijske optike, ki izhajajo iz točke, ustreza snopu valovanja, pri katerem pa je premer grla končen. Če naj se v točki slike zberejo vsi žarki, če naj so torej napake leč majhne, seveda nakloni žarkov glede na os ne smejo biti veliki.

Žarek lahko v izbrani ravnini z opišemo z oddaljenostjo od osi r in s strmino glede na os r'. Iz teh dveh količin tvorimo stolpec

$$\left\| \begin{matrix} r \\ r' \end{matrix} \right\| \quad . \tag{2.5.7}$$

Iz slike 2.5.1 razberemo, da se pri premiku za d spremeni le odmik od osi

$$\left\| \begin{matrix} r_2 \\ r_2' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} r_1 + dr_1' \\ r_1' \end{matrix} \right\| \quad , \tag{2.5.8}$$

kar lahko zapišemo v matrični obliki

$$\left\| \begin{matrix} r_2 \\ r_2' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} r_1 \\ r_1' \end{matrix} \right\| \quad . \tag{2.5.9}$$

Pri prehodu skozi tanko lečo se spremeni nagib žarka. Če je pred lečo vzporeden z osjo, gre za lečo skozi gorišče, zato

$$\left\| \begin{matrix} r_2 \\ r_2' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} r_1 \\ -\frac{r_1}{f} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} r_1 \\ r_1' \end{matrix} \right\| \quad . \tag{2.5.10}$$

Žarek, ki gre na osi skozi lečo, ostane nespremenjen; to nam da keoficienta B in D:

$$\left\| \begin{matrix} 0 \\ r_1' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 \\ r_1' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} B \\ Dr_1' \end{matrix} \right\| \quad . \tag{2.5.11}$$

Sledi $B = 0$ in $D = 1$. Matrika za prehod skozi lečo je tako

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{Vmatrix} \tag{2.5.12}$$

in je enaka kot matrika transformacije kompleksnega krivinskega radija za tanko lečo. Matriko sestavljene optične naprave očitno dobimo z množenjem matrik komponent. Tako je tudi splošno matrika za transformacijo parametrov žarka v geometrijski optiki enaka kot transformacija kompleksne ukrivljenosti v optiki snopov.

3 Optični resonatorji

Optični resonatorji so votline, v katerih je mogoče vzpostaviti stoječe svetlobno valovanje, katerega čas dušenja je mnogo daljši od nihajne periode. Taka stoječa valovanja so skoraj stacionarne rešitve valovne enačbe z ustreznimi robnimi pogoji v votlini in se obnašajo kot harmonska nihala. Če resonator vzbujamo z zunanjim poljem z določeno frekvenco, dobimo pri frekvencah lastnih nihanj resonance.

Podobno kot v mikrovalovnem in radijskem področju uporabljamo optične resonatorje predvsem v dva namena.

- V njih lahko z vzbujanjem z zunanjim poljem majhne moči dobimo veliko električno poljsko jakost pri resonančni frekvenci. Za vzdrževanje konstantne amplitude lastnega nihanja mora zunanji vir pokrivati izgube v resonatorju; če so te majhne, bo polje v resonatorju veliko.
- Delujejo kot filtri, ki prepuščajo le polje z določeno frekvenco in prostorsko odvisnostjo. Primer take uporabe je Fabri-Perotov interferometer.

V mikrovalovnem podorčju, kjer so valovne dolžine okoli 1 cm, so resonatorji zaprte votline z dimenzijami, primerljivimi z valovno dolžino. Zato smo običajno blizu osnovnega lastnega nihanja in so resonančne frekvence med seboj dobro ločene in ni težko doseči, da imamo v frekvenčnem intervalu, ki nas zanima, le eno lastno nihanje.

V optičnem področju je drugače. Če naj so uporabni, morajo biti resonatorji navadno mnogo večji od valovne dolžine svetlobe. Tedaj je število N lastnih nihanj na smiselno velik frekvenčni interval veliko in ga je mogoče zapisati s pomočjo zvezne gostote stanj:

$$N = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}\Delta\omega = \frac{8\pi V \nu^2}{c^3}\Delta\nu \tag{3.0.1}$$

Pri frekvenci $\nu = 3 \cdot 10^{14}$ Hz in širini frekvenčnega intervala $\Delta\nu = 3 \cdot 10^{10}$ Hz, ki je tipična za Dopplerjevo razširjeno emisijsko črto v plinu, je v votlini z $V = 1$ cm $N = 2 \cdot 10^9$. Če bi bile vse stene votline idealna zrcala, bi bil čas dušenja vseh lastnih nihanj približno enako dolg, tako da bi vedno vzbujali veliko število resonanc hkrati. Tak resonator bi bil neuporaben. Tej težavi se izognemo z uporabo odprtih resonatorjev. Če zmanjšamo odbojnost stranskih sten votline, se bo povečalo dušenje stoječih valov v prečni smeri, medtem ko se dušenje valov, pravokotnih na končni, idealno odbojni steni, ne bo dosti spremenilo. Navsezadnje lahko stranske stene odstranimo, s čemer stoječih valov v prečni smeri ni več, ostane le še nekaj valov, ki so dovolj pravokotni na končni steni (slika 3.0.1).

Poglejmo to nekoliko podrobneje. V zaprti pravokotni votlini z idealno prevodnimi stenami so dovoljene vrednosti valovnega vektorja za lastna nihanja

$$\vec{k}_{n,l,m} = \left(\frac{l\pi}{a}, \frac{m\pi}{a}, \frac{n\pi}{L}\right) \quad , \tag{3.0.2}$$

Slika 3.0.1: Odprt resonator

kjer so n, l in m cela števila, L dolžina, a pa prečna dimenzija resonatorja. Lastne frekvence so

$$\omega_{n,l,m} = c|\vec{k}_{n,l,m}| \quad . \tag{3.0.3}$$

Dolžina resonatorja je velika v primeri z λ in je zato n veliko število. Če prečnih sten ni, mora biti $\vec{k}$ približno vzporeden z osjo z, zato morata biti l in m majhna. Tedaj lahko velikost valovnega vektorja razvijemo in dobimo za frekvenco

$$\omega_{n,l,m} = c\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{l^2 + m^2}{2n}\frac{L}{a^2}\right) \quad . \tag{3.0.4}$$

Drugi člen v oklepaju je običajno le majhen popravek, tako da so lastne frekvence odprtih optičnih resonatorjev odvisne predvsem od števila vozlov v vzdolžni smeri. To je navadno veliko, med 10^5 in 10^7. Možna so tudi lastna nihanja z nekaj vozli v prečni smeri, ki pa le malo vplivajo na lastne frekvence. Zato bomo v nadaljevanju obravnavali predvsem lastna stanja brez vozlov v prečni smeri, ki jih bomo označili z enim samim indeksom n.

Razlika frekvenc dveh zaporednih lastnih nihanj n in $n+1$ je

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L} \quad . \tag{3.0.5}$$

Pri dolžini resonatorja $L = 30$ cm dobimo v frekvenčni interval $3 \cdot 10^{10}$ Hz sedaj le še 30 nihanj, ki jih je brez težav mogoče razločiti.

V zaprtih votlinah s prevodnimi stenami dobimo dobro določena lastna stanja pri poljubni obliki votline. Pri odprtih resonatorjih to ni več res. Da bomo dobili lastna nihanja z majhnimi izgubami, morata biti izpolnjena dva pogoja:

- Najprej mora obstojati snop geometrijskih žarkov, ki po mnogih odbojih ostaja ujet med zrcali resonatorja.

Slika 3.0.2: Prepustnost Fabry-Perotovega interferometra

- Na poti od enega zrcala do drugega se valovanje zaradi uklona širi. Zrcalo na eni strani mora zato biti večje od uklonsko razširjenega snopa, ki izhaja iz nasprotnega zrcala:
$$a_2 > \frac{\lambda}{a_1} L \quad \text{ali} \quad \frac{a_1 a_2}{\lambda L} > 1 \ , \tag{3.0.6}$$
kjer sta a_1 in a_2 premera zrcal. Izrazu $a_1 a_2/(\lambda L)$ pravijo Fresnelovo število.

Pravimo, da so resonatorji, ki zadoščajo gornjima pogojema, stabilni.

Poglejmo znani primer Fabri-Perotovega interferometra. Sestavljata ga dve med seboj vzporedni ravni zrcali z veliko odbojnostjo. Da bomo med zrcali lahko dobili stoječe valovanje, mora biti razmik L enak $n\lambda/2$, kar je enako pogoju 3.1.1. Prepustnost interferometra za ravno valovanje, ki pada pravokotno na zrcala z odbojnostjo $\mathcal{R}$, je [?]

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} \sin^2 kL} \tag{3.0.7}$$

in je njena odvisnost od k prikazana na sliki 3.0.2. V resonanci, ko je frekvenca vpadnega valovanja enaka lastni frekvenci resonatorja, je prepustnost 1. Širina resonance je tem manjša, čim večja je odbojnostjo zrcal. Ta seveda tudi določa čas dušenja vzbujenega lastnega nihanja.

Prvemu pogoju stabilnosti ustrezajo v Fabri-Perotovem interferometru le žarki, ki so natanko pravokotni na zrcali. Če pa sta zrcali le malo neparalelni, stabilnih žarkov sploh ni več. Plan-paralelni interferometer je tako na meji stabilnosti. Z izgubami zaradi uklona pa običajno ni težav, saj morajo biti pri 30 cm dolgem resonatorju in valovni dolžini 0.5 μm zrcala le večja od 0.4 mm, da ustrezajo pogoju 3.0.6.

Bolj stabilne resonatorje lahko dobimo tako, da vzamemo nekoliko konkavna zrcala. Tedaj so žarki, ki tvorijo z osjo dovolj majhen kot, ujeti med zrcali in energija lastnih valovanj ostaja lokalizirana blizu osi.

Slika 3.1.1: Gaussov snop v odprtem resonatorju z urkivljenimi zrcali

Kakšno je natanko polje v resonatorju, doženemo tako, da rešimo valovno enačbo z ustreznimi robnimi pogoji. V primeru odprtih resonatorjev so ti zapleteni. Zato je račun težak in ni mogoče dobiti točnih analitičnih rešitev. Zateči se moramo k približni obravnavi.

3.1 Gaussovi snopi v resonatorjih

V stabilnih resonatorjih s konkavnimi zrcali pričakujemo, da bodo lastna valovanja omejena na okolico osi. Tedaj lahko za obravnavo uporabimo obosno valovno enačbo 2.1.3. Naj bodo zrcala mnogo večja od polmera lastnega nihanja. Veliko odbojnost dobimo tedaj, kadar je prevodnost zrcal velika. To nam da robni pogoj, da mora biti električno polje na zrcalu približno nič in mora zato valovna fronta stoječega valovanja sovpadati s površino zrcala.

V prečni smeri omejene rešitve obosne enačbe smo našli v obliki potujočih Gaussovih snopov. Stoječe snope očitno lahko dobimo s superpozicijo snopov, ki se širijo v obeh smereh osi. Da bomo zadostili robnim pogojem na zrcalih, moramo zahtevati, da se krivinski radij snopa ujema s krivinskima radijema zrcal R_1 in R_2 (slika **??**). Pri tem sta neznanki polmer in položaj grla snopa. Polmer je podan s parametrom z_0. Postavimo izhodišče osi z v grlo, kot smo navajeni, tako da sta zrcali pri z_1 in z_2. Z uporabo enačbe za krivinski radij snopa 2.2.12 dobimo

$$
\begin{aligned}
-R_1 &= z_1 \left[1 + \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2\right] \\
R_2 &= z_2 \left[1 + \left(\frac{z_0}{z_2}\right)^2\right] \quad . \qquad (3.1.1)
\end{aligned}
$$

Slika 3.1.2: Področje stabilnih resonatorjev

Krivinski radij naj bo za konkavno zrcalo pozitiven, z_1 pa je po sliki negativen, zato je potreben znak minus pred R_1. Veljati mora še

$$z_2 - z_1 = L \tag{3.1.2}$$

Iz gornjih enačb najprej izračunamo razdaljo z_1, ki določa položaj grla v resonatorju, nato pa parameter z_0, ki določa tudi polmer grla:

$$z_0^2 = \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{(R_1 + R_2 - 2L)^2} \tag{3.1.3}$$

Za realen omejen snop mora biti $z_0^2 > 0$, torej mora biti števec gornjega izraza pozitiven. Ta pogoj lahko po kratkem računu zapišemo v obliki

$$0 < (1 - \frac{L}{R_1})(1 - \frac{L}{R_2}) < 1 \ . \tag{3.1.4}$$

Resonatorji, ki zadoščajo pogoju 3.1.4, so stabilni. Stabilne vrednosti za ukrivljenosti zrcal pri dani dolžini resonatorja je mogoče nazorno predstaviti na diagramu, kjer na osi nanašamo L/R_1 in L/R_2. Na sliki 3.1.2 je stabilno območje, kot ga razberemo iz 3.1.4, senčeno.

V praksi se včasih uporabljajo tudi nestabilni resonatorji, to je taki, za katere ne obstojajo rešitve v obliki Gaussovih snopov. Taki resonatorji imajo velike izgube na robovih zrcal, ker v njih ne obstojajo ujeti žarki. Uporabni so v laserjih z velikim ojačenjem.

Vrnimo se k stabilnim resonatorjem in si oglejmo posebni primer simetričnega resonatorja z $R_1 = R_2 = R$. Grlo je tedaj v sredini resonatorja, enačba 3.1.3 se poenostavi v

$$z_0 = \frac{1}{2}\sqrt{(2R - L)L} \ , \tag{3.1.5}$$

polmer grla pa je

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}[(2R-L)L]^{\frac{1}{4}} \ . \tag{3.1.6}$$

Po 2.2.9 lahko izračunamo še polmer snopa na ogledalu:

$$w_1^2 = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{L}{2z_0}\right)^2\right] = \frac{\lambda}{\pi}\frac{R\sqrt{L}}{\sqrt{2R-L}} \tag{3.1.7}$$

Pri dani dolžini resonatorja je polmer snopa na zrcalu najmanjši, kadar je $R = L$. Tedaj tudi sovpadata geometrijski gorišči obeh zrcal, zato imenujemo tak resonator konfokalen. Zanj velja tudi $L = 2z_0$ in se snop od grla do zrcala razširi za $\sqrt{2}$. Konfokalni resonatorji so tudi najmanj občutljivi na majhne zasuke enega zrcala. Pri tem se v stabilnih resonatorjih premakne os, ki gre skozi krivinski središči obeh zrcal. V praksi je pomembno, da je največji odmik nove osi čim manjši, kar se zgodi ravno pri konfokalnih resonatorjih. (Naloga **??**).

V laserjih moramo skrbeti za čim boljšo izrabo ojačevalnega sredstva, zato mora pogosto biti polmer grla snopa dovolj velik, kar po enačbi 3.1.6 pomeni, da mora biti krivinski radij zrcal velik. S tem se seveda nekoliko poslabša stabilnost.

Poglejmo primer. Naj bo dolžina resonatorja He-Ne laserja 1 m in valovna dolžina 633 nm. Tedaj bo v konfokalni geometriji po enačbi 3.1.6 polmer grla $w_0 = 0.3$ mm. Premer razelektritvene cevi je običajno nekaj milimetrov in približno tako debel mora biti tudi svetlobni snop, če naj dobro izkoristi ojačenje zaradi stimuliranega sevanja. Za 2 mm debel snop moramo tako vzeti zrcala s krivinskim radijem okoli 50 m. Primer kaže, da da že majhna ukrivljenost zrcal dokaj ozke snope.

Pogosto se uporabljajo tudi resonatorji, ki imajo eno zrcalo ravno. Polje v takem resonatorju je očitno enako kot v dvakrat daljšem simetričnem resonatorju in je grlo na ravnem zrcalu.

Skrajna primera stabilnega simetričnega resonatorja sta koncentrični, pri katerem sovpadata krivinski središči zrcal, in planparalelni. V prvem primeru gre polmer grla proti nič, v drugem pa raste sorazmerno z $R^{1/4}$. Pri povsem ravnih ogledalih postanejo znatne uklonske izgube na robeh ogledal. Račun z Gaussovimi snopi tedaj ni več veljaven in je potrebno uporabiti druge pristope, ki jih bomo na kratko opisali nekoliko kasneje.

V prejšnjem poglavju smo videli, da obstajajo poleg osnovnega Gaussovega snopa še rešitve obosne enačbe z vozli v prečni smeri, to je snopi višjega reda. Imajo enak parameter z_0 in enako ukrivljenost valovnih ploskev, zato so seveda tudi dobre rešitve za polje v stabilnih resonatorjih. Pri tem si je treba le zapomniti, da je pri enakem w_0 dejanski polmer snopa reda n za približen faktor $\sqrt{n}$ večji. Za označbo reda se pogosto uporablja oznaka $TEM_{m,l}$, za osnovni snop torej TEM_{00}.

V prejšnjem poglavju smo videli, da je osnovni Gaussov snop najidealnejše omejeno valovanje. Ima najbolj gladko valovno fronto, ohranja prečno obliko in ima najmanjšo divergenco pri danem polmeru grla. Ravno tak snop dobimo iz laserja, v katerem je vzbujeno le TEM_{00} lastno stanje, na kar je pri konstrukciji laserjev pogosto treba posebej paziti.

3.2 Resonančne frekvence

Doslej smo obravnavali le prostorsko obliko polja v resonatorju. Frekvence lastnih nihanj dobimo iz pogoja, da se mora faza snopa pri enem obhodu, to je pri preletu resonatorja v obeh smereh, spremeniti za monogokratnik 2π. Fazo za osnovni snop zapišemo po enačbi 2.2.16

$$kz - \eta(z) = kz - \arctan(\frac{z}{z_0}) \quad . \tag{3.2.1}$$

Resonančni pogoj je, da je razlika te faze pri prehodu od enega zrcala do drugega mnogokratnik π:

$$\omega_n \frac{L}{c} - [\arctan(\frac{z_2}{z_0}) - \arctan(\frac{z_1}{z_0})] = n\pi \tag{3.2.2}$$

Pri tem smo zanemarili, da lahko dobimo dodatno majhno spremembo faze pri odboju na zrcalu. Ta preprosto za delček valovne dolžine spremeni efektivno dolžino resonatorja, ki je običajno niti ne poznamo toliko natančno. Iz istega razloga nam tudi ni treba upoštevati člena v oglatem oklepaju enčbe 3.2.2, kadar imamo opravka le z osnovnim snopom. Zanj tako dobimo znano enačbo za resonančne frekvence

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad . \tag{3.2.3}$$

Razmik med dvema zaporednima lastnima frekvencama je

$$\Delta\omega = \frac{\pi c}{L} \quad . \tag{3.2.4}$$

Za snope višjega reda, ki imajo vozle v prečni smeri, je fazni premik odvisen tudi od števila vozlov. V cilindričnih koordinatah imamo

$$\eta_{p,l}(z) = (2p + l + 1) \arctan(\frac{z}{z_0}) \tag{3.2.5}$$

in je resonančni pogoj

$$\omega_{n,p,l} \frac{L}{c} - (2p + l + 1)[\arctan(\frac{z_2}{z_0}) - \arctan(\frac{z_1}{z_0})] = n\pi \quad . \tag{3.2.6}$$

Resonančne frekvence so torej odvisne tudi od števila prečnih vozlov, kar je drugi razlog, da je ugodno, če v laserjih vzbujamo le osnovno lastno nihanje.

Zanimiv in praktično pomemben je primer konfokalnega resonatorja, kjer je $z_0 = L/2$ in $\arctan(L/2z_0) = \pi/4$. Resonančne frekvence so

$$\omega_{n,l,p} = \frac{\pi c}{L}[n + \frac{1}{2}(2p + l + 1)] \quad . \tag{3.2.7}$$

Če je $2p + l$ sodo število, dobimo iste resonančne frekvence kot za osnovne snope, pri lihih $2p + l$ pa dobimo še resonance na sredini med osnovnimi. Razmik med sosednjimi frekvencami je tako $\Delta\nu = c/4L$ in se konfokalni interferometer obnaša kot dvakrat daljši planparalelni. To lahko razumemo tudi iz geometrijske slike: žarek, ki vstopi v konfokalni interferometer vzporedno z osjo, se šele po dveh preletih vrne sam vase.

V primeru skoraj planparalelnega resonatorja je $z_0 \gg L$ in lahko $\arctan(L/2z_0)$ razvijemo, pa imamo

$$\omega_{n,l,p} = \frac{\pi c}{L}\left[n + (2p + l + 1)\sqrt{\frac{2L}{R}}\right] \quad . \tag{3.2.8}$$

Resonance snopov nizkega prečnega reda so torej blizu resonancam osnovnih snopov, niso pa čisto enake.

3.3 Izgube v resonatorjih

Energija lastnega nihanja odprtega resonatorja se zmanjšuje zaradi več vzrokov:

- Odbojnost ogledal ni čisto enaka 1. Če hočemo nihanje sklopiti z zunanjim poljem - ali spraviti nekaj svetlobe iz laserja ali filtrirati vpadajoči snop, mora biti odbojnost manjša od 1.
- Absorpcija in sipanje na sredstvu in optičnih elementih v resonatorju. Te izgube želimo običajno čim bolj zmanjšati.
- Uklonske izgube so odvisne od premera zrcal in premera snopa na njih. V dani geometriji imajo najmanjši polmer osnovni snopi, snopi višjega reda so širši, zato imajo večje uklonske izgube. Merilo za uklonske izgube je Fresnelovo število $N_F = a^2/(L\lambda)$, kjer je a polmer ogledal. Pri enakem N_F so najmanjše za konfokalni resonator. Če je N_F znatno večji od 1, kar je običajno, so uklonske izgube zanemarljive.

Vse izgube lahko popišemo z razpadnim časom za energijo nihanja

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\tau}W \tag{3.3.1}$$

Delež izgub na en obhod resonatorja je

$$\Lambda = \Lambda_0 + (1 - \mathcal{R}_1) + (1 - \mathcal{R}_2) \quad . \tag{3.3.2}$$

$\mathcal{R}_{1,2}$ sta odbojnosti zrcal, od katerih je običajno ena kolikor mogoče blizu 1. Z Λ_0 smo označili absorpcijo in sipanje znotraj resonatorja. Tipične vrednosti zanjo so do nekaj stotink. Izgube na enoto časa dobimo, če gornji izraz delimo s časom obhoda resonatorja:

$$\frac{2}{\tau} = \Lambda\frac{c}{2L} = \frac{2}{\tau_0} + \frac{c}{2L}[(1 - \mathcal{R}_1) + (1 - \mathcal{R}_2)] \quad , \tag{3.3.3}$$

kjer smo s $\tau_0 = \Lambda_0 \frac{c}{2L}$ označili razpadni čas zaradi notranjih izgub.

Namesto razpadnega časa τ se pogosto za opis izgub uporablja *dobrota resonatorja* $Q = \omega_n \tau/2$.

Zaradi dušenja imajo lastne frekvence končno širino

$$\Delta\omega_{1/2} = \frac{1}{\tau} \tag{3.3.4}$$

Če so notranje izgube zanemarljive in sta odbojnosti obeh zrcal enaki, je širina $1/\tau = c/2L(1-\mathcal{R})$. Do istega rezultata pridemo tudi za razvojem izraza za prepustnost Fabri-Perotovega interferometra 3.0.7 okoli maksimuma pri ω_n:

$$T = \frac{1}{1+\frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2}\sin^2\frac{L}{c}(\omega-\omega_n)} \simeq \frac{1}{1+\left[\frac{2}{(1-\mathcal{R})}\frac{L}{c}(\omega-\omega_n)\right]^2} \ , \qquad (3.3.5)$$

kjer smo upoštevali še, da je odbojnost blizu 1.

Poglejmo tipičen primer. Naj bodo notranje izgube na en obhod 0.01, eno zrcalo naj bo idealno, drugo naj ima $\mathcal{R} = 0.93$. Dolžina resonatorja naj bo 0.5 m, valovna dolžina pa $5\cdot10^{-7}$ m. Tedaj je $1/\tau = 12\cdot10^6\ s^{-1}$. Zanimivo je še razmerje med polovično širino resonance in razmikom med zaporednima resonančnima frekvencama: $\Delta\omega\tau \simeq 50$.

3.4 Obravnava z uklonskim integralom

V primeru nestabilnih resonatorjev, v katerih ne obstoja stacionarna rešitev v obliki stoječega Gaussovega snopa, je precej zahtevnejše poiskati obliko polja. Problem je soroden obravnavi uklona in ga je mogoče reševati, če izhajamo iz uklonske teorije.

Naj bo električno polje v točki P_1 prvega zrcala $E_1(P_1)$. Polje na drugem zrcalu lahko zapišemo s pomočjo Kirchoffovega uklonskega integrala

$$\begin{aligned} E_2(P_2) &= -\frac{i}{2\lambda}\int_1 E_1(P_1)\frac{e^{ikr}(1+\cos\theta)}{r}\,dS_1 \\ &= -\frac{i}{2\lambda}\int_1 E_1(P_1)K(P_1,P_2)dS_2\ , \end{aligned} \qquad (3.4.1)$$

kjer je r razdalja med točkama P_1 in P_2, θ pa kot med zveznico in normalo na zrcala. Polje na prvem zrcalu mora biti na enak način povezano z drugim. Če naj predstavlja lastno nihanje resonatorja, mora biti pt dveh odbojih sorazmerno začetnemu polju:

$$E_1(P) = -\frac{\gamma}{\lambda^2}\int_1\int_2 E_1(P_1)K(P_1,P_2)K(P_2,P)\,dS_1\,dS_2\ . \qquad (3.4.2)$$

Enačba 3.4.2 je homogena integralska enačba, katere lastne rešitve so iskana lastna nihanja elektronagnetnega polja v resonatorju. Kompleksne lastne vrednosti γ določajo frekvenco in dušenje nihanj. V splošnem rešitev ni mogoče poiskati analitično in se je treba zateči k približnim numeričnim metodam. Najenostavnejša je iterativna metoda, pri kateri začnemo z nekim začetnim poljem in ponavljamo integracijo v enačbi 3.4.2 toliko časa, da se polje ne spreminja več.

Integralsko enačbo 3.4.2 je mogoče rešiti v posebnem primeru konfokalnega resonatorja. Vzemimo, da je brez izgub. Ker je resonator tudi simetričen, se polje na obeh zrcalih lahko razlikuje kvečjemu za predznak.

Vpeljimo kartezične koordinate na obeh zrcalih, kot kaže slika 3.4.1. Pričakujemo, da bo prečna razsežnost lastnega stanja majhna v primeri z dolžino resonatorja, zato lahko

Slika 3.4.1: Koordinatna sistema na zrcalih resonatorja

r razvijemo do drugega reda v prečnih koordinatah:

$$r \simeq L - \frac{xx' + yy'}{L} \quad . \tag{3.4.3}$$

Upoštevali smo, da je krivinski radij zrcal enak dolžini resonatorja. V imenovalcu jedra integrala **??** lahko r nadomestimo kar z L. Koti med zveznico točk na obeh zrcalih in normalo na zrcali so majhni, zato lahko postavimo $\cos\theta = 1$. Tako iz enačbe **??** dobimo

$$E(x,y) = \pm \frac{ie^{ikL}}{\lambda L} \int E(x',y') \exp\left[\frac{-ik(xx'+yy')}{L}\right] dx'\, dy' \quad . \tag{3.4.4}$$

Integracija poteka po celem zrcalu. Jedro integrala je produkt dveh faktorjev, ki vsebujeta vsak le x ali y koordinati. Zato poiščimo rešitev 3.4.4 v obliki produkta

$$E(x,y) = E_0 f(x) g(y) \quad . \tag{3.4.5}$$

S tem nastavkom morata biti funkciji $f(x)$ in $g(y)$ rešitve enčbe

$$\alpha f(x) = \int f(x') \exp\left[\frac{-ikxx'}{L}\right] dx' \quad , \tag{3.4.6}$$

kjer je α še neznana konstanta.

Meje integrala so od enega do drugega roba zrcala. Če je dovolj veliko, pričakujemo, da bo polje na robu zelo majhno in lahko meje vzamemo kar od $-\infty$ do ∞. Vpeljimo še brezdimenzijski koordinati

$$X = x\sqrt{k/L} \quad \text{in } Y = y\sqrt{k/L} \quad , \tag{3.4.7}$$

pa imamo

$$\alpha f(X) = \sqrt{\frac{L}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} f(X')e^{-iXX'}\, dX' \ , \tag{3.4.8}$$

s podobno enačbo za $g(Y)$. Enačba 3.4.8 tedaj pravi, da mora biti $f(X)$ podobna svoji Fourierovi transformiranki. To lastnost ima Gaussova funkcija

$$f(X) = \exp[-\frac{1}{2}X^2] \ . \tag{3.4.9}$$

Polje na zrcalu je tako

$$E(x,y) = E_0 \exp\left[-\frac{k(x^2+y^2)}{2L}\right] \tag{3.4.10}$$

in je pričakovane oblike Gaussovega snopa.

Konstanta α mora imeti vrednost $\sqrt{2\pi L/k} = \sqrt{\lambda L}$. Enaki izrazi veljajo tudi za smer y. Postavimo 3.4.10 z dobljeno vrednostjo za α v 3.4.4 in upoštevajmo, da mora biti $E_2 = \pm E_1$. Dobimo zvezo

$$i\alpha^2 \frac{e^{ikL}}{\lambda L} = ie^{ikL} = \pm 1 \ , \tag{3.4.11}$$

od koder dobimo že iz drugega razdelka poznani resonančni pogoj za frekvenco lastnega stanja:

$$\omega_n = ck_n = \frac{c}{2L}(2n+1)\pi \ . \tag{3.4.12}$$

Bralcu prepuščam pokazati, da so splošne funkcije, ki so sorazmerne svoji Fourierovi transformaciji, Gauss-Hermitove funkcije, in izračunati lastne frekvence stanj višjega reda.

Integralska enačba, dobljena iz uklonske teorije, nam je tako dala isti rezultat kot stoječe valovanje oblike Gaussovih snopov, ki so rešitve obosne valovne enačbe. To nas seveda ne preseneča, saj je obosna valovna enačba enako natančna kot Fresnelova uklonska teorija.

3.5 Sklopitev resonatorja z okolico

V uvodu smo omenili, da rresonatorji služijo tudi kot frekvenčni in prostorski filtri za svetlobno valovanje. Povezavo med lastnimi nihanji resonatorja in prepustnostjo ter odbojnostjo za valovanje, ki na resonator vpada, bomo poiskali s formalizmom sklaplanja valovanj, ki je neke vrste perturbacijska analiza in ki je dostikrat zelo uporaben.

Pričnimo z resonatorjem z idealno odbojnimi stenami brez izgub. Stoječe lastno valovanje lahko zapišemo kot produkt krajevnega in časovnega dela:

$$E(\vec{r},t) = f(t)g(\vec{r}) \ . \tag{3.5.1}$$

Krajevni del naj bo normaliziran tako, da je $\int g^2 dV = 1$. Časovni del zadošča nihajni enačbi drugega reda

$$\ddot{f} + \omega_n^2 f = 0 \ . \tag{3.5.2}$$

Vpeljimo novo kompleksno spremenljivko

$$a = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}}(f + \frac{i}{\omega_n}\dot{f}) \quad . \tag{3.5.3}$$

Z odvajanjem in uporabo 3.5.2 ugotovimo, da za a velja enostavna diferencialna enačba

$$\dot{a} = -i\omega_n a \tag{3.5.4}$$

a ima enostavno odvisnost od časa $e^{i\omega_n t}$. Električni del energije polja v resonatorju, ki je ravno polovica celotne energije, je $1/2\epsilon_0 f^2 \int g^2 dV = 1/4(a + a^*) = 1/2|a|^2$, tako da je celotna energija lastnega nihanja resonatorja

$$W = |a|^2 \tag{3.5.5}$$

Časovna odvisnost električnega polja vsebuje člena z $e^{-i\omega_n}$ in $e^{i\omega_n}$, a pa ima le prvi člen. Zato ji včasih pravimo tudi komponenta amplitude s pozitivno frekvenco. Prednost spremenljivke a je v enostavnejših enačbah, ki so le prvega reda. a in konjugirano kompleksna spremenljivka a^* sta tudi klasična oblika kreacijskih in anihilacijskih operatorjev v kvantnomehanskem opisu harmonskega oscilatorja.

Izgube resonatorja lahko lahko opišemo tako, da enčbo 3.5.4 popravimo:

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \frac{1}{\tau}a \tag{3.5.6}$$

Da je ta enčba dobra, morajo biti izgube majhne; če niso, je treba uporabljati običajno nihajno enačbo drugega reda. Gornji približek namreč ne vsebuje zmanjšanja nihajne frekvence pri velikem dušenju. Prehod na dve nesklopljeni enačbi prvega reda za a in a^* je točen le, kadar ni izgub. Izgube sklopijo enčbi za a in a^* in to sklopitev smo zanemarili.

Naj bo odbojnost enega zrcala resonatorja nekoliko manjša od 1. Zaradi tega se zgodi dvoje:

- povečajo se izgube za $1/\tau_e = c/(4L)(1 - \mathcal{R})$
- resonator postane sklopljen z okolico, lastno nihanje je mogoče vzbujati z valovanjem, ki vpada na resonator, in valovanje tudi izhaja iz resonatorja

Naj bo s_+ snop valovanja, ki vpada na resonator. Amplituda s_+ naj bo izbrana tako, da je $|s_+|^2$ enako moči valovanja. Začasno tudi izpustimo notranje izgube resonatorja $1/\tau_0$. S tem lahko zapišemo

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \frac{1}{\tau_e}a + \kappa s_+ \ , \tag{3.5.7}$$

kjer je κ sklopitveni koeficient med vapdnim valovanjem in amplitudo lastnega nihanja. κ ni neodvisen, saj je določen s končno prepustnostjo zrcala, ki je že vsebovana v $1/\tau_e$. Poiščimo torej zvezo med κ in $1/\tau_e$.

Naj ima vpadno valovanje frekvenco ω. Tedaj je v stacionarnem stanju amplituda nihanja

$$a = \frac{\kappa s_+}{i(\omega_n - \omega) + \frac{1}{\tau_e}} \quad . \tag{3.5.8}$$

Del valovanja, ki se odbije od resonatorja, označimo z s_-. Če vpadnega vala ni, pojema energija nihanja zaradi odtekanja v s_-. Ohranitev energije da

$$-\frac{d}{dt}|a|^2 = \frac{2}{\tau_e}|a|^2 = |s_-|^2 \tag{3.5.9}$$

ali

$$s_- = \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}a \ \ , \tag{3.5.10}$$

kjer smo fazo s_- priredili z izbiro referenčne ravnine, v kateri opazujemo s_-.

Ob prisotnosti vpadnega vala s_+ lahko odbiti val zapišemo kot vsoto direktnega odboja s_+ in prispevka iz resonatorja:

$$s_- = rs_+ + \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}a \ \ , \tag{3.5.11}$$

kjer r zaenkrat še ne poznamo. V stacionarnem stanju mora biti vpadna moč enaka odbiti, ker ni notranjih izgub, torej

$$|s_+|^2 = |s_-|^2 \ \ . \tag{3.5.12}$$

Uporabimo še izraz 3.5.8 za stacionarno vrednost a in dobimo enakost

$$r^2 + \frac{2(\tau_e\kappa^2 + r\kappa\sqrt{2\tau_e})}{1 + \tau_e^2(\omega_n^- \omega)^2} = 1 \ \ . \tag{3.5.13}$$

Veljati mora pri vsaki frekvenci, to je pri vsaki vrednosti imenovalca ulomka. Zato mora biti $r^2 = 1$ in $\tau_e\kappa = -r\sqrt{2\tau_e}$. Ker sta τ_e in κ pozitivna, je $r = -1$ in

$$\kappa = \sqrt{\frac{2}{\tau_e}} \ \ . \tag{3.5.14}$$

Odbito valovanje lahko torej zapišemo

$$s_- = -s_+ + \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}a \ \ . \tag{3.5.15}$$

Z upoštevanjem notranjih izgub amplituda nihanja uboga enačbo

$$\dot{a} = -i\omega_n a - (\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_e})a + \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}s_+ \ \ . \tag{3.5.16}$$

Enačbi 3.5.15 in 3.5.16 sta osnovna izraza za sklaplanje resonatorjev z enim vhodom. Za primer uporabe izračunajmo odbojnost resonatorja s_-/s_+ kot funkcijo frekvence vpadnega vala. V enačbo 3.5.15 postavimo izraz za stacionarno vrednost amplitude nihanja

$$a = \frac{\sqrt{\frac{2}{\tau_e}}s_+}{i(\omega_n - \omega) + (\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_e})} \tag{3.5.17}$$

pa imamo

$$\frac{s_-}{s_+} = \frac{\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau_e} - i(\omega_n - \omega)}{\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_e} + i(\omega_n - \omega)} \quad . \tag{3.5.18}$$

Daleč od resonance je odbojnost -1. V resonanci, $\omega_n = \omega$, odboja ni, kadar je $\tau_e = \tau_0$. Takarat je moč, ki gre iz vpadnega valovanja v vzbujanje resonatorja, največja in je sklopitev, ki jo meri τ_e, popolnoma prilagojena izgubam. Taka prilagoditev je analogna zahtevi, da mora biti impedanca bremena na koncu valovoda ali koaksialnega kabla enaka impedanci valovoda oziroma kabla.

Če sta obe zrcali resonatorja delno prepustni, kot na primer pri običajnem Fabri-Perotovem interferometru, bo enačba za amplitudo nihanja

$$\dot{a} = -i\omega_n a - (\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_{e1}} + \frac{1}{\tau_{e2}}) + \kappa_1 s_{+1} + \kappa_2 s_{+2} \quad . \tag{3.5.19}$$

s_{+1} in s_{+2} sta valovanji, ki vpadata z ene in druge strani. Izgube zaradi končne prepustnosti so še vedno

$$\frac{1}{\tau_{ei}} = \frac{c}{4L}(1 - \mathcal{R}_i) \ , \qquad i = 1, 2 \tag{3.5.20}$$

S podobnim razmislekom kot prej, s tem da je najprej eno, nato drugo vpadno valovanje nič, dobimo

$$\kappa_i = \sqrt{\frac{2}{\tau_{ei}}} \quad . \tag{3.5.21}$$

Prepustnost resonatorja, to je razmerje med močjo vpadnega valovanja z ene strani in izhodnega z druge, bo

$$T = \frac{|s_{-2}|^2}{|s_{+1}|^2} = \frac{2}{\tau_{e2}} \frac{|a|^2}{|s_{+1}|^2} = \frac{4\tau^2/\tau_{e1}\tau_{e2}}{1 + \tau^2(\omega_n - \omega)^2} \ , \tag{3.5.22}$$

kjer je $1/\tau = 1/\tau_0 + 1/\tau_{e1} + 1/\tau_{e2}$. Če ni notranjih izgub, je prepustnost v resonanci

$$T = \frac{4/\tau_{e1}\tau_{e2}}{(1/\tau_{e1} + 1/\tau_{e2})^2} \quad . \tag{3.5.23}$$

Prepustnost je v resonanci popolna, če sta obe zrcali enaki, $\tau_{e1} = \tau_{e2}$. Gornja izraza se ujemata z znanim izrazom 3.0.7 za prepustnost Fabri-Perotovega interferometra v bližini resonanc, če so izgube in prepustnost zrcal majhne.

Resonatorji imajo mnogo lastnih nihanj. Očitno veljajo gornji izrazi za vsako posebej in dobimo celoten odziv resonatorja na poljubno vpadno valovanje kot vsoto po vseh lastnih nihanjih. Pri tem ne smemo pozabiti, da mora vpadno valovanje, ki se sklaplja z izbranim lastnim nihanjem, imeti prostorsko odvisnost, ki ustreza lastnemu stanju. V primeru stabilnih resonatorjev iz prejšnjih razdelkov mora torej biti vpadni snop Gaussov z enakim w_0 in istega prečnega reda kot resonatorsko stanje. Če vpadno valovanje ni tako, ga moramo najprej razviti po Gaussovih snopih, ki ustrezajo resonatorju.

V praksi pri zahtevnejših interferometričnih meritvah je za to, da vzbudimo le eno resonanco, potrebno vpadni snop prilagoditi resonatorju, to je, polmer na vhodnem zrcalu

Slika 3.6.1: Resonatorja, sklopljena s polprepustnim zrcalom

mora biti enak polmeru lastnega nihanja, krivinski radij vpadne valovne fronte pa enak krivinskemu radiju zrcala. Obratno pa resonator deluje ne le kot frekvenčni filter, ampak tudi kot prostorski. Recimo, da ima vpadno valovanje isto frekvenco kot eno od nihanj resontorja. Prepuščeno valovanje bo imelo tedaj obliko Gaussovega snopa, kot jo določa resonator, ne glede na obliko vpadnega snopa.

Gornji način obravnave resonatorjev in sklopitve z vpadnim valovanjem je posebej prikladen za račun nestacionarnega obnašanja in za primer, ko je resonator napolnjen z nelinearnim sredstvom.

3.6 Sklopitev dveh resonatorjev

Podobno kot sklopitev z zunanjim valovanjem lahko obravnavamo tudi sklopitev med dvema resonatorjema. Imejmo dva resonatorja brez izgub, sklopljena z delno prepustnim zrcalom, kot kaže slika 3.6.1. Sklopitev naj bo šibka, pa lahko zapišemo

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -i\omega_1 a_1 + \kappa_{12} a_2 \\ \dot{a}_2 &= -i\omega_2 a_2 + \kappa_{21} a_1 \ . \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

Zaradi ohranitve energije sklopitvena koeficienta κ_{12} in κ_{21} nista neodvisna. Vsota energij obeh resonatorjev mora biti konstantna, zato

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(|a_1|^2 + |a_2|^2) &= a_1\dot{a}_1^* + a_1^*\dot{a}_1 + a_2\dot{a}_2^* + a_2^*\dot{a}_2 \\ &= a_1^*\kappa_{12}a_2 + a_1\kappa_{12}^*a_2^* + a_2^*\kappa_{21}a_1 + a_2\kappa_{21}^*a_1^* \\ &= 0 \ . \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

Od tu vidimo, da mora biti
$$\kappa_{12} + \kappa_{21}^* = 0 \ . \tag{3.6.3}$$

Za primer na sliki 3.6.1 znamo sklopitveni koeficient brez težav izračunati. V drugem resonatorju imamo stoječe valovanje. Moč tistega dela, ki potuje proti prvemu resonatorju, je polovica energije, deljena s časom preleta od enega zrcala do drugega:
$$|s_+|^2 = \frac{1}{2}|a_2|^2 \frac{c}{L} \ . \tag{3.6.4}$$

Z upoštevanjem enačbe 3.5.14 je
$$\kappa_{12} a_2 = \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}\, s_+ = \sqrt{\frac{c}{\tau_e L}}\, a_2 \ , \tag{3.6.5}$$

tako da je
$$\kappa_{12} = \frac{c}{2L}\sqrt{1-\mathcal{R}} \ , \qquad \kappa_{21} = -\kappa_{12} \ . \tag{3.6.6}$$

Zaradi sklopitve se spremenijo lastne frekvence. Poglejmo dva enaka sklopljena resonatorja:
$$\begin{aligned} \dot a_1 &= -i\omega_0 a_1 + \kappa_{12} a_2 \\ \dot a_2 &= -i\omega_0 a_2 - \kappa_{12} a_1 \ . \end{aligned} \tag{3.6.7}$$

Iščemo rešitve oblike $A_i e^{-i\omega t}$. Če to postavimo v gornji diferencialni enačbi, dobimo homogen linearen sistem za A_1 in A_2, ki je netrivialno rešljiv, če je determinanta enaka nič. To nam da enačbo za frekvenco
$$(\omega - \omega_0)^2 = \kappa_{12}^2 \tag{3.6.8}$$

in
$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \kappa_{12} \ . \tag{3.6.9}$$

Zaradi sklopitve sta se prej enaki frekvenci razcepili v dve, kot smo lahko pričakovali.

4 Interakcija svetlobe s snovjo

Doslej smo obravnavali le svetlobo v praznem prostoru. Oglejmo si še osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. To je seveda zelo obširna tema in jo bomo obdelali le toliko, kolikor je potrebno za obravnavo ojačevanja svetlobe s stimulirano emisijo. Najprej bomo na kratko pogledali termodinamsko ravovesje svetlobe v stiku s toplotnim rezervoarjem, torej sevanje črnega telesa. Za to je potrebno tudi elektromagnetno polje obravnavati kvantno. Nato bomo vpeljali fenomenološki Einsteinov opis mikrskopskih procesov absorpcije, stimulirane in spontane emisije in pokazali, da ti procesi niso neodvisni. Izpeljali bomo izraze za absoprcijski in ojačevalni koeficient, na koncu poglavja pa bomo nakazali še kvantnomehansko izpeljavo verjetnosti za prehod atoma iz višjega energijskega stanja v nižje s sevanjem.

4.1 Kvantizacija elektromagnetnega polja

Ravni valovi so enostavne in zelo prikladne rešitve valovne enačbe in jih pri reševanju problemov pogosto uporabimo kot bazo, po kateri razvijemo elektromagnetno (ali kakšno drugo) polje. Možen je razvoj po vsem prostoru, vendar je tedaj nekoliko nerodno normalizirati bazične funkcije, zato vzamemo raje omejen del prostora. Če je ta dovolj velik, končni rezultat ni odvisen od izbire velikosti, oblike in robnih pogojev. Najenostavneje je vzeti votlino v obliki dovolj velike kocke s stranico L in idealno prevodnimi stenami. Rešitve Maxwellovih enačb znotraj take votline so stoječa valovanja [**?**]

$$
\begin{aligned}
E_x &= E_{x0} \cos\frac{\pi m_1 x}{L} \sin\frac{\pi m_2 y}{L} \sin\frac{\pi m_3 z}{L} e^{-i\omega t} \\
E_y &= E_{y0} \sin\frac{\pi m_1 x}{L} \cos\frac{\pi m_2 y}{L} \sin\frac{\pi m_3 z}{L} e^{-i\omega t} \\
E_z &= E_{z0} \sin\frac{\pi m_1 x}{L} \sin\frac{\pi m_2 y}{L} \cos\frac{\pi m_3 z}{L} e^{-i\omega t} \quad .
\end{aligned}
\tag{4.1.1}
$$

Vsako stoječe valovanje je določeno z valovnim vektorjem
$\vec{k} = (\pi m_1/L, \pi m_2/L, \pi m_3/L)$, katerega velikost je povezana s frekvenco $\omega = ck$.

Zaradi $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ velja tudi $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$, tako da imamo za vsako trojico m_1, m_2, m_3 le dve neodvisni polarizaciji.

