Московский физико-технический институт

факультет инноваций и высоких технологий

Дискретный анализ

Лектор: А.М. Райгородский

конспект лекций

автор: Александр Марков

1 июня 2017 г.

Оглавление

Глава 1

1 семестр

1.1 Асимптотики комбинаторных величин

1.1.1 Количество треугольников в $G(n,\ r,\ s)$

Определение 1.1.1. Графом называется пара множеств $(V,\ E) = G$, где V – множество каких-то объектов, а E – множество пар объектов из V.

Опишем некотрый граф $G(n,\ r,\ s)$, где $n,\ r,\ s \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим множество $\{1,\ \ldots,\ n\} =: [n]$. Пусть множество вершин описываемого графа $V(n,\ r)$ - множество всех r-элементных подмножеств в $[n]$. Нетрудно понять, что $|V| = C_n^r$. Соединим две вершины этого графа ребром, если мощность их пересечения равна в точности s.

Утверждение 1.1.1.1. В графе $G(n,\ r,\ s)$ число ребер равно $|E| = \frac{1}{2}C_n^r C_r^s C_{n-r}^{r-s}$

Доказательство. Разберем что написано: C_n^r – кол-во r-элементных подмножеств. C_r^s – кол-во способов выбрать s элементов из этого множества, по которым оно будет пересекаться с другим множеством. C_{n-r}^{r-s} – кол-во способов добрать оставшиеся элементы во 2-е множество. Деление на 2 возникает, т.к. каждое ребро было посчитано дважды. □

Определение 1.1.2. Граф называется регулярным, если степени всех его вершин равны.

Для примера, граф $G(n,\ r,\ s)$ – регулярен. $\deg(v) = C_r^s \cdot C_{n-r}^{r-s}$

Утверждение 1.1.1.2. Количество треугольников в графе $G(n,\ r,\ s)$ равно

$$\frac{|E|}{3}\Big(\sum_{i=0}^{s} C_s^i C_{r-s}^{s-i} C_{r-s}^{s-i} C_{n-2r+s}^{r-2s+i}\Big).$$

Доказательство. Зафиксируем 2 вершины, соединенные ребром. Кол-во способов сделать это $|E|$. Пусть i это мощность пересечения зафиксированных 2-х подмножеств с 3. Тогда:

- C_s^i – кол-во способов выбрать i элементов в пересечение всех троих множеств $v_1 \cap v_2 \cap v_3$

- C_{r-s}^{s-i} – кол-во способов выбрать элементы в $v_2 \cap v_3$ и $v_3 \cap v_1$.
- В v_3 выбрано $i + (s-i) + (s-i) = 2s - i$ элементов. Т.к. $|v_3| = r$, то необходимо выбрать еще $r - 2s + i$ элементов, отличных от уже выбранных и не лежащих в $v_1 \cup v_2$. Кол-во способов сделать это C_{n-2r+s}^{r-2s+i}
- Деление на 3 возникает, т.к. каждый треугольник был посчитан три раза.

□

При $r = \frac{n}{2}$, $s = \frac{n}{4}$ сумма в 1.1.1.2 равна: (для удобства $k = \frac{n}{4}$)

$$\sum_{i=0}^{k} \left(C_k^i\right)^4,$$

а значит, было бы приятно знать, чему равна сумма четвертых степеней биномиальных коэффициентов. Или же, чему она *асимптотически равна*.

1.1.2 Асимптотика биномиальных коэффициентов

Определение 1.1.3. Пусть даны две функции $f,\, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Тогда они называются *асимптотически равными* при $n \to \infty$, если $f(n) = (1 + o(1))g(n)$ или, что эквивалентно, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$. Обозначение $f \sim g$.

Пример 1.1.1. Рассмотрим C_{2n}^n. Понятно, что

$$\frac{2^{2n}}{2n+1} \leqslant C_{2n}^n \leqslant 2^{2n}.$$

Логарифмируя, получаем:

$2n\ln 2 - \ln(2n+1) \leqslant \ln C_{2n}^n \leqslant 2n\ln 2 \Rightarrow 2n\ln 2(1 - \frac{\ln(2n+1)}{2n\ln 2}) \leqslant \ln C_{2n}^n \leqslant 2n\ln 2 \Rightarrow 2n\ln 2(1 + o(1)) \leqslant \ln C_{2n}^n \leqslant 2n\ln 2 \Rightarrow \ln C_{2n}^n \sim 2n\ln 2$

Обозначение: Если a_n – некоторая функция и $\ln a_n \sim cn$, $c > 0$, то $\ln a_n \sim cn \iff a_n = (e^c + o(1))^n$

Теорема 1.1.1. *Формула Стирлинга (б/д)*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Теорема 1.1.2. *Пусть $a \in (0,\, 1)$. Тогда*

$$C_n^{[an]} = \left(\frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}} + o(1)\right)^n.$$

Доказательство. Распишем $C_n^{[an]} = \dfrac{n!}{[an]!(n-[an])!} = \dfrac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi[an]}\left(\frac{[an]}{e}\right)^{[an]}\sqrt{2\pi(n-[an])}\left(\frac{(n-[an])}{e}\right)^{(n-[an])}} =$

$P(n)\dfrac{n^n}{(an)^{an}(n-an)^{n-an}} = \left(\dfrac{1}{a^a(1-a)^{1-a}}\right)^n P(n)$

где $P(n) = \dfrac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi [an]}\sqrt{2\pi(n-[an])}}$.

Тогда
$$\ln C_n^{[an]} = \ln P(n) + n\ln\left(\frac{1}{(a)^a(1-a)^{1-a}}\right) \sim n\ln\left(\frac{1}{(a)^a(1-a)^{1-a}}\right)$$
что и требовалось.

(Поскольку $[an]^{[an]} = (an-\varepsilon)^{an-\varepsilon} \sim (an)^{an}(an)^{-\varepsilon}e^{-\varepsilon}$, а два последних множителя при логарифмировании "пропадают"). $\square$

Замечание. Найдем асимптотику C_n^k при различных k.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leqslant \frac{n^k}{k!}$$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k}{k!}\exp\left[\ln\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\right] \leqslant \frac{n^k}{k!}\exp\left[-\frac{1}{n}-\frac{2}{n}-\dots-\frac{k-1}{n}\right]$$
$$= \frac{n^k}{k!}\exp\left[\frac{-k(k-1)}{2n}\right]$$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k}{k!}\exp\left[\frac{-k(k-1)}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}+\dots+\frac{(k-1)^2}{n^2}\right)\right] =$$
$$= \frac{n^k}{k!}\exp\left[\frac{-k(k-1)}{2n} + o\left(\frac{k^3}{n^2}\right)\right]$$

Следствие. *При $k^2 = o(n)$, (т.е. $k = o(\sqrt{n})$) имеем $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$.*

Следствие. *При $k^3 = o(n^2)$, (т.е. $k = o\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$ и $o\left(\frac{k^3}{n^2}\right) \to 0$), а значит $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}e^{-\frac{k^2}{2n}}$.*

1.2 Основы теории графов

1.2.1 Определения. Деревья

Определение 1.2.1. *Графом* называется пара множеств $(V, E) = G$, где V – множество каких-то объектов, а E — множество пар объектов из V.

Определение 1.2.2. *Маршрутом* в графе $G = (V, E)$ называется последовательность $v_1 e_1 v_2 \ldots e_n v_{n+1}$. (e_i и v_i могут повторяться).

- Если $v_1 = v_{n+1}$, то маршрут называется *замкнутым.*
- Если все e_i в маршруте различны, то замкнутый маршрут называется *циклом*, а незамкнутый — *цепью (путем).*
- Цепь(цикл) называется *простой* (*-ым*), если все вершины в нем различны.

Определение 1.2.3. Граф называется *связным*, если любые две вершины графа соединены маршрутом.

Определение 1.2.4. *Дерево* — связный граф без циклов.

Теорема 1.2.1. *Для любого графа G следующие утверждения эквивалентны:*

1. *G — дерево,*
2. *между любыми 2-мя вершинами G есть ровно один простой путь,*
3. *G — связный граф и количество ребер в G на единицу меньше количества вершин,*
4. *в G нет циклов и количество ребер в G на единицу меньше количества вершин.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2):

Граф G — связен $\Rightarrow$ между любыми вершинами есть хотя бы 1 маршрут. Если же между какими-то 2-мя вершинами есть 2 пути, то значит в G найдется цикл. Путь не может зайти в одну вершину два раза, т.к. это противоречит ацикличности, а значит любой путь в графе G — простой.

2) $\Rightarrow$ 3):

Очевидно, что G — связен. Докажем, что $|E| = |V| - 1$ по индукции по числу вершин. Для $|V| = 1, 2$ утверждение очевидно. Предположим, что $|V| = n$, а утверждение верно для всех $k < n$. Удалим из графа G некоторое ребро. Т.к. между любыми двумя вершинами существует **ровно один** простой путь, то G распался на 2 компоненты связности. Применим предположение индукции для каждой из них и получим требуемое.

3) $\Rightarrow$ 4):

Если в G есть цикл, то одно из его ребер можно удалить из графа без потери связности. Получим связный граф на n вершинах с $n - 2$ ребрами, чего быть не может.

4) $\Rightarrow$ 1):

Если в G несколько компонент связности, то хотя бы в одной из компонент число дуг не меньше числа вершин. Но тогда в ней есть цикл. $\square$

Обозначим за t_n количество различных деревьев на n занумерованных вершинах. Выпишем первые значения

$$t_1 = 1$$
$$t_2 = 1$$
$$t_3 = 3$$
$$t_4 = 16$$
$$t_5 = 125$$

Интуитивно можно догадаться до следующего утверждения:

Теорема 1.2.2. *(формула Кэли)*

Пусть $n > 1$. *Тогда* $t_n = n^{n-2}$.

Доказательство. Построим биекцию между помеченными деревьями и словами длины $n-2$ над алфавитом $\{1, \ldots, n\}$ (Эта биекция называется *коды Прюфера*). Для этого используется следующим очевидным утверждением:

Утверждение 1.2.1.1. В каждом дереве на $n > 1$ вершинах есть висячая вершина (вершина степени 1). *(б/д)*

Докажем инъективность кодов Прюфера по индукции. Случаи когда $|V| = 2, 3$ проверяются руками. Предположим, что два различных дерева T_1, T_2 отвечают одному коду $v_1 \ldots v_n$, $v_i \in \{1, \ldots, n\}$. Возможны следующие случаи:

1. Листы с наименьшем номером в T_1 и T_2 различны. Но тогда различны их коды Прюфера. (т.к. каждая вершина v_i появляется в коде ровно $\deg(v_i) - 1$ раз.

2. Листы с наименьшим номером совпадают, но различны их соседи. Но тогда их коды отличаются по очевидным причинам.

3. Если совпадают листы с наименьшими номерами и их соседи, то первое число кодов деревьев совпадают, но после вычеркивания остаются два дерева, коды которых различны по предположению индукции.

Примем факт того, что φ — сюръекция, без доказательства. $\square$

1.2.2 Унициклические графы

Определение 1.2.5. Граф G называется *унициклическим*, если он связен и содержит ровно один цикл.

Обозначим за $U(n)$ количество унициклических графов на n вершинах. Достаточно трудно, но можно понять, что справедлива формула

$$U(n) = \sum_{r=3}^{n} C_n^r \frac{(r-1)!}{2} n^{n-1-r} r$$

где

1. $r \in \{3, \ldots, n\}$ — длина единственного цикла,
2. C_n^r — число способов выбрать r вершин в цикл,
3. $\frac{(r-1)!}{2}$ — число способов расставить на них цикл,
4. Пусть цикл состоит из вершин $v_1, \ldots, v_r$. Если выкинуть ребра цикла, то останется лес из r деревьев на n вершинах, где i-ое дерево содержит v_i. Таких деревьев ровно $n^{n-1-r}r$.

Теорема 1.2.3.

$$U(n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} n^{n-\frac{1}{2}}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} U(n) &= \sum_{r=3}^{n} C_n^r \frac{(r-1)!}{2} n^{n-1-r} r \\ &= \frac{1}{2} n^{n-1} \sum_{r=3}^{n} n(n-1)\ldots(n-r+1)n^{-r} \\ &= \frac{1}{2} n^{n-1} \sum_{r=3}^{n} (1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{r-1}{n}) \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно $\sum\limits_{r=3}^{n}(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{r-1}{n})$. По доказанному ранее

$$\begin{aligned} &\sum_{r=3}^{n}(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{r-1}{n}) = \\ &= \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]}(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{r-1}{n}) + \sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{n}(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{r-1}{n}) \\ &= S_1 + S_2, \end{aligned}$$

Оценим сначала S_2:

$$
\begin{aligned}
S_2 &\leqslant \sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{n} \exp\Big[-\frac{r(r-1)}{2n}\Big] \\
&\leqslant \sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{n} \exp\Big[-\frac{n^{0,6}(n^{0,6}-1)}{2n}\Big] \\
&= \sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{n} \exp\Big[-\frac{n^{1,2}(1+o(1))}{2n}\Big] \\
&= \sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{n} \exp\Big[-\frac{n^{0,2}(1+o(1))}{2}\Big] \\
&< ne^{-\frac{n^{0,2}(1+o(1))}{2}} \to 0
\end{aligned}
$$

Теперь оценим S_1. Для этого заметим сначала, что при $r > \sqrt{n}$ дробь $\frac{-r(r-1)}{2n} \to -\infty \Rightarrow \exp\big[\frac{-r(r-1)}{2n}\big] \to 0$, а при $r < n^{\frac{2}{3}}: O(\frac{r^3}{n^2}) = o(1)$. Тогда имеем

$$
\begin{aligned}
S_1 &\sim \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} \exp\Big[-\frac{r(r-1)}{2n} + O(\frac{r^3}{n^2})\Big] \\
&\sim \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} \exp\Big[-\frac{r(r-1)}{2n}\Big] \\
&\sim \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} \exp\Big[-\frac{r^2}{2n}\Big] \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \exp\Big[-\frac{r^2}{2n}\Big] - \sum_{r=0}^{2} \exp\Big[-\frac{r^2}{2n}\Big] - \sum_{r=[0,6n]+1}^{\infty} \exp\Big[-\frac{r^2}{2n}\Big]
\end{aligned}
$$

Очевидно, что $\sum\limits_{r=0}^{2} \exp\Big[-\frac{r^2}{2n}\Big] \to 3$ при $n \to \infty$, а

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty} \exp\Big[-\frac{r^2}{2n}\Big] &\sim \int\limits_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2n}} dr \\
&= \sqrt{n} \int\limits_{x=0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \sqrt{n}\frac{\sqrt{\pi 2}}{2} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{\infty} \exp\Big[-\frac{r^2}{2n}\Big] = \underbrace{\sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{n^2} \exp\Big[-\frac{r^2}{2n}\Big]}_{S_1'} + \underbrace{\sum_{n^2+1}^{\infty} \exp\Big[-\frac{r^2}{2n}\Big]}_{S_2'}
$$

Аналогично оценке S_2, $S_1' \leqslant \sum\limits_{r=[n^{0.6}]+1}^{n^2} e^{-\frac{n^{1,2}}{2n}} < n^2 e^{-\frac{n^{0,2}}{2}} \to 0$. Для того, чтобы оценить S_2' заметим, что отношение соседних слагаемых в S_2' на самом деле не превосходит e^{-n}. Действительно

$$
e^{-\frac{(r+1)^2-r^2}{2n}} = e^{-\frac{2r-1}{2n}} < e^{-\frac{r}{n}} < e^{-n}.
$$

Тогда имеем:

$$S'_2 < \exp\Big[-\frac{(n^2+1)^2}{2n}\Big](1+e^{-n}+e^{-2n}+\ldots) = \exp\Big[-\frac{(n^2+1)^2}{2n}\Big]\frac{1}{1-e^{-n}} \to 0.$$

Итого получается

$$U(n) \sim \frac{1}{2}n^{n-1}(S_1+S_2) \sim \frac{1}{2}n^{n-1}\sqrt{\frac{\pi n}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}n^{n-\frac{1}{2}}.$$

□

1.2.3 Эйлеровы графы

Определение 1.2.6. Граф называется *эйлеровым*, если он является циклом (т.е. существует простой замкнутый маршрут, проходящий по всем ребрам этого графа).

Теорема 1.2.4. *Для связного графа следующие утверждения эквивалентны:*

1. *граф эйлеров,*
2. *степень каждой вершины графа четная,*
3. *множество ребер графа распадается в объединение непересекающихся по ребрам простых циклов.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2): Очевидно.

2) $\Rightarrow$ 3):

Зафиксируем вершину x_1. Выберем любого его соседа x_2. Так как $\deg(x_2) > 0$ и четная, то $\exists x_3 \neq x_1 \in V$, связанный ребром с x_2. Будем идти далее по произвольному ребру из только что выбранной вершины x_k, пока не вернемся в одну из уже выбранных вершин. Тогда мы найдем некоторый простой цикл Z_1. Удалим все его ребра из G и получим новый граф, возможно с несколькими компонентами связности. Проделаем аналогичную операцию в остальных компонентах и заметим при этом, что величина $|V|+|E|$ уменьшается. Проделая так в каждой компаненте, мы разобьем множество E на требуемое объединение.

3) $\Rightarrow$ 1):

Доказательство по индукции. Для одного простого цикла утверждение очевидно. Предположим что в G больше простых циклов. Удалим один простой цикл C. Полученный граф G' расподется на некоторые компоненты связности, каждая из которых распадается на простые циклы. Начнем обходить граф G по вершинам цикла C, причем если мы попали в вершину $v \in V$, лежащую в одной из компонент связности G', то обойдем ее по предположению индукции и вернемся в v. Продолжим идти по циклу C, обходя еще не посещенные компоненты связности G'. Таким образом, мы обойдем весь граф G. □

1.2.4 Планарные графы

Определение 1.2.7. Пусть дан граф $G = (V, E)$. *Укладкой* графа G на плоскости назовем пару отображений (F, H), такую что:

$$F : V \to S,\ S \subset \mathbb{R}^2,\ |S| < \infty \text{ — биекция}$$

$$H : E \to \text{ некоторые гладкие кривые, т.ч. } (u, v) \in E \iff H(u, v) \text{ соединяет } F(u) \text{ с } F(v)$$

Плоской (планарной) называют такую укладку, у которой никакая пара кривых, соответствующих ребрам графа G, не пересекается в точках, отличных от образа F, причем если две кривых пересекаются в вершине, то эта вершина является концом этих кривых.

Граф называется планарным, если существует его плоская укладка на плоскости.

Определение 1.2.8. *Грань* планарной укладки — область, ограниченная циклом или незамкнутой кривой и не содержащая циклов внутри себя.

Теорема 1.2.5. *(Эйлер)*

Пусть граф G связен и планарен, $|V| = n$, $|E| = e$. Тогда для любой его планарной укладки с числом граней f верно равенство

$$n - e + f = 2$$

Доказательство. Индукция по $e - n$.

База: $e - n = -1 \Rightarrow G$ — дерево и $f = 1$.

Переход: Поскольку G не дерево, то в нем имеются циклы. Удалим из G одно ребро (из некоторого цикла), отделяющее две различные грани. Получим граф G', в котором $f' = f - 1$, $e' = e - 1$, $n' = n$. Тогда

$$2 = n' - e' + f' = n - (e - 1) + (f - 1) = n - e + f.$$

□

Следствие. *Пусть G — связный планарный граф и есть какая-то его укладка. Пусть t — длина наименьшего цикла в G. Тогда*

$$e \geqslant \frac{t}{2} f.$$

Доказательство. Пусть e_i — число ребер, отделяющих i грань от других, $i = 1, \ldots, f$. Тогда

$$2e \geqslant \sum_{i=1}^{f} e_i \geqslant tk.$$

□

Следствие. *Пусть G — связный планарный граф и есть какая-то его укладка. Пусть t — длина наименьшего цикла в G. Тогда*

$$e \leqslant \frac{t}{t - 2}(n - 2).$$

Доказательство. По теореме Эйлера

$$2 = n - e + f \leqslant n - e + \frac{2}{t}e = \frac{2-t}{t}e + n.$$

$\square$

Утверждение 1.2.4.1. Графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.

Доказательство. Применяем следствие 1.2.4. Для K_5 : $n = 5, e = 10, t \geqslant 3$; для $K_{3,3} : n = 6, e = 9, t \geqslant 4$. $\square$

Утверждение 1.2.4.2. Если граф планарен, то $e \leqslant 3n - 6$.

Доказательство. $e \leqslant \frac{t}{t-2}(n-2) \leqslant 3n - 6$. $\square$

Определение 1.2.9. Граф G *гомеоморфен* графу H, если существует конечная цепочка преобразований $f_1, \ldots, f_n$, каждое из которых имеет один вид из следующих:

1. Изоморфизм графов.
2. Удаление ребра (u, v), добавление новой вершины w в граф и ребер (u, w), (w, v) — разбиение ребра.
3. Удаление ребра (u, v) и вершин u, v, вставка новой вершины w, связанной ребрами со всеми, с кем были связаны u и v — стягивание ребра (u, v),

которая начинается с G, а заканчивается в H.

Теорема 1.2.6. *(б/д, Критерий Понтрягина-Куратовского)*

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$.

Определение 1.2.10. Граф H называется*минором* графа G, если из G можно получить H цепочкой преобразований, каждое из которых либо удаление, либо стягивание ребра.

Теорема 1.2.7. *(б/д, Критерий Визинга)*

Граф G планарен тогда и только тогда, когда G не содержит подграфа, являющегося минором для K_5 или $K_{3,3}$.

Теорема 1.2.8. *Вершины любого связного планарного графа G можно покрасить в 5 цветов так, чтобы любые две соседние вершины имели разный цвет.*

Доказательство. Покажем сначала, что в G есть вершина степени $\leqslant 5$. Действительно, если $\forall v \deg v \geqslant 6$, то $e \geqslant \frac{1}{2}\sum \deg v_i \geqslant 3n$ — противоречие с утверждением 1.2.4.2.

