

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ ИННОВАЦИЙ И ВЫСОКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Дискретный анализ

Лектор: А.М. Райгородский

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

автор: АЛЕКСАНДР МАРКОВ

2 июня 2017 г.

Оглавление

| | | |
|----------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | 1 семестр | 3 |
| 1.1 | Асимптотики комбинаторных величин | 3 |
| 1.1.1 | Количество треугольников в $G(n, r, s)$ | 3 |
| 1.1.2 | Асимптотика биномиальных коэффициентов | 4 |
| 1.2 | Основы теории графов | 6 |
| 1.2.1 | Определения. Деревья | 6 |
| 1.2.2 | Унициклические графы | 8 |
| 1.2.3 | Эйлеровы графы | 10 |
| 1.2.4 | Планарные графы | 11 |
| 1.2.5 | Гамильтоновы графы | 13 |
| 1.3 | Случайные графы | 16 |
| 1.3.1 | Немного о случайном блуждании | 16 |
| 1.3.2 | Модель Эрдеша-Реньи случайного графа | 16 |
| 1.3.3 | Теоремы о связности случайного графа | 17 |
| 1.3.4 | Теоремы о хроматическом числе случайного графа | 19 |
| 1.3.5 | Жадный алгоритм поиска χ , α , ω | 23 |
| 1.4 | Основы линейно-алгебраического метода | 26 |
| 1.4.1 | Определение экстремальных велечин в гиперграфе | 26 |
| 1.4.2 | Оценки для $f(n, k, t)$ | 26 |
| 1.4.3 | Оценки для $h(n, k, t)$ и $m(n, k, t)$ | 28 |
| 1.4.4 | Асимптотические оценки | 30 |
| 1.5 | Хроматическое число пространства | 32 |
| 2 | 2 семестр | 34 |
| 2.1 | Турановские результаты | 34 |
| 2.2 | Рамсеевские задачи | 36 |
| 2.2.1 | Оценки чисел Рамсея | 36 |
| 2.2.2 | Диагональные числа Рамсея | 36 |

| | | |
|-------|-----------------------------------------------------------------------|----|
| 2.2.3 | $R(3, t)$ | 42 |
| 2.2.4 | Двудольные диагональные числа Рамсея | 43 |
| 2.3 | Системы общих представителей | 46 |
| 2.3.1 | Тривиальные оценки | 46 |
| 2.3.2 | Жадный алгоритм | 46 |
| 2.3.3 | Оценка размера минимальной с.о.п. с помощью обобщенных с.о.п. | 50 |
| 2.4 | Размерность Вапника-Червоненкиса | 51 |
| 2.4.1 | Теорема Вапника-Червоненкиса | 51 |
| 2.4.2 | Некоторое практическое применение | 55 |
| 2.5 | Матрицы Адамара | 57 |
| 2.5.1 | Гипотеза Адамара | 57 |
| 2.5.2 | Раскраски гиперграфов | 58 |
| 2.6 | Кнезеровский граф | 60 |
| 2.6.1 | Определение и некоторые свойства | 60 |
| 2.6.2 | Хроматическое число кнезеровского графа | 60 |

Глава 1

1 семестр

1.1 Асимптотики комбинаторных величин

1.1.1 Количество треугольников в $G(n, r, s)$

Определение 1.1.1. Графом называется пара множеств $(V, E) = G$, где V – множество каких-то объектов, а E – множество пар объектов из V .

Опишем некоторый граф $G(n, r, s)$, где $n, r, s \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим множество $\{1, \dots, n\} =: [n]$. Пусть множество вершин описываемого графа $V(n, r)$ – множество всех r -элементных подмножеств в $[n]$. Нетрудно понять, что $|V| = C_n^r$. Соединим две вершины этого графа ребром, если мощность их пересечения равна в точности s .

Утверждение 1.1.1.1. В графе $G(n, r, s)$ число ребер равно $|E| = \frac{1}{2} C_n^r C_r^s C_{n-r}^{r-s}$

Доказательство. Разберем что написано: C_n^r – кол-во r -элементных подмножеств. C_r^s – кол-во способов выбрать s элементов из этого множества, по которым оно будет пересекаться с другим множеством. C_{n-r}^{r-s} – кол-во способов добрать оставшиеся элементы во 2-е множество. Деление на 2 возникает, т.к. каждое ребро было посчитано дважды. \square

Определение 1.1.2. Граф называется регулярным, если степени всех его вершин равны.