Preštejmo, koliko je lastnih nihanj v intervalu velikosti valovnega vektorja med k in $k + dk$. Možni valovni vektorji tvorijo tridimenzionalno mrežo v prvem oktantu prostora vseh valovnih vektorjev. Razmik med dvema zaporednima mrežnima točkama v smeri ene od osi je π/L. Število točk v osmini krogelne palsti med k in $k+dk$ je za dovolj velike m_1, m_2 in m_3 enako volumnu plasti, deljenemu z volumnom, ki pripada posamezni mrežni točki, to je $(\pi/L)^3$. Upoštevati moramo še, da imamo pri vsakem $\vec{k}$ dve polarizaciji.

$$dN = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \pi k^2 \, dk \tag{4.1.2}$$

Gostoti nihanj na interval frekvence in enoto volumna votline pravimo gostota stanj:

$$\rho(k) \, dk = \frac{1}{\pi^2} k^2 \, dk \tag{4.1.3}$$

ali z upoštevanjem zveze med k in ω:

$$\rho(\omega) \, d\omega = \frac{\omega^2 \, d\omega}{\pi^2 c^3} \quad . \tag{4.1.4}$$

S pomočjo gostote stanj lahko vsote po lastnih valovanjih, to je po dovoljenih vrednostih valovnega vektorja spremenimo v integrale po k ali ω:

$$\sum_k \ldots \to V \int \rho(k) \ldots dk = V \int \rho(\omega) \ldots d\omega \quad . \tag{4.1.5}$$

Označimo krajevni del rešitve **??** z E_α, kjer α označuje vsa tri cela števila m_1, m_2 in m_3 in še obe možni polarizaciji, da bo manj pisave. Pripadajoče magnetno polje dobimo s pomočjo Maxwellove enačbe $\nabla \times \vec{E}_\alpha = i\omega \vec{B}_\alpha$. Polja $\vec{E}_\alpha$ in $\vec{B}_\alpha$ tvorijo poln ortogonalen sistem, zato lahko vsako elektromagnetno polje v votlini razvijemo:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\sum_\alpha \frac{1}{\sqrt{V\epsilon_0}} p_\alpha(t) \vec{E}_\alpha(\vec{r}) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= -\sum_\alpha \sqrt{\frac{\mu_0}{V}} \omega_\alpha q_\alpha(t) \vec{B}_\alpha(\vec{r}) \quad . \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Časovno odvisnost koeficientov razvoja p_α in q_α seveda poznamo, vendar je ne izpišimo. Postavimo razvoj **??** v Maxwellove enačbe in dobimo

$$p_\alpha = \dot{q}_\alpha \qquad \text{in} \qquad \omega_\alpha^2 q_\alpha = -\dot{p}_\alpha \quad , \tag{4.1.7}$$

od koder sledi še

$$\ddot{p}_\alpha + \omega_\alpha^2 p_\alpha = 0 \quad . \tag{4.1.8}$$

Ta enačba nam da seveda pričakovano odvisnost od časa.

S pomočjo razvoja **??** lahko zapišemo še energijo polja - Hamiltonovo funkcijo:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int (\frac{1}{\mu} B^2 + \epsilon_0 E^2) \, dV = \frac{1}{2} \sum_\alpha (p_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 q_\alpha^2) \, . \tag{4.1.9}$$

Enačbi 4.1.8 in 4.1.9 kažeta, da lahko polje v votlini obravnavamo kot sistem neodvisnih harmonskih oscilatorjev. Pri tem se koeficienti razvoja p_α in q_α obnašajo kot impulzi in koordinate. Prehod v kvantno meahniko dosežemo tako, da jim priredimo operatorje $\hat{p}_\alpha$ in $\hat{q}_\alpha$, ki morajo zadoščati komutacijskim pravilom

$$[\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\alpha] = i\hbar \quad , \tag{4.1.10}$$

vsi ostali komutatorji pa so nič.

Lastne vrednosti energije harmonskega oscilatorja so

$$W_{n,\alpha} = \hbar\omega_\alpha(n_\alpha + \frac{1}{2}) \quad , \qquad n_\alpha = 1,\ 2, \ldots \tag{4.1.11}$$

Celotna energija kvantiziranega elektromagnetnega polja v votlini je torej $W = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha n_\alpha$, pri čemer smo izpustili ničelno energijo.

Razliki energije enega harmonskega oscilatorja, če se n_α spremeni za 1, pravimo *foton*. Iz same konstrukcije vidimo, da je pojem fotona vezan na določen opis elektromagnetnega polja - reprezentacijo. V njej na primer vprašanje, kje se foton nahaja, očitno nima smisla.

4.2 Sevanje črnega telesa

Naj bo sevanje v votlini v toplotnem ravnovesju s stenami s temperaturo T. Verjetnost, da je v izbranem stanju votline α n_α fotonov, je podana s kanonično porazdelitvijo:

$$P(n_\alpha) = \frac{e^{-\beta\hbar\omega_\alpha n_\alpha}}{\sum_{n_\alpha} e^{\beta\hbar\omega_\alpha n_\alpha}} = e^{-\beta\hbar\omega_\alpha n_\alpha}(1 - e^{-\beta\hbar\omega_\alpha}) \quad . \tag{4.2.1}$$

Povprečno število fotonov v stanju je torej

$$\bar{n}_\alpha = \sum_{n_\alpha} n_\alpha P(n_\alpha) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_\alpha} - 1} \quad . \tag{4.2.2}$$

S tem izrazom lahko tudi verjetnost $P(n)$ zapišemo nekoliko drugače:

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{1+n}} \quad . \tag{4.2.3}$$

Ravnovesno gostoto energije elektromagnetnega polja v votlini na frekvenčni interval dobimo tako, da povprečnbo energijo posameznega stanja $n_\alpha\hbar\omega_\alpha$ ponožimo s številom stanj na frekvenčnem intervalu, to je, z gostoto stanj:

$$u_T(\omega)\,d\omega = \hbar\omega\bar{n}\rho(\omega)\,d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3\,d\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad . \tag{4.2.4}$$

Ta formula je Planckov zakon za spekter svetlobe v toplotnem ravnovesju z okolica s temperaturo T.

Slika 4.3.1: Dvonivojski atom

4.3 Absorpcija, spontano in stimulirano sevanje

Oglejmo si sedaj osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. Naj bo v votlini poleg elektromagnetnega polja še N atomov, ki se med seboj ne motijo. Za začetek naj bodo prav enostavni: imajo naj le dve energijski stanji z energijama E_1 in E_2 (Slika 4.3.1).

Zaradi interakcije s poljem pri frekvenci prehoda $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ atomi prehajajo iz nižjega stanja v višje in obratno. Verjetnost na časovno enoto za prehod atoma iz spodnjega stanja v zgornje - temu procesu rečemo *absorpcija* - je sorazmerna spektralni gostoti energije polja, to je energiji na enoto volumna in frekvenčni interval:

$$r_{12} = B_{12} u(\omega_0) \ , \tag{4.3.1}$$

kjer je B_{12} sorazmernostni koeficient. Zaradi absorpcije se seveda zmanjša število fotonov v enem od stanj polja pri frekvenci ω_0.

Iz gornjega stanja v spodnje lahko atom prav tako preide zaradi interakcije s poljem. Temu procesu pravimo *stimulirano sevanje.* Pri tem se število fotonov v stanju, ki je prehod povzročilo, poveča za ena. Verjetnost na časovno enoto za stimuliran prehod je spet sorazmerna s spektralno gostoto energije polja:

$$r_{21} = B_{21} u(\omega_0) \ . \tag{4.3.2}$$

Vemo, da atom v vzbujenem stanju tudi brez vpliva zunanjega polja ni stabilen, temveč prej ali slej preide v nižje stanje, pri čemer se izseva foton v katerokoli stanje polja v okolici frekvence prehoda. Verjetnost na enoto časa za tako *spontano sevanje* označimo z A_{21}. Karakteristični razpadni čas gornjega stanja je seveda $1/A_{21}$.

Fenomenološke koeficiente A_{21}, B_{21} in B_{12} je vpeljal Einstein. Videli bomo, da je z njimi mogoče uspešno opisati velik del pojavov pri interakciji svetlobe s snovjo.

Preden nadaljujemo, se še nekoliko pomudimo pri izrazih za absorpcijo in stimulirano emisijo. Zaradi končnega življenskega časa ima gornje stanje tudi končno spektralno širino. Enačbi 4.3.1 in 4.3.2 sta dobri, kadar je spektralna gostota elektromagnetnega polja $u(\omega)$ preko vse širine prehoda približno konstantna. To je gotovo res, če je sevanje v votlini v termičnem ravnovesju. Če pa na atome svetimo s svetlobo s spektrom, ki je ozek v primerjavi s širino prehoda,na primer iz laserja, bo verjetnost za prehod odvisna tudi od tega, kako blizu centralne frekvence prehoda je frekvenca svetlobe. Naj bo w_ω gostota energije (ne spekter!) monokromatske svetlobe s frekvenco ω. Tedaj lahko verjetnost na enoto časa za absorpcijo zapišemo v obliki

$$r_{12} = B_{12} g(\omega)\, w_\omega \quad , \tag{4.3.3}$$

kjer funkcija $g(\omega)$ opisuje obliko atomske spektralne črte. Pri ω_0 ima vrh. V splošnem primeru, ko se spekter svetlobe spreminja v območju frekvence prehoda, moramo sešteti prispevke oblike 4.3.3 po ozkih frekvnečnih intervalih:

$$r_{12} = B_{12} \int g(\omega)\, u(\omega)\, d\omega \quad . \tag{4.3.4}$$

Če se spekter ne spreminja dosti v območju prehoda, lahko $u(\omega)$ postavimo pred integral in mora splošni izraz 4.3.4 preiti v enačbo 4.3.1. Sledi, da mora biti funkcija $g(\omega)$ normirana:

$$\int g(\omega)\, d\omega = 1 \quad . \tag{4.3.5}$$

Zelo pogosto je $g(\omega)$ Lorentzove oblike:

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad . \tag{4.3.6}$$

Za grobe ocene jo lahko aproksimiramo tudi s pravokotnikom širine $\delta\omega \simeq \gamma$ in višine $1/\delta\omega$.

Vrnimo se k Einsteinovim koeficientom. Pokažimo, da med sabo niso neodvisni. V prisotnosti svetlobe se bo v splošnem število atomov v spodnjem in zgornjem stanju - *zasedenost stanj* - spreminjalo. Naj bo N_1 zasedenost spodnjega stanja, N_2 pa zgornjega. Obravnavajmo termično ravnovesje, ko je spekter svetlobe gotovo širok v primerjavi s širino atomskega prehoda. Zasedenost zgornjega nivoja se bo zmanjševala zaradi stimuliranih in spontanih prehodov v spodnje stanje, povečevala pa zaradi absorpcije s spodnjega stanja:

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2 - B_{21}u(\omega_0)N_2 + B_{12}u(\omega_0)N_1 \quad . \tag{4.3.7}$$

Zaradi ohranitve števila atomov velja $dN_1/dt = -dN_2/dt$.

V termičnem ravnovesju sta zasedenosti konstantni, tako da imamo

$$A_{21}N_2 + B_{21}u(\omega_0)N_2 - B_{12}u(\omega_0)N_1 = 0 \quad . \tag{4.3.8}$$

V termičnem ravnovesju mora biti spektralna gostota energije sevanja $u(\omega)$ kar termična Planckova gostota $u_T(\omega)$, ki jo lahko izrazimo tudi iz 4.3.8:

$$u_T(\omega_0) = \frac{A_{21}}{B_{12}\frac{N_1}{N_2} - B_{21}} \quad . \tag{4.3.9}$$

Za zasedenosti N_1 in N_2 mora veljati kanonična porazdelitev

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\beta(E_2-E_1)} \quad , \tag{4.3.10}$$

kjer je $\beta = 1/kT$. Tako imamo

$$u_T(\omega_0) = \frac{A_{21}/B_{12}}{e^{\beta\hbar\omega_0} - B_{21}/B_{12}} \quad . \tag{4.3.11}$$

Gornji izraz lahko primerjamo s Planckovo formulo za $u_T(\omega_0)$. Očitno morata biti B_{21} in B_{12} enaka (če sta stanji nedegenerirani) in mora med A_{21} in B_{21} veljati zveza

$$A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B_{21} \quad . \tag{4.3.12}$$

Koeficient pred B_{21} je enak gostoti stanj EM polja $\rho(\omega)$ pomnoženi z energijo fotona $\hbar\omega$. Videli bomo, da to ni slučajno in da sledi iz računa verjetnosti za prehod v kvantni elektrodinamiki. Pozoren bralec ja lahko tudi opazil, da je z izrazom 4.3.11, ki smo ga dobili le z uporabo kanonične porazdelitve za atome, že določena oblika Planckove formule, ne da bi karkoli rekli o fotonih.

4.4 Absorpcijski koeficient

Koeficienta A_{21} in B_{21} sta zvezana z makroskopskim absorpcijskim koeficientom plina atomov. Naj na plin vpada snop svetlobe s frekvenco ω, ki je blizu frekvence atomskega prehoda ω_0, in z gostoto toka $j_\omega = w_\omega c$ (slika 4.4.1). Spekter snopa naj bo sedaj ozek v primerjavi s širino atomskega prehoda. V tej obliki zapisane formule nam bojo kasneje pri obravnavi laserja prišle bolj prav. Kako je, če je spekter svetlobe primerljiv ali širši od atomske črte, bo brez težav bralec dognal sam. Privzemimo še, da je stanje stacionarno. V plasti plina debeline dz se bo gostota toka zmanjšala zaradi absorpcije in povečala zaradi stimulirane emisije. Spontano sevanje bo šlo skoraj vedno iz smeri snopa, zato ga ne upoštevamo. Sprememba moči snopa je enaka razliki med številom absorpcij in stimuliranih prehodov na enoto časa, množenih z energijo fotona, tako da lahko zapišemo

$$dP = S\,dj = \frac{1}{V}(N_2 - N_1)S\,dz B_{21} g(\omega)\hbar\omega w_\omega \quad , \tag{4.4.1}$$

kjer je S presek snopa, V pa volumen plina. Tako dobimo enačbo za spreminjanje gostote toka

$$dj = \frac{1}{V}(N_2 - N_1) B_{21} g(\omega) \frac{\hbar\omega}{c} j_\omega\, dz \tag{4.4.2}$$

Slika 4.4.1: Absorpcija snopa svetlobe v plasti atomov

Dostikrat je udobno vpeljati še *presek* za absoprcijo ali stimulirano sevanje $\sigma(\omega) = B_{21}g(\omega)\hbar\omega/c$. Z njim se izraz 4.4.2 poenostavi:

$$dj = \frac{1}{V}(N_2 - N_1)\sigma(\omega)j\,dz \quad . \tag{4.4.3}$$

Navadno imamo opravka s plinom, ki je blizu termičnega ravnovesja, zato je $N_2 < N_1$ in je dj negativen. V tem primeru imamo absorpcijo z absorpcijskim koeficientom

$$\mu(\omega) = \frac{1}{V}(N_2 - N_1)B_{21}g(\omega)\frac{\hbar\omega}{c} = \frac{1}{V}(N_2 - N_1)\sigma(\omega) \quad . \tag{4.4.4}$$

Energija se pri absorpciji na našem plinu dvonivojskih atomov seveda ne izgublja, temveč le siplje. Atom, ki je prešel v vzbujeno stanje, se s spontano emisijo vrne nazaj v osnovno, svetloba pa se izseva kamorkoli.

4.5 Nasičenje absorpcije

Enačbe 4.4.3 za zmanjševanje gostote svetlobnega toka pri prehodu skozi absorbirajoči plin ni mogoče takoj integrirati. Če je gostota svetlobnega toka dovolj velika, bo z absorpcijo lahko znaten delež atomov prešel v višje stanje in se bo razlika $N_1 - N_2$ zmanjšala, zaradi česar se bo zmanjšal tudi absorpcijski koeficient. Temu pojavu pravimo *nasičenje absorpcije.*

Spet naj na plin vpada snop monokromatske svetlobe in naj je stanje stacionarno. Podobno kot smo dobili v termičnem ravnovesju enačbo 4.3.8 imamo

$$A_{21}N_2 + \frac{B_{21}g(\omega)}{c}(N_2 - N_1)j = 0 \quad . \tag{4.5.1}$$

N_2 lahko izrazimo s celotnim številom atomov N in razliko zasedenosti: $N_2 = 1/2N + 1/2(N_2 - N_1)$. S tem lahko izračunamo razliko zasedenosti

$$N_2 - N_1 = -\frac{N}{1 + 2\frac{Bg(\omega)}{cA}j} \quad . \tag{4.5.2}$$

Pri majhni gostoti toka j so vsi atomi v osnovnem stanju in prispevajo k absorpciji. Pri velikih gostotah toka pa naraste imenovalec gornjega izraza, razlika zasedenosti gre proti nič in absoprcija se zmanjšuje. Drugi člen v imenovalcu enačbe 4.5.2 bo imel vrednost 1, kadar bo gostota energijskega toka dosegla vrednost *saturacijske gostote*

$$j_s(\omega) = \frac{A_{21}c}{B_{21}g(\omega)} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^2 g(\omega)} \quad , \tag{4.5.3}$$

kjer smo upoštevali zvezo 4.3.12 med A_{21} in B_{21}. Saturacijska gostota je odvisna le od frekvence in širine atomskega prehoda. Za črto z valovno dolžino okoli 600 nm in širino $10^8\ s^{-1}$ je okoli 50 mW/cm^2. Tako gostoto toka v ozek frekvenčni interval je z običajnimi svetili, na primer plinsko razelektritveno cevjo, praktično nemogoče doseči, medtem ko jo iz laserjev dobimo z lahkoto. Izraz za razliko zasedenosti lahko sedaj zapišemo v pregledni obliki

$$N_2 - N_1 = -\frac{N}{1 + \frac{2j}{j_s(\omega)}} \quad . \tag{4.5.4}$$

Postavimo gornji izraz v enačbo za zmanjševanje gostote toka 4.4.3:

$$dj = -\frac{\mu_0}{1 + \frac{2j}{j_s}}\, j\, dz \quad , \tag{4.5.5}$$

kjer smo z $\mu_0 = 1/(Vc)NB_{21}g(\omega)\hbar\omega$ označili običajni absorpcijski koeficient pri majhnih gostotah vpadnega toka. Enačbo brez težav integriramo:

$$\ln\frac{j}{j_0} + \frac{2}{j_s}(j - j_0) = -\mu_0\, z \quad , \tag{4.5.6}$$

kjer smo z j_0 označili začetno gostoto toka. Kadar je ta dosti manjša od j_s, imamo običajno eksponentno pojemanje, pri velikih vpadnih gostotah pa je pojemanje samo linearno:

$$j = j_0 - \frac{1}{2}\mu_0 j_s z = j_0 - \frac{N}{2V}A\hbar\omega \quad . \tag{4.5.7}$$

V tem primeru je zasedenost spodnjega in zgornjega nivoja skoraj enaka in je absorpcija omejena s tem, kako hitro se atomi vračajo v osnovno stanje preko spontanega sevanja, kar je razvidno tudi iz zadnje oblike izraza 4.5.7.

4.6 Optično ojačevanje

V primeru, da je $N_2 > N_1$, se bo snop pri prehodu skozi tako pripravljen plin ojačeval. V tem primeru pravimo, da imamo stanje *obrnjene zasedenosti*. Tako stanje seveda v termičnem ravnovesju ni možno in ga je treba vzdrževati z dovajanjem energije plinu, čemur pravimo tudi *optično črpanje*. To je mogoče v različnih sistemih napraviti na mnogo načinov.

V plinih je najpogostejši način vzbujanja z električnim tokom. Elektroni, ki so glavni nosilci toka, se zaletavajo v atome ali ione in jih vzbujajo na višje nivoje, pri čemer lahko pride do obrnjene zasedenosti med nekim parom nivojev. Pogost proces v plinih je tudi prenos energije med atomi s trki. Vzemimo mešnico dveh plinov, pri katerih se nek nivo enih atomov ujema po energiji s stanjem drugih atomov. Vzbujen atom prve vrste lahko pri trku preda energijo brez sevanja atomu druge vrste, ki iz osnovnega stanja preide v ustrezen višji nivo. Če je pod tem nivojem še drugo vzbujeno stanje, bomo med njima dobili obrnjeno zasedenost, kadar bo življenski čas gornjega nivoja daljši od spodnjega.

V trdnih neprevodnih kristalih sta v optičnem področju absoprcija in sevanje pri določeni valovni dolžini navadno posledica primesi. Obrnjeno zasedenost para nivojev primesi največkrat dobimo tako, da kristal obsevamo s svetlobo s frekvenco, ki ustreza prehodu na nek nivo nad izbranim parom. Tak način optičnega črpanja deluje tudi v organskih barvilih.

V polvodnikih dosežemo obrnjeno zasedenost med prevodnim in valenčnim pasom z vbrizgavanjem elektronov in vrzeli v območje p-n spoja z električnim tokom v prevodni smeri. Možen mehanizem vzbujanja so tudi kemične reakcije. Po reakciji lahko od produkti ostanejo v vzbujenem stanju in lahko dobimo obrnjeno zasedenost med paroma stanj.

Nekoliko bolj podrobno si bomo nekaj teh mehanizmov ogledali kasneje na konkretnih laserjih. Sedaj si kot primer oglejmo le model optičnega črpanja plina atomov s tremi stanji.

4.7 Optično črpanje trinivojskega sistema

Naj imajo atomi poleg stanj $|1\rangle$ in $|2\rangle$ še nižje ležeče osnovno stanje $|0\rangle$. Na plin svetimo s svetlobo, ki vzbuja atome iz stanja $|0\rangle$ v stanje $|2\rangle$, pri čemer je lahko spektralna gostota u_p te črpalne svetlobe široka. Poleg tega naj se po plinu širi še monokromatska svetloba s frekvenco ω blizu frekvence prehoda ω_0 med stanjema $|1\rangle$ in $|2\rangle$ in z gostoto energije w. Ugotoviti želimo, pri kakšnih pogojih lahko dosežemo med stanjema $|1\rangle$ in $|2\rangle$ obrnjeno zasedenost in s tem ojačevanje svetlobe okoli frekvence ω_0.

Zapišimo enačbe za spreminjanje zasedenosti stanj. Osnovno stanje se bo praznilo zaradi absorpcije črpalne svetlobe in polnilo zaradi spontanih prehodov iz stanj $|1\rangle$ in $|2\rangle$ ter stimuliranih prehodov iz stanja $|2\rangle$. Zasedenost stanja $|2\rangle$ se bo povečevala zaradi absorpcije s spodnjih nivojev in zmanjševala zaradi spontanega in stimuliranega sevanja. Srednje stanje se bopolnilo s stimuliranimi in spontanimi prehodi iz stanja $|2\rangle$ in praznilo zaradi absorpcije v $|2\rangle$ in spontanih prehodov v $|0\rangle$. Zasedbene enačbe so torej

$$\begin{aligned}
\frac{dN_0}{dt} &= -B_{20}u_p(N_0 - N_2) + A_{20}N_2 + A_{10}N_1 \\
\frac{dN_1}{dt} &= B_{21}g(\omega)w(N_2 - N_1) + A_{21}N_2 - A_{10}N_1 \\
\frac{dN_2}{dt} &= -B_{21}g(\omega)w(N_2 - N_1) - A_{21}N_2 - A_{20}N_2 + \qquad (4.7.1) \\
&\quad +B_{20}u_p(N_0 - N_2) \ . \qquad (4.7.2)
\end{aligned}$$

Vse tri enačbe niso neodvisne; vsota vseh treh zasedenosti mora biti enaka številu vseh atomov: $N_0 + N_1 + N_2 = N$. Zanima nas stacionarno stanje, ko so vsi trije časovno odvodi enaki nič. Poleg tega je navadno število atomov v vzbujenih stanjih mnogo manjše od zasedenosti osnovnega stanja in lahko napravimo približek $N_0 \simeq N$. Tedaj je tudi izraz $B_{20}u_p(N_0 - N_2) \simeq B_{20}u_pN = rN$. Mehanizem črpanja smo skrili v r in prav nič ni več pomembno, na kakšen način poteka. Brez škode lahko tudi zanemarimo spontano sevanje iz stanja $|2\rangle$ v osnovno stanje. Tako lahko zadnji dve enačbi sistema **??** v stacionarnem stanju zapišemo

$$\begin{aligned}
B_{21}g(\omega)w(N_2 - N_1) + A_{21}N_2 - A_{10}N_1 &= 0 \\
-B_{21}g(\omega)w(N_2 - N_1) - A_{21}N_2 + rN &= 0 \ . \qquad (4.7.3)
\end{aligned}$$

Od tod lahko izračunamo obe zasedenosti

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{rN(A_{21} + B_{21}g(\omega)w)}{A_{10}A_{21} + A_{10}B_{21}g(\omega)w} \\
N_2 &= \frac{rN(A_{10} + B_{21}g(\omega)w)}{A_{10}A_{21} + A_{10}B_{21}g(\omega)w} \qquad (4.7.4)
\end{aligned}$$

in razliko zasedenosti

$$N_2 - N_1 = \frac{rN(A_{10} - A_{21})}{A_{10}A_{21} + A_{10}B_{21}g(\omega)w} \ . \qquad (4.7.5)$$

Obrnjeno zasedenost dobimo, če je $A_{10} > A_{21}$, torej kadar je razpadni čas stanja $|1\rangle$ krajši kot razpadni čas stanja $|2\rangle$. Tak rezultat smo seveda lahko pričakovali.

Poglejmo, kako se povečuje gostota energijskega toka svetlobe $j = wc$ pri frekvenci ω. Enako kot pri absorpciji imamo

$$\left(\frac{1}{j} + \frac{1}{j_s}\right) dj = G\, dz \ , \qquad (4.7.6)$$

kjer je saturacijska gostota j_s enaka kot v primeru absorpcije, ni pa faktorja 2 kot v imenovlacu enačb 4.5.2, 4.5.4 in 4.5.5, ker imamo sedaj tri stanja in ne velja pogoj $N_1 + N_2 = N$. Z G smo označili koeficient ojačenja pri majhnih vpadnih gostotah toka. Podan je z

$$G = \frac{rN(A_{10} - A_{21})B_{21}\hbar\omega g(\omega)}{VcA_{10}A_{21}} \simeq \frac{rNB_{21}\hbar\omega g(\omega)}{VcA_{21}} \ . \qquad (4.7.7)$$

V drugem koraku smo predpostavili, da je $A_{10} \gg A_{21}$. Kot pri absorpciji imamo dva režima. Pri majhnih gostotah toka $j \ll j_s$ je naraščanje eksponentno

$$j(z) = j_0 e^{Gz} \quad . \tag{4.7.8}$$

Pri velikih gostotah toka dobimo nasičenje in je ojačevanje le linearna funkcija razdalje:

$$j(z) = j_0 + j_s G z = j_0 + \frac{rN}{V} z \quad . \tag{4.7.9}$$

V tem primeru je gostota toka dovolj velika, da vsi atomi, ki jih s črpanjem spravimi v najvišje stanje, preidejo v stanje $|1\rangle$ s stimuliranim sevanjem. Pri konstantnem črpanju je tedaj razumljivo linearno naraščanje gostote toka.

4.8 *Homogena in nehomogena razširitev spektralne črte

Doslej smo predpostavili, da svetijo vsi atomi obravnavane snovi črto pri isti frekvenci ω_0 in z isto spektralno širino, ki smo jo popisali s funkcijo $g(\omega_0 - \omega)$. V tem primeru pravimo, da je rzaširitev *homogena*. Primera homogene razširitve sta naravna širina in razširitev zaradi trkov.

Spektralna črta je lahko razširjena tudi zato, ker vsi atomi ne svetijo pri povsem enaki frekvenci. Tedaj govorimo o *nehomogeni* razširitvi. Najpomebnejši primer je Dopplerjeve razširitev v plinu. V laboratorijskem, mirujočem sistemu so frekvence ω posameznih atomov premaknjene odvisno od hitrosti v atoma v smeri opazovanja:

$$\omega = \omega_0 - \frac{v}{c}\omega_0 = \omega_0 - k_0 v \quad . \tag{4.8.1}$$

Označimo z $\mathcal{N}(v)$ porazdelitev gostote atomov po hitrostih v smeri opazovanja. V termičnem ravnovesju je $\mathcal{N}(v)$ Maxwellova:

$$\mathcal{N}(v) = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad . \tag{4.8.2}$$

Porazdelitev atomov po frekvencah dobimo tako, da hitrost izrazimo iz enačbe 4.8.1, pri čemer dobljeno funkcijo $g_D(\omega - \omega_0)$ normiramo tako, da bo njen integral enak 1:

$$g_D(\omega - \omega_0) = \frac{c}{\omega_0}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{\frac{mc^2}{2k_B T \omega_0}(\omega-\omega_0)^2} \quad . \tag{4.8.3}$$

Dopplerjeva razširitev v plinu je torej Gaussove oblike. Širina je

$$\Delta\omega_D = \sqrt{k_B T} m c^2 \omega_0 \quad . \tag{4.8.4}$$

Za prehod Ne pri 632.8 nm, na katerega deluje znani He-Ne laser, pri temperaturi 300 K dobimo $\Delta\omega_D = 9 \times 10^9 s^{-1}$. Nehomogena Dopplerjeva razširitev v redkem plinu je običajno precej večja od homogene naravne širine in razširitve zaradi trkov.

4.9 *Nasičenje nehomogeno razširjene absorpcijske črte

V razdelku 4.5 smo obravnavali nasičenje absorpcije pri homogeno razširjenem prehodu. Pri nasičenju absorpcije, kadar prevladuje nehomogena razširitev, nastopijo pomembni novi pojavi, zato si to podrobneje oglejmo.

Naj na plin vpada močan snop monokromatske svetlobe s frekvenco ω, ki je blizu centra ω_0 Dopplerjevo razširjene črte. S svetlobo lakho sodeluje le skupina atomov, pri kateri se Dopplerjevo premaknjena frekvenca ne razlikuje od ω za več kot homogeno širino, ki jo opisuje funkcija $g(\omega)$. Zato ne moremo zapisati zasedbenih enačb za vse atome hkrati, ampak le za tiste, ki imajo hitrost med v in $v+dv$ in ki absorbirajo pri frekvenci $\omega_0 - kv$. Naj sta $\mathcal{N}_1(v)$ in $\mathcal{N}_2(v)$ hitrostni porazdelitvi atomov v spodnjem in v zgornjem stanju. Enačba za spreminjanje gostote $\mathcal{N}_2(v)$ je analogna ena"bi 4.22 za celotno zasedenost v homogenem primeru:

$$\frac{d\mathcal{N}_2(v)}{dt} = -\frac{1}{c}Bg(\omega-\omega_0)+kv)j_\omega[\mathcal{N}_2(v)-\mathcal{N}_1(v)] - A\mathcal{N}_2(v) \ , \tag{4.9.1}$$

kjer je j_ω gostota vpadnega svetlobnega toka. Upoštevali smo, da je zaradi Dopplerjevega pojava prehod premaknjen k frekvenci $\omega_0 - kv$. Velja

$$\mathcal{N}_1(v)+\mathcal{N}_2(v) = \mathcal{N}(v) \qquad \text{in} \qquad \frac{d\mathcal{N}_2(v)}{dt} = -\frac{d\mathcal{N}_1(v)}{dt} \ . \tag{4.9.2}$$

Vpeljimo $\mathcal{Z}(v) = \mathcal{N}_1(v) - \mathcal{N}_2(v)$. Izrazimo $\mathcal{N}_2(v) = 1/2\mathcal{N}(v) - 1/2\mathcal{Z}(v)$, pa imamo

$$\dot{\mathcal{Z}}(v) = -\frac{2}{c}Bg(\omega-\omega_0)+kv)j_\omega\mathcal{Z}(v) - A(\mathcal{Z}(v) - A\mathcal{N}(v) \ . \tag{4.9.3}$$

V stacionarnem stanju je

$$\mathcal{Z}(v) = \frac{\mathcal{N}(v)}{1+\frac{2B}{Ac}g(\omega-\omega_0+kv)j_\omega} \ . \tag{4.9.4}$$

Če je nasičenje majhno, lahko imenovalec v gornji enačbi razvijemo:

$$\mathcal{Z}(v) \simeq \mathcal{N}(v)[1-\frac{2B}{Ac}g(\omega-\omega_0+kv)j_\omega] \ . \tag{4.9.5}$$

Porazdelitev $\mathcal{Z}(v)$je podobna nemoteni porazdelitvi atomov po hitrosti $\mathcal{N}(v)$, le da je pri hitrosti $v = (\omega_0 - \omega)/k$ zmanjšana zaradi vpliva vpadne svetlobe, ki jo atomi s to hitorstjo lahko absorbirajo in s tem prehajajo v gornje stanje. V porazdelitvi atomov v spodnjem stanju tako nastane vdolbina, pravijo ji tudi Bennetova vdolbina, v gornjem stanju, ki je bilo na začetku prazno, pa dobimo ustrezen ozek vrh (Slika **??**). Širina vdolbine je določena s homogeno širino prehoda, to je s funkcijo $g(\omega-\omega_0+kv)$, globina pa z gostoto vpadnega toka.

Zapišimo sedaj absorpcijski koeficient pri neki frekvenci ω', ki ga izmerimo tako, da na plin posvetimo z dodatnim, šibkim testnim snopom. Upoštevati moramo, da k absorpciji prispevajo vsi atomi, katerih hitrost je taka, da je prehod dovolj blizu ω'. Zato dobimo absorpcijski koeficient s seštevanjem po porazdelitvi $\mathcal{Z}(v)$:

$$\mu(\omega') = \frac{\hbar\omega'}{c} \int \mathcal{Z}(v) B g(\omega' - \omega_0 + k'v)\, dv \tag{4.9.6}$$

Homogena razširitev je navadno dosti manjša od Dopplerjeve širine. V prvem približku vzemimo, da lahko $g(\omega)$ nadomestimo kar z $\delta(\omega)$, pri čemer to ne smemo narediti tudi v imenovalcu izraza za $\mathcal{Z}(v)$. Tako dobimo

$$\begin{aligned} \mu(\omega') &= \frac{\hbar\omega'}{k'c} B \frac{\mathcal{N}(\frac{\omega'-\omega 0}{k})}{1 + \frac{2B}{Ac} g(\omega - \omega') j_\omega} \\ &\simeq \hbar B \mathcal{N}(\frac{\omega' - \omega 0}{k})[1 - \frac{2B}{Ac} g(\omega - \omega') j_\omega] \ . \end{aligned} \tag{4.9.7}$$

V drugi vrstici smo uporabili približek 4.9.5. Odvisnost $\mu(\omega')$, ki jo izmerimo tako, da spreminjamo frekvenco testnega snopa ω', je Gaussove oblike z vdolbino pri ω in je podobna porazdelitvi $\mathcal{Z}(v)$, kot jo kaže slika **??**. Vdolbina ima obliko homogeno razširjene črte. Merjenje nasičenja absorpcije s testnim žarkom torej omogoča dobiti obliko homogene črte kljub mnogo večji nehomogeni Dopplerjevi razširitvi in je zato v moderni spektroskopiji velikega pomena.

Absorpcijski koeficient za prvi, močan vpadni snop dobimo s tem, da v gornjem izrazu postavimo $\omega' = \omega$. $\mathcal{N}((\omega - \omega')/k)$ opisuje običajno Gaussovo obliko Dopplerjevo razširjene črte, izraz v oglatem oklepaju pa da zmanjšanje absorpcije zaradi nasičenja, ki je odvisno le od vrednosti $g(0)$ in zato enako pri vseh ω. Z enim samim snopom izmerjena črta je kljub nasičenju še vedno Gaussove oblike. Vdolbina, ki jo izžge svetloba v hitrostni porazdelitvi atomov, s takim preprostim opazovanjem ne moremo zaznati.

Namesto z dvema različnima snopoma, od katerih lahko enemu spreminjamo frekvenco, lahko vdolbino v porazdelitvi zaznamo tudi z enim snopom spremenljive frekvence, ki se po prvem prehodu skozi plin odbije od ogledala in vrne v nasprtni smeri. S tem se v porazdelitvi atomov v spodnjem stanju simetrično pri hitrostih $\pm(\omega_0 - \omega)/k$ pojavita dve vdolbini. Kadar je ω blizu ω_0, se začneta obe vdolbini prekrivati, stopnja nasičenja se poveča in s tem se celotna absorpcija po dveh prehodih zmanjša (Slika **??**).

Zapišimo še enačbe za ta primer. Snop povzroči spremembo zasedenosti pri prehodu skozi plin v obeh smereh, zato je sedaj

$$\mathcal{Z}(v) \simeq \mathcal{N}(v)\{1 - \frac{2B}{Ac} j_\omega [g(\omega - \omega_0 + kv) + g(\omega - \omega_0 - kv)]\} \ . \tag{4.9.8}$$

Eanko kot prej je absoprcijski koeficient za širjenje svetlobe v pozitivni smeri

$$\begin{aligned} \mu_+(\omega) &= \frac{\hbar\omega}{c} B \int \mathcal{Z}(v) g(\omega - \omega_0 + kv)\, dv \\ &\simeq \hbar B \mathcal{N}(\frac{\omega - \omega 0}{k})\{1 - \frac{2B}{Ac}[g(0) + g(2(\omega - \omega_0))] j_\omega\} \ . \end{aligned} \tag{4.9.9}$$

Ker je $\mathcal{Z}(v) = \mathcal{Z}(-v)$, je izraz za absorpcijo v negativni smeri enak. Pri $\omega = \omega_0$ je nasičenje večje in absorpcija se zato zmanjša. Izmerjeni absorpcijski profil ima na sredini vdolbino, ki je zopet podobna homogeno razširjeni črti. Faktor 2 v argumentu funkcije $g(2(\omega-\omega_0))$ je posledica našega grobega približka, ko smo v integraciji $g(\omega-\omega_0+kv)$ nadomestili kar z δ funkcijo. Natančnejši račun pokaže, da je vrh pri ω_0 kar oblike $g(\omega-\omega_0)$ (Naloga).

4.10 Izpeljava verjetnosti za prehod

Verjetnosti za prehod atoma iz enega stanja v drugo s sevanjem, ki smo jih opisali s fenomenološkimi Einsteinovimi koeficienti A_{21} in B_{21}, je mogoče izpeljati z uporabo kvantne elektrodinamike, to je, s kvantno obravnavo tako atoma kot elektromagnetnega polja. Povsem strog račun je nekoliko zahtevnejši **??**, zato si na kratko oglejmo le, kako dobimo rezultat z uporabo perturbacijske metode.

Postavimo dvonivojski atom v votlino z elektromagnetnim poljem in vprašajmo, kolikšna je verjetnost, da zaradi interakcije s poljem preide iz stanja $|2\rangle$ v stanje $|1\rangle$, pri čemer se število fotonov v izbranem stanju elektromagnetnega polja α poveča od n_α na $n_\alpha+1$. V vseh ostalih stanjih polja naj bo število fotonov nič.

Med atomom in poljem privzemimo električno dipolno interakcijo

$$\hat{\mathcal{H}}_i = -e\hat{E}(\vec{r},t)\hat{x} \quad , \tag{4.10.1}$$

kjer je $\hat{x}$ operator koordinate elektrona v atomu. Privzeli smo, da je polje v smeri osi x. Stanja celotnega sistema, atoma in polja, zapišemo v obliki direktnega produkta atomskih stanj in stanja elektromagnetnega polja, kjer moramo navesti število fotonov v vsakem nihanju votline α:

$$|i,\{n_\alpha\}\rangle \equiv |i\rangle|\{n_\alpha\}\rangle \quad . \tag{4.10.2}$$

Začetno stanje naj bo $|2,n_\alpha\rangle$, to je, atom je v gornjem stanju, polje pa ima n_α fotonov v enem samem stanju α. Končno stanje je $|1,n_\alpha+1\rangle$.

V prvem redu teorije motenj je verjetnost na časovno enoto za prehod iz začetnega v končno stanje

$$w_{zk} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle 1,n_\alpha+1|\hat{\mathcal{H}}_i|2,n_\alpha\rangle|^2\,\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_\alpha) \quad . \tag{4.10.3}$$

Delta funkcija poskrbi, da so možni le prehodi, pri katerih se ohranja energija.

Operator elektromagnetnega polja lahko po **??** razvijemo po lastnih nihanjih votline

$$\hat{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}\sum_\alpha \hat{p}_\alpha(t)E_\alpha(\vec{r}) \quad , \tag{4.10.4}$$

kjer je $\hat{p}_\alpha$ operator impulza nihanja α, E_α pa funkcija, ki popisuje krajevno odvisnost polja.

Vsako elektromagnetno nihanje votline se obnaša kot harmonski oscilator. Zato lahko vpeljemo **??** kreacijske in anihilacijske operatorje

$$\begin{aligned} \hat{a}_\alpha^+ &= \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_\alpha}}(\omega_\alpha\hat{q}_\alpha - i\hat{p}_\alpha) \\ \hat{a}_\alpha &= \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_\alpha}}(\omega_\alpha\hat{q}_\alpha + i\hat{p}_\alpha) \quad . \end{aligned} \tag{4.10.5}$$

Kreacijski operatorji povečujejo, anihilacijski pa znižujejo število fotonov v danem stanju. Veljajo zveze

$$\begin{aligned} \hat{a}_\alpha^+|n_\alpha\rangle &= \sqrt{n_\alpha+1}|n_\alpha+1\rangle \\ \hat{a}_\alpha|n_\alpha\rangle &= \sqrt{n_\alpha}|n_\alpha-1\rangle \ . \end{aligned} \tag{4.10.6}$$

Operatorje $\hat{p}_\alpha$ izrazimo s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji in jih vstavimo v razvoj električnega polja:

$$\hat{E}(\vec{r},t) = -i\sum_\alpha \sqrt{\frac{\hbar\omega_\alpha}{2V\epsilon_0}}[\hat{a}_\alpha^+ - \hat{a}_\alpha]E_\alpha(\vec{r}) \ . \tag{4.10.7}$$

Sedaj že lahko izračunamo potrebni matrični element. Operator koordinate $\hat{x}$ deluje le na atomski del stanja, $\hat{E}$ pa le na elektromagnetno polje, zato velja

$$\begin{aligned} \langle 1, n_\alpha+1|\hat{\mathcal{H}}_i|2, n_\alpha\rangle &= -e\langle 1, n_\alpha+1|\hat{E}\hat{x}|2, n_\alpha\rangle \\ &= -e\langle 1|\hat{x}|2\rangle\langle n_\alpha+1|\hat{E}|n_\alpha\rangle \ . \end{aligned} \tag{4.10.8}$$

Izrazimo polje $\hat{E}$ s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji in upoštevajmo njihove lastnosti **??**:

$$\begin{aligned} \langle n_\alpha+1|\hat{E}|n_\alpha\rangle &= -i\sum_\beta \sqrt{\frac{\hbar\omega_\beta}{2V\epsilon_0}}\langle n_\alpha+1|\hat{a}_\beta^+ - \hat{a}_\beta|n_\alpha\rangle\, E_\beta(\vec{r}) \\ &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\alpha}{2V\epsilon_0}}\sqrt{n_\alpha+1}\, E_\alpha(\vec{r}) \ . \end{aligned} \tag{4.10.9}$$

Od vseh operatorjev v razvoju polja smo dobili od nič različen matrični element le za kreacijski operator za stanje α. Vpeljimo še simbol za matrični element koordinate med atomskimi stanji $\langle 1|\hat{x}|2\rangle = x_{12}$, pa lahko zapišemo iskano verjetnost za prehod iz začetnega stanja, v katerem smo imeli vzbujen atom in n_α fotonov, v končno z atomom v osnovnem stanju in $n_\alpha+1$ fotonov v stanju α:

$$w_{zk} = \frac{\pi e^2\omega_\alpha x_{12}^2}{V\epsilon_0}(n_\alpha+1)E_\alpha^2(\vec{r})\,\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_\alpha) \ . \tag{4.10.10}$$

Verjetnost za prehod je sorazmerna z $n_\alpha+1$ in je od nič različna tudi, če je število kvantov polja nič. Tedaj imamo seveda spontano sevanje. Prispevek, ki je sorazmeren s številom že prisotnih fotonov, pa predstavlja stimulirano sevanje. Prehodna verjetnost vsebuje še kvadrat prostorske odvisnosti polja $E_\alpha^2(\vec{r})$. Če ne poznamo natančnega položaja atoma ali če imamo plin atomov enakomerno porazdeljen po votlini, ga lahko nadomestimo kar s povprečno vrednostjo. V našem primeru, ko imamo ravno stoječe valovanje, je to 1/2.

Spontana emisija je možna v vsa elektromagnetna nihanja votline s pravo frekvenco. Celotno verjetnost za prehod atoma iz vzbujenega v osnovno stanje, pri čemer v začetku ni fotonov in se nastali foton izseva kamorkoli, to je kar Einsteinov koeficient A_{21}, dobimo tako, da seštejemo verjetnosti za prehod z izsevanim fotonom v določenem stanju:

$$A_{21} = \sum_\alpha w_{zk} = \sum_\alpha \frac{\pi e^2\omega_\alpha x_{12}^2}{2V\epsilon_0}\,\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_\alpha) \ . \tag{4.10.11}$$

Za prostorsko odvisnost polja $E^2(\vec{r})$ smo vzeli povprečje 1/2. Vsoto po nihanjih lahko z uporabo 4.1.5 spremenimo v integral:

$$A_{21} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2V\hbar\epsilon_0} \int \rho(\omega_\alpha)\delta(\omega_0 - \omega_\alpha)\, d\omega_\alpha = \frac{e^2\omega_0^3 x_{12}^2}{2\pi\epsilon_0\hbar c^3} \quad . \tag{4.10.12}$$

Z $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ smo označili frekvenco prehoda.

Zaradi spontanega sevanja vzbujeno atomsko stanje ne more biti popolnoma stacionarno. Energija stanja s končnim razpadnim časom pa ni natančno določena. Zato lahko nekoliko popravimo verjetnost za stimulirano sevanje 4.10.10. Delta funkcijo energije nadomestimo s končno široko funkcijo $g(\omega)$, ki ima vrh pri ω_0 in je njen integral 1. Pri tem dobimo zaradi spremembe integracijske spremenljivke še en faktor $1/\hbar$. Tako imamo

$$w_{zk} = \frac{\pi e^2 \omega_\alpha x_{12}^2}{2V\epsilon_0\hbar}(n_\alpha + 1)g(\omega_\alpha) \quad . \tag{4.10.13}$$

Od tod lahko zapišemo Einsteinov koeficient za stimulirano sevanje, če upoštevamo, da je gostota energije polja $n_\alpha\hbar\omega_\alpha/V$:

$$B_{21}g(\omega_\alpha) = \frac{V w_{zk}}{n_\alpha\hbar\omega_\alpha} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\epsilon_0\hbar^2} g(\omega_\alpha) \quad . \tag{4.10.14}$$

Primerjajmo dobljena izraza 4.10.12 in 4.10.14 za Einsteinove koeficiente. Njuno razmerje je tako, kot smo ga izpeljali z uporabo Planckove formule. Prehojena pot jasno kaže zvezo med spontanim in stimuliranim sevanjem in gostoto stanj elektromagnetnega polja.

5 Laser

Stoječe valovanje v optičnem resonatorju se obnaša kot dušeno harmonično nihalo. Iz nihala lahko napravimo oscilator, to je napravo, ki samostojno niha brez zunajega vzbujanja, če nam dano nihalo uspe povezati v povratno zvezo z ustreznim ojačevalnikom, ki pokriva izgube nihala zaradi dušenja. Primeri so ure z mehanskimi nihali, oscilatorji z električnim nihajnim krogom v elektroniki, pa vrsta glasbenih inštrumentov.

Ugotovili smo, da je ojačevanje svetlobe mogoče dobiti v sredstvu z obrnjeno zasedenostjo med dvema nivojema. Postavimo tako snov v optični resonator. Na začetku dobimo predvsem spontano sevano svetlobo, ki se odbija med zrcaloma resonatorja in se pri prehodu skozi snov ojačuje. Tako se vzbujajo nihanja resonatorja z nihajnimi frekvencami blizu frekvence atomskega prehoda, pri katerem snov ojačuje. Energija nihanj z dovolj majhnimi izgubami bo rasla, dokler se ojačevanje ne bo izenačilo z izgubami. Tak izvor svetlobe je laser. Beseda je nastala iz kratice za Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

Kot analogija za laser so posebno zanimiva glasbila, predvsem pihala. Vzemimo na primer klarinet. To glasbilo razdelimo na dve bistveni enoti: cev, v kateri lahko nastane stojni zvočni val, in ustnik, katerega naloga je dovajati energijo in s tem vzdrževati konstantno amplitudo nihanja.

Frekvenca stoječega vala, to je nihanja zračnega stolpca v piščali, je določena z dolžino cevi (pravzaprav le do prve odprte tonske luknjice, vendar te podrobnosti za nas niso pomembne) in s številom vozlov stoječega vala v cevi. Na gornjem koncu, pri ustniku, lahko predpostavimo, da je cev zaprta, zato imamo tam hrbet nihanja pritiska. Cev je torej zvočni resonator.