Индукция по числу вершин.

База: $n \leqslant 5 \Rightarrow$ каждую вершину красим в свой цвет.

Шаг: Пусть v это вершина степени $\leqslant 5$. Если $\deg v < 5$, то удалим v, раскрасим оставшийся граф по предположению индукции в 5 цветов и покрасим v в оставшийся цвет.

Пусть $\deg v = 5$ и все соседи v покрашены в разные цвета. Занумеруем связанные с v вершины по часовой стрелке: $v_1, \ldots, v_5$. Пусть $V_{1,3}$ — все те вершины G, до которых можно дойти из v_1 только по вершинам 1 и 3 цвета. Если $v_3 \notin V_{1,3}$, то поменяем цвет всех вершин из $V_{1,3}$ на противоположный и покрасим v в первый цвет.

Если же $v_3 \in V_{1,3}$, то рассмотрим множество $V_{2,4}$ тех вершин, в которые можно дойти из вершины v_2 только по вершинам 2 и 4 цвета. Если $v_4 \in V_{2,4}$, то граф G не планарный, поскольку $V_{2,4}$ целиком содержится внутри цикла из вершин цветов 1, 3 и v. Тогда меняем цвет на противоположный в $V_{2,4}$ и красим v во второй цвет. $\square$

1.2.5 Гамильтоновы графы

Определение 1.2.11. Граф называется *гамильтоновым*, если существует простой цикл, проходящий через все вершины графа.

Теорема 1.2.9. *(признак Дирака)*

Если в связном графе n вершин степень любой вершины $\geqslant \frac{n}{2}$, то этот связный граф — гамильтонов.

Доказательство. Пусть $P = v_1 v_2 \ldots v_k$ — самый длинный путь в графе G. Если v_1 смежна с некоторой вершиной $x \notin P$, то существует путь длиннее P — противоречие. Аналогичное рассуждение с $v_k \Rightarrow v_1$ и v_k смежны **только** с вершинами из P. Поскольку $\deg(v_1) \geqslant \frac{n}{2}$ и в графе нет петель, то $k \geqslant \frac{n}{2} + 1$.

Утверждение 1.2.5.1. Существует $1 \leqslant j \leqslant k$, такое что v_j инцидентна с v_k, а v_{j+1} с v_1.

Доказательство. Предположим, что такой ситуации не оказалось. Тогда в P есть как минимум $\deg(v_1)$ вершин, несвязанных с v_k (предыдущие в пути от соседей v_1). Поскольку все вершины, связанные с v_k находятся в пути и v_k не инцидентная сама с собой, то в P хотя бы $\deg(v_1) + \deg(v_k) + 1 = n + 1$ вершин. Противоречие. $\square$

Из утверждения следует, что в G существует простой цикл $C = v_{j+1} \ldots v_k v_j v_{j-1} \ldots v_1 v_{j+1}$. Покажем, что этот цикл — гамильтонов. Предположим, что существует $v \in V \backslash C$. Поскольку граф связен, v должна быть связана каким-то путем с некоторой $v_i \in C$. Но тогда существует путь $P' = v$ — путь от v до C — круг по C, длиннее чем P, что противоречит выбору P. $\square$

Определение 1.2.12. Пусть дан граф $G = (V, E)$. Тогда его *числом независимости* называется число $\alpha(G) = \max\{k \in \mathbb{N} : \exists W \subseteq V : |W| = k \wedge \forall x, y \in W\ (x, y) \notin E\}$. Множество вершин W, между любыми двумя из которых нет ребра, называется *независимым* множеством вершин.

Определение 1.2.13. Вершинной связностью графа, обозначаемой $k(G)$, называется *минимальное количество вершин*, в результате удаления которых граф перестает быть связным.

Теорема 1.2.10. *(признак Эрдеша-Хватала)*

Пусть $G = (V,\ E)$ *— граф, такой, что* $|V| \geqslant 3$ *и* $\alpha(G) \leqslant k(G)$. *Тогда* G *— гамильтонов.*

Доказательство. Положим $n := |V| \geqslant 3$.

Предположим сначала, что в G нет циклов. Поскольку $\alpha(G) \geqslant 1$ и $k(G) \geqslant \alpha(G)$, граф связный, а значит G это дерево. Т.к. $n \geqslant 3$, то в G есть хотя бы две несвязные висячие вершины (*это упражнение*), а значит

$$\begin{cases} \alpha(G) \geqslant 2 \\ k(G) \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ предположение неверно}$$

а значит в G есть хотя бы один цикл.

Пусть $C = \{x_1, \ldots, x_k\}$ — самый длинный простой цикл в G, причем $k < n$. Удалим из G все вершины, лежащие в C, и обозначим за W любую связную компоненту в оставшемся графе. Определим $N_W(G) = \{x \in V :\ x \notin W\ \wedge\ \exists y \in W :\ (x,\ y) \in E\}$. Сразу ясно, что $N_W(G) \subseteq C$ (действительно, связаность могла нарушиться только из-за удаления ребер в C). Более того, $N_W(G)$ не содержит $\{x_i, x_{i+1}\}$ для любого i из множества $\{1, \ldots, k\}$ (положим $x_{k+1} = x_1$), иначе в G есть цикл, длиннее C (доказателство картинкой). Все вышесказанное означает, что $N_W(G) \subset C$ и $N_W(G) \neq C$, а значит $k(G) \leqslant |N_W(G)|$, поскольку

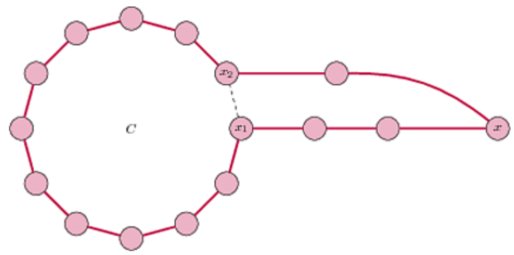

Рис. 1.1: цикл, длиннее чем C в первом случае

при удалении $N_W(G)$ множество W уже образует отдельную компоненту связности. Определим $M := \{x_{i+1} \mid x_i \in N_W(G)\} = \{y_i\}$ — соседи всех x_i из $N_W(G)$, например, против часовой стрелки. Из рисунка выше следует, что $M \cap N_W(G)$ пусто $\Rightarrow |M| = |N_W(G)| \geqslant k(G)$. Заметим теперь, что M — независимое множество, иначе в G, опять-таки, есть цикл длиннее C (доказательство картинкой :)). а значит

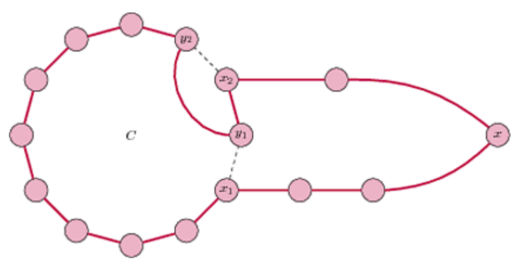

Рис. 1.2: цикл, длиннее чем C во втором случае

$|M| \leqslant \alpha(G)$, откуда $\alpha(G) \geqslant |M| \geqslant k(G)$.

Рассмотрим произвольную вершину $v \in W$ и множество $M \cup \{v\}$. Поскольку $N_W(G) \cap M = \varnothing$, то $M \cup \{v\}$ — тоже независимое множество, а значит $\alpha(G) \geqslant |M \cup \{v\}| = |M| + 1 \geqslant k(G) + 1 > k(G)$ — противоречие. $\square$

Следствие. *Рассмотрим $G(n,\, 3,\, 1)$ — граф, $V = \{\overline{x} = (x_1,\, \ldots,\, x_n) : x_i \in \{0,\, 1\},\, x_1 + \ldots + x_n = 3\} = \{A \subset \{1,\, \ldots n\} : |A| = 3\}$, $E = \{(\overline{x},\, \overline{y}) : \langle \overline{x},\, \overline{y} \rangle = 1\} = \{(A,\, B) : |A \cap B| = 1\}$. Начиная с некоторого, n этот граф — гамильтонов.*

Доказательство. Сначала поймем, почему для этого графа не применим признак Дирака. Действительно, $|V| = C_n^3 \sim \frac{n^3}{6}$, а степень любой вершины $\deg(x) = 3 \cdot C_{n-3}^2 \sim \frac{3n^2}{6}$, т.е. при больших n количество ребер, выходящих из каждой вершины, примерно в n раз меньше общего количества вершин. Воспользуемся теоремой Эрдеша-Хватала. Для этого найдем $\alpha(G)$ и $k(G)$.

Пусть $W = \{x_1,\, \ldots,\, x_s\}$ — независимое множество вершин в G. Это означает, что

$$\forall i \neq j,\, \langle x_i,\, x_j \rangle = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

Это означает, что вектора $\{x_1,\, \ldots,\, x_s\}$ линейно-независимы в пространстве $\mathbb{Z}_2^n$. Действительно, рассмотрим их произвольную нулевую линейную комбинацию: $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = 0$ с $c_i \in \mathbb{Z}_2$. Умножение обеих частей равенства скалярно на x_i доказывает, что $c_i = 0$, откуда следует, что $|W| \leqslant \dim \mathbb{Z}_2^n = n \Rightarrow \alpha(G) \leqslant n$.

Рассмотрим теперь две несмежные вершины A и B и обозначим за $N \subset V$ множество их общих соседей. Легко понять, что $\min |N| \leqslant k(G)$. Рассмотирм случаи:

1. $A \cap B = \varnothing$. Тогда $|N| = 3 \cdot 3 \cdot C_{n-6}^1 = 9n - 54$, что больше n при $n \geqslant 7$
2. $|A \cap B| = 1$. Тогда $|N| \geqslant C_{n-5}^2$ (посчитаны только соседи, пересекающиеся с A и B по их общему элементу), что с некоторого n тоже больше n.
3. $|A \cap B| = 2$. В таком случае $|N| \geqslant 2C_{n-4}^2$ (посчитаны только соседи, пересекающиеся с A и B по их общим элементам), что так же больше n с некоторого момента.

Мы получили, что начиная с некоторого n верно неравенство $\alpha(G) \leqslant k(G)$. По теореме Эрдеша-Хватала, граф G — гамильтонов. $\square$

Факт.

$$\alpha(G(n,\, 3,\, 1)) = \begin{cases} n, & n \equiv 0 \pmod 4, \\ n-1 & n \equiv 1 \pmod 4, \\ n-2 & \textit{иначе.} \end{cases}$$

(попробуйте привести явную конструкцию)

1.3 Случайные графы

Предполагается, что читатель знаком с фактами из теории вероятностей, используемыми в этом разделе и далее в курсе, поэтому упоминаться и доказываться здесь отдельно они не будут.

1.3.1 Немного о случайном блуждании

Теорема 1.3.1. *Рассмотрим модель простейшего симметричного случайного блуждания $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Для удобства обозначим $S_n = \xi$. Тогда для любого $a > 0$ верно:*

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant a) \leqslant e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

Доказательство. Сначала проясним, почему эта оценка в значительной степени улучшает неравенство Чебышева. Заметим, что $\mathsf{E}\xi = 0$, а значит

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant a) = \mathsf{P}(\xi - \mathsf{E}\xi \geqslant a - \mathsf{E}\xi) \leqslant \mathsf{P}(|\xi - \mathsf{E}\xi| \geqslant a - \mathsf{E}\xi) = \\ = \mathsf{P}(|\xi - \mathsf{E}\xi| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathsf{D}\xi}{a^2} = \frac{n\mathsf{D}\xi_1}{a^2} = \frac{n}{a^2}$$

Если взять $a = n^{\frac{2}{3}}$, то, по выше доказанному, $\mathsf{P}(\xi \geqslant a) \leqslant n^{-\frac{1}{3}}$. С другой стороны, применяя теорему, $\mathsf{P}(\xi \geqslant a) \leqslant \exp\Big[-n^{\frac{1}{3}}/2\Big]$, что с ростом n убывает к 0 значительно быстрее.

Приступим к доказательству теоремы: возьмем произвольное $\lambda > 0$. Получим

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant a) = \mathsf{P}(\lambda\xi \geqslant \lambda a) = \mathsf{P}(e^{\lambda\xi} \geqslant e^{\lambda a}) \leqslant e^{-\lambda a}\mathsf{E}e^{\lambda a}.$$

Последняя оценка обусловлена неравенстом Маркова. Далее, т.к. $\xi_1, \ldots \xi_n$ — независимые, имеем: $\mathsf{E}e^{\lambda\xi} = \mathsf{E}e^{\lambda\xi_1} \ldots \mathsf{E}e^{\lambda\xi_n}$. При этом ясно, что

$$\mathsf{E}e^{\lambda\xi_i} = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \leqslant e^{\frac{\lambda^2}{2}},$$

и в итоге

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant a) \leqslant e^{-\lambda a}e^{n\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Взяв $\lambda = \frac{a}{n}$ получаем требуемое. □

Замечание. Это частный случай неравенства больших уклонений.

1.3.2 Модель Эрдеша-Реньи случайного графа

Для удобства будем считать, что множеством вершин случайного графа является $V = V_n = \{1, \ldots, n\}$.

Определение 1.3.1. Зафиксируем число вершин в графе n. Рассмотрим полный граф K_n и занумеруем все его ребра в некотором порядке: $e_1, e_2, \ldots, e_N$, где $N = C_n^2$. Пусть вероятность "появления"ребра в графе равна p, все ребра появляются с равной вероятностью и независимо друг от друга. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, где $\Omega = \{$ множество последовательностей из 0 и 1 длины C_n^2 $\}, \mathscr{F}_n =$

2^Ω, $\mathsf{P}(G) = p^{|E|}q^{\binom{n}{2}-|E|}$ и $|E|$ это число единиц в $\omega \in \Omega$. Тогда граф $G = G(n, p) = (\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}_{n,p})$ является *моделью Эрдеша-Реньи случайного графа.* При этом 0 на i-том месте означает отсутствие ребра e_i в графе, а 1 — присутствие.

Определение 1.3.2. Некоторое свойство A_n выполняется *асимптотически почти наверное*, если $\mathsf{P}(A_n) \to 1$, $n \to \infty$.

Для знакомства со случайными графами полезно рассмотреть следующую теорему

Теорема 1.3.2. *Пусть $G(n, p)$ — случайный граф, вероятность появления ребра в котором равна $p = p(n) = o(\frac{1}{n})$. Тогда асимптотически почти наверное граф не содержит треугольников (т.е. подграфов K_3).*

Доказательство. Рассмотрим случайную величину X равную числу треугольников в графе G. Нам нужно доказать, что $\mathsf{P}(X = 0) \to 1$ при $n \to \infty$, что эквивалентно $\mathsf{P}(X \geqslant 1) \to 0$. Воспользуемся неравенством Маркова: $\mathsf{P}(X \geqslant 1) \leqslant \mathsf{E}X$. Покажем, что в случае $p = \frac{\alpha(n)}{n}$, $\alpha(n) \to 0$, $n \to \infty$ математическое ожидание X стремится к 0.

Пусть $t_1, \ldots, t_k$ — все тройки вершин из G. Нетрудно понять, что $k = C_n^3$. Введем случайные величины $X_1, \ldots, X_k$, такие что $X_i = I(t_i$ образуют треугольник). Тогда, по свойствам математического ожидания, имеем

$$\mathsf{E}X = \mathsf{E}(X_1 + \ldots + X_k) = \mathsf{E}X_1 + \ldots + \mathsf{E}X_k = k\mathsf{E}X_1 = C_n^3\mathsf{P}(t_1 \text{ образует треугольник}) =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6}p^3 = \frac{n(n-1)(n-2)\alpha^3}{6n^3} \sim \frac{\alpha^3}{6} \to 0,\ n \to \infty$$

откуда сразу следует требуемое утверждение. □

1.3.3 Теоремы о связности случайного графа

Теорема 1.3.3. *Рассмотрим случайный граф $G(n, p)$. Пусть вероятность ребра в этом графе $p = p(n) = \dfrac{c \cdot \ln n}{n}$.*

1. *$c > 1$. Тогда асимптотически почти наверное случайный граф связан.*
2. *$c < 1$. Тогда асимптотически почти наверное случайный граф не связан. Более того, в нем почти наверное содержатся изолированные вершины.*
3. *(б/д) $p = \dfrac{\ln n + \lambda + o(1)}{n}$. Тогда вероятность того, что граф связан, стремится к числу $e^{-e^{-\lambda}}$*

Доказательство. 1. Покажем, что $\mathsf{P}(G$ не связен$) \to 0$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(G \text{ не связен }) &= \mathsf{P}(\text{ в графе есть хотя бы 2 компоненты связности}) \\ &= \mathsf{P}(\text{в } G \text{ есть связные компоненты, содержащие} \leqslant n-1 \text{ вершин}) \\ &= \mathsf{P}(\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{i=1}^{C_n^k} A_i^k \text{ образует к.с. в графе } G)\end{aligned}$$

где за $A_1^k, \ldots, A_{C_n^k}^k$ обозначим всевозможные подмножества V мощности k. Как известно, вероятность объединения не превосходит суммы вероятностей, а значит

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{i=1}^{C_n^k} A_i^k \text{ образует к.с. в графе } G\Big) &\leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{C_n^k}\mathsf{P}(A_i^k \text{ образует к.с. в графе } G)\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{C_n^k}\mathsf{P}(\forall v\in A_i^k\ \forall w\in V\backslash A_i^k:\ (v,\,w)\notin E)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{C_n^k}(1-p)^{k(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k(1-p)^{k(n-k)}
\end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемое при $k=1$. Воспользуемся тем, что $\ln(1+x) = x + o(x)$:

$$n(1-p)^{n-1} = ne^{(n-1)\ln(1-p)} = ne^{-pn(1+o(1))} = ne^{-c\ln n(1+o(1))} = \frac{n}{n^{c(1+o(1))}} \to 0.$$

Оставшуюся сумму оценим с помощью следующей идеи: обозначим за $a_k(n) = C_n^k(1-p)^{k(n-k)}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k(n) \to 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n/2} a_k(n) \to 0$$

поскольку $a_k(n)$ симметричны относительно центра $k_0 = \frac{n}{2}$. Предположим теперь, что выполнено неравенство

$$\frac{a_{k+1}(n)}{a_k(n)} \leqslant q(n) \to 0$$

В таком случае, имеем

$$\sum_{k=1}^{n/2} a_k(n) = a_1(n)\left(1 + \frac{a_2(n)}{a_1(n)} + \frac{a_3(n)}{a_2(n)}\cdot\frac{a_2(n)}{a_1(n)} + \ldots\right) \leqslant a_1(n)(1+q(n)+q^2(n)+\ldots) < \frac{a_1(n)}{1-q(n)} \to 0$$

Что ж, приступим к оценки оставшейся суммы:

$$\sum_{k=1}^{n/2} C_n^k(1-p)^{k(n-k)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n/\sqrt{\ln n}} a_k(n)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{k=n/\sqrt{\ln n}+1}^{n/2} a_k(n)}_{S_2}$$

Оценим S_1 с помощью нашей идеи:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{k+1}(n)}{a_k(n)} &= \frac{C_n^{k+1}(1-p)^{(k+1)(n-k-1)}}{C_n^k(1-p)^{k(n-k)}} = \frac{n-k}{k+1}(1-p)^{n-2k-1} <\\
&< n(1-p)^{n-2k-1} \leqslant n(1-p)^{n-\frac{2n}{\sqrt{\ln n}}-1} = n(1-p)^{n(1+o(1))}\\
&= ne^{-pn(1+o(1))} = q(n) \to 0
\end{aligned}$$

а значит $S_1 \to 0$.

Займемся $S_2:\ k > \dfrac{n}{\sqrt{\ln n}},\ k \leqslant \frac{n}{2}$. Для $a_k(n)$ имеем

$$\begin{aligned}
a_k(n) &= C_n^k(1-p)^{k(n-k)} < 2^n e^{-pk(n-k)} \leqslant 2^n e^{-pk\frac{n}{2}} \leqslant\\
&\leqslant 2^n \exp\Big[-\frac{c\ln n}{n}\cdot\frac{n}{\sqrt{\ln n}}\cdot\frac{n}{2}\Big]\\
&= 2^n \exp\Big[-\frac{cn\sqrt{\ln n}}{2}\Big] = \exp\Big[n\ln 2 - \frac{c}{2}n\sqrt{n}\Big] \to 0
\end{aligned}$$

В таком случае вся сумма $S_2 \leqslant n \exp\left[n \ln 2 - \frac{c}{2} n\sqrt{n}\right] = \exp\left[\ln n + n \ln 2 - \frac{c}{2} n\sqrt{n}\right] \to 0$, откуда следует утверждение первого пункта теоремы.

2. Докажем, что в условиях 2) в графе а.п.н. есть изолированная вершина. Пусть $X = X(G)$ — случайная величина, равная числу изолированных вершин в G, X_i — индикатор того, что $v_i \in V$ — изолированная. Найдем $\mathsf{D}X$. Легко понять, что

$$\mathsf{E}X = n(1-p)^{n-1} = ne^{(n-1)\ln(1-p)} = ne^{-pn(1+o(1))}$$

Далее

$$\mathsf{E}X^2 = \mathsf{E}X_1 + \ldots + \mathsf{E}X_n + \sum_{i \neq j} \mathsf{E}X_i X_j = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}$$

а значит $\mathsf{D}X = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - n^2(1-p)^{2n-2}$. Оценим $\mathsf{P}($ в G есть изолированная вершина$)$ по неравенству Чебышева.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathsf{P}(X \leqslant 0) = 1 - \mathsf{P}(\mathsf{E}X - X \geqslant \mathsf{E}X) \geqslant 1 - \mathsf{P}(|\mathsf{E}X - X| \geqslant \mathsf{E}X) \geqslant 1 - \frac{\mathsf{D}X}{(\mathsf{E}X)^2} \\
= \frac{n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - n^2(1-p)^{2n-2}}{(\mathsf{E}X)^2} = \\
= \frac{1}{\mathsf{E}X} + \frac{n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} - 1 = o(1) + 1 + o(1) - 1 = o(1) \to 0
\end{aligned}$$

поскольку $\frac{n(n-1)}{n^2} = 1 + o(1)$ и $\frac{(1-p)^{2n-3}}{(1-p)^{2n-2}} = \frac{1}{1-p} = 1 + o(1)$. Теорема доказана.

□

Теорема 1.3.4. *(б/д) Рассмотрим случайный граф $G(n, p)$, где $p = \frac{c}{n}$, $c > 0$.*

1. *если $c < 1$, то $\exists \beta > 0$ такая, что а.п.н. число вершин в каждой связной компоненте G не превосходит $\beta \ln n$,*

2. *если $c > 1$, то $\exists \beta > 0$, $\exists \gamma \in (0, 1)$ такие, что а.п.н. в G ровно одна связная компонента имеет $\geqslant \gamma n$ вершин, а все остальные связные компоненты состоят из $\leqslant \beta \ln n$ вершин.*

1.3.4 Теоремы о хроматическом числе случайного графа

Определение 1.3.3. Хроматическим числом графа G называется величина $\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : \ V = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_k \ \forall i \ \forall x, \ y \in V_i \ (x, \ y) \notin E\}$.

Утверждение 1.3.4.1. $\chi(G) \geqslant \frac{|V|}{\alpha(G)}$.

Доказательство. Действительно, $|V| = \sum\limits_{i=1}^{\chi(G)} |V_i| \leqslant \chi(G) \cdot \max |V_i| \leqslant \chi(G) \cdot \alpha(G)$. □

Определение 1.3.4. Кликовым числом графа G называется величина $\varkappa(G) = \max\{k \in \mathbb{N} : \ \exists W \subseteq V : |W| = k \ \wedge \forall x, \ y \in W \ (x, \ y) \in E\}$.

Заметим следующие очевидные соотношения между числом независимости, кликовым числом и хроматическим числом графа:

1. $\alpha(G) = \varkappa(\overline{G})$
2. $\chi(G) \geqslant \max\{\varkappa(G),\ \frac{|V|}{\alpha(G)}\}$

Теорема 1.3.5. *А.п.н. число независимости $\alpha(G)$ графа $G(n,\ \frac{1}{2})$ не превосходит $2\log_2 n$.*

Доказательство. Пусть $k := [2\log_2 n]$. Определим случайные величины $X_k(G)$ = количеству независимых множеств размера k в графе G. Тогда имеем

$$\mathsf{P}(\alpha(G) < k) = \mathsf{P}(X_k = 0) = 1 - \mathsf{P}(X_k \geqslant 1) \geqslant 1 - \mathsf{E}X_k = 1 - C_n^k 2^{-C_k^2}$$

Учитывая, что $k \in [2\log_2 n - 1,\ 2\log_2 n]$, получаем следующее

$$C_n^k 2^{-C_k^2} \leqslant \frac{n^k}{k!} 2^{-k(k-1)/2} = \frac{2^{k\log_2 n}}{k!} \cdot 2^{-\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2^{2\log_2^2 n - \dfrac{(2\log_2 n - 1)^2}{2} + \log_2 n}}{k!} = \frac{2^{3\log_2 n - \frac{1}{2}}}{k!} \to 0$$

поскольку

$$k! = [2\log_2 n]! > \left(\frac{k}{2}\right)^{\left(\frac{k}{2}\right)} > (\log_2 n - 1)^{\log_2 n - 1}$$

откуда $\mathsf{E}X_k \to 0 \Rightarrow \mathsf{P}(\alpha(G) < k) \to 1$. $\square$

Следствие. *А.п.н. $\chi(G) \geqslant \frac{n}{2\log_2 n}$ для $G(n,\ \frac{1}{2})$.*

Определение 1.3.5. Обхватом графа G называется величина $g(G)$, равная длине кратчайшего цикла в графе.

Теорема 1.3.6. *(Эрдёш, 1957)*

$$\forall k,\ l \in \mathbb{N}\ \exists G = (V,\ E):\ \ \chi(G) > k\ \wedge\ g(G) > l$$

Доказательство. Рассмотрим случайный граф $G(n,\ p)$ с вероятностью ребра $p = p(n) = n^{\theta - 1}$, где $\theta = \frac{1}{2l}$. Определим случайные величины X^r как количетсво простых циклов в графе G длины r и X_l, равные количество простых циклов длины $\leqslant l$. Имеем тогда:

$$\mathsf{E}X_l = \sum_{r=3}^{l} \mathsf{E}X^r = \sum_{r=3}^{l} \sum_{\substack{W \subseteq V \\ |W| = r}} \sum_{\text{нумерациям } W} p^r = \sum_{r=3}^{l} C_n^r \frac{(r-1)!}{2} p^r$$
$$\leqslant \sum_{r=3}^{l} \frac{n^r}{r!} \cdot \frac{(r-1)!}{2} p^r < \sum_{r=3}^{l} n^r p^r =$$
$$= \sum_{r=3}^{l} n^{\theta r} \leqslant l n^{\theta l} = l\sqrt{n}$$

а значит
$$\mathsf{P}(X_l \geqslant \frac{n}{2}) \leqslant \frac{\mathsf{E}X_l}{n/2} \leqslant \frac{l\sqrt{n}}{n/2} \to 0$$
откуда следует, что $\exists n_1\ \forall n > n_1:\ \mathsf{P}(X_l \geqslant \frac{n}{2}) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathsf{P}(X_l < \frac{n}{2}) > \frac{1}{2}$.

Пусть $m := \lceil \frac{3\ln n}{p} \rceil$. Определим случайную величину Y_m как количество независимых множеств на m вершинах в графе G.

$$\mathsf{P}(\alpha(G) < m) = \mathsf{P}(Y_m = 0) = 1 - \mathsf{P}(Y_m \geqslant 1) \geqslant 1 - \mathsf{E}Y_m = 1 - C_n^m (1-p)^{C_m^2}$$

причем
$$C_n^m(1-p)^{C_m^2} \leqslant \frac{n^m}{m!} e^{C_m^2 \ln(1-p)} < n^m e^{-\frac{m^2}{2}(1+o(1))p} = e^{m(\ln n - \frac{mp}{2}(1+o(1)))}$$
а, коль скоро
$$\ln n - \frac{mp}{2}(1+o(1)) = \ln n - 1,5\ln n(1+o(1)) \to -\infty$$
то $\mathsf{P}(\alpha(G) < m) \to 1 \Rightarrow \exists n_1\ \forall n > n_1 \mathsf{P}(\alpha(G) < m) > \frac{1}{2}$

Пусть $n \geqslant \max\{n_1,\ n_2\}$. Тогда
$$\exists G:\ V(G) = n \Rightarrow \alpha(G) < m,\ \ X_l(G) < \frac{n}{2}.$$

Перейдем от графа G к графу G', удаляя по одной любой вершины из каждого цикла длины $\leqslant l$. В полученном графе $V(G') \geqslant \frac{n}{2},\ \ \alpha(G') \leqslant \alpha(G) < m \Rightarrow \chi(G') \geqslant \frac{n}{2m},\ \ X_l(G) = 0$ (т.е. $g(G') \geqslant l$). Оценим $\chi(G')$:
$$\chi(G') = \frac{n}{2m} \sim \frac{n}{6\ln n}p = \frac{n^\theta}{6\ln n} = \frac{n^{1/2l}}{6\ln n} \to +\infty \Rightarrow \exists n_3:\ \chi(G') > k \text{ при } n \geqslant n_3$$
В таком случае, при $V(G) = n \geqslant \max\{n_1,\ n_2,\ n_3\}$ мы нашли требуемый граф. $\square$

Теорема 1.3.7. *(Боллобаш)*

Рассмотрим $G(n,\ p)$. Пусть $\alpha \in \left(\frac{5}{6},\ 1\right)$, $p = n^{-\alpha}$. Тогда существует такая функция $u(n,\ \alpha)$, что а.п.н.
$$u \leqslant \chi(G) \leqslant u + 3$$

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, установим несколько вспомогательных фактов.

Определение 1.3.6. Назовем функцию f от графа липшицевой по ребрам, если для любых двух графов G, G', таких что $V_G = V'_G$, отличающихся не более чем в одном в ребре, выполнено неравенство $|f(G) - f(G')| \leqslant 1$.

Пример 1.3.1. $f(G) = |E_G|,\ f(G) = \chi(G)$,

Определение 1.3.7. Назовем функцию f от графа липшицевой по вершинам, если для любых двух графов G, G', таких что $V_G = V'_G$, отличающихся не более чем во всех ребрах, связанных с одной вершиной, выполнено неравенство $|f(G) - f(G')| \leqslant 1$.

Теорема 1.3.8. *(б/д, следствие из неравенства Азумы)*

Пусть f — липшицева по вершинам функция. Тогда

$$\forall \lambda > 0: \ \mathsf{P}(|f - \mathsf{E}f| \geqslant \lambda\sqrt{n-1}) \leqslant 2^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

Лемма 1.3.1. *Пусть $\alpha \in \left(\frac{5}{6},\, 1\right)$, $p = n^{-\alpha}$. Тогда $\exists n_0\ \forall n \geqslant n_0$:*

$$\mathsf{P}(\forall S \subset V,\ |S| \leqslant \sqrt{n}\ln n:\ \chi(G|_S) \leqslant 3) \geqslant 1 - \frac{1}{\ln n}$$

Доказательство.

$$\mathsf{P}(\exists S \subset V : |S| \leqslant \sqrt{n}\ln n:\ \chi(G|_S) \geqslant 4) = \mathsf{P}(\exists S \subset V:\ |S| \in [4,\ \sqrt{n}\ln n]:\ \chi(G|_S) \geqslant 4) =$$
$$= \mathsf{P}(\exists S \subset V:\ |S| \in [4,\ \sqrt{n}\ln n]:\ \chi(G|_S) \geqslant 4,\ \text{но}\ \forall x \in S:\ \chi(G|_{S-x}) \leqslant 3) = \mathsf{P}(A)$$

т.е. в конце рассматривается минимальное S по включению. Заметим, что если выполнено событие под вероятностью, то $\forall x \in S \deg_{G|_S}(x) \geqslant 3$. А значит

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A) &\leqslant \mathsf{P}(\exists S \subset V:\ |S| \in [4,\ \sqrt{n}\ln n],\ \ E(G|_S) \geqslant \frac{3|S|}{2}) \\
&\leqslant \sum_{s=4}^{\sqrt{n}\ln n} \sum_{S\subset V,\ |S|=s} \mathsf{P}(E(G|_S) \geqslant \frac{3s}{2}) \\
&\leqslant \sum_{s=4}^{\sqrt{n}\ln n} \sum_{S\subset V} C_{C_s^2}^{3s/2} p^{3s/2} \\
&= \sum_s C_n^s C_{C_s^2}^{3s/2} p^{3s/2} \leqslant \sum_s \left(\frac{en}{s}\right)^s \left(\frac{eC_s^2}{3s/2}\right)^{3s/2} p^{3s/2}
\end{aligned}$$

где последнее неравенство верно из оценки $C_n^k \leqslant \frac{n^k}{k!}$ и формулы Стирлинга. Продолжаем

$$\begin{aligned}
&< \sum_s \left(\frac{en}{s} \cdot s^{3/2} \cdot p^{3/2}\right)^s = \sum_{s=4}^{\sqrt{n}\ln n} \left(en\sqrt{s}p^{3/2}\right)^s \\
&\leqslant \sum_{s=4}^{\sqrt{n}\ln n} \left(en\sqrt[4]{n}\sqrt{\ln n}p^{3/2}\right)^s < \sum_{s=4}^{\infty} \left(en^{5/4}n^{-3\alpha/2}\sqrt{\ln n}\right)^s \\
&< \sum_{s=4}^{\infty} \left(n^{-\beta}\right)^s = \frac{n^{-4\beta}}{1-n^{-\beta}} < \frac{1}{\ln n}
\end{aligned}$$

где последние два неравенства верны, начиная с некоторого n_0. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1.3.7. Пусть n таково, что для него выполняется лемма 1.3.1. Возьмем минимальное u, такое что $\mathsf{P}(\chi(G) \leqslant u) > \frac{1}{\ln n}$ (такое существует, поскольку чем меньше $u = n,\ n-1,\ \ldots,\ 1,\ 0,$ тем меньше соответствующая вероятность). Тогда $\mathsf{P}(\chi(G) \leqslant u-1) \leqslant \frac{1}{\ln n} \Rightarrow \mathsf{P}(\chi(G) \geqslant u) \geqslant 1 - \frac{1}{\ln n}$.

Введем функцию $f(G) := \min\{|S|:\ S \subset V$ и $\chi(G|_{V\setminus S}) \leqslant u\}$. Нетрудно понять, что f — липшицева по вершинам (действительно, рассмотрим некоторую $x \in V$. Удалим из графа все ребра, выходящие из x. Тогда x нужно либо добавить в множество $|S|$, либо же убрать из него. В любом случае, отличие в значениях функции f максимум в один). Возьмем $\lambda := \sqrt{2n \ln \ln n}$ (тогда $e^{-\lambda^2/2} = \frac{1}{\ln n}$). По теореме 1.3.8, верны следующие неравенства:

$$\mathsf{P}(f - \mathsf{E}f \geqslant \lambda\sqrt{n-1}) \leqslant e^{-\lambda^2/2}$$
$$\mathsf{P}(f - \mathsf{E}f \leqslant -\lambda\sqrt{n-1}) \leqslant e^{-\lambda^2/2}$$

Предположим, что $\mathsf{E}f \geqslant \lambda\sqrt{n-1}$. Тогда

$$\mathsf{P}(f - \mathsf{E}f \leqslant -\lambda\sqrt{n-1}) = \mathsf{P}(f \leqslant \mathsf{E}f - \lambda\sqrt{n-1}) \geqslant \mathsf{P}(f \leqslant 0) = \mathsf{P}(\chi(G) \leqslant u) > \frac{1}{\ln n}$$

что противоречит следствию 1.3.8.

Значит, $\mathsf{E}f < \lambda\sqrt{n-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(f \geqslant \mathsf{E}f + \lambda\sqrt{n-1}) \leqslant \frac{1}{\ln n} \\
&\Rightarrow \mathsf{P}(f \geqslant 2\lambda\sqrt{n-1}) \leqslant \frac{1}{\ln n} \\
&\Rightarrow \mathsf{P}(f < 2\lambda\sqrt{n-1}) \geqslant 1 - \frac{1}{\ln n} \\
&\Rightarrow \mathsf{P}(f < \sqrt{n}\ln n) \geqslant 1 - \frac{1}{\ln n} \text{ [т.к. } \sqrt{n}\ln n \geqslant 2\lambda\sqrt{n-1} \text{]}
\end{aligned}$$

Определим события:

$$A_1 := \{\chi(G) \geqslant u\}$$
$$A_2 := \{\text{событие из леммы 1.3.1 }\}$$
$$A_3 := \{f(G) \leqslant \sqrt{n}\ln n\}$$

по доказанному выше, $P(A_i) \geqslant 1 - \frac{1}{\ln n}$. Пусть $A := A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Тогда

$$\mathsf{P}(\overline{A}) = \mathsf{P}(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}) \leqslant \frac{3}{\ln n} \Rightarrow \mathsf{P}(A) \geqslant 1 - \frac{3}{\ln n} \to 1$$

Возьмем произвольный $G \in A$. Поскольку $G \in A_1$, то $\chi(G) \geqslant u$. Поскольку $G \in A_2 \cap A_3$, то $\chi(G) \leqslant u + 3$ (действительно, рассмотрим множество, удаление которого дает u цветов, а потом покрасим это множество еще в 3 цвета). Теорема доказана. □

1.3.5 Жадный алгоритм поиска χ, α, ω

Пусть нам дан граф G. Зафиксируем некоторую нумерацию его вершин. Покрасим первую вершину в первый цвет. Далее, если она связана со второй, то покрасим вторую вершину в новый цвет, а иначе в первый. И вообще, пусть $c : V \to \mathbb{N}$ — раскраска графа. Тогда $c(v_i) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid$ вершину v_i можно покрасить в цвет k на данном шаге$\}$. Тогда $\max\limits_{v_i} c = \chi_g(G)$, а мощность самого большого цвета в полученной раскраски — $\alpha_g(G)$, а описанный алгоритм называется *жадным алгоритмом* раскраски графа.

Теорема 1.3.9. *(Эрдеш-Боллобаш)*

Для любого $\varepsilon > 0$ в модели $G(n, \frac{1}{2})$ а.п.н.

$$\frac{\alpha(G)}{\alpha_g(G)} \leqslant 2+\varepsilon \iff \mathsf{P}\left(\frac{\alpha(G)}{\alpha_g(G)} \leqslant 2+\varepsilon\right) \to 1.$$

Доказательство. Из теоермы 1.3.5 известно, что $\mathsf{P}(\alpha(G) \leqslant 2\log_2 n) \to 1$. Это означает, что достаточно доказать, что

$$\mathsf{P}(\alpha_g(G) \leqslant (1-\varepsilon)\log_2 n =: A) \to 1.$$

Пусть $m := \left[\dfrac{n}{2(1-\varepsilon)\log_2 n}\right] \leqslant \frac{n}{2(1-\varepsilon)\log_2 n}$. Если событие A выполнено, то

$$\exists a_1,\, \ldots,\, a_m\ \exists C_1,\, \ldots,\, C_m \subset V,\ \ \forall i\ \ |C_i| = a_i \leqslant (1-\varepsilon)\log_2 n;\ \ \forall i,\ j:\ \ C_i \cap C_j = \varnothing.$$

Рассмотрим события $B_{a_1,\ldots,\,a_m;\,C_1,\,\ldots,\,C_m} := \{\forall x\ \forall i\ \ \exists y \in C_i :\ \ (x,y) \in E_G\}$. Для фиксированных x и i вероятность

$$\mathsf{P}(\exists y \in C_i:\ (x,y) \in E_G) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i},$$

откуда

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(B_{a_1,\ldots,\,a_m;\,C_1,\,\ldots,\,C_m}) &= \left(\prod_{i=1}^{m}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{a_i}\right)\right)^{n-a_1-\ldots-a_m} \\
&\leqslant \left(\prod_{i=1}^{m}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{a_i}\right)\right)^{n-m(1-\varepsilon)\log_2 n} \\
&\leqslant \left(\prod_{i=1}^{m}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{a_i}\right)\right)^{\frac{n}{2}} \\
&\leqslant \left(\prod_{i=1}^{m}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(1-\varepsilon)\log_2 n}\right)\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(1-\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)^{\frac{mn}{2}} \\
&= \exp\left[\frac{mn}{2}\ln\left(1-\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)\right] \leqslant \exp\left[-\frac{mn^{\varepsilon}}{2}\right] \\
&\leqslant \exp\left[-\frac{1}{8}\frac{n}{\log_2 n}n^{\varepsilon}\right] \leqslant e^{-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}
\end{aligned}$$

Зная это, оценим $\mathsf{P}(A)$:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A) &\leqslant \sum_{a_1=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} \dots \sum_{a_m=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} \sum_{C_1,\,\dots,C_m} \mathsf{P}(B_{a_1,\dots,\,a_m;\,C_1,\,\dots,\,C_m}) \\ &\leqslant e^{-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{a_1}\dots\sum_{a_m} C_n^{a_1}\dots C_n^{a_m} \\ &< e^{-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{a_1}\dots\sum_{a_m} n^{a_1+\dots+a_m} \\ &\leqslant e^{-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{a_1}\dots\sum_{a_m} n^{n/2} \\ &< e^{-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}+\frac{1}{2}\ln n} (\log_2 n)^m = \exp\Big[-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{n}{2}\ln n + m\ln\log_2 n\Big] \\ &\leqslant \exp\Big[-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{n}{2}\ln n + \frac{n\ln\log_2 n}{2(1-\varepsilon)\log_2 n}\Big] = \exp\Big[-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}\,(1+o(1))\Big] \to 0.\end{aligned}$$

□

Теорема 1.3.10. *(б/д, Кучера)*

$\forall \varepsilon,\ \delta > 0$ существует последовательность графов G_n на n вершинах, такая что

$$\mathsf{P}\left(\frac{\alpha(G_n)}{\alpha_g(G_n)} \geqslant n^{1-\varepsilon}\right) \geqslant 1-\delta.$$

Утверждение 1.3.5.1. Пусть в модели $G(n,p)$ вероятность появления ребра $p = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Тогда а.п.н. в G нет ребер.

Доказательство. Пусть ξ — случайная величина, равная числу ребер в G. Тогда

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant 1) \leqslant \mathsf{E}\xi = C_n^2 p \sim \frac{n^2}{2} p \to 0.$$

□

Утверждение 1.3.5.2. Пусть в модели $G(n,p)$ вероятность появления ребра $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Тогда а.п.н. $\chi(G) \leqslant 2$.

Доказательство. Пусть ξ — случайная величина, равная числу простых циклов в G. Тогда

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant 1) \leqslant \mathsf{E}\xi = \sum_{r=3}^{n} C_n^r \frac{(r-1)!}{2} p^r < \sum_r \frac{n^r}{r!}\frac{(r-1)!}{2} p^r < \sum_{r=3}^{\infty} (np)^r = \frac{(np)^3}{1-np} \to 0.$$

□

Упражнение. Пусть $p = \frac{c}{n}, c \in (0,1)$. Тогда а.п.н. все компоненты связности в G либо деревья, либо унициклические графы и $\chi(G) \leqslant 3$.

1.4 Основы линейно-алгебраического метода

1.4.1 Определение экстремальных велечин в гиперграфе

Определение 1.4.1. *Гипеграфом* называется пара $H = (V,\ E)$, где V — множество вершин, а E — произвольное подмножество 2^V (т.е. в отличие от обычного графа, ребро гиперграфа это произвольное неупорядоченное множество вершин).