Ustnik je polobel zaključek cevi, ki ga skoraj povsem zapira ploščat, prožen jeziček. Ko glasbenik piha v ustnik, se ta trese in s tem proizvaja zvok. Če ustnik ni nataknjen na cev klarineta, je nastali zvok bolj nekakšen šum kot pa lep, dobro določen ton. Tresenje jezička je le približno periodično in vsebuje mnogo frekvenc.

Ko ustnik nataknemo na cev in pihnemo vanj, začne tresenje jezička vzbujati tiste stoječe valove v cevi, katerih frekvence so vsebovane v spektru tresenja jezička. Dokler je vzbujanje šibko, se ne zgodi nič posebnega, ko pa amplituda tlaka v cevi dovolj naraste, pride do čisto novega pojava. Nihanje tlaka v gornjem koncu cevi povratno deluje na ustnik in ga sili, da niha s frekvenco najbolj vzbujenega stoječega vala v cevi, nihanje jezička z drugimi frekvencami pa zamre. Moč pihanja gre le še v nihanje jezička s pravo frekvenco in ojačuje nihanje zračnega stolpca. S pihanjem v ustnik lahko torej zaradi povratne zveze med nihanjem jezička in nihanji zračnega stolpca v cevi vzdržujemo stoječe valovanje s konstantno amplitudo. Dovedena moč se seveda izseva kot zvok na odprtem koncu klarineta.

Vrnimo se k svetlobi in si najprej oglejmo najpreprostejši model laserja. Privzemimo, Slika 5.0.1: Osnovna shema laserja

da je le eno resonatorsko nihanje tako, da njegova frekvenca sovpada s frekvenco prehoda aktivne snovi, ki jo konstantno črpamo in s tem vzdržujemo obrnjeno zasedenost. Ta privzetek v večini laserjev ni avtomatično izpolnjen, vendar je pogosto z dodatnimi elementi v resonatorju mogoče doseči, da je vzbujeno le eno nihanje, kot bomo videli nekoliko kasneje.

Naj bo W energija svetlobnega valovanja v resonatorju. Zaradi izgub skozi zrcali in zaradi absorpcije in sipanja se energija na en prelet resonatorja zmanjša za

$$\Delta W_{izgube} = -\Lambda W = -[\alpha L + (1 - \frac{1}{2}\mathcal{R}_1) + \frac{1}{2}(1 - \mathcal{R}_2)]\, W \quad , \tag{5.0.1}$$

kjer so Λ celotne izgube, α izgube na enoto poti zaradi absoprcije in sipanja, $\mathcal{R}_1$ in $\mathcal{R}_2$ pa odbojnosti obeh zrcal. Vsaj eno od obeh zrcal mora imeti odbojnost manj od 1, če naj laser nekaj svetlobe tudi izseva.

Zaradi ojačevanja s stimuliranim sevanjem snovi z obrnjeno zasedenostjo se energija nihanja resonatorja na en prelet po enačbi 4.7.6 poveča za

$$\Delta W_{oj} = \frac{LGW}{1 + W/W_s} \quad . \tag{5.0.2}$$

Upoštevali smo, da pride pri veliki energiji svetlobe do nasičenja, pri čemer smo namesto saturacijske gostote svetlobnega toka j_s vpeljali saturacijsko energijo $W_s = V j_s/c$. Privzeli smo tudi, da je ojačenje na en prelet dovolj majhno, da nam enačbe 4.7.6 ni treba integrirati.

V stacionarnem stanju se morajo izgube izenačiti z ojačenjem:
$-\Delta W_{izgube} = \Delta W_{oj}$, od koder dobimo, da je ali $W = 0$ ali

$$\Lambda = \frac{LG}{1 + W/W_s} \quad . \tag{5.0.3}$$

Energija svetlobnega nihanja je torej

$$W = \frac{LG - \Lambda}{\Lambda} W_s \tag{5.0.4}$$

Slika 5.0.2: Odvisnost energije svetlobe v laserju od ojačenja

in je pozitivna le, če je ojačenje G večje od praga

$$G_{pr} = \frac{\Lambda}{L} \quad . \tag{5.0.5}$$

Ojačenje je seveda odvisno od stopnje obrnjene zasedenosti, ki jo lahko spreminjamo z močjo optičnega črpanja. Pogosto, na primer pri trinivojskem sistemu, obravnavanem v razdelku 4.7, je kar sorazmerno z močjo črpanja. Energija svetlobe v laserju je pod pragom nič, nad pragom pa je linearna funkcija ojačenja, kot kaže slika 5.

Izhodno moč laserja dobimo tako, da delež energije, ki gre na en prelet skozi izhodno zrcalo, delimo s časom preleta preko resonatorja L/c:

$$P_{izh} = \frac{1}{2}(1 - \mathcal{R}_1)\frac{c}{L} W \quad . \tag{5.0.6}$$

Če upoštevamo en. 5.0.1 in 5.0.4, vidimo, da je izhodna moč v primeru, da imamo le izgube skozi izhodno zrcalo, največja, če je reflektivnost čim bliže 1. Ker imamo vedno še druge izgube, je izhodna moč največja pri $\mathcal{R}_1 < 1$ (Naloga).

5.1 Zasedbene enačbe

Za podrobnejšo sliko se moramo vrniti k enačbam za zasedenost atomskih nivojev **??**, ki jim dodamo še enačbo za energijo lastnega valovanja v resonatorju. Še naprej se omejimo na primer, ko je vzbujeno le eno resonatorsko stanje.

Zaradi enostavnosti obravnave lahko enačbe **??** brez škode precej poenostavimo. Privzemimo, da je razpadni čas spodnjega laserskega stanja $|1\rangle$, ki ga določa koeficient A_{10}, dosti krajši od razpadnega časa zgornjega stanja $|2\rangle$. Tedaj je $N_1 \simeq 0$, če le ni preveč stimuliranega sevanja, in lahko zasedenost atomskih stanj popišemo z eno samo spremenljivko N_2. Energijo v izbranem stanju resonatorja zapišimo s številom fotonov n, tako da je gostota energije polja $n\hbar\omega/V$, kjer je V volumen resonatorja. S tem dobimo za zasedenost

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{1}{V}\hbar\omega B_{21} g(\omega) n\, N_2 - N_2 A_{21} + rN \tag{5.1.1}$$

Energija svetlobe v resonatorju se povečuje zaradi stimuliranega sevanja. Atomi z gornjega stanja prehajajo še s spontanim sevanjem, ki ga nekaj tudi gre v izbrano nihanje resonatorja. V razdelku 4.8 prejšnjega poglavja smo videli, da je verjetnost za prehod atoma z višjega na nižje stanje z izsevanjem fotona v izbrano stanje elektromagnetnega polja sorazmerno z $n+1$, kjer je n število fotonov v stanju. Od tod sledi, da upoštevamo prispevek spontanega sevanja s tem, da v prvem členu desnega dela izraza 5.1.1 pišemo $n+1$ namesto n. Energija resonatorja se zmanjšuje zaradi izgub skozi zrcala in absorpcije in sipanja, kar smo v tretjem poglavju opisali z razpadnim časom $\tau/2 = \Lambda c/L$. Tako imamo

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{V}\hbar\omega B_{21} g(\omega)(n+1)\,N_2 - \frac{2}{\tau}n \quad . \tag{5.1.2}$$

Dobili smo sistem dveh diferencialnih enačb za časovni razvoj števila fotonov v resonatorskem stanju in za zasedenost atomskega stanja. Enačbi sta nelinearni in ju ne znamo analitično rešiti.

Kot je pri nelinearnih diferencialnih enačbah običajno, poglejmo najprej, kakšne so stacionarne, to je, od časa neodvisne rešitve $\dot{N}_2 = 0$ in $\dot{n} = 0$. Izrazimo N_2 iz 5.1.1 in postavimo v 5.1.2. Dobimo kvadratno enačbo za število fotonov:

$$\frac{2}{V\tau} n(A_{21} + B_{21}\hbar\omega g(\omega)n) - \frac{1}{V} B_{21}\hbar\omega g(\omega) r N(n+1) = 0 \quad . \tag{5.1.3}$$

Preden zapišemo rešitve dobljene enačbe, jo še nekoliko preoblikujmo. Ulomek $\frac{B_{21}\hbar\omega g(\omega) r N}{V c A_{21}}$ je koeficient ojačenja, ki smo ga v prejšnjem poglavju označili z G. $2/c\tau$ so izgube,ki morajo biti enake ojačenju na pragu G_{pr}. Vpeljimo še brezdimenzijsko konstanto p:

$$p = \frac{V A_{21}}{B_{21}\hbar\omega g(\omega)} = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3 g(\omega)} = \frac{V A_{21}}{B_{21}\hbar\omega g(\omega)} \simeq \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}\Delta\omega \quad . \tag{5.1.4}$$

V zadnjem izrazu smo upoštevali, da je v maksimumu $g(\omega) \simeq = 1/\Delta\omega$. p je torej približno produkt gostote stanj elektromagnetnega polja v resonatorju in širine atomskega prehoda, torej kar število vseh stanj v frekvenčnem intervalu atomskega prehoda. To je navadno precej veliko, okoli 10^8 do 10^{10}. S primerjavo izraza 4.5.3 za saturacijsko gostoto toka vidimo še, da je p tudi število fotonov v resonatorju, pri katerem pride do nasičenja ojačenja, če je frekvenca nihanja resonatorja blizu centra atomske črte. S tem en. 5.1.3 dobi obliko

$$\frac{1}{p} n^2 - (\frac{G}{G_{pr}} - 1)n - \frac{G}{G_{pr}} = 0 \tag{5.1.5}$$

s pozitivno rešitvijo

$$n = \frac{p}{2}\left[(\frac{G}{G_{pr}} - 1) + \sqrt{(\frac{G}{G_{pr}} - 1)^2 + \frac{4G}{pG_{pr}}}\right] \quad . \tag{5.1.6}$$

Ker je p veliko število, lahko koren razvijemo, če le ni ojačenje preveč blizu praga, ko je $\frac{G}{G_{pr}} \simeq 1$. Pod pragom je $G < G_{pr}$ in je

$$n \simeq \frac{p}{2}\left[(\frac{G}{G_{pr}} - 1) + (1 - \frac{G}{G_{pr}}) + \frac{2G}{p(G_{pr} - G)}\right] = \frac{G}{G_{pr} - G} \quad . \tag{5.1.7}$$

Slika 5.1.1: Odvisnost števila fotonov od ojačenja

Pri razvoju korena smo upoštevali, da mora biti pozitiven. Nad pragom je število fotonov

$$n \simeq p(\frac{G}{G_{pr}} - 1) \quad . \tag{5.1.8}$$

Poglejmo, kaj smo dobili. Pod pragom je število fotonov v izbranem resonatorskem nihanju blizu ena do neposredne bližine praga, kjer hitro naraste in doseže takoj nad pragom red velikosti p. Moč črpanja, s katero spreminjamo koeficient ojačenja G, gre pod pragom preko spontanega sevanja skoraj vsa v veliko število stanj elektromagnetnega polja, nad pragom pa povsem prevlada stimulirano sevanje v eno samo izbrano nihanje resonatorja. Obnašanje števila fotonov n pri spreminjanju ojačenja G kaže slika 5.1. Prehod preko praga je zaradi velikega p v večini laserjev tako hiter, da ga ni mogoče izmeriti; izjema so polvodniški laserji, katerih volumen je zelo majhen, zato je tudi p dovolj majhen, da je mogoče opaziti zvezen prehod preko praga.

Iz enačbe 5.1.2 lahko izračunamo še zasedenost gornjega atomskega nivoja v stacionarnem stanju:

$$N_2 = \frac{2V}{\tau B_{21}\hbar\omega g(\omega)} \frac{n}{n+1} \quad . \tag{5.1.9}$$

Na pragu je po enačbi 5.1.6 $n = \sqrt{p}$. Tako dobimo

$$N_{2pr} = \frac{2V}{\tau B_{21}\hbar\omega g(\omega)} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+1} \quad . \tag{5.1.10}$$

Ker je tudi $\sqrt{p}$ veliko število, sledi iz gornjih enačb, da obrnjena zasedenost narašča do bližine praga, nad pragom pa je praktično konstantna in skoraj natanko enaka kot na pragu. To ni težko razumeti. Nad pragom je število fotonov v resonatorju veliko in linearno (v našem preprostem modelu) narašča s povečevanjem moči črpanja, zato se povečuje tudi hitrost praznenja gornjega atomskega stanja s stimuliranim sevanjem, kar ravno izniči učinek povečanja črpanja. V stacionarno delujočem laserju torej ni mogoče povečati obrnjene zasedenosti nad vrednost na pragu N_{2pr}, kar ima pomembne praktične posledice, kot bomo videli nekoliko kasneje.

V laserju nad pragom je število fotonov zelo veliko, zato prispevka spontanega sevanja v enačbi 5.1.2 v nadaljevanju ne bomo upoštevali.

Obravnava laserja z zasedbenimi enačbami je seveda zelo groba. Nismo upoštevali, da je svetloba v resonatorju valovanje, ki uboga valovno enačbo. S tem smo privzeli, da je prostorska odvisnost polja v delujočem laserju enaka kot za lastno stanje praznega resonatorja. Poleg tega smo privzeli, da so atomi lahko le v lastnih energijskih stanjih, kar je res le v primeru stacionarnih stanj brez zunanjega, časovno odvisnega polja svetlobe. Če za opis svetlobe uporabimo klasično valovno enačbo, za atome pa kvantno mehaniko, dobimo *polklasični približek* vedenja laserja, ki je mnogo zahtevnejši od zasedbenih enačb, opiše pa skoraj vse pojave v laserjih, razen vpliva spontanega sevanja. Za dosledno in podrobno obravnavo tega pa je potrebno tudi svetlobo opisati s pomočjo kvantne elektrodinamike.

Povzemimo, kaj smo z modelom zasedbenih enačb ugotovili o delovanju enofrekvenčnega laserja. Pri dovolj velikem ojačenju s stimuliranim sevanjem, ki pokriva izgube resonatorja, je v stacionarnem stanju energija in s tem amplituda izbranega lastnega nihanja resonatorja različna od nič. Del valovanja izhaja skozi eno ali obe zrcali. Frekvenca svetlobe je določena z izbranim lastnim stanjem resonatorja. To določa tudi prostorsko odvisnost valovanja v resonatorju in izhodnega snopa. Ugotovili smo, da ima v običajnem stabilnem resonatorju polje obliko zelo blizu Gaussovega snopa, zato je tak tudi izhodni snop.

Lepa prostorska odvisnost izhodnega snopa je morda najpomembnejša lastnost laserjev. Gaussov snop se najmanj širi zaradi uklona in ga je mogoče zbrati v piko približne velikosti valovne dolžine. S tem se tudi najbolj približa idealno točkastemu izvoru svetlobe. Te lastnosti so zelo pomembne za uporabo; na njih so osnovani optični komunikacijski sistemi, čitanje optičnih diskov, laserski obdelovalni stroji...

5.2 Spektralna širina enega laserskega nihanja

Spektralni širini svetlobe enofrekvenčnega laserja je treba posvetiti nekaj več pozornosti. Videli smo, da je amplituda svetlobe laserja konstantna. Spektralna širina klasičnega harmonskega nihala s stalno amplitudo je nič, frekvenca nihanja je natanko določena. Če bi se lastno stanje elektromagnetnega polja v resonatorju obnašalo povsem enako kot klasično harmonsko nihalo, bi bil tudi spekter laserja neskončno ozek. Laserji imajo seveda končno spektralno širino, v idealnem primeru zaradi kvantizacije elektromagnetnega polja, v praksi pa zaradi zunanjih motenj.

Poskusimo najprej oceniti razširitev zaradi vpliva kvantizacije. Zaradi nje imamo poleg stimuliranega tudi spontano sevanje. To je kvantni šum, ki povzroči majhno razširitev spektra. Stroga obravnava tega pojava je mogoča le z dosledno uporabo kvantne elektrodinamike, kar seže izven okvira te knjige, zato se zadovoljimo le z grobo oceno.

Amplitudo svetlobe na izbranem mestu v resonatorju predstavimo kot število v kompleksni ravnini (Slika 5.2). Kot, ki ga amplituda tvori z realno osjo, je faza glede na neko izbrano začetno fazo. Energija svetlobe je sorazmerna s številom fotonov; velikost amplitude polja zato lahko merimo kar s korenom iz števila fotonov v nihanju. Velikost

Slika 5.2.1: Amplituda polja v resonatorju in prispevek spontanega sevanja.

amplitude je praktično konstantna, vzdržuje jo stimulirano sevanje, ki ravno pokriva izgube resonatorja. Pri tem ostaja tudi faza nespremenjena. Pač pa se faza spremeni zaradi majhnega prispevka spontanega sevanja.

Pri spontani emisiji se foton izseva s poljubno fazo; prispevek k kompleksni amplitudi na sliki 5.2 ima torej dolžino 1 in poljubno smer. Zanima nas povprečni kvadrat spremembe faznega kota pri enem spontano izsevanem fotonu:

$$\overline{\delta\phi_1^2} = \frac{1}{\overline{n}}\overline{\cos^2\psi} = \frac{1}{2\overline{n}} \quad , \tag{5.2.1}$$

kjer smo s ψ označili slučajno fazno razliko med celotnim poljem in spontano izsevanim fotonom, indeks 1 pa označuje, da gre za spremembo za 1 foton. Zaporedne spontane emisije so med seboj neodvisne, zato dobimo povprečni kvadrat spremembe faze pri m emisijah kar tako, da seštejemo povprečne kvadrate za posamezne fotone:

$$\overline{\delta\phi_m^2} = m\overline{\delta\phi_1^2} = \frac{m}{2\overline{n}} \quad . \tag{5.2.2}$$

Prešteti moramo še, koliko je spontano izsevanih fotonov na enoto časa. Stimulirano sevanje ravno pokrije izgube resonatorja, zato je stimulirano izsevnih fotonov na enoto časa $2\overline{n}/\tau$. Iz razdelka 4.8, enačba 4.10.10 vemo, da je razmerje med verjetnostjo za stimulirano in spontano sevanje enako številu fotonov v danem stanju polja, zato je število spontanih sevanj na časovno enoto kar $2/\tau$. Tako imamo v poljubnem času $m = 2t/\tau$ in

$$\overline{\delta\phi^2(t)} = \frac{t}{\overline{n}\tau} \quad . \tag{5.2.3}$$

Čas t_p, v katerem se bo faza znatno spremenila, recimo za 1, je torej velikostnega reda

$$t_p \simeq 2\overline{n}\tau = \frac{W}{\hbar\omega}\tau = \frac{P}{\hbar\omega}\tau^2 \quad . \tag{5.2.4}$$

To lezenje faze nam seveda da spektralno širino $1/t_p$.

Število fotonov v laserskem nihanju je nad pragom zelo veliko, recimo 10^9 v majhnem He-Ne laserju. τ je reda velikosti 10^{-7}, tako da je karakteristični čas - koherenčni čas

- idealnega laserja mnogo sekund. Iz enačbe 5.2.4 vidimo še, da je spektralna širina obratno sorazmerna z izhodno močjo laserja. V neposredni bližini praga, kjer je $\overline{n} \simeq 1$, je spektralna širina približno enaka širini nihanj praznega resonatorja.

Dejanski laserji seveda nimajo niti približno tako ozkega spektra, kot smo pravkar ocenili. Frekvenca laserja je določena z dolžino resonatorja: $\omega = n\pi c/L$, pri čemer je n zelo veliko celo število. Majhna sprememba dolžine resonatorja povzroči tudi spremembo frekvence laserja, pri znatnejši spremembi dolžine pa lahko pride tudi do preskoka vzbujenega stanja resonatorja, to je števila n. Dolžina resonatorja se lahko spreminja predvsem zaradi zunanjih mehanskih motenj in zaradi spreminjanja temperature. Zato se spreminja tudi frekvenca laserja in če se posebej ne potrudimo s konstrukcijo resonatorja, so te fluktuacije frekvence kar reda velikosti razmika med sosednimi stanji resonatorja, to je reda velikosti 100 MHz.

Tu velja opozoriti, da je narava spektralne razširitve v laserju tako v idealnem kot v praktičnem primeru drugačna kot v navadnih svetilih. V prvem poglavju smo videli, da intenziteta svetlobe navadnega svetila fluktuira na časovni skali koherenčnega časa, ki je obraten spektralni širini. Po elektrotehniško lahko rečemo, da je taka svetloba amplitudno moduliran šum. Pri enofrekvenčnem laserju je drugače. Amplituda in s tem intenziteta izhodne svetlobe je konstantna, fluktuira le frekvenca oziroma faza. Šum laserja je torej v obliki frekvenčne modulacije.

Fluktuacije dolžine in s tem frekvence laserja je mogoče zmanjšati. S skrbno konstrukcijo in uporabo materialov z majhnim toplotnim raztezkom se zmanjša vpliv vibracij in temperaturnih sprememb v okolici. Poleg tega lahko okolico temperaturno stabiliziramo in laser postavimo na vibracijsko izolirano mizo. Na tak način je mogoče dobiti laser z efektivno spektralno širino pod 1 MHz.

Še ožjo lasersko črto lahko dobimo z aktivno stabilizacijo dolžine resonatorja. Ideja je taka: frekvenco svetlobe, ki izhaja iz laserja, primerjamo z nekim standardom in iz razlike ugotovimo spremembo dolžine resonatorja. Eno od obeh zrcal je nameščeno na piezoelektričnem nosilcu, ki mu z električno napetostjo lahko spreminjamo dolžino in tako popravimo dolžino resonatorja.

Pogalvitna težava je seveda, kako najti dovolj stabilen primerjalni standard za frekvenco. Ena možnost je, da izhodno svetlobo spustimo skozi konfokalni interferometer, ki je skoraj v resonanci z laserjem in ima dovolj ozek vrh prepustnosti. Majhen premik frekvence laserja bo povzročil, da se bo spremenil skozi interferometer prepuščeni svetlobni tok. Na prvi pogled je videti, da s tem nismo nič pridobili, saj bo resonančna frekvenca interferometra stabilna tudi le toliko, kot je stabilna njegova dolžina. Vendar je z izolacijo in temperaturno stabilizacijo možno držati dolžino praznega resonatorja - interferometra - mnogo natančneje kot dolžino laserja, v katerem imamo aktivno sredstvo, ki mu moramo dovajati energijo.

Druga možnost je stabilizirati laser na primerno molekularno absorpcijsko črto. Te so lahko zelo ozke, zato je tudi spekter laserja lahko izredno ozek, pod 1 kHz. Pri tem moti Dopplerjeva razširitev absorpcijske črte, ki pa se ji je mogoče izogniti. Kako to napravimo in kako je bila s tem omogočena nova definicija metra, si bomo pogledali v razdelku ????.

Slika 5.3.1: Zaslonke za pripravo prostorsko koherentnega snopa iz nekoherentnega svetila

5.3 Primerjava laserjev in običajnih svetil

Čas je, da povzamemo, kar smo doslej dognali o lastnostih laserjev in jih primerjamo z običajnimi svetili. Kot ves čas doslej obravnavajmo enofrekvenčni laser, v katerem je vzbujeno le eno osnovno stanje resonatorja, ki je Gaussove oblike.

Svetlobni snop, ki izhaja iz laserja, ima dve takoj očitni odliki. Je zelo usmerjen in zelo enobarven. Prva lastnost je seveda posledica tega, da je lastno stanje stabilnega resonatorja Gaussove oblike in je zato tak tudi izhodni snop. Kot smo videli v 3. poglavju, je divergenca takega snopa samo posledica uklona in je najmanjša možna. Valovne fronte so gladke in na dani razdalji ves čas enake, laserski snop je torej prostorsko idealno koherenten. Je tudi najboljši približek točkastega svetila, kar je v neposredni zvezi s prostorsko koherenco.

Koherenten Gaussov snop lahko z ustrezno optiko zberemo v piko velikosti valovne dolžine, s čimer dosežemo že pri skromni moči zelo veliko gostoto svetobnega toka. To izkoriščajo v tehnologiji za natančno in čisto obdelavo materialov in v medicini, kjer laserje uporabljajo za zahtevne kirurške posege.

Kako pa je z običajnimi svetili? V njih vsak atom sveti po svoje, zato nimamo prostorske koherence. Valovna fronta na danem mestu je nepravilna in se v koherenčnem času znatno spremeni. Svetlost površine svetila je neodvisna od smeri (Lambertov zakon). Osvetljenost slike, ki jo dobimo s poljubnim optičnim sistemom, ne more biti večja od izsevane gostote svetlobnega toka.

Tudi iz svetlobe običajnega nekoherentnega svetila lahko pripravimo koherenten snop. Na neki razdalji od svetila moramo postaviti zaslonko, ki je manjša od koherenčne ploskve na tistem mestu (glej razdelek 1.3). Ocenimo, kolikšna je moč snopa za zaslonko. Svetilo naj ima svetlost[1] B. Pri najsvetlejših nekoherentnih izvorih, to so živosrebrne svetilke, doseže B vrednost do 100 W/cm^2. Moč snopa za zaslonko je (slika 5.3)

$$P = BS_0\Delta\Omega = \frac{BS_0S_c}{z^2} \simeq \frac{BS_0}{z^2}\frac{\lambda^2 z^2}{S_0} = B\lambda^2 \ . \tag{5.3.1}$$

[1] Svetlost je svetilnost na enoto ploskve

Tu je S_0 površina svetila, z oddlajenost zaslonke, S_c pa velikost koherenčne ploskve, za katero smo uporabili oceno **??** iz prvega poglavja. Pri svetlosti 100 W/cm^2 dobimo, da je moč koherentnega snopa le približno $3 \cdot 10^{-7}$ W, kar je štiri rede velikost manj od prav šibkih laserjev z močjo 1 mW.

Druga odlična lastnost svetlobe iz enofrekvenčnega laserja je zelo majhna spektralna širina. Z nekaj truda je ta lahko pod 1 kHz, emisijske črte v plinu pa so zaradi Dopplerjeve razširitve široke vsaj nekaj GHz, pa še to le v razmeroma redkem in hladnem plinu, kjer je svetlost majhna.

Različne širine spektrov običajne svetilke in laserja lahko upoštevamo tako, da kot primerjalno količino vzamemo namesto celotne moči v koherentnem snopu spektralno gostoto moči. Majhen šolski He-Ne laser seva 1 mW v približno 10^7 Hz, tako da je spektralna gostota moči $dP/d\nu \simeq 10^{-10}$ W/Hz. Zelo svetla živosrebrna svetilka seva v močno razširjene spektralne črte s širino okoli 10 nm $\simeq 10^{13}$ Hz. Spektralna gostota v koherentnem snopu, ki ga pripravimo iz take svetilke, bo tako le okoli $3 \cdot 10^{-20}$ W/Hz. Majhen šolski He-Ne laser tako prekaša najmočnejše nekoherentno svetilo za skoraj 10 velikostnih redov. Z laserji je seveda mogoče doseči mnogo večje moči, v sunkih tja do 10^{12} W, tako da po spektralni gostoti moči v koherentnem snopu laserji prekašajo običajna svetila do preko 20 velikostnih redov. Za toliko je tudi večja dosegljiva gostota moči na enoto ploskve in frekvence, kar je za vrsto uporab laserjev, posebno v spektroskopiji, odločilnega pomena. Najbrž v zgodovini težko najdemo še kak drug izum, ki je prinesel tolikšno izboljšavo v neki bistveni količini in tako ni čudno, da je prihod laserjev v začetku 60-tih let povzročil novo rojstvo optike.

Med laserji in običajnimi svetili je še ena pomembna, a manj opazna razlika. Z ustreznim interferometrom lahko tudi snop iz nekoherentnega svetila filtriramo, tako da dobimo enako spektralno širino kot iz laserja, sveda z mnogo manjšo močjo. Vendar je narava spektralne razširitve različna. Šum laserja je v obliki frekvenčne modulacije, pri čemer je amplituda svetlobnega vala konstantna, šum nekohernetnega svetila pa je v obliki amplitudne modulacije.

5.4 Mnogofrekvenčni laser

Doslej smo obravnavali le laser, v katerem je bilo vzbujeno eno samo stanje resonatorja. Ojačevalna širina večine aktivnih sredstev je precej velika. V plinih je na primer zaradi Dopplerjevega pojava vsaj nekaj GHz. Lastne frekvence resonatorja so navadno mnogo manj narazen, pri 30 cm dolgem resonatorju je razmik 500 MHz. Tako se prav lahko zgodi, da je ojačenje v laserju dovolj veliko za več nihanj hkrati. Vzbujena bodo vsa tista nihanja, za katere je ojačenje večje od ojačenja na pragu G_{pr}. Svetloba iz takega mnogofrekvenčnega laserja ni več monokromatska, temveč je sestavljena iz množice ozkih črt znotraj ojačevalnega pasu in tako ni mnogo bolj monokromatska kot ustrezna spektralna komponenta svetlečega plina. Ostaja pa prostorsko koherentna.

Za holografijo, interferometrijo in nekatere spektroskopske uporabe potrebujemo ozko spektralno črt. Zato moramo poskrbeti, da bo vzbujeno le eno nihanje resonatorja, najbolje tisto, ki je najbližje vrhu ojačenja ativnega sredstva, kar napravimo tako, da

Slika 5.4.1: Frekvenčna odvisnost ojačenja, položaj lastnih frekvenc resonatorja in ojačenje na pragu.

povečamo izgube za vsa ostala nihanja. Ena možnost je, da v resonator postavimo še Fabry-Perotov interferometer, kot kaže slika 5.4. Njegova prepustnost v odvisnosti od frekvence, razmika med zrcali L_f in nagiba glede na os resonatorja je podana z enačbo (glej 3. poglavje)

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} \sin^2(\frac{\omega}{c} L_f \cos\phi)} \tag{5.4.1}$$

in jo kaže slika 5.4. Izrazitost vrhov prepustnosti je odvisna od reflektivnosti zrcal interferometra. Z ustrezno izbiro razmika med zrcali in nagiba lahko dosežemo, da vrh prepustnosti ravno sovpada z izbranim stanjem resonatorja. Izgube za ostala nihanja, vsebovane v G_{pr}, so se s tem povečale in laser sveti le pri eni sami izbrani frekvenci. Na sliki 5.4 so prikazane povečane izgube, lastna stanja

resonatorja in ojačenje aktivnega sredstva. Ker zadošča že zmerno povečanje izgub, je reflektivnost zrcal interferometra običajno dokaj nizka, pod 0,5.

Naloga: Izberi ustrezne parametre interferometra.

Nagib interferometra je potreben tudi zato, da se neprepuščena svetloba odbije ven iz smeri osi resonatorja. Če bi bila os interferometra vzporedna z osjo resonatorja, bi nastale dodatne, neželjene resonance z osnovnimi zrcali resonatorja, kar bi močno motilo delovanje laserja.

5.5 Relaksacijske oscilacije

Doslej smo obravnavali le stacionarno delovanje laserjev. Včasih želimo izhodno moč modulirati s spreminjanjem črpanja. Pogosto laserji delujejo v sunkih. V nekaterih aktivnih sredstvih je mogoče doseči obrnjeno zasedenost le za kratek čas, črpanje v sunkih je včasih enostavnješe, recimo z bliskavko pri trdnih laserjih, dostikrat pa tudi želimo dobiti iz laserja kratke in močne koherentne sunke svetlobe. Za obravnavo nestacionarnega delovanja moramo seveda reševati sistem diferencialnih enačb 5.1.1 in 5.1.2, kar gre v splošnem le numerično.

Slika 5.4.2: Frekvenčna odvisnost ojačenja, položaj lastnih frekvenc resonatorja in ojačenje na pragu, kadar je v resonator vgrajen Fabry-Perotov interferometer.

Preden se lotimo sunkov, poglejmo, kako se obnaša laser, ki je blizu stacionarnega stanja. Spet se omejimo na enofrekvenčni laser, ki ga opišemo z enačbami 5.1.1 in 5.1.2. Te zaradi preglednosti zapišimo nekoliko drugače. Vpeljimo brezdimnezijski čas $t' = tA$ in $\tau' = \tau A$, čas torej merimo v enotah življenskega časa laserskega nivoja. Upoštevajmo še, da je $VA/(B\hbar\omega g(\omega_0)) = p$, kjer je p število stanj elektromagnetnega polja v volumnu V in znotraj spektralne širine laserskega nivoja. Tako imamo

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt'} &= -\frac{1}{p} n N_2 - N_2 + N_{20} && (5.5.1) \\ \frac{dn}{dt'} &= \frac{1}{p} n N_2 - \frac{2}{\tau'} n \quad . && (5.5.2) \end{aligned}$$

Pri tem smo vpeljali konstanto $N_{20} = rN/A$, ki ima tudi nazornen pomen: je zasedenost, ki bi jo dobili pri danem stacionarnem črpanju, če v izbranem stanju ne bi bilo fotonov in s tem ne stimuliranega sevanja in torej meri moč črpanja. V enačbi za hitrost spreminjanja števila fotonov smo zanemarili prispevek spontanega sevanja, za katerega smo že ugotovili, da se pozna le do praga.

Pri nelinearnih diferencialnih enačbah lahko pogosto dobimo uporabne približke z linearizacijo. Naj laser najprej deluje stacionarno, v nekem trenutku pa ga nekoliko izmaknemo iz stacionarnega stanja, recimo tako, da spremenimo moč črpanja. Trenutno zasedenost N_2 in število fotonov n lahko zapišemo v obliki

$$N_2 = N_{2s} + x \qquad \text{in} \qquad n = n_s + y \quad , \tag{5.5.3}$$

kjer sta N_{2s} in n_s vrednosti N_2 in n_s v stacionarnem stanju. Zanju velja

$$N_{2s} = \frac{2p}{\tau'} \tag{5.5.4}$$

in

$$n_s = p\frac{N_{20} - N_{2s}}{N_{2s}} = p(a-1) \ . \tag{5.5.5}$$

Kot smo ugotovili že v drugem razdelku, je stacionarna zasedenost enaka zasedenosti na pragu, ki je odvisna od izgub resonatorja, kar kaže tudi enačba 5.5.4. Razmerje $a = N_{20}/N_{2s}$ je mera za moč črpanja in mora biti v delujočem laserju večje od 1. V večini praktičnih primerov doseže a vrednosti do 3 ali 5.

Postavimo sedaj nastavka 5.5.3 v enačbi 5.5.1. Dobimo

$$\frac{dx}{dt'} = -\frac{1}{p}n_s N_{2s} - N_{2s} + N_{20} - \frac{1}{p}(n_s x + N_{2s} y + xy) - x \tag{5.5.6}$$

$$\frac{dy}{dt'} = \frac{1}{p}n_s N_{2s} - \frac{2}{\tau'}n_s + \frac{1}{p}(n_s x + N_{2s} y + xy) - \frac{2}{\tau'}y \tag{5.5.7}$$

Ker sta x in y majhna v primeri s stacionarnimi vrednostmi, lahko zanemarimo produkt xy. Vsi členi, ki vsebujejo le stacionarne vrednosti, dajo ravno 0, saj smo jih tako določili. Če upoštevamo še izraza 5.5.4 in 5.5.5, dobimo željeni linearizirani diferencialni enačbi za odmika od stacionarnih vrednosti

$$\frac{dx}{dt'} = -a\,x - \frac{2}{\tau'}\,y \tag{5.5.8}$$

$$\frac{dy}{dt'} = (a-1)\,x \ . \tag{5.5.9}$$

Kot smo pri linearnih sistemih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti vajeni, poiščemo rešitev v obliki eksponentne funkcije

$$x = x_0 e^{\lambda t'} \qquad \text{in} \qquad y = y_0 e^{\lambda t'} \ . \tag{5.5.10}$$

Dobljeni homogeni sistem linearnih enačb

$$(a+\lambda)x_0 + \frac{2}{\tau'}y_0 = 0 \tag{5.5.11}$$

$$-(a-1)x_0 + \lambda y_0 = 0 \tag{5.5.12}$$

bo imel netrivialno rešitev le, če bo njegova determinanta nič:

$$\lambda^2 + a\lambda + \frac{2}{\tau'}(a-1) = 0 \ . \tag{5.5.13}$$

Rešitvi sta

$$\lambda = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2}{\tau'}(a-1)} \ . \tag{5.5.14}$$

Narava rešitve je odvisna od velikosti brezdimenzijskega relaksacijskega časa nihanja resonatorja $\tau' = A\tau$. Za $\tau' > 2$ je izraz pod korenom pozitiven pri vseh a in laser se vrača v stacionarno stanje eksponentno. Za $\tau < 2$ pa je koren v nekem območju parametra a imaginaren in laser se vrača v stacionarno stanje z dušenim nihanjem, ki mu pravimo *relaksacijske oscilacije*.

Slika 5.5.1: Relaksacijske oscilacije

V običajnih resonatorjih je τ velikostnega reda 10^{-7} s. Razpadna konstanta laserskega nivoja A je navadno dokaj majhna, ker je le v takih primerih lahko doseči obrnjeno zasedenost, tipična vrednost je recimo 10^5 s^{-1}, lahko pa je še dosti manjša. Tedaj je $\tau' \simeq 10^{-2}$ in imamo relaksacijske oscilacije pri vseh dosegljivih vrednostih črpanja nad pragom, to je za $a > 1$. Ker a v praksi ni nikoli dosti večji od 3, je frekvenca oscilacij ω_r' v brezdimenzijskih enotah približno $1/\sqrt{\tau'}$. Če preidemo nazaj na prave enote časa, dobimo $\omega_r \simeq \sqrt{A/\tau}$. V tem primeru je torej frekvenca relaksacijskih oscilacij velikostnega reda geometrijske sredine med razpadnima konstantama nihanja resonatorja in atomskega stanja. Primer takega nihanja pri vključitvi laserja kaže slika 5.5.

Relaksacijske oscilacije so praktično pomembne, ker določajo gornjo mejo hitrosti, s katero lahko izhodna moč laserja sledi modulaciji črpanja. Poleg tega imamo pri tej frekvenci resonanco, pri kateri se šum črpanja ojačano prenaša v šum izhodne moči.

5.6 Delovanje v sunkih s preklopom dobrote

Veliko trenutno moč dobimo iz laserjev, kadar delujejo v kratkih sunkih. Pogosto tedaj tudi ojačevalno sredstvo črpamo v sunkih. Pri tem se pojavi težava. Ko ob močnem črpanju obrnjena zasedenost znatno preseže zasedenost praga (v nestacionarnem stanju je to mogoče), laser posveti in v kratkem času zasedenost pade nazaj pod prag. Če tedaj črpanje še traja, čez čas zasedenost zopet dovolj naraste in laser ponovno posveti. To se lahko večkrat ponovi. Razmiki med zaporednimi sunki so reda velikosti periode relaksacijskih oscilacij, so pa lahko precej nepravilni. Pri takem režimu delovanja v posameznem sunku ne dobimo razpoložljive energije črpanja v enem samem lepo oblikovanem sunku, kar je za vrsto uporab zelo pomembno.

Opisani težavi se je moč izogniti. V sistemu atomov v stanju obrnjene zasedenosti je shranjena energija, ki se preko stimuliranega sevanja lahko pretvori v koherenten svetlobni sunek. Čim večja je stopnja inverzije, tem več energije je na voljo. Ugotovili pa smo, da obrnjene zasedenosti v resonatorju z danimi izgubami ni mogoče povečati znatno nad prag. Pri velikih izgubah je prag visoko in je shranjene energije več. Zato postopamo takole. Najprej držimo izgube resonatorja velike in ustvarimo veliko obrnjeno zasedenost.

Slika 5.6.1: Obrnjena zasedenost in energija v laserju pri preklopu dobrote

Nato dovolj hitro izgube zmanjšamo. Optično ojačenje je veliko in energija svetlobe v kratkem času močno naraste. S tem se tudi obrnjena zasedenost hitro zniža na vrednost močno pod pragom. Predstavljamo si lahko, da dobimo prvi nihaj relaksacijskih oscilacij, le da je začetno stanje daleč od stacionarnega in je zato linearni približek zelo slab. Iz laserja dobimo kratek in zelo močan sunek svetlobe. Energija sunka je skoraj tolikšna kot je bila energija obrnjene zasedenosti. Elektrotehniki izgube resonatorjev podajajo z dobroto, to je razmerjem frekvence lastnega stanja in njegove širine, zato opisano tehniko imenujemo *preklop dobrote*. Dogajanje kaže slika 5.6.

Izgube resonatorja je mogoče spreminjati na mnogo načinov. Najenostavneje je vrteti eno od ogledal. Tedaj dobimo uglašen resonator le v kratkem trenutku, ko je ogledalo pravokotno na os. Metoda je dokaj uspešna, a zastarela. Boljši in danes največkrat uporabljani način je, da v resonator vgradimo elektrooptični ali akustooptični modulator, o katerih bomo govorili kasneje. Z njimi lahko električno krmilimo izgube.

Kot smo že povedali, nelinearnih laserskih enačb ne moremo analitično rešiti. Zato najprej napravimo nekaj ocen. Trajanje sunka je odvisno od hitrosti, s katero se izprazni gornji laserski nivo. To se ne more zgoditi hitreje kot v nekaj preletih sunka skozi resonator. Trajanje sunka je torej vsaj nekajkrat $2L/c$, to je za 15 cm dolg resonator vsaj 10 ns.

Ocenimo lahko še tudi hitrost naraščanja na začetku in upadanja na koncu sunka.

Zapišimo najprej še enkrat enačbi za zasedenost in število fotonov, pri čemer upoštevajmo, da nas zanima le dogajanje v času sunka, ki je zeko kratek v primeri atomskim razpadnim časom, zato zanemarimo ustrezni člen v enačbi 5.1.1. Navadno je tudi črpanje prešibko, da bi med sunkom znatno vplivalo na zasedenost, zato lahko člen rN izpustimo. S črpanjem seveda ustvarimo začetno zasedenost N_{20}. Tako nam ostane

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{1}{V}B\hbar\omega g(\omega)\, n\, N_2 \tag{5.6.1}$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{V}B\hbar\omega g(\omega)\, n\, N_2 - \frac{2}{\tau}n\ . \tag{5.6.2}$$

Na začetku sunka se vrednost N_2 ne razlikuje dosti od začetne vrednosti N_{20}, tako da število fotonov narašča približno eksponentno:

$$n(t) = n_0 e^{\frac{1}{V}B\hbar\omega g(\omega)t} = n_0 e^{t/\tau_r}\ . \tag{5.6.3}$$

Začetnega števila fotonov ne poznamo, vemo pa, da je velikostnega reda 1, saj ga dobimo zaradi spontane emisije. Da bo n narastel na znatno vrednost, recimo več od 10^{10} fotonov, je potreben čas blizu 30 τ_r.

Vzemimo za primer neodimov laser. Presek za stimulirano sevanje $\sigma(\omega) = \frac{1}{c}B\hbar\omega g(\omega)$ (razdelek 4.4) je okoli 10^{-19} cm^2. Naj bo začetna gostota zasedenosti $N_{20}/V = 10^{19}/\text{cm}^3$. Tedaj je $\tau_r = 3$ ns. Proti koncu sunka pade obrnjena zasedenost precej pod prag in za grobo oceno lahko predpostavimo, da ojačevanja ni več. Število fotonov bo tedaj upadalo s krakterističnim razpadnim časom resonatorja $\tau/2 \simeq 2L/c(1-\mathcal{R})^{-1}$. V laserjih s preklopom dobrote je odbojnost izhodnega zrcala navadno dokaj nizka, recimo 0,5. Pri $L = 15$ cm je tako $\tau = 4$ ns. Celotno trajanje sunka je v izbranem primeru tako približno 10 ns, pri čemer traja okoli 100 ns od preklopa dobrote, da sunek zraste iz šuma spontanega sevanja. Energija sunka je blizu $N_{20}\hbar\omega$, to je pri aktivnem volumnu 0,5 cm^3 nekaj desetink joula. Od tod lahko ocenimo še, da je moč v vrhu sunka velikostnega reda 10 MW.

Iz enačb 5.6.1 sicer ne moremo izračunati časovnih odvisnosti N_2 in n, lahko pa najdemo njuno medsebojno zvezo. Izrazimo iz prve dt in ga postavimo v drugo enačbo. Dobimo

$$dn = -dN_2 + \frac{N_{2p}}{N_2}dN_2\ , \tag{5.6.4}$$

kjer smo upoštevali, da je $N_{2p} = 2V/(B\hbar\omega g(\omega)\tau)$. Enačbo brez težav integriramo:

$$n = N_{20} - N_2 + N_{2p}\ln\frac{N_2}{N_{20}}\ . \tag{5.6.5}$$

Vzeli smo, da je na začetku $N_2 = N_{20}$ in $n = 0$. Iz dobljene zveze lahko najprej izračunamo, kolikšna je končna zasedenost N_{2k}. Na koncu mora biti zopet $n = 0$, kar nam da transcendentno enačbo za N_{2k}. Ima obliko $(x/a) = \exp(x - a)$, kjer je $x = N_{2k}/N_{20}$ in $a = N_{20}/N_{2p}$. Kadar je začetna zasedenost le malo nad pragom, tudi končna ne pade dosti pod prag, zato je izraba energije slabša. Pri večjih začetnih vrednostih N_{20} pa pade končna skoraj na nič. Za $a = 2$, na primer, je $x = 0,41$, medtem ko je že pri $a = 4$ x le še 0,08. S tem lahko izračunamo celotno energijo sunka: $W = \hbar\omega(N_{20} - N_{2k})$.

Slika 5.7.1: Časovna odvisnost moči mnogofrekvenčnega laserja z enakimi fazami

Trenutna moč, ki izhaja iz laserja, je dana s $P = (2\hbar\omega/\tau)n$. Največja bo v vrhu sunka, ki je določen z $dn/dN_2 = 0$. Ta enačba ima očitno rešitev pri $N_2 = N_{2p}$, vrh sunka je torej natanko tedaj, ko pade zasedenost na prag. Moč je tedaj $P_{max} = (2\hbar\omega/\tau)[N_{20} - N_{2p} - N_{2p}\ln(N_{20}/N_{2p})]$.

S preklopom dobrote dobimo zelo kratke in močne svetlobne sunke. Vendar je največja energija omejena. Če je začetna obrnjena zasedenost dovolj velika, postane ojačenje tolikšno, da se svetloba že v enem preletu aktivnega sredstva močno ojači in izprazni laserski nivo. To omejuje nadaljne črpanje. Večje moči dosežejo tako, da sunke iz laserja ojačijo s prehodom skozi enako aktivno snov, kot je v laserju. Z večstopenjskim ojačevanjem je mogoče doseči zelo velike energije v nanosekundnih sunkih, do 100 kJ. Da se ojačevalniki med seboj ne motijo, jih je treba ločiti s Faradayevimi izolatorji.

Naloga: Oceni, kolikšna je dosegljiva zasedenost pri dani dolžini Nd:YAG paličke.

5.7 Uklepanje faz

Še dosti krajše sunke kot s preklopom dobrote je mogoče dobiti na povsem drug način, ki je prav presentljiva manifestacija koherentnosti laserske svetlobe. Naj v laserju niha več nihanj hkrati. Njihove frekvence so enakomerno razmaknjene za $\Delta\omega = \pi c/L$. Celotno električno polje v neki točki v laserju je

$$E(t) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} A_m e^{i[(\omega_0 + m\Delta\omega)t + \varphi_m(t)]} \quad . \tag{5.7.1}$$

N je število vseh vzbujenih nihanj. Upoštevali smo, da ima vsako nihanje lahko poljubno fazo $\varphi_m(t)$, ki je v splošnem predvsem zaradi zunanjih motenj slučajna funkcija časa. Zaradi tega se tudi celotno polje slučajno spreminja, kar močno zmanjšuje uporabnost takega laserja tam, kjer je potrebna časovna koherenca.