Определение 1.4.2. Гиперграф называется *k-однородным* (для $k \geqslant 2$), если $\forall a \in E:\ |a| = k$.

Определение 1.4.3. Основные экстремальные величины, рассматриваемые в этом разделе:

$$f(n,\ k,\ t) = \max\{f \in \mathbb{N}:\ \exists\ k\text{-однородный гиперграф } H = (V,\ E),\ |V| = n,\ |E| = f,\ \forall A,\ B \in E:\ |A \cap B| \geqslant t\}$$

$$h(n,\ k,\ t) = \max\{h \in \mathbb{N}:\ \exists\ k\text{-однородный гиперграф } H = (V,\ E),\ |V| = n,\ |E| = h,\ \forall A,\ B \in E:\ |A \cap B| \leqslant t\}$$

$$m(n,\ k,\ t) = \max\{m \in \mathbb{N}:\ \exists\ k\text{-однородный гиперграф } H = (V,\ E),\ |V| = n,\ |E| = m,\ \forall A,\ B \in E:\ |A \cap B| \neq t\}$$

Для примера рассмотрим граф $G(n, r, s)$ (надпись для тех, кто не помнит что это). Интерпретируем вершины этого графа как ребра некторого r-однородного гиперграфа, а пару вершин, пересекающихся по s элементам — ребром. Легко понять, что $\alpha(G(n,\ 3,\ 1)) = m(n,\ 3,\ 1)$, и вообще

$$\alpha(G(n,\ k,\ t)) = m(n,\ k,\ t)$$

1.4.2 Оценки для $f(n,\ k,\ t)$

Теорема 1.4.1. *(Эрдеш-Ко-Радо)*

$$f(n,\ k,\ 1) = \begin{cases} C_n^k & 2k > n \\ C_{n-1}^{k-1} & 2k \leqslant n \end{cases}$$

Доказательство. Первый случай очевиден. Верхняя оценка $f(n,k,1) \geqslant C_{n-1}^{k-1}$ в случае $2k \leqslant n$ тоже проста: достаточно рассмотреть совокупнсоть $\mathscr{M} = \{M \subset [n],\ |M| = k\ \wedge\ \{1\} \in M\}$. Покажем теперь, что $f(n,k,1) \leqslant C_{n-1}^{k-1}$. Рассмотрим совокупность $\mathscr{F} = H_E = \{F_1,\ \ldots,\ F_s\}$, $\forall i\, |F_i| = k$, $\forall i,\ j:\ |F_i \cap F_j| \geqslant 1$. Наша цель показать, что $s \leqslant C_{n-1}^{k-1}$.

Рассмотрим семество множеств $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, где $A_1 = \{1, 2, \ldots, k\}$, $A_2 = \{2, \ldots, k+1\}, \ldots, A_n = \{n,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1\}$. Докажем сначала следующую лемму:

Лемма 1.4.1. $|\mathscr{F} \cap \mathscr{A}| \leqslant k$ *(круговой метод Катона)*

Доказательство. Если $\mathscr{F} \cap \mathscr{A} = \varnothing$, то все очевидно. Иначе, без ограничения общности, считаем, что $A_1 \in \mathscr{F}$. Все остальные $A_i \in \mathscr{F} \cap \mathscr{A}$ должны пересекать A_1 и пересекаться между собой. Разобем их на пары следующим образом: $(A_i,\ A_{n-k+i})$ для $i \geqslant 2$ (например, пара $(A_2,\ A_{n-k+2})$ — A_2 начинается с 2, а A_{n-k+2} кончается в 1). Тогда $A_i \cap A_{n-k+i} = \varnothing$. Рассмотирм следующие пары: $(A_2, A_{n-k+2}), \ldots, (A_k, A_n)$.

В этих парах все множества пересекают A_1, но при этом два множетсва из одной пары не пересекаются. Это означает, что в $\mathscr{A} \cap \mathscr{F}$ не более одного множества из каждой пары, откуда следует

$$|\mathscr{A} \cap \mathscr{F}| \leqslant 1 \ (A_1) + (\text{количество пар}) = 1 + k - 1 = k$$

и лемма доказана. □

Изначально $V = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Рассмотрим любую перестановку $\sigma \in S_n$. Определим множества $V_\sigma = \{\sigma(1),\ \ldots,\ \sigma(n)\}$ и $\mathscr{A}_\sigma = \{\sigma(A_1),\ \ldots,\ \sigma(A_n)\}$, где $\sigma(A_i)$ означает множетсво $\{\sigma(i),\ \sigma(i+1),\ \ldots\}$. Например, для $n = 7$ и σ такой, что $V_\sigma = \{2,\ 5,\ 1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7\}$ совокупность $\mathscr{A}_\sigma$ это множество $\{\{2,\ 5,\ 1\},\ \{5,\ 1,\ 3\},\ \ldots,\ \{6,\ 7,\ 2\},\ \{7,\ 2,\ 5\}\}$

Лемма 1.4.2. $|\mathscr{F} \cap \mathscr{A}_\sigma| \leqslant k$ *— доказательство аналогично предыдущей лемме.*

Определим индикаторы $I(\sigma,\ F_i) = \begin{cases} 1 & F_i \in \mathscr{A}_\sigma, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$ и посмотрим на следующую величину:

$$\sum_{\sigma}\sum_{i=1}^{s} I(\sigma,\ F_i) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{\sigma} I(\sigma,\ F_i)$$

При фиксированной перестановке сумма $\sum\limits_{i=1}^{s} I(\sigma,\ F_i) = |\mathscr{A}_\sigma \cap \mathscr{F}| \leqslant k$, а значит сумма слева не превосходит $n!k$. С другой стороны, при фиксированном i, F_i можт оказаться на одном из n мест в множестве $\mathscr{A}_\sigma$, и перестановок, в которых возникает F_i, ровно $k!(n-k)!$, а значит $\sum\limits_{\sigma} I(\sigma,\ F_i) = nk!(n-k)!$ и вся сумма справа $= snk!(n-k)!$. Окончательно получаем

$$snk!(n-k)! = \sum_{i=1}^{s}\sum_{\sigma} I(\sigma,\ F_i) = \sum_{\sigma}\sum_{i=1}^{s} I(\sigma,\ F_i) \leqslant kn! \Rightarrow s \leqslant C_{n-1}^{k-1}$$

□

Пример 1.4.1. Аналогично теореме Эрдеша-Ко-Радо получаем оценку для $f(n, k, 2)$:

$$f(n, k, 2) = \begin{cases} C_{n-2}^{k-2} & 2k \leqslant n+1, \\ C_n^k & 2k > n+1 \end{cases}.$$

Рассмотрим $f(8, 4, 2)$: имеем оценку

$$f(8, 4, 2) \geqslant C_6^2 = 15.$$

Однако, рассмотрим совокупность

$$\mathscr{F} = \{A \sqcup B \ \mid \ A \subset \{1,\ \ldots,\ 4\},\ |A| = 3;\ B \subset \{5,\ \ldots, 8\},\ |B| = 1\}.$$

Нетрудно понять, что $|\mathscr{F}| = 16$ и любые два множества из $\mathscr{F}$ пересекаются ровно по двум элементам. При этом в $\mathscr{F}$ можно добавить, например, множество $\{1,\ \ldots,\ 4\}$ и получить новую совокупность с $|\mathscr{F}'| = 17$, подходящую под определение $f(8, 4, 2)$, что говорит о том, что полученная оценка не является наилучшей.

Рассмотрим историю улучшений оценки для $f(n,k,t)$.

Теорема 1.4.2. *(б/д, 1961г — Эрдеш-Ко-Радо)*

$$\forall k,\ t,\ \exists n_0(k,t):\ \forall n \geqslant n_0:\ \ f(n,k,t) = C_{n-t}^{k-t}$$

Теорема 1.4.3. *(б/д, 1979г — Франкл)*

Если $k \geqslant 15$, то

$$n_0(k,t) = (k-t+1)(t+1).$$

Теорема 1.4.4. *(б/д, 1983г — Уилсон)*

$\forall k,\ t:\ n_0 = (k-t+1)(t+1)$. *Для $n \geqslant n_0$ $f(n,k,t) = C_{n-t}^{k-t}$, а для меньших n $f(n,k,t) > C_{n-t}^{k-t}$.*

Зафиксируем k и t и рассмотрим n, такое что $(k-t+1)(2+\frac{t-1}{2}) \leqslant n < (k-t+1)(t+1)$ (замечание: $t+1 = 2+\frac{t-1}{1}$). Тогда оптимальной является следующая конструкция:

$$\mathscr{F} = \{F \subset \{1,\ \dots,\ n\},\ |F| = k,\ |F \cap \{1,\ 2,\ \dots,\ t+2\} \geqslant t+1\}$$

В таком случае $|F| = C_{t+2}^{t+1} \cdot C_{n-t-2}^{k-t-1} + C_{t+2}^{t+2} \cdot C_{n-t-2}^{k-t-2}$. Разумно задаться вопросом "что это?". Так вот, ответ на это дает последняя теорема в нашем списке:

Теорема 1.4.5. *(б/д, 1996г — Алсведе-Хачатрян)*

Зафиксируем k,t. Пусть n, r таковы, что

$$(k-t+1)(2+\frac{t-1}{r+1}) \leqslant n < (k-t+1)(2+\frac{t-1}{r})$$

Тогда $f(n,k,t) = |\mathscr{F}|$, где

$$\mathscr{F} = \{F \subset [n],\ |F| = k,\ |F \cap \{1,\ \dots,\ t+2r\}| \geqslant t+r\}$$

(при $r = 0$ это теорема Эрдеша-Ко-Радо).

1.4.3 Оценки для $h(n,k,t)$ и $m(n,k,t)$

Теорема 1.4.6.

$$h(n,k,t) = \frac{C_n^{t+1}}{C_k^{t+1}}$$

Доказательство. Пусть $H = (V,E)$ — гиперграф с условием из определения $h(n,k,t)$. Для каждого его ребра (мощность каждого ребра — k) рассмотрим все его $t+1$ элементные подмножетсва. Поскольку для любых двух ребер $|A \cap B| \leqslant t < t+1$, то для разных ребер графа H множества их $t+1$-элементных подмножеств различны. При этом в каждом наборе ровно C_k^{t+1} элементов. Тогда

$$|E|C_k^{t+1} \leqslant C_n^{t+1}$$

откуда следует требуемое неравенство. □

Теорема 1.4.7. *(б/д, 1980е, Рёдль)*

Если k и t фиксированные, а $n \to \infty$, то

$$h(n,k,t) \sim \frac{C_n^{t+1}}{C_k^{t+1}}$$

Теорема 1.4.8. *(б/д, 2014-2015, Кивош)*

Если k и t фиксированные, а $n \to \infty$, то, в естественных условиях делимости, выполнено равенство

$$h(n,k,t) = \frac{C_n^{t+1}}{C_k^{t+1}}$$

Теорема 1.4.9. *(Франкл, Уилсон, 1981)*

Пусть $k - t = p^\alpha$, где p — простое, а α — натуральное число больше нуля. Пусть $k - 2p^\alpha < 0$. Тогда выполнено неравенство

$$m(n,k,t) \leqslant \sum_{i=0}^{p^\alpha - 1} C_n^i$$

Доказательство. *(Доказательство для $\alpha = 1$, остальное — упражнение)*

Рассмотрим произвольный гиперграф H с указанными в определении числа m ограничениями. $E = \{A_1, \ldots, A_s\}$, $|A_i| = k$, $\forall i \neq j : |A_i \cap A_j| \neq t$. Каждому A_i сопоставим вектор $\overline{x}_i = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i = 1$, если $i \in A_i$ и $x_i = 0$ иначе (заметим, что $|A_i \cap A_j| = \langle \overline{x}_i, \overline{x}_j \rangle$). Сопоставим тепрь каждому $\overline{x}_i$ многочлен от n переменных над $\mathbb{Z}_p$ следующим образом:

$$F_{\overline{x}_i}(\overline{y}) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \not\equiv t \pmod p}}^{p} (j - \langle \overline{x}_i, \overline{y} \rangle)$$

Докажем, что многочлены $F_{\overline{x}_1}, \ldots, F_{\overline{x}_s}$ — линейно независимы над $\mathbb{Z}_p$. Предположим противное: пусть нашлись коэффиценты $\{c_i\}$, такие что

$$c_1 F_{\overline{x}_1} + \ldots + c_s F_{\overline{x}_s} = 0$$

Тогда $\forall y : c_1 F_{\overline{x}_1}(y) + \ldots + c_s F_{\overline{x}_s}(y) \equiv 0 \pmod p$. В частности, рассмотрим $y = x_i$. Имеем $(x_i, x_i) = k \equiv t \pmod p$ (поскольку $k - t = p^\alpha$), а значит $F_{\overline{x_i}}(x_i) \not\vdots\, p$.

Теперь

$$\left.\begin{aligned} &\langle x_i, x_j \rangle < k \text{ т.к. } i \neq j \\ &\langle x_i, x_j \rangle \neq t \text{ т.к. граф из определения } m(n,k,t) \\ &\langle x_i, x_j \rangle \neq t - p \text{ т.к. } t - p = k - 2p < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle \neq t \pmod p \Rightarrow F_{\overline{x}_j}(x_i) \equiv 0 \pmod p.$$

Отсюда следует, что $\forall i\, c_i = 0$, а значит количество многочленов не превосходит размерности пространства многочленов.

Раскроем в каждом многочлене скобки, и уменьшим в каждом одночлене степень входящих в него до 1. Получим новые многочлены $\tilde{F}_{\overline{x}_i}$, причем $\tilde{F}_{\overline{x}_i}(x) = F_{\overline{x}_i}(x)$ при $x \in \mathbb{Z}_2^n$. Базис, порождающий пространство $\tilde{F}_{\overline{x}_i}$, — это одночлены, коих $\sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i$, откуда $s \leqslant \sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i$. □

Теорема 1.4.10. *Пусть $k-t=p$, где p — простое, $k-2p\geqslant 0$, $d=k-2p+1$. Тогда*

$$m(n,k,t)\leqslant \frac{C_n^d}{C_k^d}\sum_{i=0}^{p-1}C_{n-d}^i.$$

Доказательство. Рассмотрим всевозможные подмножества вершин гиперграфа мощности $d: D_1,\ldots,D_{C_n^d}$ и систему

$$\mathscr{F}=\{F_1,\,\ldots,\,F_s\;|\;|F_i|=k,\,|F_i\cap F_j|\neq t\}$$

и определим функции

$$I(D_i,\,F_j)=\begin{cases}1 & D_i\subset F_j,\\ 0 & \text{иначе}\end{cases}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{C_n^d}\sum_{j=1}^{s}I(D_i,\,F_j)&=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{C_n^d}I(D_i,\,F_j)\\&=\sum_{j=1}^{s}C_k^d=sC_k^d\end{aligned}$$

откуда $\exists i:\ \sum\limits_{j=1}^{s}I(D_i,\,F_j)\geqslant \frac{sC_k^d}{C_n^d}$.

Рассмотрим совокупность $\mathscr{F}'$ всех F_j из $\mathscr{F}$, таких что $D_i\subset F_j$. Сопоставим каждому F_j из $\mathscr{F}'$ вектор $x_j\in\mathbb{Z}_2^k$ и многочлен F_{x_j} аналогично доказательству теоремы 1.4.9. Проводим дальше рассуждение, аналогичное доказательству теоремы 1.4.9, с той лишь разницей, что $\langle x_j,\,x_j'\rangle=|F_j\cap F_j'|\geqslant d$ и

$$\begin{cases}\langle x_j,\,x_j'\rangle=k\\ \langle x_j,\,x_j'\rangle\neq k-p \text{ по условию теоремы}\\ \langle x_j,\,x_j'\rangle\neq k-2p<d\end{cases}\Rightarrow\langle x_j,\,x_j'\rangle\not\equiv k\pmod p\ \text{при}\ x_j\neq x_j'.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{p-1}C_{n-d}^i\geqslant|\mathscr{F}'|\geqslant\frac{sC_k^d}{C_n^d}\Rightarrow s\leqslant\frac{C_n^d}{C_k^d}\sum_{i=0}^{p-1}C_{n-d}^i.$$

□

1.4.4 Асимптотические оценки

Пусть $k,t=\mathrm{const}$, $n\to+\infty$, $p=k-t$ — простое. Тогда в условиях теоремы 1.4.9:

$$m(n,k,t)\leqslant\sum_{i=0}^{p-1}C_n^i\sim\frac{n^{p-1}}{(p-1)!}=\frac{n^{k-t-1}}{(k-t-1)!}.$$

При этом

$$m(n,k,t)\geqslant f(n,k,t+1)\geqslant C_{n-t-1}^{k-t-1}\sim\frac{(n-t-1)^{k-t-1}}{(k-t-1)!}\sim\frac{n^{k-t-1}}{(k-t-1)!}.$$

Пусть теперь мы находимся в условиях теоремы 1.4.10. $d = k - 2p + 1 = k - 2(k-t) + 1 = 2t - k + 1$. Тогда

$$m(n,k,t) \leqslant \frac{C_n^d}{C_k^d} \sum_{i=0}^{p-1} C_{n-d}^i \sim \frac{n^{2t-k+1}}{C_k^d d!} \frac{(n-d)^{p-1}}{(p-1)!}$$
$$\sim \frac{n^{2t-k+k-t}}{d!(k-t-1)! C_k^{2t-k+1}} = \frac{n^t}{(k-t-1)! \frac{k!}{d!(k-d)!} d!}$$
$$= n^t \left(\frac{(2k-2t-1)!}{k!(k-t-1)!} \right).$$

Рассмотрим как можно большую совокупность $F_1, \ldots, F_s$, такую что $|F_i| = r$ и $|F_i \cap F_j| \leqslant t-1$, причем любые два k-элементных подмножества r-элементного множества пересекаются по $\geqslant t+1$ элементу. Заметим, что $\min r = 2k - t - 1$.

Ясно, что $s = h(n,r,t-1)$. Возьмем все k-элементные подмножества, которые содержатся в одном F_i. Любые два таких множества не могут пересекаться по t. Таким множеств $C_r^k h(n,r,t-1)$. Тогда

$$m(n,k,t) \geqslant C_r^k h(n,r,t-1) \sim C_r^k \cdot \frac{C_n^t}{C_r^t}$$
$$\sim \frac{(2k-t-1)!}{k!(k-t-1)!} \cdot \frac{n^t t!(r-t)!}{t!r!} = \frac{(2k-t-1)!}{k!(k-t-1)!} \cdot \frac{n^t (2k-2t-1)!}{(2k-t-1)!}$$
$$= n^t \frac{(2k-2t-1)!}{k!(k-t-1)!}$$

1.5 Хроматическое число пространства

Определение 1.5.1.

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \{\min k \in \mathbb{N} \mid \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_k : \ \forall i : \forall x, \, y \in V_i : \ |x - y| \neq 1\}.$$

Известные значения:

1. $\chi(\mathbb{R}) = 2$.
2. $4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$, причем если потребовать измеримость множеств V_i по Лебегу, то $5 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$.
3. $6 \leqslant \chi(\mathbb{R}^3) \leqslant 15$.
4. $10 \leqslant \chi(\mathbb{R}^4) \leqslant 54$.

Утверждение 1.5.0.1.

$$n + 1 \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (4\sqrt{n})^n$$

Доказательство. Оценка $n + 1 \leqslant \chi(\mathbb{R}^n)$ следует из существования симплекса в $\mathbb{R}^n$, все вершины которого должны быть покрашены в разные цвета.

Рассмотрим n-мерный куб со стороной 2. Разобьем его на $(4\sqrt{n})^n$ маленьких кубиков со стороной $\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Покрасим точки внутри одного маленького кубика в свой цвет. Поскольку мы правильно раскрасили куб со стороной 2, то аналогично мы раскрасим всё пространство, откуда

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (4\sqrt{n})^n.$$

□

Теорема 1.5.1. *(б/д)*

Пусть у бесконечного графа (т.е. $|V| = \infty$) конечное хроматическое число. Тогда существует его конечный подграф, имеющий то же хроматическое число.

Определение 1.5.2. Граф называется *дистанционным*, если $V \subset \mathbb{R}^n$, а $E = \{(x, y) \in V : \ |x - y| = a > 0\}$.

Рассмотрим $G(n, k, t) = (V, E), \ V = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 + \ldots + x_n = k, \ x_i \in \{0, 1\}\}, \ E = \{(x, y) : \langle x, \rangle = t \Leftrightarrow |x - y| = \sqrt{2k - 2t}\}$.

Тогда

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \chi(G(n, k, t)) \geqslant \frac{|V|}{m(n, k, t)} = \frac{C_n^k}{m(n, k, t)} \Rightarrow \chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \max_{k,t} \left\{ \frac{C_n^k}{m(n, k, t)} \right\}.$$

Утверждение 1.5.0.2. (б/д)

Максимум достигается при $k = k(n) = \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2} n\right]$, $t = k - p$ где p — простое, такое что $k - 2p < 0$. А, как известно, на $[x, \ x + Cx^{0.525}]$ есть простое число $\Rightarrow p \sim \frac{k}{2}$.

Следствие.

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.207 + o(1))^n$$

Доказательство. Пусть $a := \frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $k = an$. Имеем

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \frac{C_n^k}{\sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i} = \frac{\left(\frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}} + o(1)\right)^n}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{a}{2}}\left(1-\frac{a}{2}\right)^{1-\frac{a}{2}} + o(1)\right)^n}$$

$$= \left(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{a}{2}}\left(1-\frac{a}{2}\right)^{1-\frac{a}{2}}}{a^a(1-a)^{1-a}} + o(1)\right)^n$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} + o(1)\right)^n = (1.207 + o(1))^n$$

□

Теорема 1.5.2. *(б/д, Райгородский)*

$$(1.239 + o(1))^n \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n.$$

Глава 2

2 семестр

2.1 Турановские результаты

Теорема 2.1.1. *(Туран)*

Пусть у графа $G = (V, E)$ число вершин $|V| = n$ и $\alpha = \alpha(G)$. Тогда в этом графе

$$|E| \geqslant n\left[\frac{n}{\alpha}\right] - \left[\frac{n}{\alpha}\right]\left[\frac{n}{\alpha}+1\right]\cdot\frac{\alpha}{2}$$

Доказательство. Пусть $A \subset V$ — наибольшее независимое множество, $|A| = \alpha$. Тогда $\forall x \in V \backslash A\ \exists y \in A:\ (x, y) \in E$, что уже дает $\geqslant n - \alpha$ ребер. Удалим из графа множество A вместе со всеми ребрами. В оставшемся графе G' снова рассмотрим наибольшее независимое множество A', $|A'| \leqslant \alpha$. Аналогично находим еще как минимум $n - 2\alpha$ ребер и снова повторяем наши действия.

Всего будет $\geqslant \left[\frac{n}{\alpha}\right]$ шагов, а суммарно найдено будет как минимум

$$\left[\frac{n}{\alpha}\right]\cdot n - \alpha\left(1 + 2 + \ldots + \left[\frac{n}{\alpha}\right]\right) = n\left[\frac{n}{\alpha}\right] - \left[\frac{n}{\alpha}\right]\left[\frac{n}{\alpha}+1\right]\cdot\frac{\alpha}{2}$$

ребер. □

Заметим, что полученная оценка неулучшаема. Действительно, пусть $\alpha \mid n$. Тогда оценка имеет вид $\frac{n^2}{\alpha} - \frac{n(n/\alpha+1)}{2} = \frac{n^2}{2\alpha} - \frac{n}{2}$. Рассмотрим тогда α клик на $\frac{n}{\alpha}$ вершинах. В таком графе число ребер равно $C^2_{\frac{n}{\alpha}} \cdot \alpha = \frac{n^2}{2\alpha} - \frac{n}{2}$.

Заметим также, что если в формулировке теоремы 2.1.1 от графа G перейти к графу $\overline{G}$, то, используя равенство $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$, получим утверждение, что если в графе много ребер, то в нем обязательно есть клика.

Следствие. *Пусть $G_n = (V_n, E_n)$ — последовательность графов с $|V_n| = n$ и $\alpha_n = \alpha(G_n)$. Пусть $\alpha_n = o(n)$. Тогда*

$$|E_n| \geqslant \frac{n^2}{2\alpha}\left(1 + o(1)\right)$$

(В этих условиях $\left[\frac{n}{\alpha}\right] \to \infty \Rightarrow \left[\frac{n}{\alpha}\right] \sim \frac{n}{\alpha}$)

Определение 2.1.1. Граф G называется *дистанционным* графов, если $V \subset \mathbb{R}^n$ и $E = \{(x, y) : |x-y| = a\}$

Теорема 2.1.2. *Пусть $G = (V, E)$ — дистанционный граф на плоскости, $|V| = 4n$, $\alpha(G) = n$. Тогда $|E| \geqslant 7n$.*

Доказательство. Повторяя полностью рассуждения из теоремы Турана получаем оценку $|E| \geqslant 6n$, при этом найдя на первом шаге $\geqslant 3n$ ребер. Покажем, что на первом шаге можно найти $\geqslant 4n$ ребер.

Пусть A — наибольшее независимое множество в V, $V \backslash A = V_1 \sqcup V_2$, где $V_1 = \{v \in V \backslash A |$у v ровно один сосед в $A\}$ а $V_2 = \{v \in V \backslash A |$у v хотя бы 2 соседа в $A\}$. Предположим, что $|V_1| > 2n$. Тогда $\exists y \in A : \exists x_1, x_2, x_3 \in V_1 : \{(x_1, y), (x_2, y), (x_3, y)\} \subset E$. Если одного из ребер (x_i, x_j) нет в графе, то добавив в A вершины x_i, x_j и удалив из A вершину y получим новое независимое множество большего размера. Иначе мы нашли 4 точки на плоскости y, x_1, x_2, x_3, попарные расстояние между которыми равны, чего быть не может $\Rightarrow |V_1| \leqslant 2n$.

Из доказанного выше следует, что $|V_2| \geqslant n$, причем каждая вершина из V_2 дает хотя бы 2 ребра. Поскольку $|V_1| + |V_2| = 3n$, то всего на первом шаге будет набрано $\geqslant 4n$ ребер. □

Факт. *Самый лучший известный результат: $|E| \geqslant \frac{26}{3}n$.*

Теорема 2.1.3. *Пусть $G_d = (V_d, E_d)$ — последовательность дистанционных графов в $\mathbb{R}^d$. $|V_d| = n = n(d)$, $\alpha(G_d) = \alpha(d)$ Тогда, если $d\alpha = o(n)$, то*

$$|E_d| \geqslant \frac{n^2}{\alpha}(1 + o(1))$$

Доказательство. Аналогично теореме выше, рассмотрим $V \backslash A = V_1 \sqcup V_2$ и докажем, что $|V_1| \leqslant \alpha d$. Действительно, предположив противное, найдем в A вершину y, имеющую $(d+1)$ соседа в V_1 и аналогично получим противоречие с тем, что в $\mathbb{R}^d$ нет дистанционного графа K_{d+2} (б/д).

Тогда, пользуясь тем, что $|V_1| = v \leqslant \alpha d$, на первом шаге мы нашли $v + 2(n - \alpha - v) \geqslant \underbrace{d\alpha}_{V_1} + \underbrace{2(n - \alpha - \alpha d)}_{V_2}$ ребер. Всего шагов $\left[\frac{n-\alpha d}{\alpha}\right]$, а суммарное число ребер

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{n - \alpha d}{\alpha}\right] \cdot \alpha d + 2n\left[\frac{n - \alpha d}{\alpha}\right] - 2\alpha d\left[\frac{n - \alpha d}{\alpha}\right] - 2\alpha\left[\frac{n - \alpha d}{\alpha}\right]\left[\frac{n - \alpha d}{\alpha} + 1\right]/2 \\
&= \frac{2n^2}{\alpha} - dn - \frac{n^2}{\alpha} = \frac{n^2 - n\alpha d}{\alpha} = \frac{n^2 + o(n^2)}{\alpha} \sim \frac{n^2}{\alpha}
\end{aligned}$$

□

2.2 Рамсеевские задачи

2.2.1 Оценки чисел Рамсея

Определение 2.2.1. Пусть $s, t \in \mathbb{N}$. *Число Рамсея* $R(s,t) := \min\{n \in \mathbb{N}:$ при любой раскраски ребер K_n в красный и синий цвета либо найдется K_s, все ребра у которого красные, либо K_t, все ребра которого синие $\}$.

Эквивалентное определение $R(s,t) := \min\{n \in \mathbb{N}: \ \forall G = (V,\ E),\ |V| = n$ и либо $\omega(G) \geqslant s$, либо $\alpha(G) \geqslant t\}$

Замечание. 1. $R(1,t) = 1$

2. $R(2,t) = t$

3. $R(3,t)$ никто не знает.

Теорема 2.2.1. *(Эрдеш, Секереш, 1935)*

$$R(s,t) \leqslant R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

Доказательство. $n := R(s-1,t) + R(s,t-1)$. Зафиксируем произвольную раскраску K_n в 2 цвета и вершину $v \in V$. Из нее выходит $n-1$ ребро. От противного получаем, что из нее выходит либо $\geqslant R(s-1,t)$ красных ребер, либо $\geqslant R(s,t-1)$ синих. Без ограничения общности считаем, что $\geqslant R(s-1,t)$ красных. $V_1 := \{u \in V,\ (v,u)$ — красное $\}$. Поскольку $|V_1| \geqslant R(s-1,t)$, то в V_1 есть либо синий K_t, либо красный K_{s-1}, который вместе с вершиной v дает искомый красный K_s. □

Следствие. $R(s,t) \leqslant C_{s+t-2}^{t-1}$ *— индукция по s и t.*

Следствие. $R(s,s) \leqslant C_{2s-1}^{s-1} = \dfrac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi s}}(1+o(1))$

Следствие. $R(3,3) \leqslant C_4^2 = 6$*, при этом* $R(3,3) > 5$ *(цикл на 5 вершинах).*

2.2.2 Диагональные числа Рамсея

Определение 2.2.2. Число Рамсея $R(s,s)$ называется *диагональным.*

Выше доказана оценка $R(s,s) \leqslant C_{2s-1}^{s-1} = \dfrac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi s}}(1+o(1))$

Теорема 2.2.2. *(Туран)*

$$R(s,s) > (s-1)^2$$

Доказательство. Рассмотрим $s-1$ копии K_{s-1}, несвязанные между собой. Для такого графа $\alpha(G) = s-1 = \omega(G)$. □

Теорема 2.2.3. *(Эрдеш, Секереш, 1935)*

$$R(s,s) \geqslant (1+o(1))\frac{1}{e\sqrt{2}} \cdot s2^{s/2}$$

Доказательство. $n := (1+o(1))\frac{1}{e\sqrt{2}} \cdot s2^{s/2}$. Покажем, что существует раскраска K_n, в которой нет одноцветного K_s. Рассмотрим случайную раскраску ребер K_n в два цвета, где $\mathsf{P}(e \text{ — красное }) = \mathsf{P}(e \text{ — синее}) = \frac{1}{2}$. Пусть $S \subset V$, $|S| = s$ и $A_S = \{K_s,\ \text{порожденный } S \text{ — одноцветный }\}$. Тогда $\mathsf{P}(A_S) = 2 \cdot 2^{-C_s^2} = 2^{1-C_n^2}$

$$\mathsf{P}(\bigcup_{\substack{S\subset V\\|S|=s}} A_S) \leqslant \sum_{\substack{S\subset V\\|S|=s}} \mathsf{P}(A_S) = C_n^s 2^{1-C_s^2} \leqslant \frac{n^s}{s!}2^{1-s^2/2+s/2}$$

$$= \frac{1}{s!}(1+o(1))^s \cdot \frac{1}{e^s 2^{s/2}} \cdot s^s 2^{s^2/2} 2^{1-s^2/2+s/2} = \frac{(1+o(1))^s}{\sqrt{2\pi s}\frac{s^s}{e^s}(1+o(1))}\frac{s^s}{e^s} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \cdot \frac{(1+o(1))^s}{(1+o(1))}$$

Подбором $o(1)$ в числителе и знаменателе можно сделать так, что полученное число < 1 при всех s. □

Следствие. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и n таково, что $C_n^s 2^{1-C_s^2} < 1$. Тогда $R(s,s) > n$.*

Теорема 2.2.4. *Пусть дано $s \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall n$*

$$R(s,s) \geqslant n - C_n^s 2^{1-C_n^s}$$

Доказательство. Рассмотрим случайную раскраску K_n в два цвета. Определим случайную величину $\xi :=$ кол-во одноцветных K_s в раскраске.

$$\mathsf{E}\xi = C_n^s 2^{1-C_s^2} \to \exists \chi :\ \xi(\chi) \leqslant C_n^s 2^{1-C_s^2}$$

Если $C_n^s 2^{1-C_s^2} < 1$, то мы нашли подходящую раскраску.

Иначе зафиксируем расскраску χ и удалим из каждого одноцветного K_s по любой вершине (возможно, одну и ту же вершину для нескольких K_s). После удаления в графе осталось $\geqslant n - C_n^s 2^{1-C_s^2}$ вершин, причем для раскраски χ в нем нет одноцветных K_s. □

Следствие.

$$R(s,s) \geqslant (1+o(1))\frac{1}{e}s2^{s/2}$$

Доказательство. Аналогично теореме 2.2.3 имеет $C_n^s 2^{1-C_s^2} = \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \cdot \frac{(1+o(1))^s}{(1+o(1))} \cdot 2^{s/2}$. Тогда, по теореме 2.2.4:

$$(1+o(1))\frac{s2^{s/2}}{e} - \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \cdot \frac{(1+o(1))^s}{(1+o(1))} \cdot 2^{s/2} = (1+o(1))\frac{1}{e} \cdot s2^{s/2}$$

□

Теорема 2.2.5. *(Спенсер, 1975)*

$$R(s,s) \geqslant (1+o(1))\frac{\sqrt{2}}{e}s2^{s/2}$$

Замечание. Это самый лучший известный результат.

Для доказательства этой теоремы мы будем использовать локалькую лемму Ловаса (далее ЛЛЛ), причем сначала мы покажем, как теорема следует из ЛЛЛ в симметричной форме, потом выведем ЛЛЛ в симметричной форме из ЛЛЛ в общем случае, а далее докажем ЛЛЛ в общем случае.

Теорема 2.2.6. *(Локальная лемма Ловаса в симметричной форме, 1973г, Ловас)*

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — события на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Пусть известно, что $\forall i$ $\mathsf{P}(A_i) \leqslant p < 1$ и $\forall i$ A_i не зависит от совокупности всех остальных событий, кроме не более d штук (событие A не зависит от группы событий $B_1, \ldots, B_k$, если $\mathsf{P}(A_i|$пересечение и объединение событий из $B_1, \ldots, B_k) = \mathsf{P}(A_i))$ и числа p, d не зависят от i. Тогда, если $ep(d+1) < 1$ то

$$\mathsf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i) > 0$$

Вывод теоремы Спенсера из ЛЛЛ в симметричной форме. Пусть $A_1, \ldots, A_{C_n^s}$ — события, заключающиеся в том, что конкретные s вершин образуют одноцветный K_s в случайной раскраске K_n, где $n = (1+o(1))\frac{\sqrt{2}}{e}s2^{s/2}$.

$d \leqslant$ кол-во S-элементных множеств вершин, пересекающих множество, отвечающее событию A_i, хотя бы по 2 вершинам $= C_s^2 C_n^{s-2}$. Проверим условие ЛЛЛ:

$$\begin{aligned} e2^{1-C_s^2}\left(C_s^2 C_n^{s-2}+1\right) &< e2^{1-s^2/2+s/2} \cdot \frac{s^2}{2} \cdot \frac{n^{s-2}}{(s-2)!} \\ &= es^2 2^{-s^2/2+s/2} \frac{1}{(1+o(1))\sqrt{2\pi s}\frac{(s-2)^{s-2}}{e^{s-2}}} \cdot (1+o(1))^s \frac{(\sqrt{2})^{s-2}}{e^{s-2}} 2 \end{aligned}$$

Перепишем $(s-2)^{s-2} = s^{s-2}(1-\frac{2}{s})^{s-2} \sim s^{s-2}(1-\frac{2}{s})^s \sim s^{s-2}e^{-2}$ и продолжим

$$\begin{aligned} &\sim e^3 s^2 2^{-s^2/2+s/2} \frac{1}{(1+o(1))\sqrt{2\pi s}} 2^{\frac{s-2}{2}} 2^{s^2/2-2s/2}(1+o(1))^{s-2} \\ &= e^3 \frac{s^2(1+o(1))^s}{2\sqrt{2\pi s}(1+o(1))} < 1 \text{ при всех } s \text{ для подходящей } \varphi = o(1) \end{aligned}$$

□

Определение 2.2.3. Рассмотрим события $A_1, \ldots, A_n$. Граф $G = (V, E)$ называется *орграфом зависимостей* для $(A_1, \ldots, A_n)$, если $V = (A_1, \ldots, A_n)$ и $\forall i:$ A_i не зависит от совокупности тех A_j, для которых $(A_i, A_j) \notin E$.

Замечание. Для зависимых событий ребра могут как быть в графе, так и не быть.

Замечание. Для фиксированной совокупности событий существует не единственный орграф зависимостей.

Теорема 2.2.7. *(ЛЛЛ, общий случай)*

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ *— события на* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *и* $G = (V, E)$ *— их орграф зависимостей, такой что* $\exists x_1, \ldots, x_n \in [0,1)$, *т.ч.* $\forall i\ \mathsf{P}(A_i) \leqslant x_i \prod\limits_{j:(A_i,A_j)\in E}(1-x_j)$. *Тогда*

$$\mathsf{P}(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i) \geqslant \prod_{j=1}^{n}(1-x_j) > 0$$

Вывод ЛЛЛ в симметричной форме из ЛЛЛ в общем случае.

1. $d = 0 \Rightarrow A_1, \ldots A_n$ независимы в совокупности $\Rightarrow$
$$\mathsf{P}(\bigcap \overline{A}_i) = \prod_{i=1}^{n}(1-\mathsf{P}(A_i)) \geqslant (1-p)^n \geqslant (1-\frac{1}{e})^n > 0$$

2. $d \geqslant 1$: Рассмотрим G — орграф зависимостей. Из A_i проводим ребра в те и только те события, от которых A_i может зависеть. Тогда $\forall i\ \deg_{\text{out}}(A_i) \leqslant d$. Положим $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{d+1} \in [0,1)$.
$$ep(d+1) \leqslant 1 \Rightarrow p(d+1) \leqslant \left(1-\frac{1}{d+1}\right)^d \Rightarrow P(A_i) \leqslant p \leqslant \frac{1}{d+1}\left(1-\frac{1}{d+1}\right)^d = x_i \prod_{j:(A_i,A_j)\in E}(1-x_j)$$

□

Доказательство ЛЛЛ в общем случае.

$$\mathsf{P}(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i) = \mathsf{P}(\overline{A}_1)\mathsf{P}(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)\ldots\mathsf{P}(\overline{A}_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1}\overline{A}_i) = (1-\mathsf{P}(A_1))(1-\mathsf{P}(A_2 \mid \overline{A}_1))\ldots\left(1-\mathsf{P}(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1}\overline{A}_i)\right) \tag{2.1}$$

Заметим, что из следующей леммы будет следовать ЛЛЛ:

Лемма 2.2.1.

$$\forall i\ \forall J \subset \{1, \ldots, n\}\backslash\{i\}:\ \mathsf{P}(A_i \mid \bigcap_{j\in J}\overline{A}_j) \leqslant x_i$$

Доказательство. Пусть сначала $J = \varnothing$. Тогда имеем

$$\mathsf{P}(A_i \mid \bigcap_{j\in\varnothing}\overline{A}_j) = \mathsf{P}(A_i \mid \Omega) = \mathsf{P}(A_i) \leqslant x_i \prod(1-x_j) \leqslant x_i$$

Иначе $J = J_1 \sqcup J_2$, где $J_1 := \{j \in J : (A_i, A_j) \in E\}$, $J_2 := J\backslash J_1$. Будем вести индукцию по $|J_1|$. База $|J_1| = 0$. Тогда $\mathsf{P}(A_i \mid \bigcap\limits_{j\in J}\overline{A}_j) = \mathsf{P}(A_i \mid \bigcap\limits_{j\in J_2}\overline{A}_j) = \mathsf{P}(A_i) \leqslant x_i$.

Пусть J_1 $\{j_1, \ldots, j_r\}$, $r \geqslant 1$. Тогда имеем

$$P(A_i \mid \bigcap_{j\in J}\overline{A}_j) = \mathsf{P}\left(A_i \mid \left(\bigcap_{j\in J_1}\overline{A}_j\right)\bigcap\left(\bigcap_{j\in J_2}\overline{A}_j\right)\right) = \frac{\mathsf{P}\left(A_i\bigcap\left(\bigcap\limits_{j\in J_1}\overline{A}_j\right) \mid \bigcap\limits_{j\in J_2}\overline{A}_j\right)}{\mathsf{P}\left(\bigcap\limits_{j\in J_1}\overline{A}_j \mid \bigcap\limits_{j\in J_2}\overline{A}_j\right)}$$

$$\leqslant \frac{\mathsf{P}\left(A_i \mid \bigcap\limits_{j\in J_2}\overline{A}_j\right)}{\mathsf{P}\left(\bigcap\limits_{j\in J_1}\overline{A}_j \mid \bigcap\limits_{j\in J_2}\overline{A}_j\right)} \leqslant \frac{x_i \prod\limits_{j:\,(A_i,A_j)\in E}(1-x_j)}{\mathsf{P}\left(\bigcap\limits_{j\in J_1}\overline{A}_j \mid \bigcap\limits_{j\in J_2}\overline{A}_j\right)}$$

Обозначим $A_{J_i} := \bigcap\limits_{j \in J_i} \overline{A}_j$, $i = 1, 2$. Тогда осталось доказать, что $\mathsf{P}(A_{J_1} \mid A_{J_2}) \geqslant \prod\limits_{j\colon (A_i, A_j) \in E} (1 - x_j)$. Имеем:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A_{J_1} \mid A_{J_2}) &= \mathsf{P}(\overline{A}_{j_1} \mid A_{J_2}) \cdot \mathsf{P}(\overline{A}_{j_2} \mid \overline{A}_{j_1} \cap A_{J_2}) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(\overline{A}_{j_r} \mid \overline{A}_{j_1} \cap \ldots \cap \overline{A}_{j_2} \cap A_{J_2}) \\
&= (1 - \mathsf{P}(A_{j_1} \mid A_{J_2})(1 - \mathsf{P}(A_{j_2} \mid \overline{A}_{j_1} \cap A_{J_2}) \ldots (1 - \mathsf{P}(A_{j_r} \mid \overline{A}_{j_1} \cap \ldots \cap \overline{A}_{j_2} \cap A_{J_2}) \\
&\overset{\text{I. H.}}{\geqslant} \prod_{j \in J_1} (1 - x_{j_1}) \ldots (1 - x_{j_r}) \geqslant \prod_{j:(A_i, A_j) \in E} (1 - x_j)
\end{aligned}$$

□

Применяя лемму для событий из равенства 2.1 получаем утверждение ЛЛЛ. □

Теорема 2.2.8. *(Франкл, Уилсон)*

Можно явно указать графы, у которых число вершин f ведет себя как $f = \left(e^{1/4} + o(1)\right)^{\ln^2 s / \ln \ln s}$, в которых нет ни s клик, не независимых множеств размера s.