Denimo, da so faze vseh nihanj enake. Poleg tega zaradi enostavnosti računa privzemimo še, da so tudi vse amplitude A_m enake. Tedaj postane vsota 5.7.1 geometrijska in jo lahko

Slika 5.7.2: Prostorska odvisnost fazno uklenjenih sunkov.

brez težav seštejemo:

$$E(t) = A_0 e^{i\omega_0 t} \frac{\sin(N\Delta\omega t/2)}{sin(\Delta\omega t/2)} \quad . \tag{5.7.2}$$

Trenutna moč izhodne svetlobe ima časovno odvisnost

$$P(t) = P_0 \frac{\sin^2(N\Delta\omega t/2)}{\sin^2(\Delta\omega t/2)} \tag{5.7.3}$$

in jo kaže slika 5.1.4. Predstavlja periodično zaporedje sunkov, ki si slede s periodo $T = 2\pi/\Delta\omega = 2L/c$, kar je enako času obhoda svetlobe v resonatorju. Konstanta P_0 je moč posameznega nihanja. Moč v vrhu sunka je tako $N^2 P_0$, povprečna moč pa NP_0. Računsko je pojav enak kot uklon na mrežici in lahko rečemo, da imamo opravka z interferenco v času. Dolžina sunkov je

$$\tau_{ML} = \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_G} \quad , \tag{5.7.4}$$

ker je N ravno število nihanj znotraj širine ojačevanja $\Delta\omega_G$. Dolžina sunka je torej obratno sorazmerna s širino ojačevanja aktivnega sredstva.

Premislimo še, kakšna je prostorska odvisnost električnega polja v resonatorju. Polje na danem mestu opisuje enačba 5.7.2. Še krajevno odvisnost dobimo, če v 5.7.2 zamenjamo t s $(t - z/c)$. To pa predstavlja svetlobni paket, ki potuje sem in tja med ogledali resonatorja. Na izhodnem ogledalu se ga vsakič nekaj odbije, nekaj pa gre ven iz resonatorja (slika 5.7). Razmik med sunki, ki izhajajo iz resonatorja, je $2L$, prostorska dolžina posameznega sunka pa $\tau_{ML} c = 2L/N$.

V našem računu predpostavka, da so vse amplitude A_m enake, ni prav nič bistvena za osnovne ugotovitve. Če vzamemo realističen primer, da so amplitude oblike $A_m = A_0 \exp[(m\Delta\omega/\Delta\omega_G)^2]$, vsote 5.7.1 ne znamo točno sešteti, lahko pa jo približno pretvorimo v integral, ki je Fourierova transformacija Gaussove funkcije (Pri prehodu z diskretne vsote na integral seveda izgubimo periodičnost zaporedja sunkov.). Ta je zopet Gaussova funkcija, katere širina je obratna vrednost širine prvotne funkcije, prav podobno, kot smo dobili zgoraj. Odvisnost amplitud nihanj od m vpliva torej le na točno obliko sunkov, osnovne ugotovitve pa se ne spremene. (Naloga).

Pač pa je predpostavka, da so vse faze φ_m enake, bistvena. V naši dosedanji sliki mnogofrekvenčnih laserjev so resonatorska stanja med seboj neodvisna, zato so faze poljubne in se zaradi motenj lahko še spreminjajo. Da dobijo za vsa nihanja isto vrednost, moramo poskrbeti posebej. Tako *uklepanje faz* je mogoče doseči na več načinov. Ena možnost je, da moduliramo izgube resonatorja s frekvenco, ki je ravno enaka razliki frekvenc med resonatorskimi stanji. To ni težko razložiti. Naj bo modulator tak, da je večino časa zaprt, le v razmikih $T = 2L/c$ naj bo kratek čas odprt. Postavimo ga tik ob eno ogledalo. Tedaj se v resonatorju očitno lahko uspešno ojačuje le kratek sunek, kakršen je na sliki **??**. Izgube za vsa nihanja bodo majhne le tedaj, kadar bodo vse faze enake. V praksi ni potrebno, da je modulacija tako izrazita. Običajno zadošča sinusna modulacija izgub, kjer je relativna prepustnost v minimumu za nekaj destink manjša od maksimalne.

Kako pri modulaciji pride do uklepanja faz, lahko uvidimo še drugače. Modulacija amplitude posameznega nihanja povzroči, da se v spektru nihanja pojavita še stranska pasova pri frekvencah $\omega_m \pm \Delta\omega$. Ta se ravno pokrivata z obema sosednjima nihanjema in se konstruktivno prištejeta, če imata enako fazo. S tem pa so tudi izgube manjše in ima delovanje laserja z uklenjenimi fazami najnižji prag. Zadnji razmislek nam tudi pove, da ni dobra le amplitudna modulacija, temveč tudi fazna (ali frekvenčna), saj se tudi tedaj pojavijo stranski pasovi.

Za modulacijo se najpogosteje uporabljajo akustooptični modulatorji, pri katerih izkoriščamo uklon svetlobe na stoječih zvočnih valovih v primernem kristalu (Glej 7. poglavje). Frekvenca zvočnega vala mora biti enaka polovici zahtevane modulacijske frekvence, za 1,5 m dolg laser torej 50 MHz.

Poleg opisanega aktivnega postopka je mogoče faze ukleniti tudi tako, da v resonator postavimo plast barvila, ki močno absorbira svetlobo laserja pri majnhi gostoti toka, pri veliki gostoti toka pa pride do nasičenja absorpcije (glej razdelek 4.5), zato postane barvilo prozorno. Na začetku imamo v laserju predvsem spontano sevanje, ki se pri enem prehodu skozi aktivno snov deloma ojači. Barvilo najmanj absorbira največjo fluktuacijo. Pri dovolj velikem ojačenju bo ta rastla in spet dobimo fazno uklenjeni sunek. Ker mora po prehodu sunka absorpcija v barvilu zopet hitro narasti, mora biti relaksacijski čas barvila zelo kratek, v območju pikosekund.

Z uklepanjem faz je danes mogoče dobiti sunke z dolžino pod 100 fs (10^{-13} s). Tak sunek traja le še nekaj deset optičnih period. S posebnimi prijemi jih lahko še skrajšajo na okoli 10 fs. Če je potrebna večja energija sunkov, jih ojačijo, kar ne pokvari mnogo osnovnega sunka. Zelo kratke svetlobne sunke danes na široko uporabljajo za študij hitre molekularne dinamike in kratkoživih vzbujenih elektronskih stanj v polvodnikih in mnogih drugih snoveh. Z njimi se je časovna ločljivost povečala za nekaj redov velikosti [?].

Slika 5.8.1: Odvisnost moči laserja z nasičenim absorberjem od frekvence

5.8 *Stabilizacija frekvence laserja na nasičeno absorpcijo

V drugem razdelku smo videli, da je efektivna spektralna širina enofrekvenčnega laserja odvisna od fluktuacij dolžine optične poti svetlobe pri preletu resonatorja. Na to lahko poleg spreminjanja geometrijske dolžine vpliva še spreminjanje lomnega količnika. Če se posebej ne potrudimo, laser sveti nekje blizu vrha ojačevalnega pasu, pri čemer frekvenca pleše za znaten del razmika med resonatorskimi stanji. V šolskem He-Ne laserju je to na primer nekaj deset MHz.

Bistveno manjšo širino lahko dosežemo z aktivno stabilizacijo dolžine resonatorja. Pri tem je pogalvitni problem, kako dobiti primerjalni standard. S stabilizacijo na pomožni interferometer, ki smo jo na kratko opisali v drugem razdelku, lahko dobimo zelo ozko črto, ki pa ima le toliko natančno določeno frekvenco, kot poznamo dolžino interferometra. Včasih, na primer za natančna interferometrična merjenja dolžin, s tem nismo zadovoljni in potrebujemo drug, absoluten standard.

Tak standard za frekvenco so ozki prehodi v primernem razredčenem plinu. Vendar naletimo na težavo. Zaradi Dopplerjevega pojava so absorpcijske črte močno razširjene. Pomaga nam pojav nasičenja absorpcije, o katerem smo govorili v razdelku 4.9. Tam smo videli, da se pri dvakratnem prehodu monokromatskega snopa svetlobe skozi plin v nasprotnih smereh pojavi v sredini Dopplerjevo razširjene črte vdolbina, ki ima obliko homogeno razširjene črte. Homogena širina je lahko mnogo manjša od Dopplerjeve in je zato vdolbina uporabna kot frekvenčni standard.

V laserski resonator postavimo poleg aktivnega sredstva še celico s primernim plinom, ki ima absorpcijsko črto v bližini vrha ojačenja aktivnega sredstva. Za He-Ne laser pri 633 nm so to na primer pare ioda. Zaradi absorpcije se povečajo izgube v laserju in izhodna moč se zmanjša. Spreminjajmo sedaj dolžino resonatorja in s tem frekvenco laserja. Ko se ta približa na homogeno širino centru absorpcijske črte pri ω_0, se absorpcija zmanjša in s tem se moč laserja poveča. Odvisnost moči laserja z absorberjem od dolžine kaže slika 5.8. Povečanje moči v vrhu običajno ni prav veliko, manj od procenta.

Shema stabilizacije na nasičeno absorpcijo je prikazana na sliki **??**. Eno od zrcal resonatorja je na piezoelektričnem nosilcu. Nanj vodimo izmenično napetost s frekvenco

Slika 5.8.2: Shema stabilizacije laserja na nasičeno absoprcijo

Ω in s tem moduliramo frekvenco laserja, da se vozi preko absorpcijske vdolbine pri ω_0. Zaradi tega se spreminja tudi izhodna moč laserja, ki jo opazujemo s fotodiodo. Kadar je srednja frekvenca laserja enaka ω_0, se moč zmanjša simetrično pri odmikih navzgor in navzdol od ω_0 in se zato spreminja z dvojno frekvenco modulacije 2Ω. Kadar pa je srednja frekvenca laserja nekoliko odmaknjena od ω_0, se izhodna moč pri odmiku v zrcala v eno stran spremeni drugače kot v drugo, kar pomeni, da je v signalu s fotodiode tudi komponenta s frekvenco Ω. Da držimo srednjo frekvenco laserja enako ω_0, moramo torej meriti komponento izhodne moči pri modulacijski frekvenci in s povratno zanko skrbeti, da je ta enaka nič.

Komponento signala s frekvenco Ω zaznamo s faznim detektorjem, ki deluje tako, da signal množi z refenčno modulacijsko napetostjo. V produktu dobimo istosmerno komponento, ki je sorazmerna signalu pri frekvenci Ω in ki jo izločimo z nizkopasovnim filtrom. Izhod iz faznega detektorja je tako sorazmeren odmiku srednje frekvence laserja od ω_0. Preko primernega ojačevalnika ga vodimo na piezoelektrični nosilec zrcala in tako popravljamo dolžino laserja.

Napravimo kvantitativno oceno opisane stabilizacijske sheme. Odvisnost izhodne moči od frekvence laserja ω lahko približno zapišemo v obliki

$$P(\omega) = P_0 + \frac{P_1\gamma^2}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2} \quad . \tag{5.8.1}$$

P_0 je moč laserja brez saturacijskega vrha pri ω_0, P_1 pa povečanje moči pri ω_0. Predpostavili smo, da se ojačenje laserja in nehomogeno razširjeni del absorpcije ne spreminjata mnogo preko homogene širine absorberja in je zato P_0 približno konstantna. Frekvenco laserja moduliramo:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega + a\sin\Omega t \quad . \tag{5.8.2}$$

Z $\Delta\omega$ smo označili odstopanje srednje frekvence laserja od centra absorpcijske črte ω_0. Če sta a in $\Delta\omega$ majhna v primeri s homogeno širino γ, lahko imenovalec v enačbi 5.8.1 razvijemo:

$$P(\omega) = P_0 + P_1[1 - \frac{1}{\gamma^2}\Delta\omega^2 + \frac{2}{\gamma^2}a\Delta\omega\sin\Omega t - \frac{a^2}{\gamma^2}\sin^2\Omega t] \ . \qquad (5.8.3)$$

Amplituda signala pri Ω je $2P_1 a\Delta\omega/\gamma^2$. Najmanjša razlika, ki jo lahko zaznamo, je določena s šumom meritve. Kot bomo videli v poglavju o detekciji svetlobe, je osnovni izvor šuma fotodiode Poissonov šum števila parov elektron-vrzel, ki nastanejo zaradi fotoefekta v p-n spoju. Najmanjša sprememba svetlobne moči, ki jo lahko izmerimo, je (glej 10??. poglavje)

$$P_N \simeq \sqrt{\hbar\omega P\frac{1}{\tau}} \ , \qquad (5.8.4)$$

kjer je P celotna svetlobna moč, ki vpada na diodo, τ pa čas meritve, ki je v našem primeru določen s časovno konstanto nizkopasovnega filtra na izhodu faznega detektorja.

Vzemimo na primer He-Ne laser, stabiliziran na iodove pare. Povprečna moč laserja P_0 naj je 10 mW in $P_1 = 0.1$ mW. Širina absorpcijske črte $\gamma = 10^6$ s^{-1}. Izberimo amplitudo modulacije $a = 10^5$ s^{-1} in $\tau = 10^{-4}$ s. Časovna konstanta τ ne sme biti prevelika, določa namreč, kako hitro popravljamo dolžino laserja. Gornje vrednosti nam dajo za najmanjšo zaznavno moč pri Ω $P_N = 0.5\times10^{-8}$ W. Najmanjše merljivo odstopanje frekvence laserja je tedaj

$$\Delta\omega_N = \frac{P_N\gamma^2}{2P_1 a} = 2.5\times10^3\ s^{-1} \ . \qquad (5.8.5)$$

Takšno in še boljšo stabilnost frekvence tudi zares dosežejo. Pozoren bralec bo opazil, da je $\Delta\omega_N < 0.01\gamma$, to je, položaj absorpcijskega vrha je na opisan način mogoče določiti z natančnostjo nekaj tisočink celotne širine.

Na absorpcijsko črto stabiliziranega laserja navadno ne uporabljamo direktno, temveč z njim kontroliramo drug laser. Del izhodne svetlobe iz obeh laserjev zmešamo na detekcijski fotodiodi. V signalu dobimo utripanje, ki je enako razliki frekvenc obeh laserjev. S spreminjanjem dolžine drugega laserja skrbimo, da je frekvenca utripanja konstantna. Na ta način lahko v ozkem frekvenčnem intervalu še spreminjamo frekvenco drugega laserja.

Z merjenjem utripanja med dvema stabiliziranima laserjema ugotavljajo tudi njihovo stabilnost.

5.9 *Absolutna meritev frekvence laserja in definicija metra

Najnatančneje merljiva količina je čas odnosno frekvenca. Frekvence laserja, ki sveti v vidnem področju seveda ni mogoče direktno prešteti. Pač pa je v začetku sedemdesetih let uspelo s heterodinsko tehniko, ki se v mikrovalovni tehniki pogosto uporablja, napraviti primerjavo stabiliziranega He-Ne laserja z osnovno cezijevo uro in tako določiti frekvenco absorpcijske črte metana pri 3.39 μm z isto natan"nostjo, kot jo ima cezijeva ura.

S heterodinsko tehniko primerjamo frekvenci dveh ali več valovanj tako, da jih zmešamo na primernem nelinearnem elementu, običajno neki diodi. Zaradi nelinearnosti dobimo v odzivu diode različne mnogokratnike vpadnih frekvenc, njihove vsote in razlike. Od teh je kaktera lahko dovolj nizka, da jo lahko direktno preštejemo.

Za primerjanje frekvenc nad mikrovalvnim področjem je potreben ustrezen mešalni element. Polvodniške diode nehajo biti uporabne pri približno 20 GHz. Za višje frekvence uporabijo diode kovina-izolator-kovina, ki jih sestavljajo oksidirana površina niklja, ki se je dotika ostra volframska konica. Taka dioda deluje kot uporaben mešalni element do frekvenc okoli 200 THz, to je skoraj do vidnega področja.

Za primerjavo He-Ne laserja, stabiliziranega na metan pri 3.39 μm, z osnovno cezijevo uro je bilo potrebno zgraditi celo verigo vmesnih primerjav, ki jo kaže slika **??**. Frekvenco CO_2 laserja dobimo na primer iz utripanja med frekvencama CO_2 laserja pri 10.2 μm in pri 9.3 μm, trikratnikom frekvence HCN laserja in še klistrona s frekvenco 20 GHz. Na ta način so izmerili, da je frekvenca CH_4 črte na katero je stabiliziran He-Ne laser, 88.376181627 THz.

Valovno dolžino laserja dobimo z interferometrično primerjavo z dolžinskim standardom, ki je bil do leta 1984 določen z neko kriptonovo črto. Iz znane frekvence in valovna dolžine določimo hitrost svetlobe. Zaradi relativno velike širine črte kriptonove svetilke je bil po starem meter definiran le z relativno natančnostjo 10^{-8}, kar je pomenilo, da tudi hitrost svetlobe ne more biti določena bolj natančno. Meritev frekvence laserja pa je dosti natančnejša. Zato je bilo smiselno opustiti meter kot osnovno enoto in raje definirati hitrost svetlobe kot pretvornik med sekundo in metrom. Z njeno vrednost so vzeli, kar so dobili z naboljšo primerjavo stabiliziranega laserja in kriptonove črte: $c = 299792458\ m/s$. Na metan ali jod stabilizirani laser je postal sekundarni standard za dolžino. Laser je pravzaprav pri tem le pomožna naprava; standard je ustrezni molekularni prehod.

5.10 *Semiklasični model laserja

Doslej smo laserje obravnavali le z modelom zasedbenih enačb. Ta je zelo grob, saj smo zanemarili nekaj pomembnih pojavov. Svetlobo v resonatorju smo opisali smo opisali le s celotno energijo ali številom fotonov in se za njeno valovno naravo nismo menili. Kar privzeli smo, da je frekvenca delujočega laserja in oblika polja v njem enaka kot za lastno stanje praznega resonatorja. Aktivno snov smo opisali le z zasedenostjo zgornjega in spodnjega laserskega stanja in smo s tem izpustili možnost, da se zaradi sodelovanja z elektromagnetnim poljem atomi nahajajo v nestacionarnem, mešanem stanju.

Gornje pomanjkljivosti odpravimo s tem, da elektromagnetno polje v resonatorju obravnavamo z valovno enačbo, za atome aktivne snovi pa upoštevamo, da se pokoravajo Schroedingerjevi enačbi. S tem dobimo *semiklasični model* laserja. Za še natančnejši opis pa moramo tudi svetlobo obravnavati kvantno, kar presega okvir te knjige.

Aktivna snov naj bo še naprej kar najenostavnejša, to je množica enakih dvonivojskih atomov s stanji $|1\rangle$ in $|2\rangle$, ki imata energiji W_1 in W_2. Atomi s svetlobo sodelujejo preko dipolne interakcije oblike $e\hat{x}E(t)$, kjer je $E(t)$ polje v resonatorju, ki naj bo zaradi preprostosti polarizirano v smeri osi x. Časovno odvisno stanje atomov zapišimo v obliki

$$|\psi\rangle = c_1(t)|1\rangle \exp(-iW_1 t/\hbar) + c_2(t)|2\rangle \exp(-iW_2 t/\hbar)\ . \tag{5.10.1}$$

Slika 5.9.1: Primerjalna veriga za meritev frekvence He-Ne laserja

Iz Schroedingerjeve enačbe dobimo za koeficienta $c_1(t)$ in $c_2(t)$

$$\dot{c}_1 = \frac{1}{i\hbar} E(t) v_{12} e^{-i\omega_0 t} c_2 \dot{c}_2 = \frac{1}{i\hbar} E(t) v_{12} e^{i\omega_0 t} c_1 \; , \tag{5.10.2}$$

kjer je $\omega_0 = (W_2 - W_1)/\hbar$ in $v_{12} = e\langle 1|\hat{x}||2\rangle$.

Električni dipolni moment atoma v stanju $ket\psi$ je

$$p = -e\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = -(c_1^* c_2 e^{-i\omega_0 t} + c_1 c_2^* e^{i\omega_0 t}) v_{12} \; . \tag{5.10.3}$$

Razdelimo p na dva dela:

$$p = p^+ + p^- = v_{12}[\eta(t) + \eta^*(t)] \; , \tag{5.10.4}$$

kjer smo vpeljali $\eta(t) = c_1^* c_2 e^{-i\omega_0 t}$.

Zanima nas, kako se dipolni moment spreminja s časom. Zato s pomočjo enačb 5.10.2 izrazimo

$$\dot{\eta} = -i\omega_0 \eta - \frac{1}{i\hbar} E(t) v_{12} (|c_2|^2 - |c_1|^2) \; . \tag{5.10.5}$$

$|c_i|^2$ je verjetnost za zasedenost stanja $|i\rangle$. Izraz v oklepaju na desni strani gornje enačbe torej meri razliko zasednosti obeh stanj; označimo ga z ζ. Podobno kot zgoraj izrazimo časovni odvod

$$\dot{\zeta} = \frac{2v_{12}}{i\hbar} E(t)(\eta^* - \eta) \; . \tag{5.10.6}$$

S tem smo iz Schroedingerjeve enačbe dobili enačbe za časovni razvoj diponega momenta in obrnjene zasedenosti, ki pa jih moramo še dopolniti. Naj bo atom na začetku v stanju $|2\rangle$ in naj bo $E(t) = 0$. Začetna vrednost $\zeta(0) = 1$ in po enačbi 5.10.6 naj bi bila $\zeta(t)$ konstantna. Vemo pa, da se atom, ki je v vzbujenem stanju, sčasoma vrne v osnovno stanje. Verjetnost za prehod na časovno enoto smo označili z A. Poleg tega moramo na nek način upoštevati še črpanje, s katerim vzdržujemo obrnjeno zasedenost in s tem lasersko delovanje. Za podroben opis črpanja bi morali v Hamiltonov operator dodati ustrezne člene in morda upoštevati še druga stanja atomov, vendar nas take podrobnosti na tem mestu ne zanimajo. Zaradi črpanja stacionarna vrednost ζ v odsotnosti laserskega polja $E(t)$ ni -1, temveč zavzame neko vrendost ζ_0 med -1 in 1, odvisno od moči črpanja. Tako lahko enačbo 5.10.6 popravimo:

$$\dot{\zeta} = A(\zeta_0 - \zeta) + \frac{2v_{12}}{i\hbar} E(t)(\eta^* - \eta) \; , \tag{5.10.7}$$

kjer prvi člen popisuje spontane prehode v nižje stanje in vpliv črpanja.

Podobno dopolnimo še enačbo 5.10.5. Pri $E(t) = 0$ da časovno odvisnost η oblike $e^{-i\omega_0 t}$, to je brez dušenja. Vema pa, da polarizacija v mešanem stanju razpada vsaj zaradi spontanega sevanja, lahko pa še zaradi drugih vplivov, na primer trkov z drugimi atomi. Označimo koeficient dušenja polarizacije z γ, ki meri tudi spektralno širino svetlobe, ki jo sevajo atomi pri prehodu $2 \to 1$. Tako imamo

$$\dot{\eta} = -(i\omega_0 \eta + \gamma) - \frac{1}{i\hbar} E(t) v_{12} \zeta \; . \tag{5.10.8}$$

Tej enačbi moramo dodati še konjugirano kompleksno enačbo. Enačbe 5.10.7 in 5.10.8 pogosto imenujejo Blochove enačbe. Najprej so jih uporabili za obravnavo jedrske magnetne resonance.

Potrebujemo še enačbo za polje $E(t)$. Zanj dobimo iz Maxwellovih enačb valovno enačbo, kjer moramo upoštevati, da imamo tudi od nič različno polarizacijo snovi, ki je v primeru, da so vsi atomi enakovredni, podana z

$$P = \frac{N}{V} v_{12}(\eta + \eta^*) = P^+ + P^- \ . \tag{5.10.9}$$

Valovna enačba je tedaj [?]

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\ddot{E} = \mu_0 \ddot{P} \ . \tag{5.10.10}$$

Namesto mikroskopske količine ζ lahko uvedemo še gostoto obrnjene zasedenosti $Z = (N/V)\zeta$, pa lahko enačbi 5.10.7 in 5.10.8 prepišemo v obliko

$$\begin{aligned} \dot{P}^{\pm} &= (\mp i\omega_0 - \gamma)P^{\pm} + \frac{v_{12}^2}{i\hbar} E\, Z & (5.10.11)\\ \dot{Z} &= A(Z_0 - Z) - \frac{2}{i\hbar} E(P^- - P^+) \ . & (5.10.12) \end{aligned}$$

Prehod od enačb 5.10.7 in 5.10.8 na **??** je mogoč le, kadar so vsi atomi enakovredni, to je, kadar ni nehomogene razširitve. Kako je v primeru nehomogene razširitve, si bralec lahko ogleda v [?].

Enačbe 5.10.7, 5.10.8 ali **??**, skupaj z 5.10.10 dajejo semiklasični opis sodelovanja svetlobe in snovi. Iz izpeljave je vidno, da je v njem spontano sevanje obravnavano pomankljivo, le s fenomenološkim nastavkom, kar je moč popraviti tako, da tudi elektromagnetno polje kvantiziramo. Kljub tej pomanjkljivosti je s semiklasičnim modelom mogoče zelo podrobno obravnavati večino pojavov v laserjih in tudi druge probleme širjenja svetlobe po snovi. Reševanje zapisanega sistema nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb pa je v splošnem zelo težavno.

Da bomo semiklasične enačbe le nekoliko pobliže spoznali, na kratko poglejmo najenostavnejši primer, to je laser, v katerem je vzbujeno le eno resonatorsko stanje. Polje ima tedaj obliko

$$E(\vec{r}, t) = E_\lambda(t) u_\lambda(\vec{r}) \ , \tag{5.10.13}$$

kjer je $u_\lambda(\vec{r})$ krajevni del lastnega stanja resonatorja, ki zadošča enačbi

$$\nabla^2 u_\lambda - \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} u_\lambda = 0 \ . \tag{5.10.14}$$

$E_\lambda(t)$ opisuje časovno odvisnost, ki je za laser v stacionarnem delovanju periodična, vendar frekvenca ni nujno kar enaka lastni frekvneci praznega resonatorja ω_λ, temveč jo moramo še izračunati.

Tudi polarizacijo lahko razvijemo po lastnih funkcijah $u_\lambda(\vec{r})$. Ker so te med seboj ortogonalne, preide valovna enačba 5.10.10 v

$$\omega_\lambda^2 E_\lambda - \ddot{E}_\lambda = \frac{1}{\epsilon_0} \ddot{P}_\lambda \ . \tag{5.10.15}$$

Razstavimo $E_\lambda(t)$ na dva dela:

$$E_\lambda(t) = E_\lambda^+(t) + E_\lambda^-(t) = A^+(t)e^{-i\omega_\lambda t} + A^-(t)e^{i\omega_\lambda t} \ . \tag{5.10.16}$$

Dejanska frekvenca laserja je blizu ω_λ, zato pričakujemo, da bosta amplitudi $A^\pm(t)$ v primerjavi z $e^{-i\omega_\lambda t}$ le počasni funkciji časa. Izračunajmo

$$\begin{aligned} \ddot{E}_\lambda^+ &= -\omega_\lambda^2 E_\lambda^+ - 2i\omega_\lambda \dot{A}^+ e^{-i\omega_\lambda t} + \ddot{A}^+ e^{-i\omega_\lambda t} \\ &\simeq -\omega_\lambda^2 E_\lambda^+ - 2i\omega_\lambda (\dot{E}_\lambda^+ + i\omega_\lambda E_\lambda^+) \end{aligned} \tag{5.10.17}$$

V drugi vrstici smo izpustili člen z $\ddot{A}^+$, ker pričakujemo, da je majhen. S tem smo napravili približek *počasne amplitude*.

Polarizacija snovi je približno periodična s frekvenco ω_0, z amplitudo, ki je tudi počasna funkcija časa. Zato je $\ddot{P}_\lambda^+ \simeq -\omega_0^2 P_\lambda^+$. Pri drugem odvodu polja po času smo potrebovali en člen več, ker se člen $-\omega_\lambda^2 E_\lambda^+$ na levi strani enačbe 5.10.10 odšteje. Z uporabo tega približka in enačb 5.10.14 in **??** preide valovna enačba 5.10.10 za eno nihanje v

$$\dot{E}_\lambda^+ = -i\omega_\lambda E_\lambda^+ + \frac{i\omega_0}{2\epsilon_0} P_\lambda^+ \ . \tag{5.10.18}$$

Doslej nismo upoštevali, da je polje v praznem resonatorju dušeno, zato moramo gornjo enačbo še popraviti:

$$\dot{E}_\lambda^+ = (-i\omega_\lambda - \frac{1}{\tau})E_\lambda^+ + \frac{i\omega_0}{2\epsilon_0} P_\lambda^+ \ . \tag{5.10.19}$$

Kadar v reosnatorju ni snovi, je dobljena enačba enaka kot enačba 3.5.15.

Enačbi **??** in 5.10.11 sta nelinearni, zato ju n moč kar tako prepisati za primer razvoja po lastnih stanjih resonatorja. Pri enačbi za razvoj polarizacije **??** imamo v zadnjem členu na desni produkt komponente polja E_λ in obrnjene zasedenosti Z, od katere bistveno prispeva le krajevno povprečje $\bar{Z}$, ki se tudi s časom le počasi spreminja. Seveda vsebuje Z tudi krajevno odvisne komponente, ki pa so pomembne predvsem zato, ker sklaplajo različna lastna stanja resonatorja, kar presega našo trenutno obravnavo. Tako imamo

$$\dot{P}_\lambda^+ = (-i\omega_0 - \gamma)P_\lambda^+ + \frac{v_{12}^2}{i\hbar} E_\lambda^+ \bar{Z} \ . \tag{5.10.20}$$

Enačbo za $\bar{Z}$ dobimo iz 5.10.11. V zadnjem členu imamo produkte $E^\pm P^\pm = E_\lambda^\pm P_\lambda^\pm u_\lambda^2(\vec{r})$, kar moramo prostorsko povprečiti. Funkcije $u_\lambda(\vec{r})$ naj so normalizirane tako, da je $\int u_\lambda^2(\vec{r})\, dV = V$. Tako imamo $\overline{u_\lambda^2(\vec{r})} = 1$ in

$$\dot{\bar{Z}} = A(\bar{Z}_0 - \bar{Z}) - \frac{2}{i\hbar}(E_\lambda^+ + E_\lambda^-)(P_\lambda^- - P_\lambda^+) \ , \tag{5.10.21}$$

kjer je $\bar{Z}_0$ povprečje nenasičene zasedenosti Z_0. V zadnjem členu nastopajo produkti, ki nihajo s frekvencami $\omega_\lambda - \omega_0$ in $\omega_\lambda + \omega_0$. Obe frekvenci sta si zelo blizu, zato je njuna vsota mnogo večja od razlike. Členi $E_\lambda^+ P_\lambda^+$ in $E_\lambda^- P_\lambda^-$ se torej zelo hitro spreminjajo in skoraj nič ne vplivajo na valovanje blizu ω_λ, zato jih izpustimo. S tem je časovna odvisnost $\bar{Z}$ podana z

$$\dot{\bar{Z}} = A(\bar{Z}_0 - \bar{Z}) - \frac{2}{i\hbar}(E_\lambda^+ P_\lambda^- - E_\lambda^- P_\lambda^+) \ . \tag{5.10.22}$$

Enačbe 5.10.19, 5.10.20 in 5.10.22, skupaj s konjugirano kompleksnimi enačbami za E_λ^- in P_λ^-, so zaključen sistem, ki opisuje delovanje enofrekvenčnega laserja. Uporabimo jih za izračun frekvence izhodne svetlobe.

Naj bo stanje stacionarno. Tedaj lahko polje zapišemo v obliki $E_\lambda^+ = E_0 e^{-i\Omega t}$, kjer je E_0 realna konstanta, frekvenca svetlobe ω pa je blizu ω_0 in ω_λ. V stacionarnem stanju mora imeti polarizacija enako časovno odvisnost: $P_\lambda^+ = P_0 e^{-i\Omega t}$. Tedaj je v enačbi 5.10.22 drugi oklepaj konstanten in mora biti tudi $\bar{Z}$ v stacionarnem stanju od časa neodvisna. Sistem enačb 5.10.19, 5.10.20 in 5.10.22 nam tako da

$$\begin{aligned} -[i(\omega_\lambda - \Omega) + \frac{1}{\tau}]E_0 - \frac{i\omega_0}{2\epsilon_0}\,P_0 &= 0 \\ -[i(\omega_0 - \Omega) + \gamma]P_0 + \frac{v_{12}^2}{i\hbar}\,E_0\bar{Z} &= 0 \\ A(\bar{Z}_0 - \bar{Z}) - \frac{2}{i\hbar}\,E_0(P_0^* - P_0) &= 0 \ . \end{aligned} \tag{5.10.23}$$

Najprej izračunamo P_0 iz druge enačbe, ga postavimo v tretjo in izračunamo $\bar{Z}$:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_0 \left[1 + \frac{v_{12}^2}{\hbar^2 A}\,E_0^2\,\frac{2\gamma}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \gamma^2}\right]^{-1} \tag{5.10.24}$$

Ta izraz že poznamo. $\pi v_{12}^2/(\epsilon_0\hbar^2)$ je Einsteinov koeficient B. E_0^2 je sorazmern gostoti energije polja v resonatorju, zadnji ulomek v oklepaju pa nam podaja obliko homogeno razširjene atomske črte:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_0 \left[1 + \frac{2B}{A}\,g(\omega_0 - \Omega)w\right]^{-1} \tag{5.10.25}$$

To je natanko enako izrazu za nasičenje zasedenosti stanj, ki smo ga izpeljali iz zasedbenih enačb v četrtem poglavju.

Postavimo P_0 iz prve enačbe sistema **??** v drugo:

$$E_0[i(\Omega - \omega_\lambda) + \frac{1}{\tau}][i(\Omega - \omega_0) + \gamma] = -\frac{v_{12}^2\omega_0}{2\hbar\epsilon_0}\,E_0\,\bar{Z} \ . \tag{5.10.26}$$

V delujočem laserju je $E_0 \neq 0$, zato lahko krajšamo. $\bar{Z}$ je realen, tako da mora biti imaginarni del leve strani enak nič:

$$(\Omega - \omega_\lambda)\gamma + (\Omega - \omega_0)\frac{1}{\tau} = 0 \ . \tag{5.10.27}$$

Od tod lahko izračunamo frekvenco laserja

$$\Omega = \frac{\omega_\lambda\gamma + \omega_0\frac{1}{\tau}}{\gamma + \frac{1}{\tau}} \ . \tag{5.10.28}$$

Frekvenca torej ni enaka frekvenci praznega resonatorja ω_λ, temveč je premaknjena proti centru atomske črte ω_0. Premik je odvisen od razmerja širine atomske črte in izgub resonatorja.

Bralec lahko sam iz enačbe 5.10.26 izračuna še energijo svetlobe v resonatorju in rezultat primerja s tistim, ki smo ga dobili z uporabo zasedbenih enačb.

Gornji primer uporabe polklasičnih enačb je zelo preprost. Prava moč modela se pokaže pri obravnavi mnogofrekvenčnega laserja, na primer pri računu uklepanja faz laserskih nihanj, kar pa presega okvir te knjige. Več bo bralec našel v [**?**].

6 Primeri laserjev

Danes je v rabi veliko število različnih laserjev in tu ne moremo opisati vseh. Na kratko poglejmo le nekaj najpomembnejših, ne da bi se pri tem spuščali v podrobnosti in različne možne izvedbe. Navadno laserje razlikujemo po aktivnem sredstvu, pri čemer pa pogosto obstoja mnogo različnih izvedb. Eno sredstvo lahko služi na primer tako v zvezno delujočem laserju kot v takem, ki deluje le v kratkih sunkih.

Laser je lahko dokaj preprosta naprava, z malo sestavnimi deli, lahko pa je tudi zelo velik in zapleten sistem. Večina velikih laserskih sistemov, ki dajejo zelo veliko svetlobno moč, je sestavljenih iz osnovnega laserja, ki ni posebno močan, daje pa kvalitetno svetlobo, in iz enega ali več ojačevalnikov. V njih se svetloba ojačuje v sredstvu, ki je enako kot v osnovnem laserju in ki je v kolikor mogoče visokem stanju obrnjene zasedenosti, le da brez resonatorja. V večih ojačevalnih stopnjah je tako možno doseči zelo veliko svetlobno moč. Pri tem nastopi tudi vrsta novih problemov. Da gostota svetlobnega toka ni prevelika in ne povzroča poškodb optičnih komponent, mora premer ojačevanega snopa in s tem premer ojačevalnih stopenj naraščati. Zadnje stopnje velikega laserskega sistema v Rochestru imajo na primer premer pol metra, kar seveda pomeni, da morajo imeti tolikšno opdrtino tudi vse ostale optične komponente. Polega tega je potrebno skrbno paziti, da se odbita svetloba ne vrača v prejšnji ojačevalnik ali v osnovni laser in moti njegovo delovanje. Zato so med ojačevalnimi stopnjami optični izolatorji, ki temeljijo na Faradayevem pojavu vrtenja polarizacije v snovi v magnetnem polju.

V laserske resonatorje pogosto vgrajujemo tudi dodatne optične elemente, s katerimi vplivamo na delovanje laserja. V prejšnjem poglavju smo že govorili o modulatorjih za spreminjanje dobrote, s čemer dobimo močne kratke sunke ali uklenemo faze večih lastnih nihanj. Dobroto resonatorja lahko spreminjamo tako v laserju, ki ga črpamo le v sunkih, kot v stalno črpanem laserju. V drugem primeru deluje laser neprekinjeno, kadar je modulator izključen, ali v sunkih, če modulator deluje. V nekaterih laserjih sta celo dva modulatorja, eden za preklaplanje dobrote, drugi za uklepanje faz, ki lahko delujeta vsak posebej ali oba hkrati. V zadnjem primeru dobimo iz laserja ob vsakem preklopu kvalitete kratko zaporedje fazno uklenjenih sunkov (Slika 6.8.1).

V našem pregledu bomo navedli le osnovne karakteristike najpomebnejših laserjev in se ne bomo spuščali v podrobnosti različnih izvedb.

6.1 Neodimov laser

Eden najpomembnejših laserjev je osnovan na itrij- aluminijevem granatu $Y_3Al_5O_{12}$ (YAG) s primesnimi ioni Nd^{3+}. Valovna dolžina, pri kateri neodimov laser deluje, je 1,06 μm. Redke zemlje, med katere sodi neodim, imajo zelo bogat spekter vzbujenih stanj v optičnem področju. Del ga kaže slika 6.8.2. Značilno za spektre ionov redkih zemelj, ki so vgrajeni v neko kristalno mrežo, je, da so le malo moteni zaradi vpliva kristalnega polja, to je elektrostatske interakcije z okoliškimi atomi. Nezapolnjena $4f$ orbitala je namreč deloma senčena z zapolnjeno $6s$ orbitalo. Zato so nivoji v kristalu podobni kot za prost atom in so le malo razširjeni zaradi termičnih motenj okolice.

Neodimov laser deluje med stanjema $^4\mathrm{F}_{3/2}$ in $^4\mathrm{I}_{11/2}$. Širina tega prehoda je 180 GHz. Presek za stimulirano sevanje, ki smo ga definirali v razdelku 4.4, je $\sigma = 9 \times 10^{-19}$ cm^2, kar je precej velika vrednost. Poleg tega je življenjski čas gornjega laserskega stanja $1/A = 5.5 \times 10^{-4}$ s, spodnjega pa mnogo manj. Zato je lahko doseči veliko zasedenost gornjega stanja in veliko obrnjeno zasedenost. Spodnje stanje je dovolj visoko nad osnovnim, da pri sobni temperaturi v ravnovesju ni znatno zasedeno. Zaradi vsega tega je prag neodimovega laserja zelo nizek in je prav lahko doseči zvezno stacionarno delovanje, prav tako dobro pa deluje tudi v sunkih.

Kot je običajno za laserje, v katerih je aktivna snov kristal ali steklo s primesmi, neodimov laser črpamo s svetlobo višje frekvence, kot je laserski prehod. Najpomembnejši absorpcijski pasovi so tik pod vidnim področjem pri 790 nm in 750 nm in v zelenem delu vidnega spektra. Aktivna snov je v obliki paličke dolžine od nekaj cm do dobrih 10 cm. Za črpanje uporabljamo močne ksenonove svetilke za zvezno delovanje ali podobne bliskovne luči za sunkovno delovanje. Skupaj z aktivno paličko so vgrajene v cilindrično ali eliptično z zrcalnimi ali belimi stenami, tako da se čim večji del črpalne svetlobe absorbira v laserski palički (Slika **??**).

Pri črpanju s ksenonovo lučjo je le manjši del črpalne svetlobe v absorpcijskih pasovih, zato je izkoristek dokaj slab, pod 0.01. Preostala moč gre v gretje, zaradi česar je v laserjih z nekoliko večjo povprečno močjo potrebno vodno hlajenje. Gretje povzroča tudi toplotne deformacije laserske paličke, kar lahko močno spremeni lastnosti resonatorja. Toplotni učinki so ena poglavitnih praktičnih težav pri izdelavi neodimovih laserjev.

V zadnjem času se uveljavlja tudi črpanje z množico polvodniških diodnih laserjev, ki svetijo v pasu med 750 nm in 800 nm, to je ravno v območju absorpcije Nd. Zato je izkoristek dosti boljši in je gretja manj, kar omogoča bolj kompaktno konstrukcijo, boljšo stabilnost izhodne moči in večjo zanesljivost.

Naloga: Oceni iz gornjih podatkov, kolikšna je potrebna moč ksenonove svetilke, da dosežemo prag delovanja neodimovega laserja z dolžino resonatorja 20 cm in reflektivnostjo izhodnega zrcala 0.96. Ksenonova svetilka pretvori v svetlobo približno polovico električne moči.

Tipična izhodna moč zvezno delujočega Nd-YAG laserja je nekaj deset W, za kar je potrebna električna moč nekaj kW.

Pri delovanju v sunkih se skozi bliskovno luč izprazni nabit kondenzator, ki mora imeti precej veliko kapacitivnost, da je energija bliska zadostna, to je vsaj nekaj J. Čas trajanja bliska je določen RC konstanto kondenzatorja in luči in je okoli 0.1 ms. Tipična energija izhodnega sunka je okoli 0.1 J.

Namesto v ustrezen kristal je Nd lahko vgrajen tudi v steklo. Zaradi neurejene okolice je laserska črta precej širša, blizu 1 THz in življenski čas gornjega nivoja malo krajši, okoli 0.3 ms. Zato je ojačenje manjše kot v Nd-YAG in je za prag laserskega delovanja potrebna precej večja moč črpanja. Laserji Nd-steklo zato delujejo le v sunkovnem načinu, kjer pa so za velike energije celo boljši od Nd-YAG. Zaradi manjšega ojačenja pri dani obrnjeni zasedenosti je v laserju s preklopom kvalitete možno doseči večjo načrpanost, ne da bi prišlo do praznenja zaradi ojačevanja spontanega sevanja v enem preletu paličke. Energija izhodnih sunkov laserjev Nd- steklo so tako do nekaj J.

Večje energije sunkov je mogoče dobiti z ojačevalniki. Med največjimi je laserski sistem Nd-steklo v Rochestru v državi New York, ki ga uporabljajo za raziskave fuzije. Okoli 1 ns dolg sunek iz osnovnega laserja razdelijo na deset ojačevalnih vej, ki so dolge po 180 m. Da preprečijo poškodbe površin elementov zaradi prevelike gostote svetlobne energije, morajo snope razširiti, tako da je premer zadnjih ojačevalnih stopenj pol metra. Končna energija sunka je nad 100 kJ. Z njim z vseh strani posvetijo na kroglico iz devterija in tritija, ki se dovolj segreje in stisne, da pride do zlivanja devterija in tritija. Vršna moč laserskega sunka je 10^{13} W. Če jo zberemo na površino 1 mm^2, dobimo električno poljsko jakost okoli 10^{11} V/m^2, kar je približno enako polju v vodikovem atomu.

6.2 He-Ne laser

Prvi zvezno delujoči laser je bil He-Ne laser, v katerem je prehod med stanji 2S in 2p atomov Ne dal svetlobo z valovno dolžino 1.15 μm. Prehodi v Ne dajo lasersko delovanje tudi pri 3.39 μm, 632.8 nm in nekaj valovnih dolžinah v oranžnem in zelenem delu spektra. Energijska stanja He in Ne kaže slika **??**. Najpomembnejši je prehod pri 632.8 nm.

Slika **??** kaže shemo tipičnega plinskega laserja, kakršen je He-Ne laser. Električni tok teče skozi razelektritveno cev, v kateri je mešanica približno 1 mb He in 0.1 mb Ne. Okna cevi so nagnjena za Brewsterjev kot, da so izgube pri odboju za eno polarizacijo čim manjše. Izhodna svetloba iz laserja je zato seveda polarizirana. V manjših laserjih so namesto Brewsterjevih oken na razelektritveno cev privarjena kar resonatorska zrcala. Tak laser je nepolariziran. Elektroni, ki so glavni nosilci toka, s trki vzbujajo atome He v več vzbujenih stanj. Ti se vračajo v osnovno stanje, pri tem pa se nabirajo v dolgoživih metastabilnih stanjih 2^3S in 2^1S, ki imata razpadne čase 0.1 ms in 5 μs. Ti dve stanji imata skoraj enako energijo kot 2S in 3S stanja Ne in se energija pri trkih vzbujenih He atomov z Ne atomi v osnovnem stanju lahko prenese na Ne atome. Majhna energijska razlika (okoli 1.2 THz) preide v kinetično energijo obeh atomov. Ta prenos je glavni črpalni proces v He-Ne laserju.

Znano rdečo svetlobo He-Ne laserja dobimo pri prehodu s 3S stanja na eno od 2p stanj. Življenski čas 3S stanja je 10^{-7} s, 2p stanje pa v okoli 10^{-8} s preide s sevanjem v 1S stanje. To je metastabilno - dipolni sevalni prehodi v osnovno stanje so prepovedani, zato se v njem atomi nabirajo in se pri trkih z elektroni vračajo v spodnje lasersko stanje 2p. To zmanjšuje obrnjeno zasedenost. Atomi preidejo z 1S stanja v osnovno največ pri trkih s steno cevi, zato ojačenje raste z zmanjševanjem premera cevi.

Lasersko delovanje dobimo tudi pri prehodu s 3S na 3p, ki ima valovno dolžino 3.39 μm. Ojačenje je za ta prehod je celo precej večje kot za 632.8 nm, deloma zaradi nižje frekvence (glej zvezo med Einsteinovima koeficientoma A in B), deloma pa zaradi kratke življenske dobe spodnjega laserskega nivoja 3p. Zato bi pričakovali, da bo He-Ne laser svetil pri 3.39 μm in ne pri 632.8 nm. To prepreči absorpcija v steklu in selektivna reflektivnost resonatorskih zrcal, kar dvigne prag za 3.39 μm nad prag za 638.2 nm.

Izhodna moč He-Ne laserja je od nekaj desetink mW do 100 mW. So preprosti, zanesljivi in poceni, zato so poleg polvodniških največ uporabljani laserji. Uporabljamo jih merilnih napravah, v optičnih čitalnih sistemih, na primer v čitalcih črtne kode, v šolah, v raziskovalnih laboratorijih za intereferometrijo itd. Na njem je osnovan tudi sekundarni standard za meter, kot smo videli v prejšnjem poglavju.

6.3 Argonski ionski laser

Prehodi v ioniziranem Ar omogočajo lasersko delovanje v pri vrsti valovnih dolžin v zelenem, modrem in bližnjem UV področju spektra. Zato je Ar ionski laser med najpomembnejšimi, ki se danes porabljajo. Kot večino drugih plinskih laserjev tudi tega črpamoz električnim tokom. Da dobimo ioniziran argon z obrnjeno zasedenostjo in dovolj velikim ojačenjem, mora biti električni tok precej velik, nekaj deset amperov. S tem je velika tudi potrebna električna moč, do 10 kW in več. Zaradi velike količine odvečne toplote je navadno Ar laser vodno hlajen.