Замечание. $s^c = e^{c \ln s} < f << e^{sc}$, поскольку $\ln^2 s \geqslant c \ln s \ln \ln s$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное простое p и $m := p^3, k := p^2$. Определим граф $G = (V, E)$: $V = \{x = (x_1, \ldots, x_m) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \ldots + x_m = k\}$; $E = \{(x, y) : \langle x, y \rangle \equiv 0 \pmod p\}$, $|V| = n = C_m^k$.

Мы покажем, что $\alpha(G) < \sum\limits_{i=0}^{p-1} C_m^i + 1$; $\omega(G) > \sum\limits_{i=0}^{p} C_m^i + 1$. Доказав это, теорема Франка-Уилсона будет доказана для всех s вида $\sum\limits_{i=0}^{p} C_m^i + 1$, где p — простое, но нужно будет проверить, что $C_m^k = \left(e^{1/4} + o(1)\right)^{\ln^2 s / \ln \ln s}$.

Лемма 2.2.2.

$$C_m^k = \left(e^{1/4} + o(1)\right)^{\ln^2 s / \ln \ln s}$$

Доказательство. $C_m^k = C_{p^3}^{p^2} = \frac{p^3(p^3-1)\ldots(p^3-p^2+1)}{(p^2)!}$. Перепишем отдельно числитель и знаменатель: $(p^2)! = (1 + o(1))\sqrt{2\pi p^2} \left(\dfrac{p^2}{e}\right)^{p^2} = (p^2)^{(1+o(1))p^2}$. Аналогично $p^3(p^3 - 1) \ldots (p^3 - p^2 + 1) = (p^3)^{p^2(1+o(1))}$ Тогда имеем

$$C_m^k = \frac{(p^3)^{p^2(1+o(1))}}{(p^2)^{p^2(1+o(1))}} = p^{p^2(1+o(1))}$$

Для $s = \sum\limits_{i=0}^{p} C_m^i + 1$ верны оценки: $C_m^p + 1 < s < (p+1)C_m^p + 1$, откуда, пользуясь тем, что $C_m^p = C_{p^3}^p = \frac{p^{3(1+o(1))p}}{p^{p(1+o(1))}} = p^{2p(1+o(1))}$, получаем, что $s \sim p^{2p(1+o(1))}$.

Имеем $\ln s(1 + o(1))2p \ln p$; $\ln \ln s = (1 + o(1)) \ln p$; $\ln^2 s = 4(1 + o(1))p^2 \ln^2 p$, а $\dfrac{\ln^2 s}{\ln \ln s} = 4(1 + o(1))p^2 \ln p$

$$\ln n = (1 + o(1))p^2 \ln p = \frac{1}{4}(1 + o(1))\frac{\ln^2 s}{\ln \ln s} \Rightarrow n = \left(e^{1/4} + o(1)\right)^{\ln^2 s / \ln \ln s}$$

□

Лемма 2.2.3.
$$\alpha(G) < \sum_{i=0}^{p-1} C_m^i + 1$$

Доказательство. Рассмотрим независимое множество $W \subset V,\ \forall x, y \in W:\ \langle x, y\rangle \neq 0 \pmod p$. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_t\}$. Нам необходимо доказать, что $t \leqslant \sum\limits_{i=1}^{p-1} C_m^i$.

Поставим в соответствие каждой вершине x_i многочлен $F_{x_i}(y) \in \mathbb{Z}_p[y_1, \ldots, y_m]$ от m переменных степени $\leqslant p-1$:
$$F_{x_i}(y) = \prod_{j=1}^{p-1} (j - \langle x_i, y\rangle)$$

Раскроем все скобки и уменьшим степень всех одночленов $F_{x_i} \mapsto \tilde{F}_{x_i}:\ \sum y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots y_{i_q}^{\alpha_{i_q}} = \sum c y_{i_1} \ldots y_{i_q}$. Размерность пространства многочленов, в котором лежат $\tilde{F_{x_i}}$ не превосходит $C_m^0 + \ldots + C_m^{p-1}$, поскольку порождается одночленами. Осталось показать, что многочлены $\tilde{F}_{x_1}, \ldots, \tilde{F}_{x_t}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}_p^2$, откуда будет следовать утверждение леммы.

Рассмотирм произвольную нулевую линейную комбинацию $G = c_1\tilde{F}_{x_1} + \ldots + c_t\tilde{F}_{x_t} \equiv 0 \Rightarrow \forall y \in \{0,1\}^m:\ G(y) \equiv 0 \pmod p$. Для таких y выполнено равенство: $F_{x_i}(y) = \tilde{F}_{x_i}(y)$
$$\begin{cases} F_{x_i}(x_i) = \prod\limits_{j=1}^{p-1}(j-k) \neq 0 \pmod p \\ F_{x_i}(x_j) = \prod\limits_{j=1}^{p-1}(j - \langle x_i, x_l\rangle) \equiv 0 \pmod p \end{cases} \Rightarrow c_i \equiv 0 \pmod p \quad \forall i$$

□

Лемма 2.2.4.
$$\omega(G) < \sum_{i=0}^{p} C_m^i + 1$$

Доказательство. $W = \{x_1, \ldots, x_t \mid \langle x_i, x_j\rangle \equiv 0 \pmod p\}$. Опять же, поставим в соответствие вершинам из W многочлены
$$F_{x_i}(y) := \langle x_i, y\rangle(\langle x_i, y\rangle - p)\ldots(\langle x_i, y\rangle - p(p-1)) \in \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_m]$$

причем $\deg F_{x_i} \leqslant p$. Построим новые многочленые $F_{x_i} \mapsto \tilde{F}_{x_i}$ по тому же правилу, что и выше. Аналогично, если новые многочлены ЛНЗ, то $t \leqslant \sum\limits_{i=0}^{p} C_m^i$.
$$\begin{cases} F_{x_1}(x_1) = p^2(p^2-p)(p^2-2p)\ldots(p^2-p(p-1)) \neq 0 \text{ т.к. многочлены над } \mathbb{R} \\ i \geqslant 2:\ F_{x_1}(x_i) = \langle x_1, x_i\rangle(\langle x_1, x_i\rangle - p)\ldots(\langle x_1, x_i\rangle - p(p-1)) = 0 \end{cases}$$

и лемма доказана. □

Применяя 3 леммы, получаем, что теорема верна для всех s вида $\sum\limits_{i=0}^{p} C_m^i + 1$. **Б/д:** *теорема верна для произвольного s.* □

2.2.3 $R(3,t)$

В этой главе мы займемся оценкой числа $R(3,t)$. Как мы помним, $R(s,t) \leqslant C_{s+t-2}^{t-1}$. Пользуясь этим, легко получить оценку $R(3,t) \leqslant C_{t-1}^2 \sim \frac{t^2}{2}$. Попытаемся улучшить ее.

Рассмотрим случайную раскраску K_n в два цвета с $p \in [0,1]$ — вероятностью, что ребро красного цвета и $1-p$ — синего. Пусть $A_1, \ldots, A_{C_n^3}$ — события, отвечающие тому, что фиксированная тройка вершин образует красный треугольнк, а $B_1, \ldots, B_{C_n^t}$ события, заключающиеся в том, что i-тое фиксированное множество из t вершин образует синий K_t. Тогда $R(3,t) > n \iff \mathsf{P}(\bigcap\limits_{i=1}^{C_n^3} \overline{A}_i \bigcap \bigcap\limits_{i=1}^{C_n^t} \overline{B}_i) > 0$ (аналогично доказательству теоремы Спенсера 2.2.2). Воспользуемся ЛЛЛ.

Зафиксируем событие A_i. В ор.графе зависимостей $(A_i, A_j) \in E \iff$ тройка, отвечающая A_j, имеет 2 общие вершины с i-той тройкой, а $(A_i, B_j) \in E \iff$ набор из t вершин, отвечающий B_j, имеет не менее 2 общих вершин с i-той тройкой. Аналогично для фиксированного B_i. Обозначим за $\#(A \to B)$ количество ребер из события A в событие B в ор.графе зависимостей. Тогда

$$\begin{cases} \#(A_i \to A_j) = 3(n-3) \\ \#(A_i \to B_j) = 3C_{n-3}^{t-2} + C_{n-3}^{t-3} \\ \#(B_i \to B_j) = (n-t)C_t^2 + C_t^3 \\ \#(B_i \to B_j) = C_n^t - tC_{n-1}^{t-1} - C_{n-t}^t \end{cases}$$

Теорема 2.2.9. *Пусть дано t, а n — максимальное число, для которого найдутся $p \in [0,1]$; $x, y \in [0,1)$, такие что выполнена система неравенств*

$$\begin{cases} \mathsf{P}(A_i) \leqslant x(1-x)^{\#(A_i \to A_j)}(1-y)^{\#(A_i \to B_j)} \\ \mathsf{P}(B_i) \leqslant y(1-x)^{\#(B_i \to A_j)}(1-y)^{\#(B_i \to B_j)} \end{cases}$$

Тогда $R(3,t) > n$.

Следствие. $R(3,t) \geqslant c\dfrac{t^2}{\ln^2 t}$ — *без доказательства.*

История улучшений

Теорема 2.2.10. *(1980, б/д, Ajtai–Komlós–Szemeréd)*

$$R(3,t) \leqslant (1+o(1))\frac{t^2}{\ln t}$$

Теорема 2.2.11. *(1995, б/д, Ким)*

$$R(3,t) \geqslant \left(\frac{1}{162} + o(1)\right)\frac{t^2}{\ln t}$$

Теорема 2.2.12. *(2013, б/д)*

$$R(3,t) \geqslant \left(\frac{1}{4} + o(1)\right)\frac{t^2}{\ln t}$$

Замечание. Это наилучшие известные результаты на текущий момент

Замечание. Про число $R(4,t)$ известно лишь, что $R(4,t) = t^{5/2+o(1)}$.

2.2.4 Двудольные диагональные числа Рамсея

Определение 2.2.4. $b(k) := \min\{n \in \mathbb{N}$: для любой раскраски ребер $K_{n,n}$ в два цвета найдется одноцветный $K_{k,k}\}$

Теорема 2.2.13.

$$b(k) \geqslant (1 + o(1))\frac{2\sqrt{2}}{e}k2^{k/2} = n$$

Замечание. В два раза больше, чем оценка $R(k, k)$.

Доказательство. Рассмотрим случайную раскраску $K_{n,n}$ в два цвета с $p_k = p_c = \frac{1}{2}$. Пусть события A_i, $i = 1, \ldots, \left(C_n^k\right)^2$ отвечают тому, что i-тая пара k-элементных множеств образует одноцветный $K_{k,k}$. Воспользуемся ЛЛЛ.

$\mathsf{P}(A_i) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k^2} = 2^{1-k^2} =: p$, $d \leqslant k^2\left(C_{n-1}^{k-1}\right)^2$ — зафиксировали по одной вершине в каждой доле. При подстановки n из условия теоремы имеем $ep(d+1) \leqslant 1 \Rightarrow \mathsf{P}(\bigcap \overline{A}_i) > 0$. ☐

Определение 2.2.5. Пусть H подграф графа G. Тогда его *плотность* равна $\frac{|E_H|}{|E_G|}$.

Теорема 2.2.14. *Пусть G — произвольный подграф $K_{l,m}$, плотность которого равна $p \in [0, 1]$ и $(s-1)C_l^r < mC_{lp}^r$. Тогда G содержит подграф $K_{r,s}$.*

Доказательство. Предположим, что в G нет $K_{r,s}$. Для определенности будем считать, что l вершин содержится в первой доле $K_{l,m}$ и m во второй. Посчитаем двумя способами число подграфов $K_{r,1}$ в G.

1. $\leqslant C_l^r(s-1)$, поскольку для любого r-элементного подмножества первой доли во второй существует не более $s-1$ вершины, связанной с каждой из фиксированных вершин первой доли.

2. Пусть $d_1, \ldots, d_m$ — степени вершин нижней доли. Тогда

$$\#K_{r,1} = C_{d_1}^r + \ldots + C_{d_m}^r \geqslant mC^r_{\frac{d_1+\ldots+d_m}{m}} = mC^r_{\frac{|E|}{m}} = mC_{lp}^r$$

где неравенство следует из неравенства Йенсена.

Тогда имеем $mC_{lp}^r \leqslant \#K_{r,1} \leqslant (s-1)C_l^r$ что противоречит условию теоремы. ☐

Пусть $k^2 = o(n)$, $r^2 = o(l)$, $p \geqslant \text{const} \Rightarrow C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$, $C_l^r \sim \frac{l^r}{r!}$, $C_{lp}^r \sim \frac{l^r p^r}{r!}$. В таких условиях неравенство в теореме переписывается как

$$(s-1) < mp^r \text{ или } m \geqslant (s-1)p^{-r}(1+\varepsilon),\ \varepsilon > 0$$

Теорема 2.2.15. *Пусть* $k \to \infty$, $\left.\begin{aligned} l &= l(k) \\ r &= r(k) \\ s &= s(k) \end{aligned}\right\} \to \infty, r^2 = o(l), p \in [0,1] = \text{const}$. *Пусть $G_{l,m} \subseteq K_{l,m}$ — подграф, такой что его плотность $\geqslant p$. Пусть $\varepsilon > 0$ и*

$$m \geqslant (s-1)p^{-r}(1+\varepsilon)$$

Тогда $\exists k_0\ \forall k \geqslant k_0$ в $G_{l,m}$ есть подграф $K_{r,s}$

Доказательство. Это иная формулировка доказанной выше теоремы. □

Теорема 2.2.16.

$$b(k) \leqslant (1 + o(1))2^k k$$

Доказательство. Положим $n := (1+\varepsilon)2^k k, \varepsilon > 0$. Тогда $b(k) \leqslant n \iff$ в любой раскраски $K_{n,n}$ найдется одноцветный $K_{k,k}$. Пусть $G^{\text{к}}$ и G^{c} графы на всех красных и синих ребрах раскарски соответственно. Б.о.о. плотность $G^{\text{к}}$ $p \geqslant \frac{1}{2}$.

В условиях теоремы 2.2.15 имеем $m = l = n,\ s = r = k$. Имеем

$$n > (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}(1+\varepsilon) = (k-1)2^k(1+\varepsilon)$$

и по теореме 2.2.15 $b(k) \leqslant n$. □

Теорема 2.2.17.

$$b(k) \leqslant (1 + o(1))2^{k+1}\log_2 k$$

Доказательство. Положим $n := (1+\varepsilon)2^{k+1}\log_2 k$ и зафиксируем некоторую раскраску $K_{n,n}$. Рассмотрим вершины второй доли. Назовем вершину из второй доли красной, если из нее выходит красных ребер *больше*, чем синих (а иначе —синей). Без ограничения общности считаем, что красных вершин $\geqslant \frac{n}{2}$.

Рассмотрим красный граф $G_{n,\frac{n}{2}}$, где $\frac{n}{2}$ отвечает множеству красных вершин из второй доли. Из определения красной вершины, плотность $G = p \geqslant \frac{1}{2}$. Тогда, по теореме 2.2.15 имеем (для $l = n, m = \frac{n}{2}$)

$$\frac{n}{2} > (s-1)2^r(1+\varepsilon') \Leftrightarrow (1+\varepsilon)2^k\log_2 k > (s-1)2^r(1+\varepsilon')$$

Возьмем $r := k - 2\log_2 k,\ s := k^2\log_2 k$. Тогда

$$(s-1)2^r = k^2\log_2 k(1+o(1))2^{k-2\log_2 k} = 2^k(1+o(1))\log_2 k$$

и

$$(1+\varepsilon)2^k\log_2 k > 2^k(1+o(1))\log_2 k(1+\varepsilon')$$

что соблюдается для $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, по теореме 2.2.15, мы нашли в G подграф $K_{r,s}$.

В графе $K_{r,s} \subset G_{n,n/2}$ имеется $k - 2\log_2 k$ вершин в верхней доле и $k^2\log_2 k$ в нижней. Пусть A это множество вершин из нижей доли, лежашие в $K_{r,s}$, а C — множество вершин из верхней доли, не лежащие в $K_{r,s}$. Тогда нам необходимо найти $2\log_2 k$ вершин в C и k вершин из A, связанных между собой только красными ребрами. Тогда, вершины из верхней доли в графе $K_{r,s}$ вместе с вершинами из C и k вершин из нижней доли дадут нам искомый одноцветный $K_{k,k}$.

Возьмем $G_{l,m}$, такой что $l = k^2\log_2 k$, $m = n-(k-2\log_2 k) = n(1+o(1))$, $r = k$, $s = 2\log_2 k$. Покажем, что его плотность $p \geqslant \frac{1}{2} - \frac{k}{2^k}$.

Из каждой вершины нижней доли вверх идет хотя бы $\frac{n}{2}$ ребер $\Rightarrow$ из каждой вершины A в C идет не меньше чем $\frac{n}{2} - (k - 2\log_2 k)$ ребер. Тогда

$$p \geqslant \frac{l\left(\frac{n}{2} - k + 2\log_2 k\right)}{lm} > \frac{\frac{n}{2} - k}{m} > \frac{\frac{n}{2} - k}{n} = \frac{1}{2} - \frac{k}{n} > \frac{1}{2} - \frac{k}{2^k}$$

Заметим, что

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{n}\right)^k = \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2^{k+1}\log_2 k}(1 + o(1))\right)^k \sim \frac{1}{2^k}$$

Тогда, для $G_{l,m}$ имеем

$$\begin{aligned}
m > (s-1)p^{-r}(1+\varepsilon') &\Leftrightarrow n(1+o(1)) > 2\log_2 k(1+o(1))2^k(1+\varepsilon') \\
&\Leftrightarrow 2^{k+1}(1+\varepsilon)\log_2 k(1+o(1)) > 2\log_2 k(1+o(1))2^k(1+\varepsilon') \\
&\Leftrightarrow (1+\varepsilon)(1+o(1)) > (1+\varepsilon')(1+o(1))
\end{aligned}$$

что верно для $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ и при достаточно больших k. Применяем теорему 2.2.15 и получаем требуемое. $\square$

2.3 Системы общих представителей

2.3.1 Тривиальные оценки

Определим $R_n := \{1, \ldots, n\}$ $\mathcal{M} := \{M_1, \ldots M_s \mid \forall i \;\; M_i \subseteq R_n$ и $M_i \neq M_j\}$.

Определение 2.3.1. *Системой общих представителей* (далее — соп) для совокупности множеств $\mathcal{M}$ назовем любое $S \subseteq R_n$, т.ч. $\forall i \;\; M_i \cap S \neq \varnothing . \tau(\mathcal{M}) := \min\{\tau \in \mathbb{N} \mid \exists S \subseteq R_n, \; |S| = \tau$ и S — соп для $\mathcal{M}\}$.

Замечание. Для гиперграфа $H = (\mathbb{R}_n, \mathcal{M})$ соп системы $\mathcal{M}$ это вершинное покрытие H.

Пусть $\forall i \; |M_i| = k$, $|\mathcal{M}| = s$ и $M_i \subseteq R_n$. При фиксированных n, s, k количество $\mathcal{M}$ с такими параметрами равно $C^s_{C^k_n}$.

Теорема 2.3.1.

$$\forall \mathcal{M}: \; \tau(\mathcal{M}) \leqslant \min\{s, n-k+1\}$$

Доказательство. От $n-k+2$ до n ровно $k-1$ число, а значит, взяв все числа от 1 до $n-k+1$, мы получим соп. □

Теорема 2.3.2.

$$\exists \mathcal{M}: \; \tau(\mathcal{M}) \geqslant \min\{\left[\frac{n}{k}\right], s\}$$

Доказательство. Возможно два случая:

1. $s \leqslant \left[\frac{n}{k}\right]$. Тогда $\mathcal{M} = \{\{1, 2, \ldots, k\}, \{k+1, \ldots, 2k\}, \ldots, \{(s-1)k+1, \ldots, sk\}\}$
2. $s > \left[\frac{n}{k}\right]$. В таком случае систему $\mathcal{M}$ так же, как и в первый раз, добирая новые множества пока можем, а после добавляем произвольные множества, пока $|\mathcal{M}|$ не равна s.

□

2.3.2 Жадный алгоритм

Теорема 2.3.3.

$$\forall n, k, s \;\; \forall \mathcal{M} \;\; \tau(M) \leqslant \max\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}\} + \frac{n}{k} + 1$$

Доказательство. Зафиксируем $\mathcal{M}$. Возможны следующие случаи:

1. $s \leqslant \frac{n}{k} \Rightarrow \tau(M) \leqslant s \leqslant \frac{n}{k}$
2. $\frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \geqslant n \Rightarrow \tau(M) \leqslant n \leqslant \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}$
3. $s > \frac{n}{k}$, $\frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} < n$.

Для доказательства последнего случая воспользуемся *жадным алгоритмом* построения соп.

Возьмем любой элемент $\nu_1 \in R_n$, который принадлежит наибольшему числу множеств в $\mathcal{M}$. Пусть их ρ_1 штук. Тогда $\rho_1 \geqslant \frac{sk}{n}$, поскольку $sk = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{M \in \mathcal{M}} I_{\{i \in M\}} \leqslant \rho_1 n$. Выкинем из $\mathcal{M}$ все множества, содержавшие ν_1. Осталась совокупность $\mathcal{M}_1$, $|\mathcal{M}_1| = s - \rho_1 = s_1$. Снова сделаем шаг жадного алгоритма.