Ar laser da največjo svetlobno moč pri 488 nm in 514.5 nm, do kakih 20 W. Da izberemo eno od možnih črt, moramo v resonator vgraditi še nek frekvenčno selektiven element. Najpogosteje uporabijo kar majhno prizmo pred enim od obeh zrcal, kot kaže slika **??**. Z vrtenjem sklopa prizme in zrcala lahko izberemo valovno dolžino svetlobe, ki je pravokotna na obe zrcali.

Argonski laser je zanesljiv in lahko daje zelo kvaliteten izhodni snop, to je, brez težav dosežemo, da deluje v osnovnem Gaussovem načinu in pri eni sami frekvenci. Zato se dosti uporablja v optični spektroskopiji, interferometriji, holografiji in merilni tehniki. Zelo podoben mu je še kriptonov laser, ki deluje v rdečem in oranžnem delu spektra.

6.4 Laser na ogljikov dioksid

Vsi doslej opisani laserji so delovali na elektronskih prehodih. CO_2 laser pa izrablja prehode med vibracijskimi stanji molekule. Pri tem elektroni ostanejo v osnovnem stanju. Energije vibracijskih prehodov so 10 do 100 krat manjše od elektronskih, zato CO_2 in drugi podobni molekularni laserji delujejo v infrardečem področju.

Molekula CO_2 je prikazana na sliki **??**. V osnovnem stanju (a) je linearna. Atomi lahko nihajo glede na težišče na tri načine: oba kisika se gibljeta simetrično vzdolž osi molekule, pri čemer ogljik miruje - simetrični razteg (b), atomi nihajo simetrično v smeri pravokotno na os - upogib (c) in atoma kisika se gibljeta oba v isti smeri vzdolž osi, ogljik pa v nasprotni smeri - asimetrični razteg (d). Najvišjo frekvenco ima asimetrični razteg, najnižjo pa upogib. Energija vsakega nihanja je dana s številom energijskih kvantov v nihanju; celotna nihajna energija molekule CO_2je torej podana s tremi celimi števili (n_1, n_2, n_3).

Nekaj najnižjih vibracijskih stanj molekule CO_2 je prikazanih na sliki **??**. CO_2 laser vzbujamo z električnim tokom skozi mešanico CO_2 in dušika. Podobno kot v He-Ne laserju se tudi CO_2 črpa predvsem preko trkov z dušikovimi molekulami, katerih prvo vzbujeno vibracijsko stanje ima skoraj enako energijo kot stanje (001), ki je gornje stanje

CO_2 laserja. Laserski prehod med stanjema (001) in (100) ima valovno dolžino 10.6 μm. Celotni izkoristek laserja je razmeroma velik, blizu 3010 kW v stalnem delovanju. Poleg velikega izkoristka k temu prispeva tudi to, da se molekule iz spodnjega laserskega stanja hitro vrnejo v osnovno stanje, kjer jih je moč zopet porabiti v ojačevalnem procesu. To se zgodi predvsem preko trkov z drugimi molekulami ali atomi, na primer He, ki je dodan plinski mešanici.

CO_2 laserji se uporabljajo največ v industriji za zahtevne obdelave materialov, na primer za rezanje pločevine po krivih robovih. Obdelava z laserji omogoča veliko natančnost in čistočo in je zelo fleksibilna.

6.5 Ekscimerni laser

Ekscimerji so vzbujena vezana stanja dveh atmov, podobna molekuli, ki disociirajo v osnovnem stanju. Za laserje so zanimivi predvsem ekscimerji težkih žlahtnih plinov (Xe, Kr, Ar) in halogenov (F, Cl, Br, I), ker jih je mogoče dokaj učinkovito pridobivati in ker dajejo lasersko svetlobo v ultravijoličnem področju med 200 nm in 400 nm, ki ga drugi laserski sistemi le težko pokrivajo.

Vezano stanje dveh atomov dobimo, kadar je ionizacijska energija prvega atoma manjša od vsote elektronske afinitete drugega atoma in elektrostatične energije vezave obeh ionov. Vzemimo za primer klor in kripton. Ionizacijska energija kriptona v osnovnem stanju je 14 eV, v vzbujenem pa 5 eV. Elektronska afiniteta klora je 3.75 eV in elektrostatična vezavna energija KrCl okoli 7 eV. Tako je za formiranje molekule KrCl v osnovnem stanju potrebno dodati okoli 4 eV, pri tvorbi molekule v vzbujenem stanju pa se sprosti okoli 6 eV. Približno obliko celotne potencialne energije molekule KrCl v osnovnem in vzbujenem stanju kaže slika **??**. Molekula, ki je vezana v vzbujenem stanju, po sevalnem prehodu v osnovno stanje takoj razpade, zato je zelo lahko doseči obrnjeno zasedenost.

Razpadni čas vezanega stanja je blizu 10 ns, spodnjega nevezanega pa okoli 0.1 ps. Zato je spektralna širina prehoda precej velika, okoli 1 nm, in laser, ki ta prehod uporablja, lahko deluje v večjem delu tega intervala.

Ekscimeri se formirajo v mešanici halogenega in žlahtnega plina, ki ga vzbujamo z mčnim elektronskim snopom. Ekscimerni laserji delujejo večinoma v sunkih s precej veliko energijo, do 100 kJ z dodatnimi ojačevalnimi stopnjami. Imajo tudi dober izkoristek, do 8%, kar vse pojasnjuje veliko zanimanje za ekscimerne laserje.

6.6 Laserji na organska barvila

Posebej zanimivi so sevalni prehodi z veliko spektralno širino. V frekvenčnem intervalu takega prehoda je možno spreminjati frekvenco laserja, kar je posebej za uporabo v spektroskopiji izrednega pomena. Eno možnost nudijo organska barvila.

Približno shemo energijskih nivojev molekule tipičnega organskega barvila, znan primer je rodamin 6G, prikazuje slika **??**. Vsa elektronska stanja so razcepljena v vibracijska in rotacijska podstanja. Rotacijska stanja so tako blizu skupaj, da se v raztopini zaradi trkov zlijejo med seboj v zvezen pas, ki ima tipično širino do 50 nm. Elektronska stanja so lahko singletna (S), ki imajo elektronski spin 0, in tripletna (T) z elektronskim spinom 1. Električni dipolni prehodi med tripletnimi in singletnimi stanji so prepovedani, zato je najnižje tripletno stanje metastabilno.

V toplotnem ravnovesju je molekula na dnu osnovnega elektronskega stanja S_0. Z absorpcijo vidne svetlobe primerne frekvence preide v nekam v vzbujeno stanje S_1. Preko trkov z molekulami topila vzbujena barvilna molekula zelo hitro, v času okoli pikosekunde preide na dno vzbujenega stanja, od koder s sevanjem preide nekam v osnovno stanje S_0, od koder zopet s trki hitro preide nazaj na dno osnovnega stanja, kot kaže slika **??**. Ker sta obe elektronski stanji razširjeni zaradi vibracijskih in rotacijskih stanj, sta absorpcijska in emisijska fluorescenčna črta široki. Tipična širina je blizu 50 nm. Energija izsevane svetlobe je zmanjšana za energijo prehodov s trki, zato je fluorescenčna črta premaknjena k nižjim frekvencam od absorpcijske. Absoprcijski in fluoresecenčni spekter prehoda $S_0 - S_1$ kaže slika **??**.

Absorpcijski presek med osnovnim in vzbujenim singletnim stanjem je velik, sevalni razpadni čas z dna stanja S_1 pa dolg v primeri z nesevalnimi prehodi z vibracijsko-rotacijskih nivojev stanja S_0 na njegovo dno, zato je lahko dobiti ojačenje v fluorescenčni črti. Barvilni laser črpamo s svetlobo z nekaj višjo frekvenco, ki ustreza vrhu absorpcijske črte. Pri tem večina molekul, ki so se vzbudile z absoprcijo, sodeluje pri stimulirani emisiji, zato je izkoristek pri pretvorbi črpalne svetlobe v moč laserja lahko zelo velik.

Energija tripletnega stanja T_1 se deloma prekriva s stanjem S_1, zato so možni prehodi s trki iz S_1 v T_1. Ker je tripletno stanje metastabilno, se lahko v njem nabere znatno število molekul barvila. Zaradi tega se zmanjša število molekul v singletnem stanju, poleg tega pa je možna absorpcija iz stanja T_1 v T_3, kar lahko prepreči lasersko delovanje med stanjema S_1 in S_0. Tej težavi se izognemo, če laser deluje le v sunkih, pri stacionarnem delovanju pa tako, da raztopina barvila kroži skozi laser.

Barvilni laser lahko deluje pri vseh frekvencah znotraj široke fluorescenčne črte. Zato moramo v resonator vgraditi nek frekvenčno selektiven element, s katerim lahko nastavljamo frekvenco laserja. Uporabna je prizma kot v primeru Ar laserja ali kombinacije interferometrov. Zanimiva možnost je, da eno od zrcal nadomestimo z uklonsko mrežico, ki je postavljena pod takim kotom, da se po osi resonatorja odbije svetloba željene valovne dolžine (slika **??**. To lahko spremenimo s spreminjanjem kota nagiba mrežice.

Barvilne lahko laserje črpamo z bliskovno lučjo. Danes pogosteje uporabimo drug laserjem primerne valovne dolžine, na primer Ar ali ekscimerni laser. Pri tem zaradi dobrega izkoristka barvila ne izgubimo mnogo moči, pridobimo pa možnost nastavljanja frekvence. Z menjavo barvil tako zvezno pokrijemo ves vidni del spektra.

Široko območje ojačevanja barvila nam z uklepanjem faz omogoča dobiti tudi zelo kratke svetlobne sunke. V prejšnjem poglavju smo videli, da je dolžina sunka iz fazno uklenjenega laserja obratno sorazmerna s spektralno širino ojačevalne črte. Iz barvilnega laserja zato lahko dobimo zelo kratke sunke, pod 1 ps.

6.7 Titan-safirni laser

Podobne lastnosti kot barvila imajo nekateri prehodni elementi, vgrajeni v primerno kristalno mrežo. Posebej velja omeniti safir, to je kristal Al_2O_3, s primesjo titana. Prehod Ti v bližnjem infrardečem območju je zaradi interakcije s fononi močno razširjen, tako da je možno dobiti ojačevanje v območju od 700 do 1000 nm. V tem intervalu je titan-safirnemu laserju mogoče nastavljati frekvenco. Črpamo ga navadno z drugim laserjem, največkrat z argonskim.

Titan-safirni laser zelo dobro deluje v sunkih z uklepanjem faz. Zaradi velike spektralne širine ojačevanja so sunki izredno kratki, okoli 100 ps.

6.8 Polvodniški laserji

Za široko uporabo so danes brez dvoma najpomembnejši polvodniški laserji. Njihove glavne značilnosti so majhne dimenzije, neposredno črpanje z električnim tokom majhne jakosti in pri nizki napetosti, velik izkoristek, preko 20pri pretvorbi električne moči v svetlobno, in možnost hitre modulacije svetlobne moči z modulacijo električnega toka. Poleg tega jih je moč integrirati z drugimi polvodniškimi elementi in se za njihovo izdelavo uporablja običajna polvodniška tehnologija.

Polvodniki absorbirajo svetlobo s frekvenco nad energijo prehoda iz valenčnega v prevodni pas. Pri tem z vzbuditvijo elektrona iz valenčnega v prevodni pas nastane par elektron-vrzel. Ta se lahko rekombinira z izsevanjem fotona, kar ustreza spontanemu ali stimuliranemu prehodu v atomih in molekulah. Zaradi ohranitve gibalne količine se valovni vektor elektrona pri prehodu le zelo malo spremeni, saj je valovni vektor vidne svetlobe majhen v primerjavi z vektorjem recipročne mreže polvodniškega kristala. To ima pomembno posledico. Najobičajnejša polvodnika, silicij in germanij, imata vrh prevodnega pasu v centru Brilluinove cone, to je pri valovnem vektorju nič, dno prevodnega pasu pa pri končno velikem valovnem vektorju. Zato direkten prehod z dna prevodnega pasu v vrh valenčnega pasu z izsevanjem fotona ni možen, potrebna je sočasna emisija ali absorpcija fononov, ki poskrbi za ohranitev gibalne količine. Tak proces pa je seveda mnogo manj verjeten, zato v siliciju in germaniju v običajni obliki ni mogoče dobiti znatnega sevanja s prehodi iz prevodnega v valenčni pas.

Opisane težave ni pri spojinah iz tretje in pete skupine elementov, na primer GaAs, kjer je valenčni pas 1,4 eV nad prevodnim. Na njih so osnovani polvodniški laserji.

Verjetnost za zasedenost elektronskih stanj v termičnem ravnovesju v polvodniku je podana s Fermi-Diracovo funkcijo **??**:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_BT} + 1} \quad . \tag{6.8.1}$$

Pri nizkih temperaturah so zasedena vsa stanja do Fermijeve energije E_F, nad njo pa so prazna. V čistem polvodniku je E_F na sredini med valenčnim in prevodnim pasom, z dodajanjem donorskih primesi pa se približuje prevodnemu pasu. Če je koncentracija primesi dovolj velika, lahko E_F tudi pri absolutni ničli pride nad dno prevodnega pasu. Tak degenriran polvodnik se obnaša podobno kot kovina.

Če polvodnik ni v termičnem ravnovesju, na primer v p-n spoju, skozi katerega teče električni tok, lahko vpeljemo približni Fermijevi energiji E_{Fv} in E_{Fp} posebej za valenčni in prevodni pas. Tak približek je dober, kadar je čas, v katerem preidejo vzbujeni elektroni z višjih energij na dno prevodnega pasu, dosti krajši od časa prehoda iz prevodnega v valenčni pas. Ta pogoj je v polvodnikih, ki jih uporabljamo za laserje, navadno zelo dobro izpoljnen. Preko trkov s fononi elektroni preidejo v dno prevodenga pasu v pikosekundah, za prehod v valenčni pas, to je za rekombinacijo elektrona z vrzeljo, pa so potrebne nanosekunde.

Neravnovesno stanje, ki ga lahko opišemo z približnima Fermijevima energijama, dobimo, kadar v degeneriran polvodnik p-tipa z dovolj veliko hitrostjo dodajamo elektrone v prevodni pas. To lahko storimo preko p-n spoja, na katerem je napetost v prevodni smeri. Tedaj dobimo položaj, ki ga kaže slika **??**. Naj bo N_p gostota elektronov v prevodnem pasu, I električni tok skozi spoj, τ pa čas za rekombinacijo elektrona in vrzeli. Velja

$$\frac{N_p}{\tau} = \frac{I}{eV} , \tag{6.8.2}$$

kjer je V volumen, v katerem se elektroni nahajajo. Po drugi strani je N_p podana kot integral gostote elektronskih stanj v prevodnem pasu $\rho_p(E) = 1/(2\pi^2)(2m_p/\hbar^2)^{3/2}(E - E_g)^{1/2}$, kjer je m_p efektivna masa prevodnih elektronov, in Fermi- Diracove funkcije:

$$N_p = \int_0^\infty \rho_p(E) f_p(E)\, dE \tag{6.8.3}$$

Iz enačb 6.8.2 in 6.8.3 lahko izračunamo vrednost E_{Fp} pri poljubni temperaturi. Pri $T = 0$ je integral preprost in je

$$E_{Fp}(T=0) = (2\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_p} N_p^{2/3} \tag{6.8.4}$$

E_{Fp} je odvisna od toka skozi spoj in od temperature, kar je pomebno za delovanje polvodniškega laserja.

Naj na p-n spoj vpada svetlobni snop s frekvenco ω, ki je nekoliko nad $E_g/\hbar$. Svetloba povzroča prehode med stanji z energijo E_p v prevodnem pasu in med stanji z energijo E_v v valenčnem pasu, kot kaže slika **??**. Ta stanja se lahko razlikujejo po valovnem vektorju, zato moramo verjetnost za stimuliran prehod najprej zapisati za določen valovni vektor $\vec{k}$, nato pa sešteti po vseh možnih $\vec{k}$. V primeru izotropnih elektronskih pasov je verjetnost za prehod odvisna le od velikosti $\vec{k}$. Uporabimo zlato pravilo, kjer upoštevamo, da je verjetnost za zasedenost gornjega stanja $f_p(E_p)$ in verjetnost, da je spodnje stanje nezasedeno, $1 - f_v(E_v)$:

$$w_s(k) = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{pv}|^2 \delta(E_p - E_v - \hbar\omega) f_p(E_p)[1 - f_v(E_v)] , \tag{6.8.5}$$

kjer je $H_{pv} = |p\rangle \hat{x} |v\rangle E$ matrični element za dipolni prehod v svetlobnem polju E med prevodnim in valenčnim pasom. Podobno je verjetnost za absorpcijo

$$w_a(k) = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{pv}|^2 \delta(E_p - E_v - \hbar\omega) f_v(E_v)[1 - f_p(E_p)] . \tag{6.8.6}$$

Razliko med številom spontanih emisij in absorpcij na enoto volumna dobimo, če razliko gornjih verjetnosti seštejemo po vseh k:

$$\begin{aligned} N_{pv} - N_{vp} &= \int [w_s - w_a]\rho(k)\,dk \\ &= \frac{2}{\pi\hbar}|H_{pv}|^2 \int [f_p(E_p) - f_v(E_v)]\delta(E_p - E_v - \hbar\omega)k^2\,dk\ . \end{aligned} \qquad (6.8.7)$$

Upoštevli smo, da je gostota stanj $\rho(k) = 1/\pi^2 k^2 dk$. Štejmo energijo od vrha valenčnega pasu. Energija elektronov blizu dna prevodnega pasu je $E_g + 1/(2m_e)\hbar^2 k^2$, vrzeli pri vrhu prevodnega pasu pa $1/(2m_h)\hbar^2 k^2$, kjer sta m_e in m_h efektivni masi elektronov in vrzeli. Tako je

$$E_p - E_v = \hbar\omega' = \frac{\hbar^2 k^2}{2}(\frac{1}{m_h} + \frac{1}{m_e}) + E_g = \frac{hbar^2 k^2}{2m_r} + E_g\ , \qquad (6.8.8)$$

kjer smo z $m_r = m_e m_h/(m_e + m_h)$ označili reducirano maso lektrona in vrzeli. Iz zadnjega izraza dobimo

$$k^2 = \frac{2m_r}{\hbar}(\omega' - \frac{E_g}{\hbar}) \qquad (6.8.9)$$

in

$$k^2 dk = \frac{1}{2}(\frac{2m_r}{\hbar})^{3/2}\sqrt{\omega' - \frac{E_g}{\hbar}})\ . \qquad (6.8.10)$$

V **??** preidemo z integracije po k na ω' in dobimo z upoštevanjem lastnosti delta-funkcije

$$N_p - N_v = \frac{1}{\pi\hbar^2}(\frac{2m_r}{\hbar})^{3/2}\sqrt{\omega - \frac{E_g}{\hbar}}[f_p(E_p) - f_v(E_v)]\ . \qquad (6.8.11)$$

Zaradi 6.8.9 je še $E_p = m_r/m_e(\omega - E_g/\hbar) + E_g$ in $E_v = m_r/m_h(\omega - E_g/\hbar)$.

Dobljeni izraz je sorazmeren z ojačenjem vpadne svetlobe v polvodniku. Ojačenje bo očitno realno le, če bo ω večja od $E_g/\hbar$. Pri nižjih frekvencah seveda sploh ni prehodov in polvodnik je prozoren. Da bomo imeli res ojačenje in ne absorpcije, mora biti tudi $f_p(E_p) > f_v(E_v)$, torej

$$\frac{1}{e^{(E_p - E_{Fp})} + 1} > \frac{1}{e^{(E_v - E_{Fv})} + 1}\ . \qquad (6.8.12)$$

Gornja neenačba bo veljala, če bo

$$\hbar\omega < E_{Fp} - E_{Fv}\ . \qquad (6.8.13)$$

To je osnovni pogoj za ojačevanje v polvodnikih. Ojačujejo se lahko tiste frekvence, ki so nad energijsko špranjo E_g in pod razliko približnih neravnovesnih Fermijevih energij za oba pasova. Ojačenje kot funkcijo frekvence kaže slika **??**.

Vrednosti E_{Fp} in E_{Fv} sta odvisni tako od toka skozi p-n spoj kot od temperature. Z njima je povezan tudi vrh ojačenja, kar je mogoče izkoristiti za spreminjanje frekvence polvodniškega laserja s tokom ali temperaturo.

Ojačenja v polvodniških laserjih je precej veliko, lahko več od 100 cm^{-1}. Zato je mogoče dobiti delujoč laser že v zelo kratkem aktivnem volumnu le nekaj mikronov. Običajni polvodniški laserji so dolgi okoli 0.25 mm.

Najpomembnejši polvodniši laserji so osnovani na na sistemu GaAs z $\mathrm{Ga}_{1-x}\mathrm{Al}_x\mathrm{As}$ in na sistemu $\mathrm{Ga}_{1-x}\mathrm{In}_x\mathrm{As}_{1-y}\mathrm{P}_y$. Prvi delujejo od 750 nm do 880 nm, odvisno od x in koncentracije primesi, drugi pa med 1,1 μm in 1,6 μm in so posebno pomembni za optične komunikacije, ki najve"krat delujejo pri 1,3 μm in 1,55 μm. Poglejmo si delovanje galij-arsenidnega laserja nekoliko pobliže.

Galij-arsenidni laser je narejen iz plasti GaAs in $\mathrm{Ga}_{1-x}\mathrm{Al}_x\mathrm{As}$ z ustreznimi primesmi, kot kaže slika **??**. Take plastne strukture je naredijo z epitaksialno rastjo. Pri tem je pomembno, da so medatomske razdalje plasti čim bolj enake, da na meji dveh plasti ni napak. $\mathrm{Ga}_{1-x}\mathrm{Al}_x\mathrm{As}$ ima energijsko špranjo med vvalenčnim in prevodnim pasom nekoliko večjo kot čisti GaAs, poleg tega ima tudi nekoliko večji lomni količni. Obe lastnosti sta pomembni za delovanje laserja. Aktivna plast je tanka, okoli 0,2 μm debela plast čistega GaAs. Potek energije pasov preko aktivne plasti z napetostjo v prevodni smeri kaže slika **??**. Elektroni tečejo iz n-tipa $\mathrm{Ga}_{1-x}\mathrm{Al}_x\mathrm{As}$ v prevodni pas aktivne plasti GaAs, vrzeli pa iz p $\mathrm{Ga}_{1-x}\mathrm{Al}_x\mathrm{As}$ v valenčni pas. Zaradi manjše energijske špranje so tako elektroni kot vrzeli ujeti, da ne morejo difundirati iz aktivne plasti in je zato koncentracija elektronov v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem že pri razmeroma majhnih tokovih lahko velika in je izpolnjen pogoj za ojačevanje svetlobe.

Zaradi manjšega lomnega količnika GaAs od $\mathrm{Ga}_{1-x}\mathrm{Al}_x\mathrm{As}$ je laserska svetloba ujeta v aktivni plasti, podobno kot v optičnih vlaknih, kot kaže slika **??**. To dodatno zmanjšuje izgube, ker preprečuje absorpcijo v področju izven aktivne plasti, kjer ni izpolnjen pogoj za ojačevanje.

Resonatorska zrcala so navadno kar gladko odklane stranske ploskve polvodniškega kristala, ki imajo zaradi velikega lomnega količnika ($n = 3,6$) dovolj veliko reflektivnost za učinkovito delovanje laserja.

Pri strukturi, ki jo kaže slika **??**, je aktivna plast v prečni smeri neomejena, zato lahko hkrati sveti mnogo prečnih nihanj, zaradi česar je slabša prečna koherenca snopa in delovanje laserja nestabilno. To slabost popravijo tako, da plasti ob straneh pojedkajo, da ostane le kakih 10 μm širok greben, kot kaže slika **??**. Odjedkani material nadomestijo s čistim $\mathrm{Ga}_{1-x}\mathrm{Al}_x\mathrm{As}$, tako da je aktivni volumen od vseh strani obdan s snovjo z večjim lomnim količnikom. S tem dobimo pravokoten svetlobni vodnik, v katerem je ujet laserski snop. Ob primerni izbiri deleža aluminija dobijo take lomne količnike, da je v laserju možen le osnovni snop brez vozlov v prečni smeri. Izhodni snop iz laserja je seveda eliptičen s presekom okoli 1 μm v navpični in 10 μm v prečni smeri. To da v večji oddaljenosti snop z divergenco kakih 70^o v navpični in okoli 5^o v prečni smeri. Če potrebujemo cilindrično simetričen snop, ga moramo popraviti z ustreznimi cilindričnimi lečami (Naloga).

Galij-arsenidni laser, kakršen je prikazan na sliki **??** lahko deluje že pri črpalnem toku nekaj miliamperov. Tipični tokovi so med 50 mA in 100 mA. Ker se velik delež elektonov in vrzeli rekombinira s sevanjem v aktivni plasti, je izkoristek GaAs laserjev velik, tudi preko 3010 mW. Zaradi velike gibljivosti elektronov in vrzeli v GaAs je mogoče tok in s tem izhodno svetlobno moč tudi zelo hitro modulirati, do nekaj GHz, kar je pomembno za uporabo v optičnih komunikacijah.

7 Modulacija svetlobe

V optičnih napravah pogosto želimo spreminjati lastnosti svetlobnega valovanja. Nekaj takih primerov smo že srečali pri obravnavi laserja, kjer smo za preklop kvalitete laserja potrebovali element, ki mu je moč hitro spreminjati prepustnost. Pri optičnem prenašanju in obdelavi informacij je možnost modulacije amplitude, frekvence ali faze svetlobnega vala z električnim signalom osnova skoraj vsake naprave.

Optični modulatorji izkoriščajo nekaj pojavov, od katerih sta najpomembnejša elektrooptični in elstooptični pojav. Pri prvem dosežemo spremembo lomnega količnika snovi z električnim poljem, pri drugem pa z deformacijo, ki jo navadno dobimo v zvočnem valu, zato takim modulatorjem pravimo akustooptični. Poseben zelo pomemben primer elektrooptičnih modulatorjev predstavljajo naprave na osnovi tekočih kristalov.

7.1 Elektrooptični pojav

V zunanjem električnem polju, katerega frekvenca naj bo majhna v primeri z optično frekvenco, se optični dielektrični tenzor lahko spremeni. Omejitev na nizko frekvenco je potrebna zato, da optično polje še vedno lahko obravnavamo linearno. Kako je, kadar to omejitev opustimo, si bomo ogledali v prihodnjem poglavju o nelinearni optiki, kamor pravzaprav formalno sodi tudi elektrooptični pojav.

Iz zgodovinskih razlogov zapišimo raje spremembo dielektričnemu inverznega tenzorja $b = \epsilon^{-1}$. Spremembo komponente b_{ij} lahko zapišemo kot potenčno vrsto zunanjega polja:

$$\delta b_{ij} = r_{ijk} E_k + q_{ijkl} E_k E_l \ . \tag{7.1.1}$$

Prvi člen, linearen z ozirom na zunanje polje, opisuje linearni elektrooptični pojav. Tenzor tretjega ranga r_{ijk}, ki lastnost snovi, imenujemo kar elektrooptični tenzor ali tudi Pockelsov tenzor. Kvadratnemu elektrooptičnemu pojavu pravimo Kerrov pojav. Za uporabo trdnih kristalov je pomemben predvsem linearni člen, zato se v nadaljevanju za Kerrov pojav ne bomo zanimali.

Preden si nekoliko pobliže ogledamo Pockelsov tenzor, zapišimo še, kako se z δb_{ij} izrazijo spremembe komponent dielektričnega tenzorja. Vzemimo tak koordinatni sistem, da bo nemoten dieletkrični tenzor v njem diagonalen. Ker so spremembe majhne, velja

$$(b + \delta b)^{-1} = [b(1 + b^{-1}\delta b)]^{-1} = (1 + b^{-1})^{-1} b^{-1} \simeq b^{-1} - b^{-1}\delta b \, b^{-1} \ , \tag{7.1.2}$$

torej

$$\delta\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ik}\delta b_{kl}\epsilon_{lj} = \epsilon_{ii}\epsilon_{jj}\delta b_{ij} \ . \tag{7.1.3}$$

Seveda je povsem vseeno, kako definiramo elektrooptični pojav, preko b ali ϵ. Običajna definicija Pockelsovega tenzorja ima za posledico, da v izrazih, kjer nastopa sprememba dielektričnega tenzorja, nstopajo še nemotene vrednosti ϵ ali lomnih količnikov.

Simetrija pomembno vpliva na obliko tenzorjev, ki popisujejo lastnosti snovi. Pockelsov tenzor je tretjega ranga, zato je lahko različen od nič le v takih kristalih, katerih simetrijska grupa ne vsebuje inverzije. Pri inverziji namreč električno polje spremeni predznak. Komponente simetričnega tenzorja drugega ranga se obnašajo kot produkti koordinat, b_{12} se transformira na primer enako kot xy, zato je b_{ij} na inverzijo neobčutljiv. Pockelsov tenzor r_{ijk} je lastnost snovi, zato se v primeru, da je inverzija simetrijski element kristala, ne sme spremeniti. Od tod sledi, da mora biti r_{ijk} identično enak nič. Kvadratni Kerrov pojav pa je dovoljen v vseh snoveh.

Simetrija tudi v primeru, ko nimamo centra inverzije, navadno močno zmanjša število neodvisnih komponent r_{ijk}. Pockelsov tenzor je po definiciji simetričen v prvih dveh indeksih, zato ima v najmanj simetričnem primeru triklinskega kristala 18 neodvisnih komponent, v kristalih z višjo simetrijo pa manj. Za primer poglejmo, kako štirištevna simetrijska os zmnanjša število komponent.

Naj bo simetrijska os v smeri z. Električno polje naj bo najprej paralelno osi. Rotacija za $\pi/2$ je simetrijska operacija in prevede os x v y, zato $r_{113} = r_{223}$. Poglejmo zvezo

$$\delta b_{12} = r_{123} E_3 \; . \tag{7.1.4}$$

Pri rotaciji za $\pi/4$ gre x v y, y pa v $-y$, zato gre δb_{12} v $-\delta b_{12}$ in dobimo

$$-\delta b_{12} = r_{123} E_3 \; . \tag{7.1.5}$$

Zvezi 7.1.4 in7.1.5 lahko veljata le, če je $r_{123} = 0$. Rotacija za π prevede zvezo $\delta b_{13} = r_{133} E_3$ v $-\delta b_{13} = r_{133} E_3$, zato je tudi $r_{133} = 0$ in z ozirom na enakovrednost x in y $r_{233} = 0$.

Naj bo sedaj polje v smeri osi x. Pri rotaciji za π gre E_1 v $-E_1$, δb_{11} se ne spremeni in je $r_{111} E_1 = -r_{111} E_1$, torej $r_{111} = 0$. Rotacija za $\pi/2$ zvezo $\delta b_{23} = r_{231} E_1$ prevede v $-\delta b_{13} = r_{231} E_2$. Po definiciji pa je $\delta b_{13} = r_{132} E_2$, zato velja $r_{231} = -r_{132}$.

Podobno ravnamo še s preostalimi komponentami in tako ugotovimo, da imamo v tetragonalni grupi, ki vsebuje le štirištevno os, štiri neodvisne komponente elektrooptičnega tenzorja: $r_{113} = r_{223}$, r_{333}, $r_{231} = -r_{132}$ in $r_{131} = r_{232}$, vse ostale komponente pa so nič. Oblika različnih tenzorjev pri različnih kristalnih simetrijah je dana na primer v **??** ali **??**.

V literaturi pogosto uporabljajo skrajšan zapis za elektrooptični tenzor. Prva dva indeksa, v katerih je r_{ijk} simetričen, združijo v enega z vrednostmi od 1 do 6 po dogovoru $xx = 1$, $yy = 2$, $zz = 3$, $yz = 4$, $zx = 5$ in $xy = 6$. Tako postane r_{ijk} matrika velikosti 6×3, simetrični tenzor drugega ranga b_{ij} pa šetkomponenten vektor. Tak zapis je prikladen, se pa v račune hitro prikradejo napake, posebej še pri transformacijah koordinat, zato je računati bolje v normalnem tenzorskem zapisu.

7.2 Amplitudna modulacija

Poglejmo sedaj, kako lahko elektrooptični pojav izkoristimo za modulacijo amplitude svetlobnega snopa. Osnovna zamisel je, da z električnim poljem tako spremenimo dvolomnost primerno izbranega in odrezanega kristala, da se spremeni polarizacija vpadnega vala, zaradi česar se spremeni tudi svetlobna moč, ki jo prepusti analizator za kristalom. Poglejmo si to kar na primerih.

Vzemimo kristal s kubično simetrijo $\overline{4}3m$, na primer ZnTe. Elektrooptični tenzor ima le eno neodvisno komponento

$$r_{123} = r_{231} = r_{312} = r \ . \tag{7.2.1}$$

Dieletktrični tenzor brez polja je seveda izotropen, dvolomnosti ni. Električno polje vzdolž ene od osi, na primer z, povzroči spremembo $\delta\epsilon_{12} = -\epsilon^2 r E_3$, zaradi česar postane kristal dvoosen z optičnima osema v ravnini xy, torej pravokotno na $\vec{E}$. To ni najbolj ugodno. Bolje je izbrati polje v smeri (1,1,1):

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{3}}(1,1,1) \ , \tag{7.2.2}$$

to je vzdolž trištevne osi, ki ostane tudi pod poljem. Optične lastnosti so tedaj enake kot v trigonalnem kristalu, to je kristal postane enoosen z optično osjo vzdolž $\vec{E}$. Dielektrični tenzor dobi obliko

$$\underline{\epsilon} = \left[\epsilon\right] \ , \qquad \delta\epsilon = \frac{E_0}{\sqrt{3}}\epsilon^2 r \ . \tag{7.2.3}$$

Da bomo znali izračunati, kako se po takem kristalu širi vpadni svetlobni snop, moramo gornji dielektrični tenzor diagonalizirati. V našem primeru je to preprosto, saj smo že ugotovili, da predstavlja enoosno sredstvo z optično osjo vzdolž $\vec{E}$. Uvedimo torej nove koordinate z osjo z' vzporedno z $\vec{E}$:

$$z' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z) \ . \tag{7.2.4}$$

V ravnini, pravokotni na z' so vse smeri enakovredne, zato je vseeno, kako izberemo novi osi x' in y', le pravokotni morata biti na z' in med seboj. Vzemimo

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y-z) \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-2x+y+z) \ . \end{aligned} \tag{7.2.5}$$

Matrika prehoda iz starega v novi sistem je torej

$$R = \left[0\right] \tag{7.2.6}$$

in dielektrični tenzor v novem sistemu

$$\underline{\epsilon}' = R\,\underline{\epsilon}\,R^{-1} = \left[\epsilon + \delta\epsilon\right] \ . \tag{7.2.7}$$

Iz oblike ϵ' razberemo, da je redni lomni količnik, to je količnik za svetlobo, ki je polarizirana pravokotno na z',

$$n_r = \sqrt{\epsilon + \delta\epsilon} \simeq n_0 (1 + \frac{\delta\epsilon}{2\epsilon}) = n_0 + \frac{n_0^3 r E_0}{2\sqrt{3}} \ , \qquad (7.2.8)$$

kjer je $n_0 = \sqrt{\epsilon}$ nemoteni lomni količnik. Izredni lomni količnik, za katerega je polarizacija vzporedna z osjo z', je

$$n_i = n_0 - \frac{n_0^3 r E_0}{\sqrt{3}} \ . \qquad (7.2.9)$$

Odrežimo iz obravnavanega kristala kvader z robovi vzdolž osi x', y' in z'. Postavimo ga med prekrižan polarizator in analizator tako, da se svetloba širi vzdolž osi x', kot kaže slika **??**. Polarizator naj tvori z osjo z' kot 45^o. Svetlobni val, ki vpada na kristal, moramo razdeliti na redni in izredni del. Po prehodu skozi kristal nastane med njima fazna razlika

$$\phi = k_0 L (n_i - n_r) = \frac{\sqrt{3}\pi n_0^3 r L U}{\lambda d} \ , \qquad (7.2.10)$$

kjer je U napetost na kristalu.

Polarizator na izhodni strani prepusti le projekcijo obeh lastnih polarizacij:

$$E_{izh} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_{vh} (\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi}) \ , \qquad (7.2.11)$$

kjer je E_{vh} amplituda svetlobnega vala za vhodnim polarizatorjem. Gostota prepuščenega svetlobnega toka bo torej

$$j_{izh} = \frac{1}{4} j_{vh} |1 - e^{i\phi}|^2 = \frac{1}{2} j_{vh} (1 - \cos\phi) \ . \qquad (7.2.12)$$

Ko je napetost na kristalu nič, je $\phi = 0$ in je tudi $j_{izh} =$), kot pričakujemo, saj sta analizator in polarizator prekrižana, kristal pa je brez polja optično izotropen. Največjo prepustnost dobimo, ko je $\phi = \pi$. V ZnTe je $r_{123} = 4 \cdot 10^{-12}$ m/V in $n = 3$. Naj bo kristal dolg 1 cm. Potrebno elekrično polje, da bo $\phi = \pi$, z drugimi besedami, da bo kristal deloval kot ploščica $\lambda/2$, je pri valovni dol"ini 600 nm

$$E_{\lambda/2} = \frac{U_{\lambda/2}}{d} = \frac{\lambda}{\sqrt{3} n^3 r L} = 3,2 \cdot 10^5 \ \mathrm{V/m} \ . \qquad (7.2.13)$$

Napetost, da popolnoma odpremo modulator, je torej precej velika, pri debelini kistala 1 cm je potrebnih 3000 V. Velike delovne napetosti so značilne za kristalne elektrooptične modulatorje in so njihova glavna slaba stran.

Včasih želimo, da je zveza med modulacijsko napetostjo in izhodno gostoto toka linearna. Za to mora modulator delovati v okolici $\phi = \pi/2$. Namesto visoke stalne napetosti lahko uporabimo med polarizatorjem in kristalom še ploščico $\lambda/4$, ki nam da zahtevani stalni fazni premik med rednim in izrednim valom.

V praksi se pogosto uporabljajo kristali, ki imajo simetrijo nižjo od kubične in so dvolomni že brez zunanjega polja. Zato si kot primer poglejmo še modulator s kristalom kalijevega dihidrogen fosfata (KH_2PO_4). Je tetragonalne simetrije $\bar{4}2m$ in ima dve neodvisni komponenti Pockelsovega tenzorja: $r_{123} = 10^{-11}$ m/V in $r_{231} = r_{132} = 8\dot{1}0^{-12}$ m/V. V uporabi sta dve geometriji, pri eni je optična os, to je štirištevna os kristala, vzporedna s smerjo svetlobnega vala in je tudi zunanje modulacijsko polje v isti smeri, kar je manj ugodno, pri drugi pa sta optična os in zunanje polje pravokotna na smer širjenja svetlobe, kot kaže slika **??**. Električno polje v smeri z povzroči, da se pojavi izvendiagonalna komponenta dielektričnega tenzorja $\delta\epsilon_{12} = \epsilon_1^2 r_{123} E$ in lastni vrednosti dielektričnega tenzorja v ravnini xy nista več enaki. Ena lastna vrednost postane $\epsilon_1 + \delta\epsilon$ z lastno smerjo x' 45^o glede na kristalno os x, druga pa $\epsilon_1 - \delta\epsilon$ z lastno smerjo y' -45^o na os x. Kristal odrežemo tako, da se svetloba širi vzdolž osi y'. Tedaj se zaradi zunanjega polja lomni količnik za svetlobo, polarizirano v smeri x' spremeni za $n_r^3 r_{123} E/2$ in je fazna razlika med obema lastnima polarizacijama (smeri x' in z) po prehodu skozi kristal

$$\phi = k_0 L \left[(n_r - n_i) + \frac{n_r^3}{2} r_{123} E \right] , \tag{7.2.14}$$

kjer sta n_r in n_i redni in izredni lomni količnik nemotenega kristala. Ker je kristal že sam po sebi dvolomen, povzroči zunanje polje le majhno dodatno fazno razliko. Dolžina kristala mora biti taka, da velja $k_0 L(n_r - n_i) = 2N\pi$, če naj bo modulator brez zunanjega polja zaprt. Pri tem nastopi težava. Pogoj je lahko zaradi temperaturnega raztezanja in odvisnosti lomnih količnikov od temperature izpolnjen le pri eni temperaturi, poleg tega bi bil tak modulator tudi zelo občutljiv na to, da se svetloba širi natanko v smeri y'. Zato dvolomnost nemotenega kristala kompenziramo tako, da vzamemo dva enako dolga kristala in ju postavimo zapored tako, da sta optični osi med seboj pravokotni, kot kaže slika **??**. Modulacijska napetost na drugem kosu mora imeti nasprotni predznak. Tedaj se fazna razlika med obema polarizacijama zaradi naravne dvolomnosti odšteje, zaradi modulacijske napetosti pa sešteje.

7.3 Fazna in frekvenčna modulacija

Amplitudno modulacijo svetlobe smo dobili tako, da smo z zunanjim poljem spremenili fazi lastnih valov, zaradi česar je postalo linearno polarizirano vpadno valovanje po prehodu kristala eliptično polarizirano. Spremembo polarizacije smo z analizatorjem prevedli v spremembo amplitude. Včasih pa želimo modulirati fazo vpadne svetlobe. Dobimo jo tako, da odstranimo izhodni polarizator, vhodno polarizacijo pa usmerimo tako, da je vpadna svetloba lastno valovanje, za katero je sprememba lomnega količnika zaradi modulacijskega polja večja. V primeru ZnTe, ki smo ga obravnavali v prejšnjem razdelku, je to izredno valovanje, polarizirano v smeri modulacijskega polja. Dodatna faza na izhodni strani kristala je

$$\phi = k_0 L(n_i - n_0) = \frac{\omega n_0^3 r L U}{\sqrt{3} c d} . \tag{7.3.1}$$

Če je sprememba faze linearna funkcija časa, to je, če jo lahko zapišemo v obliki $\phi = \omega_1 t + \phi_0$, predstavlja koeficient ω_1 spremembo frekvence vpadne svetlobe. Linearno naraščajoča modulacijska napetost da torej spremembo frekvence, kar v optiki pogosto potrebujemo. Dosegljive spremembe frekvence ω_1 so seveda dokaj majhne, do nekaj sto MHz. Omejene so z možno hitrostjo spreminjanja napetosti. Napetost seveda tudi ne more neomejeno naraščati. Kadar se napetost vrača na nič, dobimo frekvenčni premik v nasprotni smeri, ki pa ga lahko zanemarimo, če je čas vračanja kratek primeri s časom naraščanja.

Poglejmo še, kakšen je spekter svetlobe, če je fazna modulacija periodična:

$$U = U_m \sin \omega_m t \ . \tag{7.3.2}$$

Polje izhodne svetlobe bo tedaj

$$E_{izh} = E_{vh} \cos(\omega t + \delta \sin \omega_m t) \ , \tag{7.3.3}$$

kjer je $\delta = \omega n_0^3 r U_m L/(\sqrt{3} cd)$. Z uporabo identitet

$$\begin{aligned} \cos(\delta \sin x) &= \mathrm{J}_0(\delta) + 2\mathrm{J}_2(\delta) \cos 2x + \ldots \\ \sin(\delta \sin x) &= 2\mathrm{J}_1(\delta) \sin x + 2\mathrm{J}_3 \sin 3x + \ldots \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

je izhodno polje mogoče zapisati v obliki

$$\begin{aligned} E_{izh} &= E_{vh}[\mathrm{J}_0(\delta) \cos \omega t \pm \mathrm{J}_1(\delta) \cos(\omega \pm \omega_m)t + \\ &\quad + \mathrm{J}_2(\delta) \cos(\omega \pm 2\omega_m)t \pm \ldots] \end{aligned} \tag{7.3.5}$$

Periodična fazna modulacija torej da v spektru stranske pasove, odmaknjene od osnovne frekvence ω za modulacijsko frekvenco. Njihova velikost je podana s kvadratom Besselovih funkcij parametra δ. Če je ta majhen, se lahko zadovoljimo le s prvim členom.

7.4 Modulacija pri visokih frekvencah

Pogosto je pomembna hitrost elektrooptične modulacije. Zato polejmo, kaj se zgodi pri visokih modulacijskih frekvencah.

Elektrooptični pojav pri nizkih frekvencah ima dva prispevka: direktnega, kjer zunanje polje vpliva neposredno na elektronsko polarizabilnost, in posrednega preko piezoelektričnega pojava. Snovi, ki nimajo centra inverzije, so tudi piezoelektrične in se v zunanjem električnem polju deformirajo. Deformacija pa povzroči spremembo lomnega količnika, o čemer bomo podrobneje govorili v enem od naslednjih oddelkov. Celotno spremembo tenzorja b_{ij} lahko zapišemo

$$\begin{aligned} \delta b_{ij} &= r^*_{ijk} E_k + p_{ijlm} S_{lm} \\ &= r^*_{ijk} E_k + p_{ijlm} \pi_{lmk} E_k \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

Tu je $S_{lm} = \pi_{lmk} E_k$ piezoelektrično povzročena deformacija. Pri nizkih frekvencah sta oba prispevka primerljivo velika in je efektivni elektrooptični tenzor $r_{ijk} = r^*_{ijk} +$

$p_{ijlm}\pi_{lmk}$. Pri dovolj velikih frekvencah deformacija kristala ne more več slediti modulacijski napetosti in ostane le direktni prispevek r^*_{ijk}. To se zgodi nad akustičnimi resonancami kristala. Pri akustičnih resonancah, to je, kadar modulacija v kristalu vzbudi stoječe zvočno valovanje, pa se piezoelektrični prispevek resonančno poveča.

Pogoj za akustično resonanco je, da je dimenzija kristala mnogokratnik polovice valovne dolžine akustičnega vala v kristalu. Uporabne dimenzije kristalov so reda velikosti centimeter, hitrost zvočnih valov je okoli 5000 m/s, tako da dobimo resonance v področju od nekaj sto kHz do nekaj deset MHz. Mogoče jih je tudi izkoristiti za povečanje elektrooptičnega efekta pri izbrani frekvenci.

Pri visokih frekvencah postane pomembna tudi električna vezava modulatorja. Kristal predstavlja neko kapacitivno breme. Njegova impedanca pada z rastočo frekvenco, zato je vedno večji del padca napetosti na notranjem uporu izvora napetosti. Pomagamo si lahko tako, da vzporedno s kristalom vežemo še tuljavo, tako da je resonančna frekvenca $1/(L_tC)$ nastalega nihajnega kroga enaka željeni modulacijski frekvenci ω_m. Tedaj je večina padca napetosti na kristalu in tuljavi. Da resonanca ni preostra in da imamo na voljo dovolj širok pas modulacijskih frekvenc, vežemo vzporedno s kristalom še upor z upornostjo R. Širina modulacijskega pasu je

$$\Delta\omega_m = \frac{1}{RC} \; . \tag{7.4.2}$$

Na uporu se troši moč

$$P = \frac{1}{2}\frac{U^2}{R} = \frac{1}{2}U^2C\Delta\omega_m = \frac{\epsilon\epsilon_0 La}{2d}U^2C\Delta\omega_m \; , \tag{7.4.3}$$

kjer je a velikost kristala v prečni smeri. Naj bo U ravno napetost, ki da fazno razliko π. Potem dobimo z uporabo enačbe 7.2.13

$$P = \frac{A}{L}\,\frac{\epsilon\epsilon_0\Delta\omega_m\lambda^2}{3n_0^6r^2} \; , \tag{7.4.4}$$

kjer je A prečni presek kristala. Potrebna moč je odvisna od lastnosti modulatorja in širine modulacijskega pasu. Pri širini modulacijskega pasu 1 MHz in preseku kristala 1 cm^2 je potrebna moč nekaj deset W, kar je za visokonapetosten in hiter izvor že znatna moč.