Всего сделаем $N = \left[\frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}\right] + 1$ шагов ж.а, причем $\rho_i \geqslant \frac{s_{i-1}k}{n}$. После этого имеем построенное ж.а. множество $S = \{\nu_1, \ldots, \nu_N\}$ и совокупность $\mathcal{M}_N$ т.ч.

$$|\mathcal{M}_N| = s_N = s_{N-1} - \rho_N \leqslant s_{N-1} - \frac{s_{N-1}k}{n} \leqslant \ldots \leqslant s(1 - \frac{k}{n})^N = se^{N \ln(1-\frac{k}{n})} \leqslant se^{-\frac{kN}{n}} \leqslant se^{-\frac{k}{n} \cdot \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}} = \frac{n}{k}$$

Итого $\tau(M) \leqslant N + \frac{n}{k} \leqslant \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} + 1 + \frac{n}{k}$ □

Теорема 2.3.4. *Пусть $n \geqslant 4$, $k \leqslant \frac{n}{4}$, $4 \leqslant \ln \frac{sk}{n} \leqslant k$. Тогда*

$$\exists \mathcal{M} : \ \tau(M) \geqslant \frac{1}{32} \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}$$

Доказательство. Возьмем $m := \left[\frac{1}{2} \ln \frac{sk}{n}\right] \geqslant 2$. Для удобства введем обозначение $R_{i,j} = \{i, \ldots, j\}$. Рассмотрим разбиение

$$R_{2qm} = R_{1,2qm} = R_{1,2m} \sqcup R_{2m+1,4m} \sqcup \ldots \sqcup R_{2(q-1)m+1,2qm}$$

где $q = \left[\frac{2k}{m}\right]$. Заметим, что разбиение определено корректно, поскольку из неравенства $\ln \frac{sk}{n} \leqslant k$ вытекает оценка

$$\frac{2k}{m} \geqslant \frac{2k}{\frac{1}{2} \ln \frac{sk}{n}} = \frac{4k}{\ln \frac{sk}{n}} \geqslant 4$$

означающая, во-первых, что $q > 1$ и $q \geqslant \frac{k}{m}$ (мы воспользовались неравенством $[x] \geqslant \frac{x}{2}$ для $x \geqslant 1$). Во-вторых, $2qm \leqslant 4k \leqslant \frac{n}{8}$.

Занумеруем в некотором порядке все m элементные подмножества множетсв $R_{1,2m}, \ldots, R_{2(q-1)m+1,2q}$. Получим совокупности $N^i = \{N_1^i, \ldots, N_{C_{2m}^m}^i\}, i = 1, \ldots, q$. Заметим, что $|N^i| = C_{2m}^m < 2^{2m} \leqslant 2^{\ln \frac{sk}{n}} < \frac{sk}{n}$ и что $\tau(N^i) = m + 1 > m$.

Пусть $\mathcal{M}^1 = \{\mathcal{M}_1^1, \ldots, \mathcal{M}_{C_{2m}^m}^1\}$ это совокупность, состоящая из множеств

$$\mathcal{M}_j^1 = N_j^1 \cup N_j^2 \cup \ldots \cup N_j^q, \quad j = 1, \ldots, C_{2m}^m$$

как показано выше, $|\mathcal{M}^1| < \frac{sk}{n}$ и $\tau(\mathcal{M}^1) = m + 1$. Более того,

$$|\mathcal{M}_j^1| = qm \geqslant \frac{mk}{m} = k$$

Положим $t = \left[\frac{n}{2qm}\right]$. Рассмотрим разбиение

$$R_{2qmt} = R_{1,2qmt} = R_{1,2qm} \sqcup \ldots \sqcup R_{2qm(t-1)+1,2qmt} \subset R_n.$$

Очевидно, что $t \geqslant 1$ и $2qmt \leqslant n$. В каждый элемент последнего разбиения поместим копию совокупности $\mathcal{M}^1$. Появятся совокупности $\mathcal{M}^2, \ldots, \mathcal{M}^t$ и рассмотрим совокупность

$$\mathcal{M}' := \mathcal{M}^1 \cup \ldots \cup \mathcal{M}^t.$$

Понятно, что
$$|\mathcal{M}'| < \frac{sk}{n}t \leqslant \frac{n}{2mq}\frac{sk}{n} \leqslant \frac{n}{2k}\frac{sk}{n} < s.$$
Далее, мощность каждого множества $M \in \mathcal{M}'$ не меньше k. Наконец,
$$\tau(\mathcal{M}') \geqslant (m+1)t > mt \geqslant m\frac{n}{4qm} \geqslant \frac{nm}{4\cdot 2k} \geqslant \frac{n}{8k}\cdot\frac{1}{4}\ln\frac{sk}{n} = \frac{1}{32}\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}.$$
Если $|\mathcal{M}'| < s$, то добавим к ней произвольные множества мощности k. Далее, если какое-то множество $A \in \mathcal{M}'$ содержит больше k элементов, то удалим из него любые произвольные элементы, сделав его мощность равной k. Получим итоговую совокупность $\mathcal{M}$, имеющую мощность s и состоящую только из k-элементных множеств. Поскольку $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}'$, получаем неравенство
$$\tau(\mathcal{M}) \geqslant \tau(M') \geqslant \frac{1}{32}\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}.$$
□

Теорема 2.3.5. *Пусть для данных n, s, k число l таково, что*
$$C_n^l \cdot \frac{C^s_{C_n^k - C_{n-l}^k}}{C^s_{C_n^k}} < 1.$$
Тогда $\exists\mathcal{M}$ с параметрами n, s, k, такая что $\tau(\mathcal{M}) > l$.

Доказательство. Берем случайную совокупность $\mathcal{M}$ с параметрами n, s, k и $\mathsf{P}(\mathcal{M}) = \dfrac{1}{C^s_{C_n^k}}$. Зафиксируем $L \subseteq \{1, \ldots, n\}$, т.ч. $|L| = l$.
$$\mathsf{P}(\text{для случ. } \mathcal{M} \text{ фикс. мн-во } L \text{ является соп}) = \frac{C^s_{C_n^k - C_{n-l}^k}}{C^s_{C_n^k}}$$
Выберем далее все множества, пересекающиеся с L, и возьмем любые s из них.
$$\mathsf{P}(\exists L \text{ т.ч. } \mathcal{M} \text{ имеет } L \text{ в качестве соп}) \leqslant C_n^l \cdot \frac{C^s_{C_n^k - C_{n-l}^k}}{C^s_{C_n^k}} < 1.$$
□

Теорема 2.3.6. *Пусть $n \to \infty$. Пусть $s = s(n) \to \infty$, $k = k(n) \to \infty$, $\frac{sk}{n} \to \infty$. Пусть дополнительно $k^2 = o(n)$, $\ln\ln k = o\left(\ln\dfrac{sk}{n}\right)$, $\left(\ln\dfrac{sk}{n}\right)^2 = o(k)$. Тогда*
$$\exists n_0 \;\; \forall n \geqslant n_0 \;\; \exists\mathcal{M}: \;\; \tau(\mathcal{M}) \geqslant \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n} - \frac{n}{k}\ln\ln\frac{sk}{n} - \frac{n}{k}\ln\ln k - \frac{3n}{k} = (1+o(1))\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}$$

Доказательство. Обозначим $l := \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n} - \frac{n}{k}\ln\ln\frac{sk}{n} - \frac{n}{k}\ln\ln k - \frac{3n}{k}$ и подставим это в утверждение теоремы 2.3.5. Покажем, что для данного l выполнена сходимость
$$C_n^l \cdot \frac{C^s_{C_n^k - C_{n-l}^k}}{C^s_{C_n^k}} \to 0.$$

$$\frac{C^s_{C^k_n - C^k_{n-l}}}{C^s_{C^k_n}} = \frac{\left(C^k_n - C^k_{n-l}\right)\dots\left(C^k_n - C^k_{n-l} - s + 1\right)}{C^k_n\left(C^k_n - 1\right)\dots\left(C^k_n - s + 1\right)}$$
$$= \left(1 - \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n}\right)\left(1 - \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n - 1}\right)\dots\left(1 - \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n - s + 1}\right)$$
$$\sim \left(1 - \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n}\right)^s$$

Покажем последний переход:

$$\frac{C^k_{n-l}}{C^k_n} = \left(1 - \frac{l}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{l}{n-k+1}\right) = \exp\Big[\ln\left(1 - \frac{l}{n}\right) + \ldots + \ln\left(1 - \frac{l}{n-k+1}\right)\Big]$$
$$= \exp\Big[-\frac{l}{n} + o\left(\frac{l^2}{n^2}\right) - \frac{l}{n-1} + \ldots - \frac{l}{n-k+1} + o\left(\frac{l^2}{n^2}\right)\Big]$$
$$= \exp\Big[-l\frac{k}{n}\left(1 + o\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)\Big] = \exp\Big[-l\frac{k}{n}\left(1 + o\left(\frac{k}{n}\right)\right)\Big]$$
$$\sim e^{-(1+o(1)\ln\frac{sk}{n}} \to 0$$

поскольку

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-\frac{k-1}{n}}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

и

$$\frac{C^k_{n-l}}{C^k_n - s} = \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n}\cdot\frac{1}{1-\frac{s}{C^k_n}} = \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n}\left(1 + \frac{s}{C^k_n}\right)(1 + o(1)) \text{ при } s/C^k_n \to 0.$$

установим это. Пусть $\frac{s}{C^k_n} > a$ (т.е. $\nrightarrow 0$). Тогда $s > aC^k_n$ и

$$\ln\frac{sk}{n} > \ln\frac{akC^k_n}{n} \sim \ln\frac{akn^k}{nk!} = \ln\frac{an^{k-1}}{(k-1)!} \geqslant \ln\frac{an^{k-1}}{k^{k-1}} = \ln\Big[a\left(\frac{n}{k}\right)^{k-1}\Big] \sim k\ln\frac{n}{k} > k$$

что противоречит условию $\ln^2\frac{sk}{n} = o(k) \Rightarrow \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n - s} \sim \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n}$. Поскольку $l\frac{k^2}{n^2} \sim \frac{k}{n}\ln\frac{sk}{n} = o\left(\frac{\ln\frac{sk}{n}}{k}\right) \to 0$, имеем $\exp\Big[-\frac{lk}{n}(1 + o\left(\frac{k}{n}\right)\Big] \sim e^{-\frac{lk}{n}}$, а значит

$$\frac{C^s_{C^k_n - C^k_{n-l}}}{C^s_{C^k_n}} \sim \left(1 - \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n}\right)^s = \exp\Big[-(1+o(1))s\frac{C^k_{n-l}}{C^k_n}\Big] \sim \exp\Big[-(1+o(1))se^{-\frac{lk}{n}}\Big]$$

Подставляя l, получаем

$$e^{-\frac{lk}{n}} = \frac{n}{sk}\left(\ln\frac{sk}{n}\right)(\ln k)\,e^3 \Rightarrow \exp\Big[-(1+o(1))se^{-\frac{lk}{n}}\Big] = \exp\Big[-\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\ln ke^3\Big]$$

Оценим теперь C^l_n, пользуясь тем, что $l(1+o(1))\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}$:

$$C^l_n \leqslant \left(\frac{ne}{l}\right)^l \leqslant \left(\frac{2ek}{\ln\frac{sk}{n}}\right)^l < k^l = e^{l\ln k} \leqslant e^{\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\cdot\ln k}$$

Объединяя все вместе, получаем:

$$C_n^l \cdot \frac{C^s_{C_n^k - C_{n-l}^k}}{C^s_{C_n^k}} \sim \exp\Big[\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\ln k\Big] \cdot \exp\Big[-(1+o(1))\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\ln ke^3\Big] = \exp\Big[(1+o(1))(1-e^3)\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\ln k\Big] \to 0$$

$\square$

2.3.3 Конструктивная оценка размера минимальной соп

Зафиксируем n, s, k. Мы хотим построить $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s \mid |M_i| = k$ и $M_i \subseteq R_n\}$ с $\tau(\mathcal{M}) > l$.

Рассмотрим систему всех k-элементных подмножеств: $K_1, \dots, K_{C_n^k} = \mathcal{K}$. Нужно выбрать такие $M_1, \dots, M_s \in \mathcal{K}$, что

$$\forall L: \ |L| = n - l \ \exists i \ M_i \subseteq L \tag{2.2}$$

"Заменим" $K_1, \dots, K_{C_n^k}$ на числа $1, \dots, C_n^k$. Тогда условие 2.2 эквивалентно выбору

$$i_1, \dots, i_s: \ \forall L \ |L| = n - l \ \exists i_\nu: \ K_{i_\nu} \subseteq L \tag{2.3}$$

Сопоставим каждому L все его k-элементные подмножества, т.е. множество $\mathcal{L} \subseteq \{1, \dots, C_n^k\}$ их номеров. Очевидно $|\mathcal{L}| = C_{n-l}^k$.

Множества $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{C_n^l}$ образуют совокупность в $\{1, \dots, C_n^k\}$ и $i_1, \dots, i_\tau$ — ее соп. Тогда множества $K_{i_1}, \dots, K_{i_\tau}$ это как раз те множества, обладающие свойством 2.3.

Мы построили τ множеств, а хотели изначально s. Если $\tau \leqslant s$, то добавим проивзольные множества в совокупность и размер соп не уменьшится. Значит необходимо проверить, что $\tau < s$.

По теореме о жадном алгоритме

$$\tau \leqslant \max\left\{\frac{C_n^k}{C_{n-l}^k}, \ \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k}\ln\frac{C_n^l C_{n-l}^k}{C_n^k}\right\} + \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k} + 1$$

Следствие. *Пусть для фиксированных n, s, k число l таково, что*

$$\max\left\{\frac{C_n^k}{C_{n-l}^k}, \ \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k}\ln\frac{C_n^l C_{n-l}^k}{C_n^k}\right\} + \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k} + 1 \leqslant s$$

Тогда $\exists \mathcal{M}$ с параметрами n, s, k, такая что $\tau(M) > l$.

2.4 Размерность Вапника-Червоненкиса

Рассмотрим множество точек $S \subset \mathbb{R}^n$ конечной мощности. Начнем пересекать его со всевозможными треугольниками в любой плоскости и пусть $\mathcal{M}$ это система всех подмножеств S, которые можно получить, пересекая S с треугольниками.

Зафиксируем теперь $\varepsilon \in (0,1)$ и пусть $\mathcal{M}_\varepsilon \subseteq \mathcal{M} = \{M \in \mathcal{M} \mid |M| \geqslant \varepsilon |S|\}$.

Теорема 2.4.1. *(Вапника-Червоненкиса, частный случай)*

$\forall \varepsilon$ $\exists$с.о.п.N для совокупности $\mathcal{M}_\varepsilon$, такая что

$$|N| \leqslant \frac{500}{\varepsilon} \log_2 \frac{500}{\varepsilon}$$

Замечание. Мощность N не зависит от S и n.

2.4.1 Теорема Вапника-Червоненкиса

Рассмотрим пару $(\mathcal{X},\ R)$ — произвольное множество и систему его подмножеств.

Определение 2.4.1. Пара $(\mathcal{X},\ R)$ называется *ранжированным пространством.*

Подмножество $A \subseteq \mathcal{X}$ *дробится* системой R, если

$$\forall B \subseteq A \ \exists r \in R: \ A \cap r = B,$$

причем *проекцией* системы R на A назовем множество $Pr_A R = \{r \cap A \mid r \in R\}$ всевозможных пересечений $r \in R$ с A. Очевидно, что A дробится тогда и только тогда, когда $Pr_A R = 2^A$.

Пример 2.4.1. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ — семейство всех открытых полупространств (например для $n = 2$ это полупоскости).

Определение 2.4.2. *Размерность Вапника-Червоненкиса* $VC\,(\mathcal{X}; R)$ ранжированного пространства $(\mathcal{X}, R)$ по определению равна

$$VC\,(\mathcal{X}; R) := \max\{m \in \mathbb{N} \mid \exists A \subseteq \mathcal{X},\ |A| = m: \ Pr_A R = 2^A\}$$

(если такого m не существует, то $VC\,(\mathcal{X}; R) = +\infty$).

Пример 2.4.2. $VC\left(\mathbb{N}; 2^{\mathbb{N}}\right) = +\infty$.

Теорема 2.4.2. *(Радон, б/д)*

Любое множество из $n+2$ точек $S \subset \mathbb{R}^n$ можно представить как $S = A_1 \sqcup A_2$, причем выпуклые оболочки A_1 и A_2 пересекаются, т.е.

$$\operatorname{conv}(A_1) \cap \operatorname{conv}(A_2) \neq \varnothing.$$

Утверждение 2.4.1.1. $VC\,(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}) = n + 1$.

Доказательство. Поскольку $n+1$ вершина симплекса в $\mathbb{R}^n$ дробится, то верно неравенство $VC\,(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}) \geqslant n+1$.

Для множества S, $|S| \geqslant n+2$ найдем представление $A_1 \sqcup A_2$ из теоремы Радона. Тогда очевидно, что отдробить A_1 не получится. $\square$

Лемма 2.4.1. *Пусть $(\mathcal{X},\ R)$ — ранжированное пространство, такое что $VC\,(\mathcal{X}; R) = d,\ \ |\mathcal{X}| = n$. Тогда верно неравенство*

$$|R| \leqslant g(n,d) = \sum_{i=0}^{d} C_n^i.$$

Доказательство. Заметим сначала, что $g(n,d) = g(n-1,d)+g(n-1,d-1)$ — следствие из треугольника Паскаля.

Воспользуемся индукцией по n и d.

База: пусть $n = 0$ и d произвольное. Тогда R равно либо $\{\varnothing\}$, либо $\varnothing$. В любом случае, $|R| \leqslant 1$. В то же время, очевидно, что $VC\,(\mathcal{X}; R) \leqslant n = 0$. Но тогда $|R| \leqslant 1 = g(0,0)$. Пусть, наоборот, $d = 0$ и $n \geqslant 1$ — произвольное. Предположим, что $|R| \geqslant 2$. Тогда $\exists r_1 \neq r_2 \in R$, причем либо в $r_1 \backslash r_2$, либо в $r_2 \backslash r_1$ содержится элемент $x \in \mathcal{X}$. Тогда множество $A = \{x\}$ дробится r_1 и r_2, что противоречит $d = 0$. Получаем $|R| \leqslant 1 = g(n,0)$ и база доказана.

Переход: зафиксируем $(\mathcal{X}, R)$ с $VC\,(\mathcal{X}; R) = d \geqslant 1$ и $|\mathcal{X}| = n \geqslant 1$. Рассмотрим произвольный $x \in \mathcal{X}$ и определим пространства $(\mathcal{X}_1,\ R_1)$, $(\mathcal{X}_2,\ R_2)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \mathcal{X} \backslash \{x\} \\
&R_1 = \{r \backslash \{x\} \ |\ r \in R\},\ R_2 = \{r \in R \ |\ x \notin r \text{ но } r \cup \{x\} \in R\}
\end{aligned}$$

Тогда имеем $|R| = |R_1| + |R_2|$ (рассмотреть такие $r \in R$, что $r \in R$ и $r \cup \{x\} \in R$). Докажем два неравенства:

1. $VC\,(\mathcal{X}_1; R_1) \leqslant d$ — очевидно.

2. $VC\,(\mathcal{X}_2; R_2) \leqslant d-1$ — предположим $VC\,(\mathcal{X}_2; R_2) \geqslant d$ и рассмотрим $A \subseteq \mathcal{X}_2$, $|A| = d$, $Pr_{R_2} A = 2^A$. По определению R_2, множество $A \cup \{x\}$ дробится системой R, но $|A \cup \{x\}| \geqslant d+1$, что противоречит $VC\,(\mathcal{X}; R) = d$.

Тогда, по предположению индукции, верно

$$|R| = |R_1| + |R_2| \leqslant g(n-1,d) + g(n-1,d-1) = g(n,d).$$

$\square$

Следствие. *Пусть $VC\,(\mathcal{X}; R) = d,\ \ A \subseteq \mathcal{X},\ |A| = n$. Тогда $|Pr_A R| \leqslant g(n,d)$.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $(A,\ Pr_A R)$ и применим к нему лемму 2.4.1. $\square$

Определение 2.4.3. $h \in \mathbb{N}$. Тогда $h-$*измельчение* R это множество

$$R_h := \{r_1 \cap \ldots \cap r_h : \; r_i \in R\}$$

Пример 2.4.3. Для $(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ измельчение R_h целиком содержит в себе совокупность всех выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^n$, имеющих h граней. Для $h = 3, n = 2$ это все треугольники на плоскости.

Лемма 2.4.2. *Пусть* $d \geqslant 2$, $h \geqslant 2$ *и* $VC\,(\mathcal{X}; R) = d$. *Тогда*

$$VC\,(\mathcal{X}; R_h) \leqslant 2dh \log_2 dh$$

Доказательство. Зафиксируем любое $A \subseteq \mathcal{X}$, имеющее $|A| = n > 2dh \log_2 dh$ и дробящееся R_h (если такое существует). По лемме 2.4.1 имеем $|Pr_R A| \leqslant g(n, d)$. Тогда

$$|Pr_A R_h| \leqslant |Pr_A R|^h \leqslant n^{dh}.$$

Поскольку $n \geqslant 2$, то в сумме $g(n, d)$ максимально последнее слагаемое и $g(n, d) \leqslant n^d$ (*б/д, по индукции*). Поскольку $|Pr_A R_h| = 2^n$, то должно быть выполнено неравенство

$$|Pr_A R_h| = 2^n \leqslant |Pr_A R|^h \leqslant n^{dh},$$

что неверно при $n > 2dh \log_2 dh$, а множества A с $|A| = n$, дробящегося R_h, не существует. □

Определение 2.4.4. Пусть $(\mathcal{X}, R)$ — произвольное ранжированное пространство. Зафиксируем любое конечное $A \subset \mathcal{X}$ с $n = |A|$ и $\varepsilon \in (0, 1)$. Определим совокупность

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_\varepsilon(A, R) = \{M_1, \, \ldots, M_s\} = \{A \cap r \;\mid\; \forall r \in R : |r \cap A| \geqslant n\varepsilon\}.$$

Тогда *ε-сетью для* A называется любая с.о.п. совокупности $\mathcal{M}$.