7.5 Elastooptični pojav

Dielektrične lastnosti in lomni količnik so odvisne tudi od deformacije snovi. Podobno kot pri elektrooptičnem pojavu lahko spremembo obratnega dielektričnega tenzorja zapišemo

$$\delta b_{ij} = p_{ijkl}S_{kl} \; . \tag{7.5.1}$$

S_{kl} je tenzor defomacije snovi:

$$S_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \; , \tag{7.5.2}$$

p_{ijkl} pa *elastooptični tenzor*. Ta je različen od nič v vsaki snovi, ker povezuje dva simetrična tenzorja drugega ranga. Popisuje tudi spremembo dielektrične konstante in lomnega količnika zaradi spremembe gostote snovi. Je simetričen v prvem in drugem paru indeksov, tako da ima v najbolj splošnem primeru 36 neodvisnih komponent. Simetrija danega kristala seveda to število zmanjša.

Podobno kot pri elektrooptičnem pojavu lahko iz 7.5.1 izrazimo spremembo dielektričnega tenzorja

$$\delta\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ii}\epsilon_{jj}p_{ijkl}S_{kl} \ , \tag{7.5.3}$$

kjer smo že predpostavili, da je nemoteni ϵ diagonalen.

Dvojni lom, ki se pojavi v deformirani snovi, izkoriščamo za študij mehanskih napetosti v modelih, ki so izdelani iz prozorne plastične snovi. Nas bo v nadaljevanju zanimal uklon svetlobe na periodični modulaciji lomnega količnika, ki nastane zaradi zvočnih valov v snovi.

7.6 Braggov uklon na zvočnih valovih

V plasti prozorne snovi vzbudimo stoječe zvočno valovanje. V zgoščini je lomni količnik nekoliko večji, zato je optična pot na takem mestu skozi plast daljša. Ravno svetlobno valovanje, ki pada na plast, po izstopu iz plasti ne bo imelo več povsod enake faze, valovno čelo bo periodično modulirano s periodo valovne dolžine zvoka. V veliki oddaljenosti od plasti bomo poleg osnovnega snopa dobili še uklonjene snopa v smereh, za katere velja

$$\Lambda \sin\theta = \pm 2N\pi \ , \tag{7.6.1}$$

kjer smo z Λ označili valovno dolžino zvoka v snovi. Zgoščine in razredčine izginejo vsake pol zvočne periode, zato je tudi intenziteta uklonjenih snopov modulirana z dvojno frekvenco zvoka.

V splošnem je delež uklonjene svetlobe neuporabno majhen. Znaten postane le tedaj, kadar je za enega od uklonjenih valov izpolnjen Braggov pogoj, to je, kadar velja

$$\vec{k}_0 \pm \vec{q} = \vec{k}_1 \ , \tag{7.6.2}$$

kjer je $\vec{k}_0$ valovni vektor vpadne svetlobe, $\vec{k}_1$ valovni vektor uklonjenega svetlobnega snopa, $\vec{q}$ pa valovni vektor zvočnega vala. Znak plus velja, kadar potuje zvok proti projekciji $\vec{k}_0$ na $\vec{q}$. Enačba 7.6.2 je pogoj za ohranitev gibalne količine fotona pri sipanju na zvočnem valu. Lahko jo prepišemo še nekoliko drugače. Frekvenca zvočnega vala je dosti nižja od frekvence svetlobe, zato se frekvenca svetlobe pri sipanju le malo spremeni in sta $veck_0$ in $\vec{k}_1$ po velikosti skoraj enaka. Tedaj je $q = 2k_0 \sin\theta_B/2$ (glej sliko 7.2.2), od koder imamo Braggov pogoj v obliki

$$2\Lambda \sin\frac{\theta_B}{2} = \lambda_0 \ . \tag{7.6.3}$$

Obenem mora biti vpadni kot na zvočni val enak izhodnemu, torej na zvočnem valu se Braggovo sipana svetloba zrcalno odbije. Razmere so povsem analogne Braggovemu sipanju rentgenske svetlobe na kristalnih ravninah. Kadar je izpolnjen Braggov pogoj, je mogoče doseči, da se vsa vapdna svetloba siplje, kot bomo pokazali nekoliko kasneje.

Če je zvočni val potujoč, kar smo v gornjem razmišljanju že privzeli s tem, ko smo mu pripisali natanko določen valovni vektor $\vec{q}$, se spremeni tudi frekvenca sipanega vala zaradi Dopplerjevega premika pri odboju zvočnem valu, ki potuje s hitrostjo v_z. Upoštevati moramo le projekcijo na smer vapdne in odbite svetlobe, zato je

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \pm\frac{2v_z \sin\theta_B/2}{c} = \pm\frac{2\Omega\Lambda\sin\theta_B/2}{c} = \pm\frac{\Omega}{\omega};. \tag{7.6.4}$$

Upoštevali smo, da velja Braggov pogoj 7.6.3. Sprememba frekvence sipane svetlobe je kar enaka frekvenci zvočnega vala. To sledi tudi iz zahteve, da se mora pri sipanju na zvočnem valu ohraniti energija vpadnega fotona in kvanta zvo"nega valovanja - fonona, ki se pri sipanju absorbira (znak plus, zvočni val potuje proti projekciji $\vec{k}_0$ na $\vec{q}$) ali nastane.

Kadar imamo v snovi stoječe zvočno valovanje, lahko sipanje obravnavamo kot vsoto sipanja na dveh valovanjih z valovnima vektorjema $\vec{q}$ in $-\vec{q}$. Smer Braggovo sipanega vala je obakrat enaka, frekvenca pa se enkrat poveča, drugič zmanjša za Ω. Zato dobimo utripanje sipanega vala s frekvenco 2Ω.

Braggovo sipanje svetlobe na zvočnih valovih se uporablja v več optičnih napravah. Najpomembnejše je uklanjanje svetlobe iz vpadne smeri, pri čemer ima uklonjeni snop še spremenjeno frekvenco. Z vklaplanjem in izklaplanjem zvočnega vala, ki ga vzbujamo s piezoelektričnim elementom, na katerega pritisnemo izmenično napetost, lahko moduliramo intenziteto direktnega svetlobnega snopa. To potrebujemo na primer pri preklaplanju kvalitete laserskega resonatorja. S spreminjanjem zvočne frekvence pa lahko spreminjamo smer uklonjenega snopa, pri čemer pa smo precej omejeni s tem, da mora biti približno izpolnjen Braggov pogoj.

Druga uporaba je spreminjanje frekvence svetlobe. Možne so spremembe do nekaj sto MHz, kar je ravno primerno za uporabo v laserskih merilnikih hitrosti, kjer merimo frekvenco utripanja med svetlobo, odbito od merjenega predmeta, in referenčno svetlobo. Če ima referenčna svetloba isto frekvenco kot merilni snop, ni mogoče določiti predznaka hitrosti predmeta, če pa referenčni svetlobi nekoliko spremenimo frekvenco, dobimo utripanje tudi tedaj, ko predmet miruje. Frekvenca utripanja se poveča ali zmanjša glede na predznak hitrosti predmeta.

Tretja pomembna uporaba je kombinacija obeh gornjih za uklepanje faz v laserskem resonatorju. Če imamo v Braggovem elementu stoječe zvočno valovanje, je amplituda direktnega snopa modulirana s frekvenco zvoka. Če je frekvenca zvoka ravno enaka razmiku frekvenc laserskih nihanj, lahko dobimo uklenjene faze vzbujenih nihanj in s tem kratke, periodične sunke svetlobe, kot smo videli v petem poglavju.

Zanimiva je tudi možnost, da napravimo s pomočjo Braggovega elementa hiter frekvenčni analizator električnih signalov. Shemo kaže slika **??**. Piezoelektrični element vzbujamo z električnim siganlom, ki ima neznan spekter. Enak spekter imajo tudi vzbujeni zvočni valovi. Vsakemu valu določene frekvence ustreza določen kot odklona svetlobnega snopa. Za Braggovim elementom postavimo lečo. Vsak delni uklonjeni snop da v goriščni ravnini svetlo točko, katere položaj je odvisen od kota odklona in s tem od frekvence zvočnega vala. Spekter zaznamo z vrstičnim detektorjem. Na celo napravo lahko pogledamo tudi takole: Braggova celica frekvenčni spekter zvočnih valov prevede v prostorski spekter prepuščene svetlobe. Prostorski spekter svetlobe pa lahko analiziramo z lečo, ki nam v goriščni ravnini na desni da prostorsko Fourierovo transformacijo svetlobnega snopa na levi strani leče.

Nismo še ugotovili, kolikšen je delež uklonjene svetlobe. Rešiti moramo valovno enačbo v nehomogenem sredstvu, kar je dokaj težaven problem in se moramo zateči k približkom. Ena možnost je, da uporabimo običajno uklonsko teorijo, kjer privzamemo, da lahko vpliv periodične modulacije lomnega količnika snovi upoštevamo s spremembo faze svetlobnega vala na izhodu iz snovi: $\delta\phi = \delta n k_0 L$, kjer je L debelina plasti. (Naloga) Vendar je tak račun dober le v primeru, kadar je prečna variacija faze majhna in je debelina L majhna.

Primernejša je metoda *sklopljenih valov.* Paralelen snop zvočnega valovanja z valovnim vektorjem *vecq* naj potuje v smeri x. Širina snopa naj bo L. Nanj pod kotom ϕ glede na os z vpada ravno svetlobno valovanje z valovnim vektorjem $\vec{k} = (k_1, 0, k_3) = k(\sin\phi, 0, \cos\phi)$. Vse valovanje, vpadno na levi zvočnega snopa in izhodno na desni, obravnavajmo znotraj snovi, da nam ni treba upoštevati še loma, ki le zaplete izraze. Zaradi periodične modulacije lomnega količnika so ravni valovi, katerih x-komponente valovnih vektorjev se razlikujejo za q, med seboj sklopljeni, zato njihove amplitude niso konstantne, temveč se v smeri z počasi spreminjajo, kar želimo v različnih približkih izračunati.

Privzemimo, da se v snovi zaradi zvočnih valov spremeni le velikost dielektrične konstante, ki jo lahko zapišemo v obliki

$$\epsilon = \epsilon' + \epsilon_1 \sin(qx - \Omega t) \ , \tag{7.6.5}$$

kjer je sprememba ϵ_1 povezana z amplitudo deformacije S_0 v zvočnem valu :$\epsilon_1 = -\epsilon^2 p S_0$. Izpustili smo indekse tenzorjev.

Valovna enačba ima obliko

$$\nabla^2 E = \frac{\epsilon'}{c^2}\frac{\partial E^2}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial P_1^2}{\partial t^2} \ . \tag{7.6.6}$$

Na levi strani smo zanemarili, da $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$, če je ϵ funkcija kraja. Da s tem nismo zagrešili znantne napake, naj bralec ugotovi sam (Naloga). $P_1 = \epsilon_0 \epsilon_1 \sin(qx - \Omega t)E$ predstavlja dodatno polarizacijo snovi, ki nastane zaradi zvočnega vala.

Enačbo 7.6.6 brez P_1 rešijo ravni valovi. Učinek člena s P_1 je, da ravnemu valu z valovnim vektorjem $\vec{k}$ in frekvenco ω primeša val z valovnim vektorjem $\vec{k} \pm \vec{q}$ in frekvenco $\omega \pm \Omega$. Zato iščimo rešitve v obliki vsote ravnih valov, torej Fourierove vrste

$$E = \sum_n A_n(z) e^{in(qx - \Omega t)} e^{i(k_1 x + k_3 z - \omega t)} \ . \tag{7.6.7}$$

Zaradi sklopitve preko P_1 moramo dovoliti, da so amplitude A_n funkcije z. Če je ϵ_1 dovolj majhen, se $A_n(z)$ le počasi spreminjajo.

Izračunajmo

$$\nabla^2 E = \sum_n \left\{ -[k_3^2 + (k_1 + nq)^2] A_n + 2ik_3 A_n' \right\} e^{i[(k_1+nq)x + k_3 z - (\omega + n\Omega)t]} \ . \tag{7.6.8}$$

Člen z A''_n lahko izpustimo, če je le $k_3 A'_n >> A''_n$, to je, če se A_n spreminjajo počasi v primerjavi z $\exp(ik_3 z)$. Vstavimo izraza 7.6.7 in 7.6.8 v valovno enačbo 7.6.6 in zahtevajmo, da je vsak člen vsote po n posebej enak nič. Tako dobimo

$$\begin{aligned} -[k_3^2 + (k_1 + nq)^2]A_n + 2ik_3 A'_n = \\ = -\frac{\epsilon'}{c^2}(\omega + n\Omega)^2[A_n - \frac{\epsilon_1}{2i\epsilon'}(A_{n-1} - A_{n+1}) \quad . \end{aligned} \tag{7.6.9}$$

Upoštevamo, da je $k_1^2 + k_3^2 = \epsilon'(\omega/c)^2 = k^2$ in $\Omega = v_z q$. Ker je $v_z << c$, zanemarimo člene reda v_z/c, pa dobimo

$$A'_n + i\beta_n A_n + \xi(A_{n+1} - A_{n-1}) = 0 \ , \tag{7.6.10}$$

kjer je

$$\beta_n = \frac{nq}{k_3}(k_1 + nq) \tag{7.6.11}$$

in

$$\xi = \frac{\epsilon_1}{4\epsilon'} \frac{k^2}{k_3} \ . \tag{7.6.12}$$

Reševanje sistema 7.6.10 je težavno. Rešitve poiščimo le v treh pomembnih limitnih primerih. Naj bo amplituda vala, ki vpada z leve, $A_0(0) = A_0$, ostale $A_n(0)$ pa nič.

Najprej privzemimo, da je $L\xi << 1$, da je torej ϵ_1 majhen in debelina zvočnega snopa ne prevelika. Tedaj je pri vseh z in za pozitivne n $A_{n+1} << A_n$ in lahko člen A_{n+1} v enačbi 7.6.10 ispustimo. S tem dobimo preprost sistem enačb

$$A'_n + i\beta_n A_n = \xi A_n \ , \tag{7.6.13}$$

ki jih lahko zapored integriramo:

$$A_n(z) = \xi e^{-i\beta_n z} \int_0^z A_{n-1}(z') e^{i\beta_n z'} dz' \ . \tag{7.6.14}$$

Podobne izraze dobimo za negativne n, to je za uklonjene valove, ki se jim frekvenca pri sipanju zmanjša.

Poglejmo posebej prvi uklonjeni val z amplitudo A_1. Po predpostavki, da je $A_{\pm 1} << A_0$, se le malo energije uklanja iz osnovnega vala in je $A_0(z)$ skoraj konstanta. Potem lahko integral v 7.6.15 izračunamo:

$$A_1(L) = A_0 \xi L \frac{\sin \beta_1 L/2}{\beta_1 L/2} e^{-i\beta_1 L/2} \ . \tag{7.6.15}$$

$A_1(L)$ ima vrh pri $\beta_1 = 0$, to je pri

$$\frac{q}{\cos\phi}(k \sin\phi + \frac{q}{2}) = 0 \tag{7.6.16}$$

ali

$$2k \sin\phi = -q \ . \tag{7.6.17}$$

Prečna komponenta valovnega vektorja sipanega vala je tedaj

$$k_1 + q = k \sin\phi - 2k \sin\phi = -k \sin\phi \ . \tag{7.6.18}$$

Smer sipanega vala je torej pod kotom $-\phi$ glede na os z, simetrično z vpadnim valom. Če še označimo $\theta = 2\phi$, vidimo, da predstavlja $\beta_1 = 0$ ravno pogoj za Braggovo sipanje vpadnega vala.

Razmere pri Braggovem sipanju je vredno pogledati še nekoliko podrobneje. Ker je hitrost zvoka mnogo manjša od hitrosti svetlobe, je $\Omega/c << q$ in sta velikosti vpadnega in sipanega valovnega vektorja enaki. Komponenti x se razlikujeta za q. Kadar je Braggov pogoj izpolnjen, velja tudi da je sipani valovni vektor $\vec{k}_s = \vec{k} + \vec{q}$, kot je razvidno iz slike **??** ali kot se lahko prepričamo s kratkim računom. Braggov pogoj je torej enakovreden zahtevi, da se morajo pri sipanju ohraniti valovni vektorji. V kvantni mehaniki je $\hbar\vec{k}$ gibalna količina fotona, $\hbar\vec{q}$ pa gibalna količina kvanta zvočnega valovanja fonona. Braggov pogoj je torej primer ohranitve gibalne količine. Če se ta ne ohranja, je sipanje neučinkovito in le oscilira okoli majhne vrednosti, kar opisuje faktor $\sin(\xi L/2)$.

Delež moči uklonjenga vala je

$$\frac{I_1}{I_0} = \left|\frac{A_1}{A_0}\right|^2 = (\xi L)^2 \left(\frac{\sin\beta_1 L/2}{\beta_1 L/2}\right)^2 \ . \tag{7.6.19}$$

Kadar je Braggov pogoj izpolnjen, je $I_0/I_1 = (\xi L)^2$, kar lahko velja le, dokler je $\xi L << 1$. Da se izognem tej omejitvi, moramo upoštevati tudi zmanjšanje moči vpadnega snopa.

Braggov pogoj je hkrati lahko izpolnjen le za en uklonjen val, na primer $n = 1$. Zato so tedaj vse ostale amplitude A_n, $n \neq 0, 1$ majhne in ne vplivajo na A_1. To nam omogoča drug približek, ki je za uporabo zelo pomemben. Opustimo omejitev $L\xi << 1$, vendar zahtevajmo, da sta le A_0 in A_1 različni od nič. Sedaj $A_0(z)$ ne smemo več obravnavati kot konstante. Iz sistema 7.6.10 dobimo

$$\begin{aligned} A_0' + \xi A_1 &= 0 \\ A_1' - \xi A_0 &= 0 \ . \end{aligned} \tag{7.6.20}$$

Začetni pogoji so $A_0(0) = A_0$ in $A_1(0) = 0$. Rešitev enačb **??** je

$$\begin{aligned} A_0(L) &= A_0 \cos\xi L \\ A_1(L) &= A_0 \sin\xi L \ . \end{aligned} \tag{7.6.21}$$

Če je izpolnjen Braggov pogoj, se moč vpadnega vala na razdalji $\pi\xi/2$ skoraj vsa pretoči v uklonjeni snop, nato pa zopet nazaj (slika **??**). Za čim bolj učinkovito delovanje akustooptičnega modulatorja seveda želimo doseči ravno take pogoje.

Razmerje med močjo uklonjenega in vpadnega snopa je

$$\frac{I_1}{I_0} = \sin^2\left(\frac{\pi n_0^3 p S_0 L}{2\lambda\cos\phi}\right) \ . \tag{7.6.22}$$

kjer smo upoštevali, da je $\xi = \pi\epsilon_1/(2n_0\lambda\cos\phi)$ in $\epsilon_1 = n_0^4 p S_0$, kjer je S_0 amplituda deformacije v zvočnem valu. Izrazimo jo lahko z gostoto moči zvočnega vala

$$j_z = \frac{1}{2} C S_0^2 v_z \ , \tag{7.6.23}$$

kjer je C elastična konstanta snovi. Iz $v_z^2 = C/\rho$ izrazimo še C, s čemer dobimo

$$S_0 = \sqrt{\frac{2j_z}{\rho v_z^3}} \ . \tag{7.6.24}$$

Merilo uporabnosti neke snovi za akustooptični modulator je

$$M = \frac{n_0^6 p^2}{\rho v_z^3} \ . \tag{7.6.25}$$

Poglejmo primer. V kremenu $\rho = 2,2 \cdot 10^3$ kg/m^3, $v_z = 6000$ m/s, $n_0 = 1,46$ in $p = 0,2$, tako da je $M = 8 \cdot 10^{-16}$ W/m^2. Pri gostoti zvočnega toka 10 W/cm^2 in valovni dolžini 633 nm je za popolen prenos močiv uklonjeni snop $L = 3$ cm. Gornja gostota zvočnega toka je kar velika in je ni prav lahko doseči, zato so običajni uklonski izkoristki nekaj manjši od 1.

Kot odklona uklonjenega vala 2ϕ je

$$2\phi = \frac{q}{k} = \frac{\lambda}{n_0\Lambda} = 1,7 \cdot 10^{-3} \ . \tag{7.6.26}$$

Kot je torej precej majhen.

Opisani račun izkoristka uklona na zvočnih valovih je uporaben tudi pri računu izkoristka holograma. V primeru faznega holograma je račun čisto enak in nam kaže tudi razliko med tankim in debelim hologramom, kako pa je z izkoristkom amplitudnega holograma, kjer je modulirana absorpcija v snovi, lahko bralec izračuna sam (Naloga).

Enačbe 7.6.10 je enostavno rešiti še v it Raman- Nathovem približku, ki sicer ni posebno pomemben za uporabo, je pa zanimiv. Vpeljimo novo neodvisno spremenljivko $\zeta = 2\xi z$. Zveza 7.6.10 preide v

$$2\frac{dA_n(\zeta)}{d\zeta} + A_{n+1}(\zeta) - A_{n-1}(\zeta) = \frac{\beta_n}{\xi} A_n \ . \tag{7.6.27}$$

Člen na desni lahko izpustimo, če je

$$\frac{\beta_n}{\xi} = \frac{4nq}{k}\frac{\epsilon'}{\epsilon_1}(\sin\phi - \frac{nq}{2k}) << 1 \ , \tag{7.6.28}$$

to je, če je pri danem ϵ_1 valovna dolžina zvoka dovolj velika v primeri z valovno dolžino svetlobe. Iz 7.6.27 dobimo tedaj rekurzijsko zvezo za Besselove funkcije

$$2\mathrm{J}_n' + \mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_{n-1} = 0 \tag{7.6.29}$$

in je $A_n(z) = A_0 \mathrm{J}_n(2\xi z)$. Kadar je $2\xi L$ ničla J_0, prvič je to pri $2\xi L = 2.4$, se vsa energija ukloni iz vpadnega snopa, vendar gre v tem primeru, ko Braggov pogoj ni izpolnjen, v mnogo uklonjenih snopov.

7.7 Modulacija s tekočimi kristali

Tekoči kristali so anizotropne kapljevine in so vmesna faza med običajnimi izotropnimi kapljevinami in kristali. Stopnja njihove urejenosti je lahko različna. Tekoče kristale tvorijo podolgovate ali ploščate molekule, vendar so za sedaj praktično pomembne le faze, ki jih tvorijo podolgovate organske molekule. Tudi med njimi so bili do nedavnega v uporabi le optične naprave z nematskimi tekočimi kristali, zato se zanimajmo le zanje. Običajno jih tvorijo molekule z relativno togim jedrom iz dveh ali treh benzenovih obročev, ki imajo na koncih krajše ali daljše alifatske verige (slika **??**). Težišča molekul so v nematski fazi neurejena, enako kot v navadni tekočini, osi molekul pa so v povprečju urejene v določeno smer. Smer povprečne urejenosti opišemo z enotnim vektorjem $\vec{n}$, ki mu rečemo it direktor. Smeri $\vec{n}$ in $-\vec{n}$ sta enakovredni, z drugimi besedami, molekule z enako verjetnostjo kažejo v smeri $+\vec{n}$ kot v $-\vec{n}$. Stopnja urejenosti v mikroskopski sliki ni prav velika, povprečen odklon molekul od $\vec{n}$ je nekaj deset stopinj.

Nematski tekoči kristal se obnaša kot enoosen dvolomni kristal z optično osjo vzporedno z $\vec{n}$. Ker je optična polarizabilnost benzenovih obročev vzdolž osi molekul precej večja od prečne, je razlika med rednim in izrednim lomnim količnikom razmeroma velika, navadno med 0,1 in 0,2.

V makroskopskem vzorcu nematskega tekočega kristala se smer $\vec{n}$ po vzorcu neurejeno spreminja, če posebej ne poskrbimo, da ima povsod isto smer. Energija takega deformiranega stanja je nekoliko večja od energije homogenega stanja, zaradi česar na delček tekočega kristala okolica deluje z navorom, ki deluje v smeri zmanjševanja nehonogenosti $\vec{n}$. Temu pojavu, zna"ilnemu za tekoče kristale, pravimo orientacijska elastičnost. Nekoliko podrobneje je opisan v Dodatku na koncu poglavja. Vendar so ti elastični navori prešibki, da bi uredili razsežne vzorce. Urejene vzorce, kakršne potrebujemo za uporabo v optičnih elementih, lahko dobimo s pomočjo zunanjega polja ali pa v dovolj tankih plasteh, kjer mejne površine ustrezno pripravimo.

Zunanje električno ali magnetno polje na tekoče kristale tudi deluje z navorom. Električna in magnetna susceptibilnost nematskega tekočega kristala nista skalarja, temveč imata dve različni lastni vrednosti, eno v za smer vzporedno z $\vec{n}$, drugo za pravokotno. Zato je elektrostatična energija odvisna od kota med zunanjim poljem *vecE* in $\vec{n}$. Od kota odvisni del energije lahko zapišemo v obliki

$$w_a = -\frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_a(\vec{E}\cdot\vec{n})^2 \ , \tag{7.7.1}$$

kjer je $\epsilon_a = \epsilon_{\|} - \epsilon_{\perp}$ anizotropni del dielektrične konstante. Če je $\epsilon_a > 0$, se molekule skušajo postaviti v smer polja, če je $\epsilon_a < 0$, pa pravokotno na polje.

Urejen vzorec je mogoče narediti tudi v tankih plasteh. Če površino, ki je v stiku s tekočim kristalom, prevlečemo z primerno pastjo, se molekule tekočega kristala tik ob povšini na določen način uredijo. Tanka plast najlona, ki jo podrgnemo v željeni smeri, povzroči, da je $\vec{n}$ ob površini paralelen s površino v smeri drgnenja. Drgnenje deloma uredi verige najlona, zato se tudi molekule tekočega kristala raje uredijo v isti smeri. Da je $\vec{n}$ pravokoten na površino, dosežemo na primer s tanko plastjo lecitina. Ta ima polarno glavo, ki se adsorbira na stekleno površino, in alifatsko verigo, ki stoji približno pravokotno na površino. Zato se tudi alifatski repi molekul tekočega kristala uredijo enako. V obeh primerih, paralelni ali pravokotni orientaciji ob steni, se urejenost zaradi orientacijske elastičnosti ohranja tudi stran od stene, tako da lahko brez težav dobimo urejene vzorce debeline do kakih 200 μm. Pri večjih debelinah so elastični navori prešibki in ostanejo v vzorcu defekti.

Struktura tekočekristalnega vzorca je tako odvisna od orientacijske elastičnosti, od robnih pogojev, ki jih določimo z obdelavo mejne površine, in od zunanjega električnega ali magnetnega polja.

Preprost elektrooptični modulator ali kazalnik na osnovi nematskih tekočih kristalov lahko dobimo takole. Vzemimo vzorec tekočega kristala med dvema stekloma, na katerih sta prozorni elektrodi. Ureditev tekočega kristala naj bo vzporedna s površino stekel. Tudi optična os ima isto smer. Dovolj velika napetost zasuče $\vec{n}$ in s tem optično os pravokotno na stene, razen tik ob površini. Pri debelini 10 μm je potrebna napetost nekaj voltov. Nekaj več o tem preklopu najde bralec v Dodatku na koncu poglavja.

Naj debelina h obravnavane plasti za izbrano valovno dolžino svetlobe ustreza pogoju

$$h(n_i - n_r) = (2N+1)\frac{\lambda}{2}\,, \tag{7.7.2}$$

kjer je N celo število. Plast torej deluje kot ploščica $\lambda/2$. Ker je $n_i - n_r \simeq 0,1$, je potrebna debelina nekaj μm. Vzorec damo med prekrižana polarizatorja s prepustno smerjo 45^o na $\vec{n}$. Ploščica polarizacijo svetlobe z izbrano valovno dolžino zasuče za 90^o, tako da gre svetlobe tudi skozi analizator. Ko vključimo napetost, se optična os obrne, polarizacija svetlobe se pri prehodu skozi plast ohrani in analizator je ne prepusti.

Tak preklopnik ima nekaj slabih lastnosti. Prepustnost je odvisna od valovne dolžine svetlobe in od temperature in debelina preklopnika mora biti povsod enaka. Zato se v praksi uporablja zasukana nematska plast.

Obrnimo eno od stekel za 90^o, tako da sta smeri urejanja na obeh mejah med seboj pravokotni. Tedaj se smer $\vec{n}$ v plasti zvezno zavrti od ene do druge površine, kot kaže slika **??**. Polarizacija svetlobe, ki je ob vstopu v plast polarizirana v smeri urejanja, skozi plast približno sledi smeri $\vec{n}$, kot bomo pokazali nekoliko kasneje, in je ob izstopu iz plasti polarizirana pravokotno na vpadno polarizacijo. Z električnim poljem preklopimo optično os pravokotno na plast in polarizacija se ne zasuče. Plast med prekrižanima polarizatorjema brez polja prepušča svetlobo, v polju pa ne. Pri tem delovanje kazalnika ni dosti odvisno niti od debeline plasti niti od valovne dolžine. Kadar želimo, da kazalnik deluje v odbiti svetlobi, damo za zadnji analizator še odbojno površino.

Pri kristalnem elektrooptičnem modulatorju smo lahko dobili tudi vmesne prepustnosti, medtem ko s tekočimi kristali na opisan način lahko dobimo le zaprto in odprto stanje, vmesna stanja pa je zelo težko kontrolirati.

Pokažimo še, da polarizacija v sredstvu, ki je lokalno enoosno in se optična os suče v pravokotni smeri, v določenih pogojih res približno sledi optični osi. Poleg zasukane nematske celice je pomemben primer snovi s takimi lastnostmi holesteričen tekoči kristal, ki je zelo podoben nematskim, le da se $\vec{n}$ spontano počasi suče okoli smeri, pravokotne na $\vec{n}$.

Optična os sredstva naj leži v ravnini xy in naj se enakomerno suče, ko se premikamo vzdolž osi z. Kot med optično osjo in osjo x lahko zapišemo

$$\phi = qz \; . \tag{7.7.3}$$

Pri tem je $2\pi/q$ perioda sukanja optične osi. Zanimajmo se le za širjenje svetlobe v smeri z. Tedaj potrebujemo le del dielektričnega tenzorja v xy ravnini. Njegova oblika je

$$\boldsymbol{\epsilon}(z) = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon} + \frac{1}{2}\epsilon_a \cos 2\phi & \frac{1}{2}\epsilon_a \sin 2\phi \\ \frac{1}{2}\epsilon_a \sin 2\phi & \bar{\epsilon} + \frac{1}{2}\epsilon_a \cos 2\phi \end{bmatrix} , \tag{7.7.4}$$

kjer je

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_\parallel + \epsilon_\perp}{2} \tag{7.7.5}$$

Valovna enačba za valovanje s frekvenco ω je

$$\frac{d^2\vec{E}}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{\epsilon}(z)\vec{E} \tag{7.7.6}$$

ali v komponentah

$$\begin{aligned} -\frac{d^2E_x}{dz^2} &= (\beta^2 + \alpha^2 \cos 2qz)E_x + \alpha^2 E_y \sin 2qz \\ -\frac{d^2E_y}{dz^2} &= \alpha^2 E_x \sin 2qz + (\beta^2 + \alpha^2 \cos 2qz)E_y \; , \end{aligned} \tag{7.7.7}$$

kjer je $\alpha^2 = \epsilon_a\omega^2/(2c^2)$ in $\beta^2 = \bar{\epsilon}\omega^2/c^2$.

Ugodno je vpeljati krožni polarizaciji $E_+ = E_x + iE_y$ in $E_- = E_x - iE_y$. Enačbi **??** preieta v

$$\begin{aligned} -\frac{d^2E_+}{dz^2} &= \beta^2 E_+ + \alpha^2 E_- e^{2iqz} \\ -\frac{d^2E_-}{dz^2} &= \alpha^2 E_+ e^{-2iqz} + \beta^2 E_- \; . \end{aligned} \tag{7.7.8}$$

Iščemo lastne rešitve valovne enačbe v sredstvu s periodično modulacijo lomnega količnika. Matematično podoben problem je iskanje lastnih funkcij elektronov v kristalu. Za te vemo, da morajo imeti Blochovo obliko, to je, biti morajo produkt periodične funkcije s periodo kristalne mreže in faktorja $\exp(ikz)$. Matematiki pravijo tej trditvi Floquetov izrek. Veljati mora tudi v našem primeru. Lastne valove torej poiščimo v obliki

$$\begin{aligned} E_+ &= Ae^{i(k+q)z} \\ E_- &= Be^{i(k-q)z} \; . \end{aligned} \tag{7.7.9}$$

Nastavek reši sistem **??**, če A in B rešita sistem homogenih linearnih enačb

$$\begin{aligned} [(k+q)^2 - \beta^2]A - \alpha^2 B &= 0 \\ -\alpha^2 A + [(k-q)^2 - \beta^2]B &= 0 \; . \end{aligned} \tag{7.7.10}$$

Sistem je netrivialno rešljiv, če je determinanta kkoeficientov enaka nič:

$$(k^2+q^2-\beta^2)^2 - 4k^2q^2 - \alpha^4 = 0\ . \tag{7.7.11}$$

β in α sta sorazmerna z ω. Dobljena enačba tako predstavlja disperzijsko relacijo - zvezo med ω in k - za svetlobo v zavitem sredstvu. Prikazana je na sliki **??**. Vsaki vrednosti ω, razen v ozkem območju med ω_- in ω_+, recimo mu frekvenčna špranja, pripadajo 4 realne rešitve za k, po dve za valovanji v pozitivni in negativni smeri. V območju špranje je en par rešitev imaginaren. Vsaki vrednosti k pripada neko razmerje koeficientov A in B, ki ga izračunamo iz enčb **??** in ki določa polarizacijo lastnega vala. Polarizacije lastnih valov so v splošnem eliptične in med pri dani frekvenci med seboj niso pravokotne, kar je posledica tega, da sistem **??** ne predstavlja čisto navadnega problema lastnih vektorjev simetrične matrike. V območju frekvenčne špranje le en par rešitev predstavlja potujoč val, drug pa polje, ki eksponento pojema v sredstvo. Zato se svetloba s frekvenco v špranji in z ustrezno polarizacijo, ki vpada na holesteričen tekoči kristal, totalno odbije. Pojav je povsem analogen Braggovemu odboju na kristalih in daje holesterikom značilen obarvan videz. Več o zanimivih podrobnostih optike holesteričnih tekočih kristalov najde bralec v **??** in nalogah k temu poglavju.(naloga)

Za razlago delovanja zasukane nematske celice zadošča primer, ko je $q << \beta$ in α, ko je torej perioda sukanja optične osi velika v primeri z valovno dolžino svetlobe. Tedaj lahko q v disperzijski zvezi kar zanemarimo, prvi popravek je šele reda q^2, in dobimo

$$k^2 = \left\{ \beta^2 + \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{\|} \right. \tag{7.7.12}$$

Ti vrednosti, ki ustrezata velikosti valovnega vektorja za izredni in redni val v običajnem enoosnem kristalu, postavimo v eno od enačb **??** in dobimo še polarizaciji lastnih valov: $B = \pm A$.

Izračunajmo obe kartezični komponenti električnega polja za prvo rešitev:

$$\begin{array}{rclclcl} E_x &=& \frac{1}{2}(E_+ + E_-) &=& \frac{1}{2}Ae^{ikz}(e^{iqz}+e^{-iqz}) &=& Ae^{ikz}\cos qz \\ E_y &=& \frac{1}{2}(E_+ - E_-) &=& \frac{1}{2i}Ae^{ikz}(e^{iqz}-e^{-iqz}) &=& Ae^{ikz}\sin qz \end{array}\ . \tag{7.7.13}$$

Polarizacija torej res kar sledi optični osi. Druga rešitev da val, ki je polariziran pravokotno na lokalno optično os in se prav tako suče z njo. Prvi val se širi s fzano hitrostjo c/n_i, torej kot izredni val, drugi pa s c/n_r, to je kot redni val. Če na zasukano nematsko celico vpada svetloba, polarizirana ali paralelno ali pravokotno na optično os ob meji, dobimo na izhodni strani polarizacijo zasukano za pravi kot. V primeru, da vpadna polarizacija ne sovpada z eno od lastnih, jo moramo seveda razstaviti na obe lastni in po prehodu skozi tekoči kristal zopet sestaviti, s čemer seveda na splošno dobimo eliptično polarizacijo.

7.8 Dodatek

Energija nematskega tekočega kristala je najnižja, kadar ima $\vec{n}$ povsod isto smer. Povečanje energije zaradi krajevne odvisnosti $\vec{n}$ je v najnižjem redu sorazmerno s $(\nabla\vec{n}(\vec{r}))^2$. Najsplo"nejši izraz za it orientacijsko elastično energijo dobimo tako, da tvorimo vse neodvisne člene, v katerih nastopa $(\nabla\vec{n}(\vec{r}))^2$ in ki so invariantni na simetrijske operacije nematske faze. Dobimo[**?**]

$$F_e = \int \left\{K_1(\nabla\cdot\vec{n})^2 + K_2[\vec{n}\times(\nabla\times\vec{n})]^2 + K_3[\vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{n})]^2\right\} dV \tag{7.8.1}$$

K_1, K_2 in K_3 so tri Frankove orientacijske elastične konstante. Prvi člen predstavlja deformacijo v obliki pahljače, drugi upogib, tretji pa zasuk (slika **??**)

V zunanjem električnem polju se energija spremeni. Običajno je neodvisna električna količina električna poljska jakost, ker je polje posledica predpisanih napetosti na fiksnih elektrodah. Ustrezni člen v termodinamičnem potencialu je tedaj $-\vec{D}\cdot\vec{E}/2$. $\vec{E}$ razstavimo na komponento, paraleleno in pravokotno z $\vec{n}$. Dielektrični tenzor ima v smeri $\vec{n}$ vrednost $\epsilon_\parallel$, v pravokotni smeri pa $\epsilon_\perp$. Tako je

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0\underline{\epsilon}\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_\parallel(\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{n} + \epsilon_0\epsilon_\perp[\vec{E} - (\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{n}] \\ &= \epsilon_0\epsilon_a(\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{n} - \epsilon_0\epsilon_\perp\vec{E}\ ,\end{aligned} \tag{7.8.2}$$

kjer je $\epsilon_a = \epsilon_\parallel - \epsilon_\perp$. Drugi člen je neodvisen od $\vec{n}$, zato ga lahko izpustimo. Prosta energija nematičnega tekočega kristala v električnem polju je tako

$$F = F_0 + F_e - \frac{1}{2}(\vec{n}\cdot\vec{E})^2\ . \tag{7.8.3}$$

F_0 predstavlja del proste energije, ki je neodvisen od $\vec{n}$ in $\vec{E}$. V ravnovesju je prosta energija najmanjša. Kadar je $\epsilon_a > 0$, se zato skuša $\vec{n}$ postaviti vzporedno s poljem. Da lahko z minimizacijo F dobimo $\vec{n}(\vec{r})$, moramo poznati še robne pogoje.

Poglejmo primer. Naj bo nematski kristal med dvema paralelnima steklenima ploščama v razmiku h. Na obeh ploščah naj bo $\vec{n}$ vzporeden s površino v isti smeri. Brez zunanjega polja je $\vec{n}$ povsod enako usmerjen. V dovolj velike zunanjem polju, pravokotnem na plošči, naj bo to smer z, dobi $\vec{n}$ komponento v smeri z:

$$\vec{n}(z) = (n_1(z), 0, n_3(z))\ . \tag{7.8.4}$$

Deformacija n_3 naj bo majhna. Tedaj je $n_1 = 1n_3^2/2$. Robna pogoja sta $n_3(0) = n_3(h) = 0$. Približno rešitev, ki ustreza robnima pogojema, poiščemo z nastavkom

$$n_3(z) = a\sin qz\ , \qquad q = \frac{\pi}{h}\ . \tag{7.8.5}$$

Ta nastavek je prvi člen razvoja prave rešitve v Fourierovo vrsto. Velja

$$\nabla\times\vec{n} = (0, -\frac{dn_1}{dz}, 0) \tag{7.8.6}$$

in

$$\vec{n}\times(\nabla\times\vec{n}) = (n_3\frac{dn_1}{dz}, 0, n_1\frac{dn_3}{dz}) \simeq (0, 0, n_3\frac{dn_3}{dz}) \tag{7.8.7}$$

do drugega reda v n_3. Prosta energija je tako

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int\left[K_1\left(\frac{dn_3}{dz}\right)^2 + K_2 n_3^2\left(\frac{dn_3}{dz}\right)^2 - \epsilon_0\epsilon_a(n_3E)^2\right]dz = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^h [K_1q^2a^2\cos^2 qz + K_3q^2a^4\sin^2 qz\cos^2 qz - \epsilon_0\epsilon_a Ea^2\sin^2 qz]dz = \\ &= \frac{\pi}{4q}[K_1q^2a^2 + \frac{1}{4}K_3q^2a^4 - \epsilon_0\epsilon_a Ea^2] \; . \end{aligned} \tag{7.8.8}$$

Iščemo amplitudo deformacije a, pri kateri je prosta energija najmanjša. Tedaj mora biti a rešitev enačbe

$$(K_1q^2 - \epsilon_0\epsilon_a E)a + \frac{1}{2}K_3q^2a^3 = 0 \; . \tag{7.8.9}$$

Rešitvi sta

$$a = 0 \qquad \text{in} \qquad a^2 = 2\frac{\epsilon_0\epsilon_a E - K_1q^2}{K_3q^2} \; . \tag{7.8.10}$$

Pri majhnih poljih, ko je $\epsilon_0\epsilon_a E < K_1q^2$, je fizikalno smiselna le prva rešitev, ko defomacije ni. Pri večjih poljih pa je stabilna druga rešitev. Ko večamo polje, deformacija v sredini plasti hitro naraste, tako da se $\vec{n}$ postavi skoraj popolnoma v smer zunanjega polja. Tedaj naša rešitev seveda ni dobra, saj smo računali, kot da je $n_3 << 1$. Prehodu iz nedefromiranega stanja v deformirano stanje pravimo tudi Fredericksov prehod. Na njem je osnovano preklaplanje optičnih kazalnikov na nematske tekoče kristale.

V primeru zasukane nematske celice je prehod podoben, le račun je nekoliko bolj zapleten, ker ima deformacija vse tri komponente, tudi zasuk (Naloga).

8 Nelinearna optika

Pri obravnavi svetlobnega valovanja v snovi smo doslej predpostavljali, da je polarizacija snovi $\vec{P}$ linearna funkcija električne poljske jakosti svetlobe $\vec{E}$. To je seveda le približek. Pri dovolj veliki gostoti svetlobnega toka, kakršno je moč doseči v laserskem snopu, postanejo pomembni tudi členi višjega reda v razvoju polarizacije po $\vec{E}$:

$$P_i = P_i^L + P_i^{NL} = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j + d_{ijk} E_i E_j + f_{ijkl} E_i E_j E_k \; . \tag{8.0.1}$$

S $\vec{P}^L$ in $\vec{P}^{NL}$ smo označili linearni in nelinearni del polarizacije. Nelinearni susceptibilnosti d_{ijk} in f_{ijkl} sta tenzorja tretjega in četrtega ranga. Pogosto ju pišejo tudi v obliki $d_{ijk} = \epsilon_0 \chi^{(2)}_{ijk}$ in $f_{ijkl} = \epsilon_0 \chi^{(3)}_{ijkl}$.

Poseben primer nelinearne susceptibilnosti d_{ijk} smo pravzaprav že srečali pri elektrooptičnem pojavu: elektrooptični tenzor r_{ijk} opisuje isto lastnost snovi, le da smo tam zahtevali, da je eno polje skoraj statično. Za d_{ijk} velja, kot za vsak tenzor tretjega ranga, da je lahko od nič različen le v snoveh brez centra inverzije. V centrosimetričnih snoveh je prvi od nič različni nelinearni člen tretjega reda.

Velikosti koeficientov d_{ijk} so od 0,1 do $100 \cdot 10^{-23}$ As/V^2. Poglejmo, pri kakšnem polju je nelinearni del polarizacije primerljiv z linearnim:

$$\frac{P^{NL}}{P^L} = \frac{d_{ijk} E}{\epsilon_0 \chi_{ij}} \simeq 10^{-11} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}} \, E \; . \tag{8.0.2}$$

Da bo razmerje P^{NL}/P^L=10^{-3}, je potrebna gostota svetlobnega toka okoli 1 GW/cm^2. To za laser ni nič posebnega, z nekoherentnim svetilom pa mnogo redov velikosti preveč. Zato je bilo mogoče nelinearne optične pojave opazovati šele po iznajdbi laserjev. Potrebno polje je tudi primerljivo polju v atomu, kar nas seveda ne preseneča.

Nelinearni del polarizacije povzroči vrsto pojavov. Dve valovanji pri frekvencah ω_1 in ω_2 povzročita zaradi produkta $E_1 E_2$ v izrazu 8.0.1 novi valovanji pri frekvencah $\omega_1 + \omega_2$ in $\omega_1 - \omega_2$. V posebnem primeru, ko je $\omega_1 = \omega_2$, dobimo podvajanje frekvence in polje pri $\omega = 0$ - it optično usmerjanje. Člen tretjega reda da vse možne kombinacije treh frekvenc, odvisnost lomnega količnika od gostote svetlobnega polja in s tem povezano samofokusiranje svetlobnega snopa ter fazno konjugacijo.

8.1 Podvajanje frekvence

Začnimo najprej z nelinearnostjo drugega reda, ki jo opisuje d_{ijk}. Ta je, kot smo že ugotovili, dovoljena le v kristalih, ki nimajo centra inverzije. Naj na tak kristal pravokotno vpadata dve valovanji s frekvencama ω_1 in ω_2. V snovi nastajata valovanji z vsoto in razliko frekvenc. Za opis pojava moramo rešiti valovno enačbo

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \vec{P}^{NL}}{\partial t} \ . \tag{8.1.1}$$

Pri tem je $\vec{P}^{NL} = \underline{\underline{d}}\vec{E}\vec{E}$. Te enačbe na splošno ne znamo rešiti in se moramo zateči k približkom. Uporabili bomo perturbacijski pristop sklaplanja valovanj, ki je podoben računu uklona na zvočnih valovih iz prejšnjega poglavja.

Zanimajmo se le za nastajanje valovanja pri vsoti frekvenc $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Ta omejitev ni huda. Dokler sta amplitudi valov pri vsoti in razliki frekvenc majhni, ju lahko obravnavamo vsako posebej. Ni sicer nujno, da sta obe nastali amplitudi vedno majhni, vendar lahko toliko naraste, da postane primerljiv z vpadnim, le en val naenkrat, kot bomo videli kasneje. Celotno polje v snovi je tako vsota treh polj

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1 &= \frac{\vec{a}_1}{2}\left[E_1(z)\, e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + E_1^*(z)\, e^{-i(k_1 z - \omega_1 t)}\right] \\
\vec{E}_2 &= \frac{\vec{a}_2}{2}\left[E_2(z)\, e^{i(k_2 z - \omega_2 t)} + E_2^*(z)\, e^{-i(k_2 z - \omega_2 t)}\right] \\
\vec{E}_3 &= \frac{\vec{a}_3}{2}\left[E_3(z)\, e^{i(k_3 z - \omega_3 t)} + E_3^*(z)\, e^{-i(k_3 z - \omega_3 t)}\right] \ .
\end{aligned} \tag{8.1.2}$$

Polja smo zapisali v realni obliki, to je s konjugirano-kompleksnimi deli, ker valovna enačba 8.1.1 ni linearna. Upoštevali smo tudi, da so zaradi nelinearne polarizacije amplitude funkcije kraja, za katere pa lahko privzamemo, da se le počasi spreminjajo. Za valovna števila naj seveda velja $k_i^2 = \epsilon_i \omega^2/c^2$, pri čemer je ϵ_i dielektrična konstanta pri frekvenci ω_i in polarizaciji $\vec{a}_i$. S tem vsak od treh valov pri konstantni amplitudi reši linearni del valovne enačbe. Naša naloga je ugotoviti, kako se zaradi nelinearnosti spreminjajo amplitude. Dogovorimo se še, da bomo v tem poglavju z indeksi 1,2,... ločevali valove z različnimi rekvencami in polarizacijami, kartezične komponente vektorjev in tenzorjev pa bomo označevali z x, y in z.

Izračunajmo najprej

$$\nabla^2 \vec{E}_1 = -\frac{\vec{a}_1}{2}\left[k_1^2 E_1(z) - 2ik_1 \frac{dE_1(z)}{dz}\right] e^{i(k_1 z - \omega_1 T)} + \text{ k. k. } . \tag{8.1.3}$$

S k. k. smo označili konjugirano kompleksni del. Upoštevali smo, da je $E_1(z)$ počasna funkcija kraja in smo zato zanemarili njen drugi odvod. Podobne izraze dobimo za E_2 in E_3.

Nelinearna polarizacija vsebuje produkte polj, ki nihajo z vsemi možnimi vsotami in razlikami parov frekvenc ω_1, ω_2 in ω_3. Od njih k spremembi amplitude vala s frekvenco ω_1 na levi strani valovne enačbe prispeva le del z enako frekvenco:

$$\vec{P}_1^{NL} = \frac{1}{4}\underline{\underline{d}}\vec{a}_2\vec{a}_3 E_2^* E_3 e^{i[(k_3-k_2)-\omega_1 t]} \tag{8.1.4}$$

Izenačimo člene s frekvenco ω_1 na levi in desni strani valovne enačbe, upoštevamo zvezo med k_1 in ω_1 in dobimo

$$ik_1\vec{a}_1\frac{dE_1}{dz}e^{ik_1 z} = -\frac{\mu_0\omega_1^2}{4}\underline{\underline{d}}\vec{a}_2\vec{a}_3 E_2^* E_3 e^{i(k_3-k_2)z} \ . \tag{8.1.5}$$

Množimo še obe strani skalarno z $\vec{a}_1$ in ravnajmo podobno še z ostalima dvema valovoma. Tako dobimo končno sistem sklopljeni enačb za amplitude

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dz} &= \frac{i\omega_1}{4}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_1}}d_{123}E_2^*E_3e^{i\Delta kz}\\ \frac{dE_2}{dz} &= \frac{i\omega_2}{4}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_2}}d_{231}E_3E_1^*e^{i\Delta kz}\\ \frac{dE_1}{dz} &= \frac{i\omega_3}{4}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_3}}d_{312}E_1E_2e^{-i\Delta kz}\end{aligned} \tag{8.1.6}$$

in še tri konjugirano kompleksne enačbe. Pri tem je $d_{123} = \vec{a}_1 \cdot \underline{d}\vec{a}_2\vec{a}_3$. Ker ni nujno, da so polarizacijski vektorji vzporedni s koordinatnimi osmi, tudi d_{123} niso čiste kartezične komponente tenzorja nelinearne susceptibilnosti. Z Δk smo označili razliko valovnih vektorjev $k_3 - k_1 - k_2$. Čeprav je $\omega_3 - \omega_2 - \omega_1 = 0$, je Δk navadno različen od nič zaradi frekvenčne disperzije lomnega količnika, to je, ker so dielektrične konstante ϵ_i različne. Videli bomo, da je to za vrsto nelinearnih optičnih pojavov bistveno.

Dobljeni sistem enačb opisuje več pojavov, odvisno od začetnih pogojev in relativnih intenzitet valovanj. Pogejmo si najprej najpreprostejši in tudi najpomembnejši primer podvajanja frekvence, ko je $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ in $\omega_3 = 2\omega$. Zaradi možnosti dveh različnih vpadnih polarizacij še vedno razlikujmo E_1 in E_2.

Zanima nas, kako narašča $E_3(z)$ pri začetnem pogoju $E_3(0) = 0$. Vzemimo še, da se pretvori le manjši del vpadnega energijskega toka, tako da sta E_1 in E_2 približno konstantni. Tedaj lahko enačbo za $E_3(z)$ brez težav integriramo do dolžine kristala L:

$$E_3(L) = -\frac{i\omega}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_3}}d_{312}E_1E_2\,\frac{e^{-i\Delta kL}-1}{i\Delta k} \tag{8.1.7}$$

Iz tega izraza dobimo izhodno gostoto svetlobnega toka pri dvojni frekvenci

$$j_{2\omega}(L) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon_3}{\mu_0}}|E_3|^2 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_3}}\omega^2d_{312}^2|E_1|^2|E_2|^2L^2\frac{\sin^2\Delta kL/2}{(\Delta kL/2)^2}\ . \tag{8.1.8}$$

Razmerje med energijskim tokom pri podovojeni in osnovni frekvenci, to je, izkoristek pretvorbe, je

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{3/2}\frac{\omega^2d_{312}^2}{n_{2\omega}^3}\,\frac{P_\omega}{S}\,\frac{\sin^2\Delta kL/2}{(\Delta kL/2)^2}\,L^2\ , \tag{8.1.9}$$

kjer je $n_{2\omega}$ lomni količnik pri dvojni frekvenci, S pa presek snopa.

V izrazih 8.1.8 in 8.1.9 nastopa faktor $\sin^2(\Delta kL/2)/(\Delta kL/2)^2$, zaradi katerega na poti, daljši od $1/\Delta k$ moč podvojenega snopa ne narašča več sorazmerno z L^2, temveč le niha med nič in končno vrednostjo. Δk je razli"en od nič zaradi odvisnosti lomnih količnikov od frekvence. V KH_2PO_4 je na primer redni lomni količnik pri 1000 nm 1,496, pri 500 nm pa 1,514, tako da je $L_c = 1/\Delta k$ le okoli 10 valovnih dolžin. Na tako majhni razdalji je stopnja pretvorbe zelo majhna.

Odvisnosti stopnje pretvorbe od razlike valovnih vektorjev pri osnovni in podvojeni frekvenci je lahko razumeti s pomočjo slike 1. Opazujmo prispeveka k podvojenemu valu, ki nastaneta eden na začetku kristala in drugi na koncu. Prispevek z začetka zradi disperzije na izhodni strani ni v fazi s prispevkom s konca. Pri dovolj veliki fazni razliki pride do destruktivne interference, ki zmanjšuje moč podvojene svetlobe. Razmere so podobne kot pri uklonu na široki reži, kjer prav tako seštevamo delna valovanja, ki se jim faza po reši linearno spreminja.

Za uporabno konverzijo je torej treba doseči čim manjšo razliko valovnih vektorjev pri osnovni in podvojeni frekvenci. Pomagamo si z dvojnim lomom v anizotropnih kristalih. V primerno izbrani smeri v kristalu je razlika med lomnima količnikoma za lastni polarizaciji, v enoosnem primeru med rednim in izrednim količnikom, lahko nasprotno enaka razliki zaradi disperzije pri enojni in dvojni frekvenci. Takšne ugodne razmere, ki veljajo na primer v KH_2PO_4, kaže slika 2, na kateri so velikosti lomnih količnikov za enoosni kristal pri enojni in dvojni frekvenci v odvisnosti od kota glede na optično os. V prozornih kristalih, kjer ni absorpcije, je disperzija normalna in oba lomna količnika naraščata s frekvenco. Ekscentričnost elipse za izredni lomni količnik in frekvenčna disperzija sta seveda močno pretirani. Pri nekem kotu θ_m med smerjo širjenja svetlobe in optično osjo je izredni lomni količnik pri dvojni frekvenci enak rednemu količniku pri osnovni frekvenci. Če torej izberemo polarizacijo vpadnega vala tako, da je pravokotna na optično os, torej redna, bo za podvojeni val z izredno polarizacijo, to je v ravnini optične osi in smeri širjenja, pri kotu θ_m izpolnjen pogoj *ujemanja faz*, $\Delta k = 0$.

Lomni količnik za izredni val je kot funkcija θ podan z izrazom

$$\frac{1}{n_i^2(\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{n_r^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_{i0}^2} \tag{8.1.10}$$

Z n_{i0} smo označili glavno vrednost izrednega lomnega količnika. Pogoj za kot ujemanja faz dobimo, če izenačimo redni lomni količnik pri osnovni frekvenci z izrednim količnikom, izračunanim iz gornjega izraza pri dvojni frekvenci. Tako dobimo

$$\cos^2\theta_m = \frac{(n_r^{\omega})^{-2} - (n_{i0}^{2\omega})^{-2}}{(n_r^{2\omega})^{-2} - (n_{i0}^{2\omega})^{-2}} \tag{8.1.11}$$

Možna je tudi nekoliko bolj zapletena izbira, pri kateri sta v vpadnem valu prisotni obe polarizaciji, redna in izredna, podvojeni val pa je spet izredni. Tedaj mora biti za ujemanje faz izredni lomni količnik pri dvojni frekvenci enak povprečju rednega in izrednega lomnega količnika pri osnovni frekvenci. Za praktično uporabo je ta izbira, kadar obstoja, celo ugodnejša, ker je pri njej kot ujemanja faz bliže $\pi/2$. Zato je ujemanje faz manj občutljivo na majhne napake v kotu ali temperaturne spremembe lomnih količnikov. Račun kota θ za ta primer je siten, saj je treba rešiti je treba enačbo četrte stopnje.

Na moč podvojenega snopa vpliva seveda tudi velikost koeficientov tenzorja nelinearne susceptibilnosti. V optično enoosnem kristalu je kot ujemanja faz določen na stožcu okoli optične osi, kot smeri širjenja v ravnini, pravokotni na optično os, pa lahko izberemo tako, da izkorisitmo največje komponente nelinearne susceptibilnosti.

Oglejmo si kot primer spet KH_2PO_4. Valovna dolžina osnovnega snopa naj bo 1000 nm. Po podatkih, navedenih zgoraj, dobimo po (8.1.11) za kot ujemanja faz 40^o. Nelinearna susceptibilnost ima v tetragonalni simetriji $\bar{4}2m$ od nič različne komponente $d_{XYZ} = d_{ZXY} = d_{YZX}$, kjer se oznake X, Y in Z nanašajo na kristalne osi. Smer širjenja osnovnega in podvojenega vala naj bo (slika **??**)

$$\vec{s} = (\sin\phi \sin\theta, \cos\phi \sin\theta, cos\theta) \tag{8.1.12}$$

kjerje ϕ kot med osjo y in projekcijo $\vec{s}$ na ravnino XY še treba dolo"iti tako, da bo podvojena moč največja. Vpadna polarizacija mora biti redna, torej pravokotna na os Z (optično os) in $\vec{s}$:

$$\vec{E}^{\omega} = E_0(\cos\phi, -\sin\phi, 0) \tag{8.1.13}$$

Zaradi oblike tenzorja nelinearne susceptibilnosti je od nič različna le Z komponenta nelinearne polarizacije:

$$P_Z^{2\omega} = d_{ZXY} E_0 \cos\phi \sin\phi \tag{8.1.14}$$

Nelinearna polarizacija je očitno največja, kadar je $\phi = \pi/4$. Polarizacija podvojenega vala $\vec{E}^{2\omega}$ je izredna, to je v ravnini osi z in $\vec{s}$. K njej bo prispeval le tisti del nelinearne polarizacije, ki je pravokoten na $\vec{s}$, to je $P_Z^{2\omega}\sin\theta$.Po vsem tem maksimalni je efektivni koeficient d_{312}, ki nastopa v izrazih za amplitudo in moč podvojene svetlobe, enačbe 8.1.8 in 8.1.9, v izbranem primeru

$$d_{312} = \frac{\sin\theta}{2} d_{ZXY} \ . \tag{8.1.15}$$

8.2 Podvojevanje Gaussovih snopov

Doslej smo osnovni in podvojeni snop obravnavali kot ravno valovanje, ki mora biti razsežno v prečni smeri. V primeru, ko je $\Delta k = 0$, narašča moč podvojene svetlobe s kvadratom dolžine poti po nelinearnem sredstvu. Pretvorba v podvojeno svetlobo je po en. 8.1.9 tem učinkovitejša, čim večja je gostota svetlobnega toka pri osnovni frekvenci. Zato v praksi osnovni snop vselej fokusiramo. Predpostavimo, da ima obliko osnovnega Gaussovega snopa. Približno lahko vzamemo, da je efektivna dolžina za konverzijo L kar dolžina grla; za njim se gostota toka zmanjšuje, s tem pa tudi konverzija v podvojeni snop. Tako je presek vpadnega snopa $S = \pi w_0^2$ in $L = 2z_0 = n\omega w_0^2/2c$. Podvojeni snop je sorazmeren s kvadratom osnovnega; polmer snopa nastopa v eksponentu, zato je presek podvojenega snopa $\pi w_0^2/2$, s tem pa iz en. 8.1.8 za izkoristek konverzije dobimo

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{1}{4\pi c}\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{3/2} \frac{\omega^3 d^2}{n^2} P_\omega \frac{\sin^2 \Delta k L/2}{(\Delta k L/2)^2} L \ , \tag{8.2.1}$$

Vidimo, da je za uspešno konverzijo najbolje, da ja dolžina grla enaka dolžini nelinearnega kristala. To seveda dosežemo z ustreznim fokusiranjem snopa. V tem primeru je izkoristek sorazmeren z dolžino, ne z njenim kvadratom.

Primer: Imejmo 1 cm dolg kristal KH_2PO_4, osnovna valovna dolžina naj bo 1,06 μm, efektivna nelinearna susceptibilnost je po 8.1.15 $d = 1/2 \sin^2\theta_m d_{xyz} = 3,6 \cdot 10^{-24}$ As/V, $\Delta k = 0$ in $n = 1,5$. Tedaj je po 8.2.1 $P_{2\omega}/P_\omega = 4,3 \cdot 10^{-5} P_\omega/W$, kar da pri zmerni moči, navadno v fazno uklenjenih sunkih, 10 kW skoraj 50 konverzijo. Da bo dolzina grla $2z_0 = 1$ cm, mora biti polmer grla okoli 40 μm. Gostota svetlobnega toka v kristalu je pri tem $2 \cdot 10^8$ W/cm^2, kar je že blizu praga za poškodbe, predvsem na vstopni ali izstopni površini.

Gornji primer kaže, da je odpornost nelinearnega kristala proti poškodbam zaradi velike gostote svetlobnega toka zelo pomembna za uporabo pri podvajanju frekvence svetlobe. To in možnost ujemanja faz je pogosto odločilno, koliko je dani material zares uporaben.

8.3 *Račun podvajnja Gaussovih snopov

Za podrobnejši izračun podvojevanja Gaussovih snopov se vrnimo k valovni enačbi 8.1.1. Spet privzemimo, da imamo vpadna snopa pri frekvencah ω_1 in ω_2 in nastajajoč snop pri frekvenci $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Vsako od polj naj ima obliko

$$E_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_i}{n_i}}\psi_i(r,z)e^{i(k_i z - \omega_i t)} + \text{ k. k.} \tag{8.3.1}$$

kjer se amplituda ψ_i spreminja počasi v smeri osi z, odvisna pa je tudi od prečne koordinate r. Dodatni faktor $\sqrt{\omega_i/n_i}$ smo uvedli zaradi lepšega zapisa enačb. Postavimo 8.3.1 v valovno enačbo 8.1.1 in zopet ločimo na levi in desni člene z enako frekvenco. Zanemarimo tudi druge odvode ψ po z. Tako namesto sistema **??** dobimo sklopljen sistem obosnih enačb

$$\begin{aligned}
\nabla_\perp^2\psi_1 + 2ik_1\psi_1' &= \frac{k_1}{2}\kappa\psi_2^*\psi_3 e^{-i\Delta k z} \\
\nabla_\perp^2\psi_2 + 2ik_2\psi_2' &= \frac{k_2}{2}\kappa\psi_1^*\psi_3 e^{-i\Delta k z} \\
\nabla_\perp^2\psi_3 + 2ik_3\psi_3' &= \frac{k_3}{2}\kappa\psi_1\psi_2 e^{i\Delta k z}
\end{aligned} \tag{8.3.2}$$

s pripadajočim sistemom konjugiranih enačb. Tu je

$$\kappa = d\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\frac{\omega_1\omega_2\omega_3}{n_1 n_2 n_3}}\ . \tag{8.3.3}$$

S črtico smo označili odvajanje po z. Gornji sistem enačb je očitno posplošitev sistema **??** za primer, ko je valovanje odvisno tudi od prečne koordinate. Reševanje tega nelinearnega sistema parcialnih diferencialnih enačb je seveda v splošnem še precej bolj zabeljeno.

Poglejmo le najenostavnejši primer podvojevanja, $\omega_3 = 2\omega_1 = 2\omega$. Privzemimo, da sta oba vpadna snopa enaka in osnovne Gaussove oblike, $\psi_1 = \psi_2$, da imamo poplno ujemanje faz, $\Delta k = 0$, in da je ψ_3 dovolj majhen, da nam zmanjševanja ψ_1 ni treba upoštevati. Vpadni snop lahko tako zapišemo

$$\psi_1 = A_1\frac{1}{1+iz/z_1}\exp[-\frac{r^2}{w_1^2(z)} - \frac{ik_1r^2}{2R_1(z)}] \tag{8.3.4}$$

kjer za polmer snopa in krivinski radij veljajo zveze iz drugega poglavja: $w_1^2 = w_{10}^2(1 + z^2/z_1^2)$ in $R_1 = z(1 + z_1^2/z^2)$. Upoštevali smo tudi, da je spreminjanje amplitude in dodatno fazo po en. 2.23 zapisati v kompleksni obliki $1/(1+iz/z_1)$. Spomnimo se še, da velja $z_1 = \pi w_{10}^2/\lambda = k_1 w_{10}^2/2$. Za podvojeni snop tudi privzemimo Gaussovo obliko s počasi naraščajočo amplitudo:

$$\psi_3 = A_3(z)\psi_{3H}(z,r) = A_3(z)\frac{1}{1+iz/z_3}\exp[-\frac{r^2}{w_3^2(z)} - \frac{ik_3r^2}{2R_1(z)}] \tag{8.3.5}$$

ψ_{3H} reši homogeno obosno valovno enačbo. Ko izraza za ψ_1 in ψ_3 postavimo v tretjo enačbo sistema **??**, zato na levi ostane le $2ik_3A_3'(z)\psi_{3H}$. Tako dobimo

$$A_3'(z)\frac{1}{1+iz/z3}\exp[-\frac{r^2}{w_3^2(z)} - \frac{ik_3r^2}{2R_3(z)}] = -\frac{i\kappa}{4}A_1^2\frac{1}{(1+iz/z_1)^2}\exp[-\frac{2r^2}{w_1^2(z)} - \frac{ik_1r^2}{R_1(z)}]\ . \tag{8.3.6}$$

Vzemimo, da je $w_{30}^2 = w_{10}^2/2$. Tedaj je $z_3 = k_3w_{30}^2/2 = (2k_1)(w_{10}^2/2)/2 = z_1$ in je tudi $w_3^2(z) = w_1^2(z)/2$. Poleg tega je $R_3(z) = R_1(z)$ in lahko ne obeh straneh pokrajšamo eksponentna faktorja. Ostane

$$A_3'(z) = -\frac{i\kappa}{4}A_1^2\frac{1}{1+iz/z1}\ . \tag{8.3.7}$$

Gornjo enčbo seveda brez težav integriramo. Naj bo grlo vpadnega snopa ravno na sredini nelinearnega sredstva, tako da teče integracija od $-L/2$ do $L/2$:

$$\begin{aligned} A_3(L) &= -\frac{i\kappa}{4}A_1^2\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz}{1+iz/z1} \\ &= -\frac{i\kappa}{4}A_1^2 z_1 \ln\frac{1+i\frac{L}{z_1}}{1-i\frac{L}{2z_1}} \\ &= \frac{\kappa}{2}A_1^2 z_1 \arctan\frac{L}{2z_1}\ . \end{aligned} \tag{8.3.8}$$

Moč Gaussovega snopa je

$$P_i = \frac{\pi}{2}w_{i0}^2 c\epsilon_0 E_{i0}^2/ = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\frac{\omega_i}{n}A_i^2 w_{i0}^2 \tag{8.3.9}$$

tako da je izkoristek pri podvojevanju Gaussovega snopa

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{1}{4\pi c}\left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{3/2}\frac{\omega^3}{n^2}d^2P_\omega\left(\frac{2z_1}{L}\arctan^2\frac{L}{2z_1}\right)L\ . \tag{8.3.10}$$

Funkcija $(\arctan^2 x)/x$ ima maksimalno vrednost 0.64 pri $x = 1.39$. Pri dani dložini nelinearnega sredstva L dobimo torej največji izkoristek, kadar je $z_1 = 0.35L$, kar je malo manj kot smo dobili s preprosto oceno $2z_1 = L$. Tedaj je

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{1.28}{4\pi c}\left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{3/2}\frac{\omega^3}{n^2}d^2P_\omega L\ , \tag{8.3.11}$$

torej približno 30 % več, kot smo dobili s preprosto oceno 8.2.1.

8.4 Parametrično ojačevanje

Nelinearno meanje treh valov, ki ga opisujejo enačbe ??, lahko izkoristimo tudi za ojačevanje optičnih signalov. Imejmo vhodni signal pri frekvenci ω_1 skupaj z močnim črpalnim valom pri frekvenci $\omega_3 > \omega_1$. Zaradi nelinearnosti se ojačuje val pri ω_1, obenem pa nastaja dodaten val pri razliki frekvenc $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$. Temu procesu pravimo parametrično ojačevanje. Podoben princip se uporablja tudi v mikrovalvni tehniki, od koder je tudi ime.

Prepišimo najprej enčbe ?? v nekoliko prikladnejšo obliko, kot smo napravili že pri vpeljavi sistema 8.2.1. Naj bo

$$A_i(z) = \sqrt{\frac{n_i}{\omega_i}} E_i(z) \quad \text{in} \quad \kappa = d\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \,. \tag{8.4.1}$$

S tem dobijo enačbe ?? obliko

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= \frac{i\kappa}{2} A_2^* A_3 e^{i\Delta kz} \\ \frac{dA_2^*}{dz} &= \frac{-i\kappa}{2} A_3^* A_1 e^{-i\Delta kz} \\ \frac{dA_3}{dz} &= \frac{i\kappa}{2} A_1 A_2 e^{-i\Delta kz} \end{aligned} \tag{8.4.2}$$

Privzemimo, da je črpalni val vselej dosti močnejši od ostalih dveh, $A_3 >> A_1$, A_2 in da smo poskrbeli za ujemanje faz, $\Delta k = 0$. A_3 je tako približno konstanta. Označimo še $g = \kappa/2A_3$, pa imamo

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= igA_2^* \\ \frac{dA_2^*}{dz} &= igA_1 \end{aligned} \tag{8.4.3}$$

Z začetnima pogojema $A_1(0) = A_{10}$ in $A_2(0) = 0$ dobimo iz ?? rešitev

$$\begin{aligned} A_1(z) &= A_{10} chgz \\ A_2(z) &= iA_{10} shgz \end{aligned} \tag{8.4.4}$$

Pri $z > 1/g$ oba vala rasteta približno eksponentno na račun črpalnega vala. Proces parametričnega ojačevanja si lahko predstavljamo kot pretvorbo enega fotona pri frekvenci ω_3 v fotona pri ω_1 in ω_2.

Privzeli smo, da je $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 = 0$. Ta pogoj lahko izpolnimo na enak način kot pri podvajanju frekvence, to je tako, da v dvolomnem kristalu izberemo ustrezno smer glede na optično os in ustrezne polarizacije, tako da velja $\omega_3 n_3 = \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2$, kjer so n_i lomni količniki za odgovarjajoče valove pri izbranih polarizacijah. Lahko na primer vzamemo izredno polarizacijo za črpalni val in redni polarizaciji za oba ojačevana valova, podobno kot pri podvajanju frekvence. Tedaj mora veljati

$$n_i^{\omega_3} = \left[\left(\frac{cos\theta_m}{n_r^{\omega_3}} \right)^2 + \left(\frac{sin\theta_m}{n_{i0}^{\omega_3}} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{\omega_1}{\omega_3} n_r^{\omega_1} + \frac{\omega_2}{\omega_3} n_r^{\omega_2} \,. \tag{8.4.5}$$

Možne so seveda tudi drugačne izbire polarizacij (Naloga). (Naloga: Obravnavaj parametrično ojačevanja, kadar je$\Delta k \neq 0$.)

Primer: Naj bo nelinearno sredstvo $LiNbO_3$, v katerem je $d = 5 \cdot 10^{-23}$ As/V in $n = 2,2$. Vzemimo $\nu_1 \simeq \nu_2 = 3 \cdot 10^{14}$ Hz ($\lambda_1 = 1\,\mu$m) in gostoto moči črpalnega vala 5 MW/cm^2. Tedaj dobimo $g = 0,67$ cm^{-1}.

Gornji primer kaže, da ojačenje ni prav veliko, kljub dokaj močnemu črpalnemu valu. Zato je parametrično ojačevanje zanimivo predvsem znotraj optičnih resonatorjev, s čemer dobimo neke vrste laser - *parametrični oscilator*.

8.5 Nelinearni pojavi 3. reda

Doslej smo obravnavali najnižji red nelinearnosti, katerega glavni učinek je mešanje treh frekvenc, na primer podvajanje frekvence ali parametrično ojačevanje. Ti pojavi so možni le v kristalih brez centra inverzije. Naslednji člen razvoja nelinearne polarizacije po električnem polju obstaja v vsaki snovi. V njem nastopa polje v tretji potenci. Če vsebuje vpadno polje le eno frekvenco, zaradi nelinearnosti tretjega reda dobimo polarizacijo pri 3ω in ω. Pri dveh vpadnih frekvencah ω_1 in ω_2 so možne kombinacije $2\omega_1 \pm \omega_2$ in $\omega_1 \pm 2\omega_2$, pri treh vpadnih frekvencah pa vse možne vsote in razlike frekvenc. Možnosti je torej precej več kot pri nelinearnosti drugega reda. Obravnava nastajanja valovanja pri kombinaciji frekvenc je povsem analogna podvajanju frekvence in parametričnemu ojačevanju. V enačbah za nastajanje novega valovanja ali ojačevanje katerega od vpadnih snopov spet nastopi fazni faktor, ki vsebuje razliko vseh valovnih vektorjev $\mathbf{\Delta k}$. Da bo nastajanje novega valovanja znatno, mora biti $\Delta k L \simeq 0$, spet mora biti torej izpolnjen pogoj ujemanja faz. Ker sedaj nastopajo v splošnem štirje valovni vektorji, je seveda tudi pri izbiri geometrije in polarizacij za ujemanje faz precej več možnosti.

Če vsebuje vapdno valovanje le eno frekvenco, je v nelinearni polarizaciji tudi komponenta pri tej frekvenci, kar je ena od bistvenih razlik med nelinearnostjo drugega in tretjega reda. Nelinearne pojave pri eni sami frekvenci v"asih imenujejo tudi degenerirano mešanje štirih valov. Najpreprostejši tak učinek je odvisnost lomnega količnika od intenzitete vpadne svetlobe.

Vzemimo v smeri osi x polarizirano valovanje, ki vpada na nelinearno, zaradi enostavnosti izotropno snov. Nelinearna polarizacija ima tudi le komponento

$$P_1^{NL} = \epsilon_0 \chi_{1111}^{(3)} E^3 \tag{8.5.1}$$

Polje spet zapišimo kot vsoto dveh konjugirano-kompleksnih členov:

$$E = \frac{1}{2}(E_1 e^{i(kz-\omega t)} + E_1^* e^{-i(kz-\omega t)}) \tag{8.5.2}$$

Del polarizacije pri ω dobimo tako, da v izrazu za E^3 vzamemo dvakrat nekonjugirani del, enkrat pa konjugiranega. Taki členi so trije. Tako imamo

$$P_1^{\omega} = \frac{3}{8} \epsilon_0 \chi_{1111}^{(3)} |E_1|^2 E_1 \tag{8.5.3}$$

Ta del polarizacije lahko prištejemo k linearnemu delu in s tem dobimo lomni količnik, ki je odvisen od intenzitete:

$$\epsilon_0(\epsilon - 1)E_1 + \frac{3}{8}\epsilon_0\chi^{(3)}_{1111}|E_1|^2 = \epsilon_0[n(I)^2 - 1]E_1 \tag{8.5.4}$$

Lomni količnik zapišimo v obliki

$$n(I) = n_0 + n_2|E_1|^2, \tag{8.5.5}$$
$$n_2 = \frac{3}{8}\chi^{(3)}_{1111} . \tag{8.5.6}$$

Pojavu, pri katerem je sprememba lomnega količnika sorazmerna s kvadratom električnega polja, smo imenovali Kerrov pojav. Ker je sedaj spremembo povzroča kar optično polje samo, govorimo tudi o optičnem Kerrovem pojavu. Zanimivi posledici sta samozbiranje svetlobnega snopa in širjenje solitonov po optičnih vlaknih, kar si bomo pogledali v naslednjih razdelkih.

Tudi splošni primer degeneriranega štirivalovnega mešanja je pomemben, kjer se valovanja razlikujejo po smereh valovnih vektorjev. Vodi do pojava *fazne konjugacije.* Pri njem dobimo valovanje z enako valovno fronto kot eno od vpadnih valovanj, ki pa se širi v nasprotni smeri od prvotnega valovanja. Fazna konjugacija ima nekaj zanimivih uporab in jo bomo obravnavali v zadnjem razdelku poglavja.

8.6 Samozbiranje

Poglejmo si najprej pojav *samozbiranja* ali samofokusacije (anlgeško self focusing). Osnovni Gaussov snop naj vpada na sredstvo, v katerem je lomni količnik odvisen od intenzitete po enačbi 8.5.6. Optična Kerrova konstanta n_2 je običajno pozitivna. Tedaj je lomni količnik v sredini snopa večji od nemotenega količnika na robu. V osi snopa se optična pod podaljša in valovna fronta začne v osi zaostajati glede na rob snopa. Če je zaostajanje dovolj veliko, lahko krivinski radij valovne fronte postane negativen in snop se ne širi, temveč oži (Slika**??**). Samozbiranje je pri dovolj veliki moči snopa tolikšno, da pride do katastrofične zožitve snopa in s tem do tolikšnega povečanja gostote svetlobnega toka, da nastanejo poškodbe v snovi.

Zaradi običajnega uklona se snop širi, pojav samozbiranja pa ima nasprotni učinek. Zato je pri primerni moči snopa možno, da se oba pojava po velikosti izenačita in snop ima v snovi konstanten polmer, valovne fronte pa so ravne. Snop samemu sebi ustvarja valovni vodnik, kjer je v sredi lomni količnik večji kot na robu. Ocenimo, kolišna mora biti moč v stacionarnem stanju.

Vzemimo, da je na izbranem mestu valovna fronta ravna. Lahko si mislimo, da je tam grlo Gaussovega snopa. Brez samozbiranja bi bil na razdalji dolžine grla z_0 po izrazih iz drugega poglavja krivinski radij valovne fronte

$$R(z_0) = z_0[1 + \left(\frac{z_0}{z_0}\right)^2] = 2z_0 \tag{8.6.1}$$

V bližini osi lahko Gaussovo funkcijo, ki opisuje prečno odvisnost amplitude poja v snopu, razvijemo po prečni koordinati r do drugega reda; po enačbi 8.5.6 je odvisnost lomnega količnika približno

$$n(r) = n_0 + E_0^2(1 - 2\frac{r^2}{w_0^2})n_2 \ . \tag{8.6.2}$$

Razlika med lomnim količniko na osi in pri w_0 od osi je $\Delta n = 2E_0^2 n_2$. Zaradi tega je razlika optičnih poti za žarek na osi in za w_0 od osi $\Delta n z_0$. Valovna fronta bi se ukrivila na krivinski radij $-R$. Iz preproste geometrije velja zveza

$$\Delta n z_0 = R - R\sqrt{1 - \frac{w_0^2}{R^2}} \simeq \frac{1}{2}\frac{w_0^2}{R} \tag{8.6.3}$$

Da bo valovna fronta ostala ravna, morata biti krivinska radija v enačbah 8.6.1 in 8.6.3 enaka; od tu sledi

$$\Delta n = \frac{w_0^2}{4z_0^2} \tag{8.6.4}$$

Amplitudo polja v osi izrazimo z mo"jo: $E_0^2 = 2P/(\pi\epsilon_0 c w_0^2)$, pa dobimo za moč snopa s stacionarnim polmerom

$$P_s = \pi\epsilon_0 c\frac{w_0^4}{2n_2 z_0^2} = \frac{\epsilon_0 c\lambda^2}{4n_2} \tag{8.6.5}$$

Zanimivo je, da kritična moč ni odvisna od začetnega polmera snopa. Pri manjši moči se snop širi, čeprav nekoliko počasneje kot v sredstvu s konstantnim lomnim količnikom, če pa je moč znatno večja, lahko pride do katastrofičnega samozbiranja in porušitve snovi.

Primer. V CS_2, ki je tekočina z razmeroma velikim optičnim Kerrovim pojavom, je $n_2 = 10^{-20}$ (m/V)^2. Tedaj dobimo po gornji formuli za kritično moč vrednost

$$P_s = 10^4\text{W}.$$

Za podrobnejši račun moramo zapisati valovno enačbo v obosnem približku. Začnimo spet s krajevnim delom valovne enačbe za monokromatsko valovanje v skalarnem približku

$$\nabla^2 E + n^2\frac{\omega^2}{c^2}E = 0 \tag{8.6.6}$$

Kot v drugem poglavju zapišimi polje v obliki počasi spreminjajoče se amplitude in faznega faktorja:

$$E = \psi(r,z)e^{ik_0 z} \tag{8.6.7}$$

kjer je $k_0 = n_0\omega/c$ valovno število brez nelinearnosti. $\psi(r,z)$ se v smeri osi z le počasi spreminja, zato drugi odvod po z zanemarimo in dobimo

$$\nabla_\perp^2\psi + \frac{\omega^2}{c^2}(n^2 - n_0^2)\psi + 2ik_0\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \tag{8.6.8}$$

Upoštevajmo odvisnost lomnega količnika od intenzitete, pri čemer zanemarimo člen z n_2^2, ker je gotovo majhen:

$$\nabla_\perp^2\psi + 2k_0^2\frac{n_2}{n_0}|\psi|^2\psi + 2ik_0\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \tag{8.6.9}$$

Preden se lotimo reševanja gornje enačbe, jo še nekoliko polepšajmo. Vpeljimo

$$\kappa = 2k_0^2 \frac{n_2}{n_0} \tag{8.6.10}$$

in novo spremenljivko vzdolž osi z

$$\zeta = \frac{z}{2k_0} \tag{8.6.11}$$

S tem preide enačba 8.6.9 v standardno oblikonelinearne Schrodingerjeve enačbe

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} + \nabla_\perp^2\psi + \kappa\,|\psi|^2\,\psi = 0\ . \tag{8.6.12}$$

V treh dimenzijah je reševanje enačbe 8.6.12 težavno in analitične rešitve niso znane. V dveh dimenzijah pa stacionarno rešitev znamo poiskati. Ker nam bo koristila tudi nekoliko kasneje pri računu širjenja solitonov po optičnih vlaknih, si jo je vredno ogledati.

Stacionarni rešitvi se vzdolž ζ lahko spreminja le faza, zato rešitev iščimo v obliki

$$\psi = e^{i\eta^2\zeta}\,u(x) \tag{8.6.13}$$

kjer je η poljubna konstanta, katere pomen bomo videli kasneje. Iz enačbe 8.6.12 sledi za funkcijo $u(x)$, ki naj bo realna,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{2}\eta^2 u - \kappa u^3 \tag{8.6.14}$$

Z množenjem obeh strani z u' lahko enačbo enkrat integriramo

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + C = \eta^2u^2 - \frac{1}{2}\kappa u^4 \tag{8.6.15}$$

Naj bo integracijska konstanta C kar 0. Ločimo spremenljvki in dobimo

$$\int_1^u \frac{du}{u\sqrt{\eta^2 - \frac{1}{2}\kappa u^2}} = x - x_0 \tag{8.6.16}$$

kjer smo novo integracijsko konstanto zapisali tako, da je pri $x = x_0$ vrednost $u = 1$. Integral brez tezžav izračunamo:

$$\ln\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\frac{u}{\eta + \sqrt{\eta^2 - \kappa u^2/2}}\right) = x - x_0 \tag{8.6.17}$$

Izarazimo iskano funkcijo:

$$u = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}\eta\frac{2}{e^{\eta(x-x_0)} + e^{-\eta(x-x_0)}} = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}\,\eta\,\frac{1}{\mathrm{ch}\eta(x-x_0)} \tag{8.6.18}$$

tako da je po enačbi 8.6.13

$$\psi(x,z) = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}\,\eta\,\frac{e^{i\eta^2\zeta}}{\mathrm{ch}\eta(x-x_0)} \tag{8.6.19}$$

Vidimo, da predstavlja $1/\eta$ mero za polmer snopa, x_0 pa je le prečni premik snopa, ki ga lahko brey škode postavimo 0. Tako je polje stacionarnega snopa

$$E_s(x,z) = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}\frac{\eta}{\text{ch}\eta(x-x_0)}\ \exp[ik_0 z(1+\frac{\eta^2}{2k_0^2})] \tag{8.6.20}$$

Od parametra η je torej odvisna tudi konstanta širjenja in s tem fazna hitrost. Ta je tem manjša, čim manjši je polmer snopa:

$$v_f = \frac{c}{n_0(1+\frac{\eta^2}{2k_0^2})} \tag{8.6.21}$$

Moč dvodimenzionalnega snopa 8.6.20 je sorazmerna z integralom kvadrata polja po x. Integriramo brez težav in dobimo

$$\int |E_s|^2 dx = \frac{2}{\kappa}\eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\text{ch}^2 \eta x} = \frac{4\eta}{\kappa} \tag{8.6.22}$$

Moč stacionarnega snopa v dveh dimenzijah je je obratno sorazmerna s širino snopa $1/\eta$. Zato obstoja pri poljubni moči stacionarna širina. To je bistvena razlika med dvo- in tridimenzionalnim primerom, kjer se snop z nadkritično močjo krči v singularnost.

8.7 Optični solitoni

V prejšnjem razdelkusmo ugotovili, da pojav samozbiranja svetlobnega snopa lahko ravno kompenzira širjenje zaradi uklona, tako da ima pri ustrezni moči snop povsod konstnatno širino in obliko. Povsem analogen pojav imamo tudi v časovni domeni. Sunek svetlob, ki se širi po snovi s frekvenčno siperzijo lomnega količnika, se podaljšuje, kot smo ugotovili v poglavju o optičnih vlaknih. Ob primernih pogojih lahko odvisnost lomnega količnika od intenzitete ravno kompenzira disperzijo in sunek ohranja obliko. Sunkom svetlobe, ki potujejo po sredstvu brez spremembe oblike, pravimo tudi *optični solitoni*. Posebej so pomembni v optičnih vlaknih, kjer je disperzija izrazita in bi se je radi za učinkovit prenos informacije čim bolj iznebili.

Poijav optičnih solitonov ni težko razložiti. V vrhu svetlobenga sunka je pri $n_2 > 0$ lomni količnik največji, zato je na dani geometrijski razdalji optična faza $k_0 n z$ največja. Ker faza vzdolž sunka ni več povsod enaka, se od začetka do konca sunka spreminja tudi frekvenca, ki je odvod faze, in sicer je v sprednejm delu sunka nižja , v zadnjem pa višja. Če je disperzija lomnega količnika taka, da grupna hitrost narašča s frekvenco, bo zadnji del sunka dohiteval sprednjega. Ta učinek nelinearnosti lahko ravno kompenzira širjenje sunka zaradi disperzije.

Računsko obravnavajmo primer širjenja solitona po enorodnem optičnem vlaknu. Spomnimo se (en. **??**), da se zaradi spremembme lomnega količnika vlakna spremeni valovno število

$$\delta\beta = \frac{\omega^2}{c^2\beta}\frac{\int n\,\delta n\,|u|^2 dS}{\int |u|^2 dS} \tag{8.7.1}$$

kjer $u(r)$ opisuje prečno obliko valovanja v vlaknu. Valovno število je v vlaknu funkcija frekvence. Kot v razdelku ???? ga razvijmo okoli centralne frekvence in dodajmo še prispevek 8.7.1:

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\omega^2}{c^2\beta}\frac{\int n\,\delta n\,|u|^2 dS}{\int |u|^2 dS} \tag{8.7.2}$$

Svetlobni sunek, ki se širi po vlaknu, zapišimo, kot smo že vajeni, v obliki počasi spreminjajoče se amplitudne funkcije in faznega faktorja pri nosilni frekvenci:

$$E(r,z,t) = A(z,t)\; u(r)\; \exp i\left[\beta(\omega_0) z - \omega_0 t\right] \tag{8.7.3}$$

V razdelku ???? smo s pomočjo razvoja 8.7.2 in Foureirove transformacije izpeljali diferencialno enačbo ??? za $A(z,t)$. Na isti način moramo sedaj le dodati člen $\delta\beta$ iz en. 8.7.1:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial}{\partial t}\right)A = -\frac{i}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\kappa|A|^2 A \tag{8.7.4}$$

kjer je

$$\kappa = \frac{\omega^2}{c^2\beta}\frac{\int n_0\, n_2\,|u|^4 dS}{\int |u|^2 dS} \tag{8.7.5}$$

Vpeljimo novo neodvisno spremenljivko

$$\tau = t - \frac{z}{v_g} \tag{8.7.6}$$

s katero opišemo obliko sunka, kot ga vidi opazovalec, ki se giblje z grupno hitrostjo skupaj s sunkom. Enačba 8.7.4 dobi s tem obliko

$$i\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \kappa|A|^2 A = 0 \tag{8.7.7}$$

Ta enačba ima kot pri obravnavi samozbiranja svetlobnega snopa v prejšnjem razdelku obliko nelinearne Schrodingerjeve enačbe 8.6.12, v kateri ima sedaj τ isto vlogo kot prej prečna koordinata x. Rešitev s stacionarno dolžino sunka, ki ustreza rešitvi s konstantnim premerom snopa v primeru samozbiranja, tako dobimo, kadar je $d^2\beta/d\omega^2 < 0$. To pomeni, da grupna hitrost narašča s frekvenco, kar je v skladu z razmislekom na začetku tega razdelka. Optični soliton v vlaknu ima torej obliko

$$A(z,\tau) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\frac{\eta}{\mathrm{ch}\left[\sqrt{2\left|\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right|^{-1}}\eta\tau\right]}\exp\left(i\eta^2 z\right)$$

$$A(z,t) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\frac{\eta}{\mathrm{ch}\left[\sqrt{2\left|\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right|^{-1}}\frac{\eta}{v_g}(v_g t - z)\right]}\exp\left(i\eta^2 z\right) \tag{8.7.8}$$

Parameter η je sorazmeren z energijo solitona. Ta potuje z grupno hitrostjo in pri tem ohranja obliko. Analiza majhnih odmikov od dobljene rešitve pokaže, da je soliton tudi stabilen (Naloga). Zaradi tega se zdi, da bilo solitone mogoče izrabiti v optičnih komunikacijskih sistemih, kjer je potrebna velika gostota prenosa informacije na velike razdalje. S tem bi se izognili težavam, ki jih pri linearnem prenosu povzroča disperzija.

8.8 Optična fazna konjugacija

Fazna konjugacija je zanimiv in danes tudi prektično pomemben pojav, pri katerem dobimo iz danega novo valovanje, ki ima enake valovne fronte in potuje v nasprotni smeri od prvotnega valovanja; novo valovanje je tako, kot bi začetnemu obrnili predznak časa. Pojav je v ozki zvezi s holografijo, kjer najprej zapišemo predmetni snop, ki ga kasneje reproduciramo, pri fazni konugaciji pa zapis začetnega vala in njegova reprodukcija potekata sočasno.

Napravimo poskus, ki ga kaže slika **??**. Na nelinearen kristal naj v nasprotnih smereh vpadata dva močna ravna črpalna vala z valovnima vektorjema $\mathbf{k}_1$ in $-\mathbf{k}_1$. Poleg tega naj vpada še tretji, signalni snop, ki ni nujno raven val. Signalni val interferira s prvim črpalnim valom in s tem zaradi nelineranosti tretejga reda povzroči modulacijo lomnega količnika, ki je skoraj periodična, če je signalni val blizu ravnega vala. Na tej periodični modulaciji se drugi črpalni val uklanja, pri čemer je uklonjeni val enake oblike kot signalni, le potuje v nasprotni smeri, ker ima drugi črpalni val nasprotno smer od prvega. Črpalna vala sta seveda enakovredna in ni mogoče ločiti, s katerim je signalni val interferiral in kateri se uklanja.

Pozoren bralec je ugotovil, da je gornja razlaga podobna razlagi holografije, le da sta tam postopka zapisa interference predmetnega vala z referenčnim in reprodukcije ločena.

Signalni val lahko zapišemo v obliki

$$E_3 = \mathrm{Re}\left[\psi\left(r\right)\, e^{i(kz-\omega t)}\right] \tag{8.8.1}$$

Videli bomo, da je novonastali val

$$E_4 = \mathrm{Re}\left[\psi^*\left(r\right)\, e^{i(-kz-\omega t)}\right] \tag{8.8.2}$$

Zaradi nasprotnega predznaka k potuje v obratni smeri od signalnega vala; poleg tega je še amplituda konjugirano kompleksna. To seveda ne pliva na obliko valovnih front, te so popolnoma enake kot pri signalnem valu. Zaradi lastnosti, da lahko novi val iz signalnega dobimo tako, da krajevni del kompleksno konjugiramo, nastalemu valu pravimo fazno konjugiran val.

Uporabna posledica fazne konjugacije je prikazana na sliki **??**. Naj na neko nerpavilno sredstvo z leve vpada Gaussov snop. Po prehodu skozi sredstvo valovne fronte niso več gladke. Ta popačen snop v faznem konjugatorju generira fazno konjugiran snop, ki potuje proti levi in ima enako nepravilne valoven fronte kot vpadni val. Po prehodu skozi nepravilno sredstvo se neravnosti valovne fronte kompenzirajo in dobimo enake gladke valoven ploskeve Gaussovega snopa, kot smo jih imeli na začetku. To lastnost popravljanja valovne fronte je mogoče koristni uporabiti, na primer namesto enega zrcala v laserskem resonatorju.

Poglejmo podrobneje, kako v nelinearnem sredstvu nastane fazano konjugiran val. Kot kaže slika **??**, je celotno polje v nelienarnem kristalu vsota štirih valov, dveh črpalnih, signalnega in odbitega:

$$E = \frac{1}{2}E_1 e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}} + \frac{1}{2}E_2 e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}} + \frac{1}{2}E_3\left(z\right)e^{ikz} + \frac{1}{2}E_4\left(z\right)e^{-ikz} + \text{k.k.} \tag{8.8.3}$$

S k.k. smo spet označili konjugirano kompleksne člene. Ker so vsa polje pri isti frekvenci, nam časovenga faktorja ni treba pisati. Zaradi enostavnosti zapisa nelinearne polarizacije vzemimo, da so vse polarizacije enake. Privzeli smo še, da sta črpalna vala E_1 in E_2 dosti močnejša od E_3 in E_4, tako da sta njuni amplitudi konstantni, $E_3\left(z\right)$ in $E_4\left(z\right)$ pa se le počasi spreminjata.