Теорема 2.4.3. *(Вапника-Червоненкиса)*

Пусть $VC\,(\mathcal{X}; R) \leqslant d$, $\varepsilon \in (0, 1)$. *Тогда* $\forall A \subseteq \mathcal{X}$, *таких что* $|A| < +\infty$ *существует* ε-*сеть* N, *такая что*

$$|N| \leqslant \frac{8d}{\varepsilon} \log_2 \frac{8d}{\varepsilon}$$

Доказательство. Введем обозначения $n := |A|$, $m := \left\lceil \frac{8d}{\varepsilon} \log_2 \frac{8d}{\varepsilon} \right\rceil$. Построим по схеме выбора с возвращением по очереди два мультимножества $N = \{x_1, \, \ldots, \, x_m\}$ и $T = \{y_1, \, \ldots, \, y_m\}$. Введем вероятностное пространство $(\Omega, \, \mathscr{F}, \, \mathsf{P})$ следующим образом:

$$\Omega = \{(N, T)\} = \{(\{x_1, \, \ldots, \, x_m\}, \{y_1, \, \ldots, \, y_m\}) : \; x_i, \; y_i \in A\},$$
$$|\Omega| = n^{2m}; \quad \mathscr{F} = 2^\Omega; \quad \mathsf{P}((N, T)) = \frac{1}{n^{2m}} \quad \forall (N, T) \in \Omega$$

и определим на нем два события:

$$E_1 = \{(N, T) : \; \exists r \in R : \; |r \cap A| \geqslant \varepsilon n, \; r \cap N = \varnothing\}$$
$$E_2 = \{(N, T) : \; \exists r \in R : \; |r \cap A| \geqslant \varepsilon n, \; r \cap N = \varnothing, \;\; |T \cap r| \geqslant \varepsilon \frac{m}{2}\}$$

где $|r \cap T|$ считается с учетом кратности элементов в мультимножестве T, т.е. $r \cap T$ по-прежнему мультимножество.

Лемма 2.4.3. $\mathsf{P}(E_2) \geqslant \frac{1}{2}\mathsf{P}(E_1)$

Доказательство леммы 2.4.3. Поскольку $\mathsf{P}(E_2|E_1) = \frac{\mathsf{P}(E_2 \cap E_1)}{\mathsf{P}(E_1)} = \frac{\mathsf{P}(E_2)}{\mathsf{P}(E_1)}$, то достаточно установить неравенство $\mathsf{P}(E_2|E_1) \geqslant \frac{1}{2}$.

При условии E_1 найдется $r_1 \in R$, такой что $|r_1 \cap A| \geqslant \varepsilon n$ и $r_1 \cap N = \varnothing$. Тогда $\mathsf{P}(E_2|E_1) \leqslant \mathsf{P}(|r_1 \cap T| \geqslant \frac{\varepsilon m}{2})$. r_1 не обязано целиком лежать в A, а поскольку все элементы T лежат в A, то уместно рассмотреть $u := r_1 \cap A$ (помним, что $|u| \geqslant \varepsilon n$) и оценить вероятность $\mathsf{P}(T : \ |u \cap T| \geqslant \frac{\varepsilon m}{2})$. Фактически, мы рассматриваем схему испытаний Бернулли: всего m испытаний (извлекаем по элементу из T) и успех состоит в том, что извлеченный элемент лежит в u, а искомая вероятность — это вероятность того, что произошло не менее $\frac{\varepsilon m}{2}$ успехов. Причем вероятность отдельного успеха есть $\frac{|u|}{|A|} \geqslant \varepsilon$.

Рассмотрим случайную величину $\xi \sim Bin(m, \varepsilon)$. Как известно, $\mathsf{E}\xi = m\varepsilon$, $\mathsf{D}\xi = m\varepsilon(1-\varepsilon) \leqslant m\varepsilon$. Имеем

$$\mathsf{P}(E_2|E_1) \geqslant \mathsf{P}\left(\xi \geqslant \frac{\varepsilon m}{2}\right) = \mathsf{P}\left(\xi - \mathsf{E}\xi \geqslant -\frac{\varepsilon m}{2}\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\xi - \mathsf{E}\xi < -\frac{\varepsilon m}{2}\right)$$
$$\geqslant 1 - \mathsf{P}\left(|\xi - \mathsf{E}\xi| > \frac{\varepsilon m}{2}\right) \geqslant 1 - 4\frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2 m^2} \geqslant 1 - \frac{4}{\varepsilon m}$$

Вспоминаем, что
$$m \geqslant \frac{8d}{\varepsilon}\log_2\frac{8d}{\varepsilon} \geqslant \frac{24}{\varepsilon}.$$

Следовательно,
$$1 - \frac{4}{\varepsilon m} \geqslant 1 - \frac{4}{24} = \frac{5}{6} \geqslant \frac{1}{2}.$$

и лемма доказана. □

Лемма 2.4.4.
$$\mathsf{P}(E_2) \leqslant 2^{-\frac{\varepsilon n}{2}} g(2m, d)$$

Доказательство леммы 2.4.4. Чтобы установить утверждение леммы *немного поменяем* вероятностное пространство. А именно будет состовлять пару (N, T) новым образом, не изменив вероятность E_2 и E_1:

1. По схеме выбора с возвращением из A построим мультимножество $U = \{z_1, \ldots, z_{2m}\}$ с $\mathsf{P}(U) = \frac{1}{n^{2m}}$.

2. Разбиваем множество индексов $\{1, \ldots, 2m\}$ на две равные части так, что все разбиения равновероятны с вероятностью $\frac{1}{C_{2m}^m}$.

3. Элементы, соответствующие первому множеству индексов относим в мультимножество N, а второму — в T.

По формуле полной вероятности $\mathsf{P}(E_2) = \sum\limits_U \mathsf{P}(E_2 \mid U)\mathsf{P}(U)$. Поскольку $\sum\limits_U \mathsf{P}(U) = 1$ достаточно показать, что $\mathsf{P}(E_2 \mid U) \leqslant 2^{-\varepsilon m/2} g(2m,d)$.

Представим E_2 в следующем виде:

$$E_2 = \bigcup_{\substack{r\in R\\ |r\cap A|\geqslant \varepsilon n}} E_{2,r}; \quad E_{2,r} := \{(N,T) \ | \ r\cap N = \varnothing,\ |r\cap T| \geqslant \frac{\varepsilon m}{2}\}.$$

Заметим, что если U фиксированно, то для любых $r_1, r_2 \in R$, удовлетворяющих условию $r_1\cap U = r_2\cap U$ события E_{2,r_1} и E_{2,r_2} совпадают $\Rightarrow$ количество различных событий вида $E_{2,r}$ это в точности число различных $r\cap U$, т.е. $|Pr_U R| \leqslant g(2m,d)$ по лемме 2.4.1.

Осталось показать, что $\mathsf{P}(E_{2,r}|U) \leqslant 2^{-\varepsilon m/2}$. Действительно, пусть $|r\cap U| = p \geqslant \frac{\varepsilon n}{2}$. Тогда

$$\mathsf{P}(E_{2,r}|U) \leqslant \mathsf{P}(r\cap N = \varnothing|U) = \frac{C_{2m-p}^{p}}{C_{2m}^{m}} = \frac{(2m-p)!}{(2m)!}\cdot\frac{m!}{(m-p)!} = \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{2m(2m-1)\dots(2m-p+1)} \leqslant 2^{-p} \leqslant 2^{-\varepsilon m/2}.$$

Тогда как для $p < \frac{\varepsilon n}{2}$ вероятность $\mathsf{P}(E_{2,r}|U) = 0$. □

Лемма 2.4.5. *(б/д): $g(2m,d)2^{-\varepsilon m/2} < \frac{1}{2}$*

Используя леммы 2.4.3-2.4.5 получаем цепочку неравенств:

$$\frac{1}{2} > \mathsf{P}(E_2) \geqslant \frac{1}{2}\mathsf{P}(E_1) \Rightarrow \mathsf{P}(E_1) < 1,$$

что и завершает доказательство. □

Вывод теоремы 2.4.1 из теоремы общего случая: по лемме 2.4.2

$$VC\left(\mathbb{R}^2;\Delta\right) = VC\left(\mathbb{R}^2;\mathcal{H}_3\right) \leqslant 2\cdot 3\cdot 3\cdot \log_2(3\cdot 3) \leqslant 60$$

и $8\cdot 60 < 500$. А дальше применяем теорему 2.4.3.

2.4.2 Некоторое практическое применение

Вспомним теорему Гливенко-Кантелли из математической статистики:

$$\mathsf{P}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n^*(x) - F(x)| \to 0\right) = 1,$$

где $F_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} I\{X_i \leqslant x\}$ — эмпирическая функция распределения. Однако, по УЗБЧ верна сходимость

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\{X_i \leqslant x\} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}I\{X_1 \leqslant x\} = \mathsf{P}(X_1 \leqslant x) = F(x),$$

т.е. теорема Гливенко-Кантелли утверждает, что в законе больших чисел для схемы испытаний Бернулли выполнена равномерная сходимость.

Теорема 2.4.4. *(б/д, 1971, Вапник, Червоненкис)*

Пусть $x \in \mathcal{X}$. *Рассмотрим последовательность событий* $A_1^x, \ldots, A_n^x, \ldots$ *на некотором вероятностном пространстве, для которой* $\forall x:\ A_i^x$ *независимы в совокупности и* $\forall x\, \forall n\ \mathsf{P}(A_n^x) = p_x$.

Тогда $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} I\{A_i^x\}$ *сходится по* x *равномерно к* p_x *тогда и только тогда, когда* $VC\,(\mathcal{X}; A_1^x, \ldots, A_n^x, \ldots) < +\infty$.

2.5 Матрицы Адамара

2.5.1 Гипотеза Адамара

Определение 2.5.1. Матрица $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$, составленная из ± 1, такая что любые ее две строки (или два столбца, что эквивалентно) ортогональны, называется *матрицей Адамара.*

Пример 2.5.1. Матрицы Адамара для различных n:

1. $n = 1$: (1), (-1).
2. $n = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
3. $n = 2k + 1$: не существует.

Определение 2.5.2. Матрицей Адамара *в нормальной форме* называется матрица Адамара H, у которой первая строка и первый столбец составлены только из 1.

Для матрицы Адамара в нормальной форме порядка $n > 3$ все строки (и столбцы), кроме первых, содержат по $\frac{n}{2}$ минус единиц, причем количество "пересечений"(-1) с 1 в соседних строках делится на 4.

Гипотеза (Адамара)**.** *Матрица Адамара существует для любого n, кратного* 4.

Рассмотрим граф $G\left(n; \frac{n}{2}; \frac{n}{4}\right)$ — вектора из $\{0,1\}^n$, т.ч. $\|x\| = \frac{n}{2}$ и ребро проводится, если $\langle x, y\rangle = \frac{n}{4}$. Тогда матрица Адамара в нормальной форме H порядка n без первой строки задает $(n-1)$ клику в графе $G\left(n; \frac{n}{2}; \frac{n}{4}\right)$.

Утверждение 2.5.1.1. В графе $G\left(n; \frac{n}{2}; \frac{n}{4}\right)$ нет клик размера $> n$.

Доказательство. $G\left(n; \frac{n}{2}; \frac{n}{4}\right)$ — дистанционный граф $\Rightarrow$ клика в G это симплекс в пространстве. Поскольку сумма координат вершин G фиксирована, то размерность пространства равна $n-1$ и симплекса из $> n$ вершин (а значит и $(> n)$-клики) не существует. □

Доказано, что $\exists m \in [n, n + o(n)]$, такое, что существует A порядка m.

Утверждение 2.5.1.2. Гипотеза Адамара верна для $n = 2^k$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$; $B \in \mathrm{Mat}_{m\times m}$. Тогда кронекеровским произведением A на B назовем матрицу

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{nm\times nm}$$

Покажем, что если A и A' — матрицы Адамара, то и $B = A \otimes A'$ тоже. Действительно, найдем скалярное произведение первых двух строк матрицы B:

$$
\begin{aligned}
a_{11}a'_{11} \cdot a_1 1a'_{21} + a_{11}a'_{12} \cdot a_{11}a'_{22} + \ldots + a_{11}a'_{1m} \cdot a_{11}a'_{2m} + \ldots + a_{1n}a'_{11} \cdot a_{1n}a'_{21} + \ldots + a_{1n}a'_{1m} \cdot a_{1n}a'_{2m} = \\
= a'_{11}a'_{22}(a_{11}a_{11} + \ldots + a_{1n}a_{1n}) + \ldots + a'_{1m}a'_{2m}(a_{11}a_{11} + \ldots + a_{1n}a_{1n}) = \\
= n(a'_{11}a'_{21} + \ldots + a'_{1m}a'_{2m}) = 0
\end{aligned}
$$

поскольку A' — матрица Адамара. $\square$

2.5.2 Раскраски гиперграфов

Рассмотрим гиперграф $H = (V, E),\ V = \{1, \ldots, n\},\ E = \{M_1, \ldots, M_s \mid n \geqslant |M_i| \geqslant 2\}$. Раскраской гиперграфа назовем функцию $\chi : \{1, \ldots, n\} \to \{-1, 1\}$. Определим $\chi(M_i) = \sum\limits_{j \in M_i} \chi(j)$ и

$$\operatorname{disc}(E) := \min_{\chi} \max_{i} |\chi(M_i)|.$$

Теорема 2.5.1.

$$\operatorname{disc}(E) \leqslant \sqrt{2n \ln 2s}.$$

Доказательство. Зафиксируем гиперграф H и рассмотрим случайную раскраску. По неравенству больших уклонений 1.3.1 выполнено

$$\mathsf{P}(|\chi(M_i)| \geqslant a) \leqslant 2 \exp\Big[-\frac{a^2}{2|M_i|}\Big] \leqslant 2e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

Тогда

$$\mathsf{P}(\exists i: \ |\chi(M_i)| \geqslant a) \leqslant 2se^{-\frac{a^2}{2n}},$$

что меньше 1 при $a = \sqrt{2n \ln 2s}$. $\square$

Теорема 2.5.2. *(б/д, Спенсер)*

Если $s = n$, то

$$\operatorname{disc}(E) \leqslant 6\sqrt{n}.$$

Теорема 2.5.3. *Если $s = n$ и n — порядок матрицы Адамара, то $\exists E: \ \operatorname{disc}(E) \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу Адамара в нормальной форме H и матрицу $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим матрицу $\frac{1}{2}(H + J)$, строки который будут отвечать ребрам гиперграфа, и пусть $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$, $v_i \in \{\pm 1\}$ — вектор-раскраска. В введенных обозначениях выполнено равенство

$$\frac{1}{2}(H + J)\, v = \begin{pmatrix} L'_1 := \chi(M_1) \\ \vdots \\ L'_n := \chi(M_n) \end{pmatrix},$$

и нам нужно проверить, что $\forall v_1, \ldots, v_n \ \exists i: \ |L'_i| \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Положим $\lambda := \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$, $H = (h_1, \ldots, h_n)$ — столбцы матрицы H. Тогда

$$Hv = h_1 v_1 + \ldots + h_n v_n = (L_1, \ldots, L_n)^T = L$$

и

$$L_1^2 + \ldots + L_n^2 = (L, L) = v_1^2 \langle h_1, h_1 \rangle + \ldots + v_n^2 \langle h_n, h_n \rangle = n^2$$

откуда $\exists i \ L_i^2 \geqslant n \Rightarrow |L_i| \geqslant \sqrt{n}$.

Заметим теперь, что $(H + J)v = (L_1 + \lambda, \ldots, L_n + \lambda)^T = (2L'_1, \ldots, 2L'_n)^T = N$. Покажем, что $\langle N, N \rangle \geqslant n^2$.

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle &= (L_1 + \lambda)^2 + \ldots + (L_n + \lambda)^2 = L_1^2 + \ldots + L_n^2 + 2\lambda(L_1 + \ldots + L_n) + n\lambda^2 \\ &= n^2 + n\lambda^2 + 2\lambda n v_1 = n^2 \pm 2\lambda n + n\lambda^2 \end{aligned}$$

поскольку $\sum L_i = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \sum\limits_{j=1}^{n} h_{ij} = v_1 \sum\limits_{j=1}^{n} h_{1j} = n v_1$.

Рассмотрим $f(\lambda) = n^2 \pm 2\lambda n + n\lambda^2$. Поскольку $2 \mid n$ (n — порядок матрицы Адамара), то $2 \mid \lambda$. $\min f(\lambda)$ достигается в точке $\mp \frac{2n}{2\lambda} = \mp 1$, но, поскольку λ четное, необходимо перебрать $\lambda \in \{\pm 2, 0\}$. В любом случае получим $f(\lambda) \geqslant n^2$, откуда следует условие теоремы. $\square$

2.6 Кнезеровский граф

2.6.1 Определение и некоторые свойства

Определение 2.6.1. *Кнезеровским графом* $KG_{n,k} = (V, E)$ называется граф, такой, что V — все k-элементные подмножества $\{1, \ldots, n\}$, а $E = \{(A, B) : A \cap B = \varnothing\}$.

Из теоремы Эрдеша-Ко-Радо следует, что

$$\alpha(KG_{n,k}) = \begin{cases} C_{n-1}^{k-1} & k, \leqslant \frac{n}{2} \\ C_n^k & k > \frac{n}{2} \end{cases}$$

а $\omega(KG_{n,k}) = \left[\frac{n}{k}\right]$. Тривиальными оценками для хроматического числа являются:

$$\begin{aligned} \chi(KG_{n,k}) \geqslant \omega = \left[\frac{n}{k}\right] \\ \geqslant \frac{|V|}{\alpha} = \frac{n}{k} \end{aligned}$$

Попробуем улучшить их.

2.6.2 Хроматическое число кнезеровского графа

Покрасим все множества, содержащие 1, в первый цвет. Аналогично поступим так со всеми остальными $i = 2, \ldots, n$. Получим, что $\chi(KG_{n,k}) \leqslant n$. Заметим теперь, что нам достаточно покрасить в свой цвет только множества, содержащие $1, 2, \ldots, n - 2k + 1$, и оставшиеся $2k - 1$ число в еще один цвет, ведь любые два k-элементных подмножества из этих чисел пересекаются. В итоге имеем оценку $\chi(KG_{n,k}) \leqslant n - 2k + 2$.

Гипотеза (Кнезер).

$$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$$

Для продолжения сформулироваем результат, который, казалось бы, никак не относится к этому вопросу.

Теорема 2.6.1. *(б/д 1930: Борсук, Улам; 1932: Люстерник, Шнирельман)*

Пусть $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — сфера в $\mathbb{R}^n$ размерности $n - 1$ с центром в начале координат покрыта множествами $A_1, \ldots, A_n$ (т.е. $S^{n-1} = A_1 \cup \ldots \cup A_n$), причем $\forall i :$ A_i либо открыто, либо замкнуто. Тогда $\exists i :$ в A_i лежит две диаметрально противоположные точки.

Докажем здесь частный случай этой теоремы, когда $n = 2$ и оба A_1, A_2 — замкнутые. Рассмотрим произвольную точку x окружности S^1. Пусть $x \in A_1$. Если $-x$ тоже лежит в A_1, то утверждение доказано. Иначе будем двигаться по окружности по часовой стрелке. Поскольку $-x \in A_2$ и A_1 — замкнуто, то на дуге от x до $-x$ найдется "крайняя"точка $y \in A_1$.

Заметим. что если $y \notin A_2$, то сдвинувшись еще дальше по окружности, мы найдем либо точку окружности, не лежащую в $A_1 \cup A_2$, что противоречит условию теоремы БУЛШ. Тогда $y \in A_1 \cap A_2$ и $-y \in A_i$ — искомая диаметрально противоположная пара точек.

Замечание. Теорема БУЛШ равносильна утверждению: Если $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, то $\exists x \in S^n : \; f(x) = f(-x)$

Теорема 2.6.2. *(Ловас)*

$$\chi(KG_{n,k}) \geqslant n + 2k - 2$$

Доказательство. Предположим, что $\chi(KG_{n,k}) \leqslant n - 2k + 1 = d$. Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_d$ — цвета раскраски вершин $K_1, \ldots K_{C_n^k}$ вершин $KG_{n,k}$. Пусть $S^d \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ — d-мерная сфера в $(d+1)$-мерном пространстве. Назовем *экватором* любое центральное сечение этой сферы гиперплоскостью. Заметим, что экватор это всегда S^{d-1}.

Сопоставим числам $\{1, \ldots, n\}$ точки сферы $x_1, \ldots, x_n \in S^d$ так, чтобы на каждом экваторе лежало не более d точек. Теперь определим для точки $y \in S^d$ множество $H(y)$ — открытую полусферу с центром в точке y. Введем множества

$$A_i := \{x \in S^d : \; H(x) \text{содержит целиком одно множество цвета } \chi_i, \; i = 1, \ldots, d$$

$$A_{d+1} := \{x \in S^d : \; |H(x) \cap \{x_1, \ldots, x_n\}| \leqslant k - 1\}$$

Легко понять, что $S^d = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Поскольку все $H(x)$ открыты, то открыты и A_i для $i = 1, \ldots, d$, а A_{d+1} — замкнуто, поскольку это дополнение открытых до S^d. Тогда, по теореме БУЛШта $\exists i \; \exists x$: $x, \; -x \in A_i$.

Пусть $i \leqslant d$. Тогда в полусфере с центром в x содержится k точек цвета χ_i и в полусфере с центром в $-x$ тоже содержится k точек цвета χ_i. Поскольку полусферы открытые, эти два множества не пересекаются, а значит не могут быть одного цвета по определнию $KG_{n,k}$.

Пусть $i = d + 1$. В таком случае $H(x)$ и $H(-x)$ содержат $\leqslant 2(k-1)$ точек. Это значит, что все остальные точки лежат на экваторе. Но их

$$\geqslant n - 2(k-1) = n - 2k + 2 = d + 1,$$

что противоречит выбору $x_1, \ldots, x_n$. $\square$