Postavimo E v časovno neodvisno valovno enačbo z nelinearno polarizacijo:

$$\nabla^2 E + \epsilon\frac{\omega^2}{c^2}E = -\mu_0\omega^2 P^{NL} \tag{8.8.4}$$

Pri tem je $\epsilon\omega^2/c^2 = k^2$. Ker obravnavamo le polje pri osnovni frekvenci, nastopajo v nelinearni polarozaciji le členi s to frekvenco. Vsebujejo še vedno različne kombinacije valovnih vektorjev. K enačbi za E_4 prispevajo le tisti s krajevnim faznim faktorjem $\exp(-ikz)$, to je

$$P_4^{NL} = \epsilon_0\chi^{(3)}[E_1E_2E_3^* + (|E_1|^2 + |E_2|^2)E_4] \tag{8.8.5}$$

Tu je $\chi^{(3)}$ efektivna nelinearna susceptibilnost za izbrano polarizacijo vseh polj. Zanemarili smo člene, kjer E_3 in E_4 nastopata v višjih potencah, ker so majhni v primeri z zapisanimi. Z upoštevanjem, da se $E\left(z\right)$ le počasi spreminja, dobimo enako kot pri mešanju treh frekvenc

$$\frac{dE_4}{dz} = i\frac{\omega}{nc}\chi^{(3)}\left[E_1E_2E_3^* + (|E_1|^2 + |E_2|^2)E_4\right] \tag{8.8.6}$$

Drugi člen na desni že poznamo; opisuje odvisnost lomnega količnika od intenzitete črpalnih valov, torej optični Kerrov pojav. Vpeljimo nove amplitude

$$A_k = E_k \exp\left[-i\frac{\omega}{nc}\left(|E_1|^2 + |E_2|^2\right)z\right] \tag{8.8.7}$$

ki se od prvotnih razlikujejo le po faznem faktorju. S tem se enačba 8.8.6 poenostavi:

$$\frac{dA_4}{dz} = i\frac{\omega}{nc}\chi^{(3)}A_1A_2A_3^* \tag{8.8.8}$$

Podobno dobimo

$$\frac{dA_3^*}{dz} = i\frac{\omega}{nc}\chi^{(3)}A_1^*A_2^*A_4 \tag{8.8.9}$$

Z vpeljavo sklopitvene konstante

$$\kappa = \frac{\omega}{nc}\chi^{(3)} \tag{8.8.10}$$

se enačbi poenstavita:

$$\frac{dA_4}{dz} = i\kappa^* A_3^*$$

$$\frac{dA_3^*}{dz} = i\kappa A_4 \tag{8.8.11}$$

Bralcu priporočam, da si še enkrat ogleda korake, s katerimi smo zelo težaven problem nelinearne valovne enačbe poenostavili na lineanren sistem dveh preprostih sklopljenih enačb za amplitudi signalnega in odbitega vala.

Splošni rešitvi sistema 8.8.11 sta

$$\begin{aligned} A_4(z) &= C_1 \cos|\kappa|\, z + C_2 \sin|\kappa|\, z \qquad (8.8.12) \\ A_3^*(z) &= -i\frac{|\kappa|}{\kappa^*}\left(-C_1 \sin|\kappa|\, z + C_2 \cos|\kappa|\, z\right) \end{aligned}$$

Potrebujemo še robne pogoje za obe valovanji. Z leve, pri $z = 0$, poznamo $A_3^*(0)$, pri $z = L$ pa ne more biti odbitega vala:$A_4(L) = 0$. S tem lahko določimo konstanti C_1 in C_2:

$$\begin{aligned} A_4(z) &= i\frac{\kappa^*}{|\kappa|}\frac{\sin|\kappa|\,(L-z)}{\cos|\kappa|\, L}A_3^*(0) \qquad (8.8.13) \\ A_3^*(z) &= \frac{\cos|\kappa|\,(z-L)}{\cos|\kappa|\, L}A_3^*(0) \end{aligned}$$

Amplituda odbitega vala pri $z = 0$ je

$$A_4(0) = i\frac{\kappa^*}{|\kappa|}\tan|\kappa|\, L\; A_3^*(0) \tag{8.8.14}$$

Odbiti val je sorazmeren s kompleksno konjugirano amplitudo vpadnega vala in ima natnako nasproten valovni vektor, zato tudi ime fazno konjugiran val. Ker je lahko $\tan|\kappa|\, L > 1$, je možno tudi ojačenje odbitega vala, ki gre seveda na račun moči črpalnih valov.

Doslej smo predpostavili, da je signalni val raven. Če je njegova amplituda odvisna še od prečne koordinate, ga lahko razvijemo po ravnih valovih in velja za vsako komponento posebej en. 8.8.14. Odbite komponente so sorazmerne s konjugiranimi komponentami signalnega vala z nasprotnim valovnim vektorjem in dajo skupaj valovno fronto enake oblike kot pri signalnem valu, le giblje se v nasprtni smeri, kot smo opisali že na začetku razdelka.

9 Optična vlakna

Optična vlakna vodijo svetlobno valovanje s tem, da se na meji med sredico z večjim lomnim količnikom in plaščem valovanje totalno odbije. So torej dielektrični valovni vodniki za svetlobo. Njihove prednosti pred bakrenimi vodniki v komunikacijski tehnologiji so bistveno večja količina informacij, ki jo je mogoč prenašati po enem vlaknu, majhne izgube in neobčutljivost na elektromagnetne motnje. Zato danes v veliki meri nadomeščajo kovinske vodnike, posebej v medkrajevni telefoniji in računalniških povezavah.

Njaenostavnejši model optičnega vodnika je planparalelna plast prozornega dielektrika z lomnim količnikom n_1 večjim od od okolice (slika **??**). Plasti z večjim lomnim količnikom recimo sredica, okolici pa plašč vlakna. Žarek je ujet v sredici, če je vpadni kot θ večji od kota totalnega odboja, za katerega velja $\sin\theta_c = n_0/n_1$. Količini $\sin(\pi/2 - \theta_c)$, ki določa največji kot divergence svetlobnega snopa, ki je še ujet v vlaknu, pravimo *numerična odprtina* vlakna. Razlika lomnih količnikov $n_1 - n_0 = \Delta n$ je običajno dokaj majhna, to je le nekaj stotink.

Za podroben opis širjenja svetlobe po vlaknih, ki imajo običajno polmer sredice od nekaj do nekaj deset mikrometrov, geometrijska optika ne zadošča. Rešiti moramo Maxwellove enačbe z ustreznimi robnimi pogoji, kar je za praktična vlakna dokaj dolg račun. Ugotovimo najprej, kakšne so osnovne značilnosti valovanja po vlaknu.

Geometrijskemu žarku, ki potuje po sredici pod kotom in se na meji odbija, ustreza v valovni sliki val, ki ima prečno komponento valovnega vektorja različno $k_\perp$ od nič. Kot totalnega odboja pri dani frekvenci določa največjo možno vrednost $k_{\perp\max} \simeq n_1 k_0 \cos\theta_c = k_0\sqrt{n_1^2 - n_0^2} \simeq k_0\sqrt{2n\Delta n}$, kjer je $k_0 = \omega/c$, n pa povprečni lomni količnik. Ker je valovanje v prečni smeri omejeno na sredico dimenzije a, ima lahko $k_\perp$ le diskretne vrendosti, ki so približno $N\pi/a$, kjer je N celo število. Z vsakim N je določen en *rod* valovanj v vlaknu. Ker je omejen $k_\perp$, je število rodov je navzgor omejeno: $N_{\max} \simeq k_0 a/\pi\sqrt{2n\Delta n}$. N je tudi število vozlov, ki jih ima valovanje v prečni smeri. Število rodov v danem vlaknu je odvisno od razlike lomnih količnikov in od dimenzije vlakna. Videli bomo, da v optičnih vlaknih en rod vselej obstaja, kar je ena od razlik med dielektričnimi in kovinskimi vodniki, kakršne poznamo iz mikrovalovne tehnike in po katerih se pod določeno frekvenco ne more širiti nobeno valovanje. Optični vodniki, po katerih se širi en sam rod, imajo posebej lepe lastnosti za uporabo v komunikacijskih sistemih.

Fazna hitrost valovanja, ki potuje po valovnem vodniku, je odvisna od frekvence, imamo torej disperzijo. Razlog je v diskretnih vrednostih $k_\perp$. Naj bo β komponenta valovnega vektorja vzdolž vlakna, recimo ji tudi valovno število, tako da je odvisnost polja od koordinate vzdolž vlakna $\exp i\beta z$. Veljati mora

$$n_1 \frac{\omega}{c} = \sqrt{\beta^2 + k_\perp^2} \tag{9.0.1}$$

. Za dano vrednost $k_\perp$ torej zveza med valovnim številom in frekvenco ni linearna, zato je fazna hitrost $v_f = \omega/\beta$ odvisna od frekvence. Grupna hitrost $v_g = d\omega/d\beta$ je različna od fazne in tudi odvisna od frekvence, kar ima za uporabo vlaken pomembne posledice.

9.1 Planparalelni vodnik

Preprost dvodimenzionalen model optičnega vlakna je planparalelna plast prozornega dielektrika z lomnim količnikom večjim od okolice: $n_1 > n_0$ (Slika **??**). Rešitev krajevnega dela valovne enačbe

$$\nabla^2\mathbf{E}+n\left(x\right)^2 k_0^2\mathbf{E}=0 \tag{9.1.1}$$

kjer je $k_0 = \omega/c$, iščimo v obliki

$$\mathbf{E} = \psi\left(x\right)\, e^{i\beta z} \tag{9.1.2}$$

Za amplitudo $\psi\left(x\right)$ dobimo enačbo

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[n\left(x\right)^2 k_0^2 - \beta^2\right]\, \psi = 0 \tag{9.1.3}$$

kjer je v plasti (območje II.) lomni količnik n_1, v okolici (območji I. in III.) pa n_0. Robni pogoji so, da sta tangencialni komponenti električne in magnetne poljske jakosti na meji zvezni. V planparalelnem primeru lahko valovanja ločimo na transverzalno električna (TE) in transverzalno magnetna (TM). V prvem primeru je $\mathbf{E}$ v smeri osi y, v drugem pa $\mathbf{H}$. Pri TE valovih je tangencialna komponenta magnetnega polja H_z. Ker je $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}$, dobimo iz zveznosti H_z, da je na meji zvezen tudi odvod $\partial E_y/\partial x$. S tem postane problem matematično enak iskanju lastnih stanj energije za delec v končno globoki enodimenzionalni potencialni jami v kvantni mehaniki, kjer lastni vrednosti energije ustreza β^2. Poglejmo najprej, kakšne so možne rešitve:

a. $k_0n_0 < \beta < k_0n_1$. Tedaj so rešitve oscilatorne v sredici in eksponentno pojemajoče v plašču. Predstavljajo vodene valove v plasti. V kvantni mehaniki ustrezajo vezanim stanjem.

b. $\beta < k_0n_0$. Rešitve so oscilatorne v vseh treh območjih in opisujejo valove, ki niso ujeti v plasti, temveč z ene strani vpadajo na plast, se delno skoznjo lomijo, delno pa odbijejo. V rešitvi je upoštevana tudi interferenca na plasti (Naloga). Taka stanja v kvantni mehaniki opisujejo prost delec.

Zanima nas predvsem prvi primer. Začnimo s TE polarizacijo, to je $\psi(x) = (0, \psi(x), 0)$. Naj bo $x = 0$ v sredini plasti. Zaradi simetrije morajo biti rešitve za $\psi\left(x\right)$ ali sode ali lihe. Sode re"itve imajo v sredici obliko

$$\psi_{II}(x) = C_1 \cos k_\perp x \tag{9.1.4}$$

v območjih I in III pa

$$\psi_{I,III}\left(x\right) = C_0\, e^{\kappa(a\mp x)} \tag{9.1.5}$$

Tu je $k_\perp = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}$ in $\kappa = \sqrt{\beta^2 - n_0^2 k_0^2}$. Zveznost električne poljske jakosti na meji nam da

$$C_1 \cos k_\perp a = C_0 \tag{9.1.6}$$

Iz zveznosti odvoda dobimo

$$C_1 k_\perp \sin k_\perp a = \kappa C_0 \tag{9.1.7}$$

Zadnji dve enačbi morata biti hkrati izpolnjeni, zato velja zveza

$$k_\perp \tan k_\perp a = \kappa \tag{9.1.8}$$

Iz izrazov za $k_\perp$ in κ dobimo še drugo zvezo

$$k_\perp^2 + \kappa^2 = k_0^2 \left(n_1^2 - n_0^2\right) \tag{9.1.9}$$

Vpeljimo brezdimenzijske količine $\xi = a k_\perp$, $\eta = a\kappa$ in $V^2 = a^2 k_0^2 \left(n_1^2 - n_0^2\right)$. Z njimi lahko gornji enačbi zapišemo v prglednejši obliki

$$\xi \tan \xi = \eta \tag{9.1.10}$$
$$\xi^2 + \eta^2 = V^2 \tag{9.1.11}$$

Dovoljene vrednosti ξ in η dobimo kot presečišča krogov z radijem V in funkcije $\xi \tan \xi$, kar je prikazano na sliki **??**.

Lihe rešitve imajo v sredici obliko

$$\psi_{II}(x) = C_1 \sin k_\perp x \tag{9.1.12}$$

v plašču pa

$$\psi_{I,III}(x) = \pm C_0 \, e^{\kappa(a \mp x)} \tag{9.1.13}$$

Na enak način kot za sode rešitve dobimo iz robnih pogojev, da mora veljati zveza

$$k_\perp \cot k_\perp a = -\kappa \tag{9.1.14}$$

ali

$$-\xi \cot \xi = \eta \tag{9.1.15}$$

Funkcija $-\xi \cot \xi$ je na sliki **??** prikazana črtkano. Lastne vrednosti za lihe rešitve dobimo kot njena presečišča s krogomz radijem V.

Parameter V meri globino potencialne jame; iz slike vidimo, da eno vodeno valovanje (ali vezano stanje v kvantni mehaniki) vselej obstaja. Pri velikih vrednostih V je rešitev za dovoljene vrednosti ξ več. Razen največje so zelo blizu mnogokratniku $\pi/2$, kar da za dovoljene vrednosti $k_\perp$ približno mnogokratnike $\pi/(2a)$, kot smo pričakovali že v uvodu. Ko smo določili lastne vrednosti $k_\perp$, poznamo za vsak rod tudi disperzijsko zvezo med frekvenco in valovnim številom:

$$n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \beta^2 + k_\perp^2 \tag{9.1.16}$$

Pri tem je tudi lastna vrednost $k_\perp$ lahko nekoliko odvisna od ω, ker je ta vsebovana v V.

Osnovna lastna vrednost ξ_0 je pri $V << 1$ približno kar V. Zato je $k_\perp^2 \simeq k_0^2(n_1^2 - n_0^2)$ in je $\beta = n_0 k_0$. V primeru zelo šibkega vodenja je torej fazna hitrost vodenega vala približno enaka fazni hitrosti v plašču, to je c/n_0. To je lahko razumeti; pri majhnem V je namreč tudi κ majhen in se eksponentno pojemajoče valovanje razteza daleč v plašč. (Naloga:Kakšna je v tej limiti grupna hitrost?). V nasprotnem primeru, ko je $V >> 1$, je $\xi_0 \simeq \pi/2 << V$. Zato je tudi $k_\perp \simeq \pi/(2a) << n_1 k_0$ in je približno $\beta \simeq n_1 k_0$. V tem primeru je torej fazna hitrost taka kot v sredstvu z lomnim količnikom sredice, kar je v skladu s preprosto predstavo, da se pri velikem V osnovni vodeni rod širi po sredici vzdolž osi vlakna.

Račun za transverzalno magnetne (TM) valove je zelo podoben, le v robnem pogoju za tangencialno komponento električnega polja nastopita dielektrični konstanti sredice in plašča, zato je predvsem najnižja lastna vrednost za $k_\perp$ nekoliko večja kot za TE valove. (Naloga)

9.2 Cilindrično vlakno

Običajna vlakna so seveda tridimenzionalna s cilindrično geometrijo. Najpreprostejša strukutra, povsem analogna gornjemu primeru planparalene plasti, je jedro s konstatnim lomnim količnikom, ki je nekoliko večji od lomnega količnika plašča. Pogoste so tudi zapletenejše konstrukcije, pri katerih je sredica sestavljena iz več kolobarjev z različnimi lomnimi količniki. S primerno izbiro je tako mogoče zelo zmanjšati disperzijo (Slika **??**).

Račun za širjenje svetlobe po cilindričnem vlaknu s homogeno sredico je sicer podoben kot za planparalelni primer, vendar je precej bolj zapleten. Glavna komplikacija je, da v cilindrični geomteriji ni več delitve na čisto električno in magnento transverzalne valove, zato postanejo robni pogoji bolj zapleteni. Rešitve se izrazajo v obliki kombinacij Besselovih funkcij. Podrobnosti si bralec lahko ogleda v literaturi [**?**]. Osnovne značilnosti rešite pa ostajajo enako kot v dvodimenzionalnem primeru. Kot smo ugotovili že na začetku, obstoja končno število vodenih valov, odvisno od premera sredice in razlike lomnih količnikov sredice in plašča. Če sta ti količini majhni, obstoja le eno vodeno valovanje in imamo enorodovno vlakno. Za njegovo valovno število velja $n_0 k_0 < \beta < n_1 k_0$.

9.3 Cilindrično vlakno s paraboličnim profilom lomnega količnika

V treh dimenzijah lahko hitro poiščemo rešitve za vlakno, v katerem je dielektrična konstanta kvadratna funkcija radialne koordinate r:

$$n(r)^2 = n_0^2 + n_2^2 r^2 \qquad (9.3.1)$$

Parameter n_2 je v praksi vselej majhen, zato ima za vse smiselne vrednosti r tudi lomni količnik paraboličen profil. Parabolična sredica mora sveda biti omejena, okoli nje imamo zopet plašč s konstantnim lomnim količnikom (Slika **??**). Tipičen radij sredice je nekaj deset mikrometrov.

Komponento polja za izbrano polarizacijo napišimo v obliki

$$E = E_0 \psi(x, y) \, e^{i\beta z} \tag{9.3.2}$$

Zanemarili smo, da zaradi odvisnosti od prečnih koordinat in $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ polje ne more imeti povsod iste smeri; če hočemo biti natančni, moramo v gornji obliki zapisati vektorski potencial. Postavimo približni nastavek v valovno enačbo. Dobimo enačbo

$$\nabla_\perp^2 \psi + \left[k_0^2 \left(n_0^2 + n_2^2 r^2 \right) - \beta^2 \right] \psi = 0 \tag{9.3.3}$$

ki je popolnoma enaka enačbi za krajevni del lastnih funkcij dvodimenzionalnega harmonskega oscilatorja v kvantni mehaniki. Rešitve imajo obliko

$$\psi_{lm} = H_l \left(\sqrt{2} \frac{x}{w} \right) H_m \left(\sqrt{2} \frac{y}{w} \right) e^{-(x^2+y^2)/w^2}, \qquad w^2 = \frac{\lambda}{\pi n_2} \tag{9.3.4}$$

z lastnimi vrednostmi

$$\beta_{lm}^2 = n_0^2 k_0^2 \left[1 - \frac{2 n_2}{k_0 n_0} (l + m + 1) \right] \tag{9.3.5}$$

Razmerje $2n_2/\left(k_0 n_0\right)$ je majhno, zato je približno $\beta_{lm} = n_0 k_0 \left[1 - \frac{n_2}{k_0 n_0} (l + m + 1) \right]$.Če je n_2 neodvisen od frekvence, je grupna hitrost

$$v_g = \left(\frac{d\beta_{lm}}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{c_0}{n_0} \tag{9.3.6}$$

enaka za vse rodove, kar je značilnost vlakna s kvadratnim profilom lomnega količnika. V dejanskem vlaknu je seveda taka odvisnost možna le v omejenem območju sredice, zato je tudi gornja analiza le približna in velja dobro za tiste rodove, ki se ne raztezajo izven sredice.

Neodvisnost grupne hitrosti od reda valovanja v vlaknu je praktično pomembna. Grupna hitrost določa čas potovanja svetlobnega sunka, ki lahko predstavlja en bit informacije. Če se po vlaknu lahko širi več rodov, ki imajo različno grupno hitrost, se sunek po prehodu skozi vlakno razširi, kar omejuje uporabno dolžino vlakna, kot bomo podrobneje videli kasneje. Temu se lahko izognemo z uporabo enorodovnih vlaken, ki pa so dražja in je vanje te"je uvesti svetlobni snop, katerega divergenca in premer morata ustrezati ujetemu valu enorodovnega vlakna, če naj ne bo izgub. Zato se za krajše zveze uporabljajo mnogorodovna vlakna, ki imajo sredico s približno paraboličnim profilom lomnega količnika.

9.4 Sprememba lomnega količnika vlakna

Sprememba lomnega količnika sredice ali plašča vlakna povzroči spremembo valovnega števila β danega roda. V enorodovnih vlaknih je to mogoče izkoristiti za izdelavo senzorjev, na primer temperature ali tlaka. Zaradi zunanjih vplivov, ki jih želimo zaznati, se spremeni lomni količnik vlakna in s tem propagacijska konstanta, kar lahko izmerimo preko spremembe faze valovanja na izhodu iz vlakna, to je, z ustrezno sestavljenim interferometrom. Ker je dolžina vlakna lahko velika, v nekaj centimetrov velik tulec lahko brez težav navijemo kilometre vlakna, je celotna sprememba faze velika že pri majhnih spremembah merjene količine. Sprememba valovnega števila povzroča tudi nezaželjene spremembe faze in odboje pri prenosu informacij. V tem razdelku zato poglejmo, kako se spremeni valovno število pri dani spremembi lomenga količnika.

Vzemimo rod vlakna s propagacijsko konstanto β_{lm} in prečnim profilom $\psi_{lm}(r, \phi)$. Ta mora zadoščati valovni enačbi

$$\nabla_\perp^2 \psi_{lm} + \left(\epsilon(r) k_0^2 - \beta_{lm}^2\right) \psi_{lm} = 0 \tag{9.4.1}$$

Naj se dielektrična konstanta vlakna spremeni za $\delta\epsilon$. Zato se spremenita tudi propagacijska konstanta $\beta = \beta_{lm} + \delta\beta$ in prečna oblika $\psi = \psi_{lm} + \delta\psi$. Tudi motena funckija ψ mora zadoščati enačbi 9.4.1, zato za perturbacijo velja

$$\nabla_\perp^2 \delta\psi + \left(\epsilon(r) k_0^2 - \beta_{lm}^2\right) \delta\psi + \delta\epsilon\, k_0^2 \psi_{lm} = 2\beta_{lm} \delta\beta\, \psi_{lm} \tag{9.4.2}$$

kjer smo zanemarili produkte majhnih količin. Množimo obe strani enačbe s ψ_{lm}^* in integrirajmo po preseku vlakna, pri čemer upoštevajmo, da je $\delta\psi$ ortogonalna na ψ_{lm}:

$$\int \psi_{lm}^* \nabla_\perp^2 \delta\psi\, dS + \int \left(\epsilon(r) k_0^2 - \beta_{lm}^2\right) \delta\psi\, \psi_{lm}^* + k_0^2 \int \delta\epsilon\, |\psi_{lm}|^2\, dS \tag{9.4.3}$$

$$= \quad 2\beta_{lm}\, \delta\beta \int |\psi_{lm}|^2\, dS \tag{9.4.4}$$

Prvi člen na levi preoblikujmo z uporabo zvez $\int (u\, \nabla_\perp^2 v - v \nabla_\perp^2 u)\, dS = \int \nabla_\perp \cdot (u \nabla_\perp v - v \nabla_\perp u)\, dS = \oint \mathbf{ds} \times (u\, \nabla_\perp v - v\, \nabla_\perp u)$. Ker fukncijі ψ_{lm} in $\delta\psi$ opisujeta vodene valove, morata iti za velike r proti nič, zato je integral po krivulji v gornji zvezi nič in velja $\int \psi_{lm}^* \nabla_\perp^2 \delta\psi\, dS = \int \delta\psi \nabla_\perp^2 \psi_{lm}^*\, dS$. Ker ψ_{lm}^* zadošča enačbi 9.4.1, se v enačbi 9.4.3 prvi in drugi člen uničita in dobimo željeno zvezo

$$\delta\beta = \frac{k_0^2 \int \delta\epsilon\, |\psi_{lm}|^2\, dS}{2\, \beta \int |\psi_{lm}|^2\, dS} \tag{9.4.5}$$

ki je seveda analogna kvantnomehanskemu rezultatu s teorijo motenj prvega reda za spremembo energije lastnega stanja pri majhni sprmembi Hamiltonovega operatorja. Rezultat je tudi intuitivno razumljiv: v najnižjem redu je $\delta\beta$ sorazmerna s uteženim povprečjem $\delta\epsilon$, kjer je utež ψ_{lm}.

Sprememba valovnega števila β v delu vlakna, po katerem potuje svetloba, ne povzroči le spremembe faze, ampak tudi odboj dela valovanja. Ta pojav je le nekoliko druga oblika odboja na meji (zvezni ali ostri) dveh dielektrikov, ali splošneje, odboja vsakega valovanja na območju, kjer se spremeni fazna hitrost valovanja.

Odboj na območju vlakna, kjer se spreminja β, bomo najlažje dobili preko formule za odboj na meji dveh dielektrikov pri pravokotnem vpadu. Odbita amplituda je tedaj

$$E_r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_0 \tag{9.4.6}$$

Mislimo si, da je sprememba β na delu vlakna sestavljena iz majhnih stopničastih sprememb $\Delta\beta_i$ na intervalih $\Delta\dot{z}$. Za ravno valovanje, za katerega velja enačba 9.4.6, je sprememba lomnega količnika sorazmerna s spremembo fazne hitrosti. Ker tudi β določa fazno hitrost valovanja po vlaknu, je delež odbitega valovanja na stopničasti spremembi $\Delta\beta_i$

$$\Delta E_i = \frac{\Delta\beta_i}{2\,\beta}\,E_0 \tag{9.4.7}$$

Predpostavili smo, da je celotni del odbitega valovanja tako majhen, da ni treba upoštevati spremembe amplitude vpadnega vala E_0. Vse odbito valovanje je vsota prispevkov na posameznih stopnicah $\Delta\beta_i$, pri čemer moramo upoštevati še različne faze delnih odbitih valovanj:

$$E_r = \sum \frac{\Delta\beta_i}{2\,\beta}\,e^{2i\beta z_i}\,E_0 = \frac{1}{2\,\beta}\sum \frac{d\beta}{dz}\,e^{2i\beta z_i}\Delta z\,E_0 \tag{9.4.8}$$

Preidimo z vsote na integral, pa dobimo, da je odbita amplituda

$$E_r = \frac{E_0}{2\,\beta}\int \frac{d\beta}{dz}\,e^{2i\beta z}dz \tag{9.4.9}$$

Primer: Naj se valovno število linearno spermeni za $\Delta\beta_0$ na razdalji L. Tedaj je po gornji formuli

$$\frac{E_r}{E_0} = 2\,\frac{\Delta\beta_0}{L}\,\frac{\sin\beta L/2}{\beta} \tag{9.4.10}$$

Odbojnost je največja, kadar je L majhen v primeri z $1/\beta$, torej kadar je sprememba β ostra stopnica. Čim počasnejša je sprememba, tem manj je odboja, poleg tega pa odboja ni vsakič, ko je $\sin\beta L/2 = 0$, to je, pride do destruktivne interference vseh delnih odbojev.(Naloga: Odboj na erf stopnici).

9.5 Izgube v optičnih vlaknih

Ena najpomembnejših lastnosti optičnih valken je majhno slabljenje svetlobnega vala, posebej še v vlaknih iz kremenovega stekla. Najboljša vlakna imajo danes izgube okoli 0,2 db/km pri valovni dolžini 1,55 μm. (1 decibel je $0,1\log(j_0/j)$.). Glavni vzroki izgub so absorpcija in sipanje na nečistočah in sipanje na termičnih fluktuacijah gostote (Rayleighovo sipanje). Slika **??** prikazuje tipično odvisnost izgub od valovne dolžine za dobro enorodovno vlakno iz kremenovega stekla s primesjo GeO_2. Sipanje na fluktuacijah gostote je sorazmerno z λ^{-4}, zato dominira pri majhnih valovnih dolžinah, sipanje na defektih in nepravilnostih je skoraj zanemarljivo, pri valovnih dolžinah nad 1,6 μm pa prevlada absorpcija. Vrh med 1,3 μm in 1,5 μm je posledica absorpcije na OH ionih, ki se jih je v steklu zelo težko znebiti. Iz slike je razvidno, da so izgube najmanjše okoli 1,55 μm, zato se to območje največ uporablja za zveze na velike razdalje. Najboljših modernih vlaken tudi ni več mogoče kaj dosti izboljšati glede izgub, saj so že dosegla spodnjo mejo, določeno s termičnimi fluktuacijami.

Pri optičnih zvezah nastanejo še izgube na spojih vlaken, ki so okoli 0,2 db na spoj. Skupne izgube so tako dosti manjše kot v koaksialnem kablu in je možen prenos signala do nekaj sto kilometrov brez vmesnega ojačevanja. S tem pri dolžini optičnih zvez izgube niso več glavna omejitev, ampak je to popačitev signala zaradi disperzije.

V optičnem vlaknu nastanejo izgube tudi, kadar je vlakno ukrivljeno. Te izgube postanejo znantne, kadar je krivinski radij vlakna centimeter ali manj. Ta pojav je dovolj zanimiv, da si ga je vredno nekoliko podrobneje ogledati.

Vzemimo spet dvodimenzionalno plast debeline $2a$ z lomnim količnikom n_1 v sredstvu z lomnim količnikom n_0, ki naj bo ukrivljena s krivinskim radijem R. Taka plast tvori del kolobarja z notranjim radijem $R-a$ in zunanjim radijem $R+a$, pri čemer je $\dot{R} >> a$ (Slika **??**). Zapišimo valovno enačbo za dve dimenziji v cilindrični geometriji:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial E}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E}{\partial\phi^2}+k_0^2 n^2(r)\ E=0 \tag{9.5.1}$$

kjer ima $n(r)$ vrednost n_1 v sredici in n_0 drugje. Zanimajo nas rešitve oblike

$$E=\psi(r)\ e^{im\phi} \tag{9.5.2}$$

kjer je $\psi(r)$ znatna le v sredici. Ker je valovna dolžina svetlobe dosti manjša od R, je m veliko število, ki je povezano z valovnim številom β: naj bo $z=R\phi$ dolžina loka vzdolž sredine sredice. Tedaj je $m\phi=(m/R)\,z$ in je torej $\beta=m/R$. ψ zadošča enačbi

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}+\left[k_0^2\,n^2(r)-\frac{m^2}{r^2}\right]\psi=0 \tag{9.5.3}$$

Rešitve za ψ so kombinacije Besselovih funkcij reda m, kar pa zaradi velikosti m ni posebno zanimivo. Dosti več bomo izvedeli, če primerno preoblikujemo valovno enačbo 9.5.1. Namesto r in ϕ vpeljimo koordinati $x=r-R$ in $z=R\phi$. S tem smo prešli nazaj na koordinate planparelelne plasti in iščemo popravke valovne enacbe 9.1.3 reda $1/R$. Tako je $1/r\simeq 1/R$ in

$$\frac{m^2}{r^2}=\frac{m^2}{(R+x)^2}\simeq\frac{m^2}{R^2}\left(1-2\,\frac{x}{R}\right)=\beta^2\left(1-2\,\frac{x}{R}\right) \tag{9.5.4}$$

S tem dobimo iz enačbe 9.5.3 približno enačbo za prečno obliko polja

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left[k_0^2\,n^2(r)-\beta^2\right]\ \psi+\frac{1}{R}\left(\frac{d\psi}{dr}-2\,\beta^2 x\,\psi\right)=0 \tag{9.5.5}$$

9.6 Disperzija

Zaradi disperzije, to je odvisnosti fazne in grupne hitrosti od frekvence, se sunek svetlobe, ki potuje po vlaknu, podaljšuje. Ta pojav omejuje količino informacije, ki jo je mogoče prenašati po vlaknu dane dolžine. Zato je čim manjša disperzija v vlaknih vsaj toliko pomembna kot majhne izgube.

Vzemimo najprej enorodovno vlakno in naj bo svetloba v vlaknu modulirana v obliki kratkih sunkov, ki nosijo informacijo. Sunki potujejo z grupno hitrostjo

$$v_g=\frac{d\omega}{d\beta}=\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1} \tag{9.6.1}$$

Po enačbi 9.0.1 je grupna hitrost odvisna od frekvence tako zaradi eksplicitne korenske zveze med ω in β kot zaradi odvisnosti lomnih količnikov sredice in plašča od frekvence. Prvemu prispevku recimo valovodna disperzija, ker je posledica omejitve valovanja v sredico vlakna, drugemu pa materialna disperzija. Oba prispevka sta pomembna.

Naj bo dolžina vlakna L in trajanje posameznega sunka τ. Sunek potuje po vlaknu čas

$$T = \frac{L}{v_g} = L\frac{d\beta}{d\omega} \tag{9.6.2}$$

Svetloba ima končno spektralno širino $\Delta\omega$. Ta mora biti vsaj $1/\tau$, lahko pa je tudi večja, če svetlobni izvor, običajno polvodniški laser, ni povsem monokromatski. Ker vse spektralne komponente ne potujejo z isto hitrostjo, se sunek na koncu vlakna razleze za

$$\Delta\tau = \left|\frac{dT}{d\omega}\right| \Delta\omega = L\,\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\,\Delta\omega \tag{9.6.3}$$

Naj bo tudi razmik me zaporednimi sunki τ. Da se sunki ne bodo prekrivali, mora biti $\Delta\tau < \tau$ in sme biti najvišja frekvenca modulacije kvečjemu

$$\upsilon_{\max} = \frac{1}{2\Delta\tau} \tag{9.6.4}$$

Ločiti moramo dva mejna primera. Kadar je $\Delta\omega >> 1/\tau$, to je, kadar je spektralna širina izvora mnogo večja od širine zaradi modulacije, je

$$\upsilon_{\max} = \frac{1}{L\,\Delta\omega}\left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)^{-1} \tag{9.6.5}$$

Največja gostota informacije, ki jo lahko prenašamo po vlaknu, je v tem primeru obratno sorazmerna z dolžino vlakna in spektralno širino laserja.

V nasprotnem primeru, ko je laser dosti bolj monokromatski od razširitve zaradi same modulacije, imamo $\Delta\omega = 1/\tau$. Pri najvišji možni frekvenci modulacije $\upsilon_{\max}$ je $\tau \simeq \Delta\tau$ in je po enačbi 9.6.3

$$(\Delta\tau)^2 = L\,\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \tag{9.6.6}$$

in je

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{1}{L}\left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)^{-1}} \tag{9.6.7}$$

V tem primeru je najvišja frekvenca modulacije obratno sorazmerna s korenom dolžine vlakna.

Večji del dicperzije grupne hitrosti prinese materialna disperzija, to je, odvisnost lomnega količnika od frekvence. Primer meritve razširitve sunka z znano spektralno širino v izbrani dolžini vlakna kaže slika **??**. Pri valovni dolžini okoli 1,3 μm ima materialna disperzija, to je $d^2n/d\omega^2$, ničlo, ki je v celotni disperziji nekoliko premaknjena zaradi prispevka valovodne disperzije. Na valovodno disperzijo je mogoče vplivati s konstrucijo vlakna. Sredica je lahko sestavljena iz več plasti z različnimi lomnimi količniki in različnimi debelinami, s čimer se spremeni prispevek valovodne disperzije in se položaj ničle celotne disperzije premakne k valovni dolžini izvora.

Iz slike **??** razberemo, da je tipična disperzija enorodovnega vlakna okoli 10 ps/km pri spektralni širini 1 nm. Od tod je $d^2\beta/d\omega^2 = \Delta\tau\lambda/\left(\Delta\lambda L\omega\right) \simeq 5\cdot 10^{-23}$ s^2/m. Po enačbi 9.6.7 je v 100 km dolgem vlaknu tedaj najvišja frekvenca modulacije okoli 10^9 Hz. Pri zmogljivih zvezah na velike razdalje je torej za največjo dolžino vlakna brez obnovitve signala disperzija hujaša omejitev kot izgube. Največja možna razdalja in najvišje frekvenca modulacije sta danes nekaj sto kilometrov in nekaj GHz.

V mnogorodvnih vlaknih se sunek širi zaradi razli"nih grupnih hitrosti posameznih rodov. Različne grupne hitrosti v valovni sliki ustrezajo različni dolžini optične poti za žarke, ki potujejo pod različnimi koti glede na os vlakna. Te razlike so mnogo večje od disperzije v enorodnih vlaknih, zato je pri dani dolžini vlakna popačitev signala dosti večja in se mnogorodovna vlakna ne uporabljajo za dolge zveze.

9.7 Potovanje sunka po enorodovnem vlaknu

Poglejmo si nekoliko podrobneje, kako po enorodovnem vlaknu ali drugem sredstvu z disperzijo potuje sunek valovanja z dano začetno obliko. Denimo, da smo poiskali lastna valovanja in da torej poznamo zvezo med valovnim številom β in frekvenco ω. Zapišimo sunek v obliki

$$E\left(z,t\right) = a\left(z,t\right)\ \psi\left(x,y\right) \tag{9.7.1}$$

kjer je $\psi\left(x,y\right)$ lastna rešitev prečenega dela valovne enačbe, ki določa tudi $\beta\left(\omega\right)$. Funkcijo $a\left(z,t\right)$, ki opisuje širjenje sunka in njegovo obliko v z smeri, lahko zapišemo s Fourierovim integralom po frekvencah

$$a\left(z,t\right) = \int a(\omega,z)\, e^{-i\omega t} d\omega \tag{9.7.2}$$

Sunek naj bo približno monokromatičen s frekvenco ω_0, to pomeni, da je mnogo daljši od optične periode. Pri določeni ω ima Fourierova amplituda krajevno odvisnost $\exp[i\,\beta\left(\omega\right)\ z]$, zato zadošča enačbi

$$\frac{\partial a\left(z,\omega\right)}{\partial z} = i\,\beta\left(\omega\right)\ a\left(z,\omega\right) \tag{9.7.3}$$

Privzeli smo, da je spekter sunka ozek, zato lahko $\beta\left(\omega\right)$ razvijemo okoli ω_0:

$$\frac{\partial a\left(z,\omega\right)}{\partial z} = i\left[\beta\left(\omega_0\right) + \frac{d\beta}{d\omega}\ \left(\omega-\omega_0\right) + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\ \left(\omega-\omega_0\right)^2\right]\ a \tag{9.7.4}$$

Vpeljimo novo amplitudno funkcijo, ki ne bo vsebovala osnovne odvisnosti $\exp[i\beta\left(\omega_0\right) z]$

$$a\left(z,\omega\right) = A\left(z,\omega-\omega_0\right)\ e^{i\,\beta\left(\omega_0\right)\,z} \tag{9.7.5}$$

Ker je spkter različen od nič le okoli ω_0, je prikladno A pisati kot funkcijo $\omega - \omega_0$. Napravimo obratno Fourierovo transformacijo zadnjega izraza:

$$\begin{aligned} a(z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(z,\omega-\omega_0)\ e^{i\,[\beta(\omega_0)\,z-\omega\ t]}\,d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A(z,\omega-\omega_0)\ e^{-i(\omega-\omega_0)\,t} d(\omega-\omega_0)\ \ e^{i\,[\beta(\omega_0)\,z-\omega_0\,t]} \\ &= A(z,t)\ e^{i\,[\beta(\omega_0)\,z-\omega_0\,t]} \end{aligned} \tag{9.7.6}$$

Funkcija $A(z,t)$, katere Fourierova transformacija je $A(z,\omega)$, očitno predstavlja prostorsko in časovno odvisnost ovojnice sunka. Postavimo definicijo 9.7.5 v enačbo 9.7.4:

$$\frac{\partial A(z,\omega-\omega_0)}{\partial z} = i\left[\frac{d\beta}{d\omega}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}(\omega-\omega_0)^2\right] A(z,\omega-\omega_0) \tag{9.7.7}$$

Z obratno Fourierovo transformacijo dobimo

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial}{\partial t}\right) A(z,t) = -\frac{i}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial t^2} \tag{9.7.8}$$

Upoštevali smo, da je

$$\int (i\omega)^n A(z,\omega)\ e^{-i\omega t}\,d\omega = \frac{\partial^n}{\partial t^n} A(z,t) \tag{9.7.9}$$

in da je $d\beta/d\omega = 1/v_g$.

Enačba 9.7.8 opisuje razvoj oblike sunka pri širjenju po vlaknu. Če ni disperzije grupne hitrosti, to je, če je desna stran enačbe nič, je rešitev poljubna funkcija $f(z - v_g t)$. Sunek poljubne začetne oblike potuje po vlaknu nepopačen z grupno hitrostjo. Disperzija pa povzroči, da se spreminja tudi oblika. Enačbo lahko še nekoliko poenostavimo z vpeljavo novih neodvisnih spremenljivk

$$\begin{aligned} \tau &= t - \frac{z}{v_g} \\ \zeta &= z \end{aligned} \tag{9.7.10}$$

Za vrh sunka, ki naj ima pri $t = 0$ koordinato $z = 0$ in se giblje z grupno hitrostjo, je vselej $\tau = 0$. Spremenljivka predstavlja τ torej čas v točki $z = \zeta$, merjen od trenutka, ko tja prispe center sunka. Z novima spremenljivkama se enačba 9.7.8 zapiše

$$\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + 2\,i\,\frac{\partial A}{\partial \zeta} = 0 \tag{9.7.11}$$

Ta enačba ima isto obliko kot obosna valovna enačba, ki smo jo v drugem poglavju uporabili za obravnavo koherentnih snopov. Podobnost seže dlje od formalne oblike. Pri snopih, ki so omejeni v prečni smeri, disperzija fazne in grupne hitrosti po prečnih komponentah valovnega vektorja povzroča spreminjanje prečnega preseka snopa, pri časovno omejenih sunkih v sredstvu s frekvenčno disperzijo pa se spreminja vzdolžna oblika sunka. Kot se morda bralec spominja, je tudi v praznem prostoru pri širjenju snopa v okolici grla fazna hitrost funkcija frekvence. Zato se kratek sunek, ki je omejen v prečni smeri, tudi v praznem prostoru razširi tako v prečni kot v vzdolžni smeri. (Naloga)

Obosno valovno enačbo rešijo Gaussovi snopi. V en. 9.7.11 ima vlogo prečne koordinate τ. Po analogiji s snopi se bo zaradi disperzije najmanj širil sunek z Gaussovo časovno odvisnostjo. Računa nam ni treba ponavljati, kar v izrazu za Gaussove snope napravimo ustrezno zamenjavo črk. Valovnemu številu k pri snopih na primer ustreza parameter $\mu = (d^2\beta/d\omega^2)^{-1}$. Tako dobimo

$$A(\tau, \zeta) = \frac{A_0}{\sigma_0\sqrt{1+\frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-i\frac{\mu\tau^2}{2b}\right) e^{i\phi(\zeta)} \tag{9.7.12}$$

kjer je σ trajanje sunka, za katerega velja enaka zveza kot za polmer Gaussovega snopa:

$$\sigma^2 = \sigma_0^2\left(1+\frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}\right) \tag{9.7.13}$$

Tu je σ_0 trajanje sunka pri $\zeta = 0$, to je na mestu, kjer je sunek najkrajši. Dodatna skupna faza $\phi(\zeta)$ ni posebno pomembna, pač pa je zanimiv drugi eksponentni faktor v enačbi 9.7.12. V njem smo z $b = \zeta\left(1+\zeta_0^2/\zeta^2\right)$ označili količino, ki je analogna krivinskemu radiju valovnih front v primeru Gaussovih snopov. Odvod faze po τ predstavlja spremembo frekvence glede na centralno frekvenco sunka ω_0:

$$\omega - \omega_0 = \frac{\mu\tau}{b} \tag{9.7.14}$$

Za pozitivno disperzijo μ je frekvenca na prednji strani sunka, to je pri $\tau < 0$, večja in se linearno zmanjšuje proti koncu sunka. Pri $\zeta = 0$ je sunek toliko kratek, kolikor je možno pri dani spektralni širini. Pri potovanju po vlaknu se zaradi disperzije sunek razširi, spektralna širina pa ostaja enaka, zato se je del pojavi kot spreminjanje frekvence znotraj sunka. Lahko si mislimo tudi, da je sunek najkrajši, to je omejen z Fourierovo transformacijo spektra, tedaj, kadar se vse frekvenčne komponente seštejejo z isto fazo, to je pri $\zeta = 0$. Da dobimo najkrajše sunke, kadar je faza vseh delnih valov enaka, smo srečali že pri fazno uklenjenih sunkih iz mnogofrekvenčnih laserjev. Pri potovanju sunka se zaradi disperzije faze frekvenčnih komponent različno spreminjajo in sunek se podaljša. Zanimivo je, da je pri tem pomemben šele drugi odvod fazne hitrosti po frekvenci, ki je sorazmeren z μ, linearno spreminjanje faze pa ne povzroči razširitve.

Naloga: Pokaži, da je spekter sunka nespremenjen.

Naloga: Pokaži, da je za sunek poljubne začetne oblike razširitev mogoče zapisati z uklonskim integralom.

Naloga: Pokaži, da iz en. 9.7.13 sledi podobna ocena za maksimalno frekvenco modulacije (minimalno razširitev sunka) pri dani dolžini vlakna, kot jo da en. 9.6.7.

Razširitev sunka zaradi disperzije je pri $\dot{\mu} > 0$ mogoče kompenzirati s parom paralelnih uklonskih mrežic, kot kaže slika **??**. Prva mrežica različne frekvenčna komponente razkloni, druga pa zopet zbere, vendar dolžine optičnih poti za različne komponente niso enake. celoten učinek je enak kot pri razširjanju sunka po sredstvu z negativno disperzijo. Račun je nekoliko preglednejši, rezultat pa povsem enak, če namesto refleksijskih mrežic vzamemo transmisijski, kot kaže slika **??**. Naj na par vpada raven val pod kotom α. Pred prvo mre"ico je fazni faktor $\exp(ik_1x)$, kjer je $k_1 = \omega/c \sin\alpha$. Pri prehodu skozi mrežico se polje pomnoži s kompleksno prepustnostjo mrežice, ki povzroči razcep vala na uklonjene valove. Pri tem se faza za prvi uklonski red poveča za qx, kje je $q = 2\pi/\Lambda$ in je Λ perioda mrežice. Premik do druge mrežice poveča fazo za k_3L. Za komponento valovnega vektorja v smeri z velja seveda $k_3 = \sqrt{(\omega/c)^2 - (k_1+q)^2}$. Po prehodu skozi drugo mrežico nas zanima prvi negativni uklonski red, ki da val v smeri prvotnega vala. Za ta red se faza spremeni za $-qx$, tako da je celotna sprememba faze

$$\Phi = L\sqrt{(\omega/c)^2 - (k_1+q)^2} = \frac{L}{c}\sqrt{\omega^2 - (\omega\,\sin\alpha + qc)^2} \tag{9.7.15}$$

Disperzija, ki jo povzroči par mrežic, je določena zdrugim odvodom faze po frekvenci:

$$\frac{d^2\Phi}{d\omega^2} = -\frac{L\,q}{\left[\omega^2 - (\omega\,\sin\alpha + q\,c)^2\right]^{3/2}} \tag{9.7.16}$$

Drugi odvod je vselej negativen. Par mrežic torej deluje kot sredstvo z negativno disperzijo. Sunek, ki se je razširil zaradi potovanja po sredstvu s pozitivno disperzijo, lahko ponovno skrajšamo do meje, določene s širino spektra. Postopek se uporablja za pridobivanje zelo kratkih sunkov. Sunku iz fazno uklenjenega barvilnega ali Ti:safirnega laserja najprej v nelinearnem sredstvu razširijo spekter, pri čemer se sunek tudi časovno podaljša. O tem najde bralec nekaj več v poglavju o nelinearni optiki. Razširjen sunek nato s parom mrežic skrajšajo za faktor 10-100 glede na prvotno dolžino sunka. Tako dobijo sunke dolge le okoli 10 fs, kar je le še nekaj optičnih period.