Для примера, граф $G(n, r, s)$ – регулярен. $\deg(v) = C_r^s \cdot C_{n-r}^{r-s}$

Утверждение 1.1.1.2. Количество треугольников в графе $G(n, r, s)$ равно

$$\frac{|E|}{3} \left(\sum_{i=0}^s C_s^i C_{r-s}^{s-i} C_{r-s}^{s-i} C_{n-2r+s}^{r-2s+i} \right).$$

Доказательство. Зафиксируем 2 вершины, соединенные ребром. Кол-во способов сделать это $|E|$. Пусть i это мощность пересечения зафиксированных 2-х подмножеств с 3. Тогда:

- C_s^i – кол-во способов выбрать i элементов в пересечение всех троих множеств $v_1 \cap v_2 \cap v_3$

- C_{r-s}^{s-i} – кол-во способов выбрать элементы в $v_2 \cap v_3$ и $v_3 \cap v_1$.
- В v_3 выбрано $i + (s - i) + (s - i) = 2s - i$ элементов. Т.к. $|v_3| = r$, то необходимо выбрать еще $r - 2s + i$ элементов, отличных от уже выбранных и не лежащих в $v_1 \cup v_2$. Кол-во способов сделать это C_{n-2r+s}^{r-2s+i}
- Деление на 3 возникает, т.к. каждый треугольник был посчитан три раза.

□

При $r = \frac{n}{2}$, $s = \frac{n}{4}$ сумма в 1.1.1.2 равна: (для удобства $k = \frac{n}{4}$)

$$\sum_{i=0}^k (C_k^i)^4,$$

а значит, было бы приятно знать, чему равна сумма четвертых степеней биномиальных коэффициентов. Или же, чему она *асимптотически равна*.

1.1.2 Асимптотика биномиальных коэффициентов

Определение 1.1.3. Пусть даны две функции $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда они называются *асимптотически равными* при $n \rightarrow \infty$, если $f(n) = (1 + o(1))g(n)$ или, что эквивалентно, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$. Обозначение $f \sim g$.

Пример 1.1.1. Рассмотрим C_{2n}^n . Понятно, что

$$\frac{2^{2n}}{2n+1} \leq C_{2n}^n \leq 2^{2n}.$$

Логарифмируя, получаем:

$$2n \ln 2 - \ln(2n+1) \leq \ln C_{2n}^n \leq 2n \ln 2 \Rightarrow 2n \ln 2 \left(1 - \frac{\ln(2n+1)}{2n \ln 2}\right) \leq \ln C_{2n}^n \leq 2n \ln 2 \Rightarrow 2n \ln 2(1 + o(1)) \leq \ln C_{2n}^n \leq 2n \ln 2 \Rightarrow \ln C_{2n}^n \sim 2n \ln 2$$

Обозначение: Если a_n – некоторая функция и $\ln a_n \sim cn$, $c > 0$, то $\ln a_n \sim cn \iff a_n = (e^c + o(1))^n$

Теорема 1.1.1. *Формула Стирлинга (б/д)*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Теорема 1.1.2. Пусть $a \in (0, 1)$. Тогда

$$C_n^{[an]} = \left(\frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}} + o(1) \right)^n.$$

Доказательство. Распишем $C_n^{[an]} = \frac{n!}{[an]!(n-[an])!} = \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi [an]} \left(\frac{[an]}{e}\right)^{[an]} \sqrt{2\pi(n-[an])} \left(\frac{(n-[an])}{e}\right)^{(n-[an])}} =$

$$P(n) \frac{n^n}{(an)^{an}(n-an)^{n-an}} = \left(\frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}} \right)^n P(n)$$

где $P(n) = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi[an]}\sqrt{2\pi(n-[an])}}$.

Тогда

$$\ln C_n^{[an]} = \ln P(n) + n \ln \left(\frac{1}{(a)^a (1-a)^{1-a}} \right) \sim n \ln \left(\frac{1}{(a)^a (1-a)^{1-a}} \right)$$

что и требовалось.

(Поскольку $[an]^{[an]} = (an - \varepsilon)^{an - \varepsilon} \sim (an)^{an} (an)^{-\varepsilon} e^{-\varepsilon}$, а два последних множителя при логарифмировании "пропадают"). \square

Замечание. Найдем асимптотику C_n^k при различных k .

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}$$

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} &= \frac{n^k}{k!} \exp \left[\ln \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \right] \leq \frac{n^k}{k!} \exp \left[-\frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \dots - \frac{k-1}{n} \right] \\ &= \frac{n^k}{k!} \exp \left[\frac{-k(k-1)}{2n} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} &= \frac{n^k}{k!} \exp \left[\frac{-k(k-1)}{2n} + O \left(\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{(k-1)^2}{n^2} \right) \right] = \\ &= \frac{n^k}{k!} \exp \left[\frac{-k(k-1)}{2n} + O \left(\frac{k^3}{n^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Следствие. При $k^2 = o(n)$, (т.е. $k = o(\sqrt{n})$) имеем $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$.

Следствие. При $k^3 = o(n^2)$, (т.е. $k = o\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$ и $O\left(\frac{k^3}{n^2}\right) \rightarrow 0$), а значит $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k^2}{2n}}$.

1.2 Основы теории графов

1.2.1 Определения. Деревья

Определение 1.2.1. *Графом* называется пара множеств $(V, E) = G$, где V — множество каких-то объектов, а E — множество пар объектов из V .

Определение 1.2.2. *Маршрутом* в графе $G = (V, E)$ называется последовательность $v_1 e_1 v_2 \dots e_n v_{n+1}$. (e_i и v_i могут повторяться).

- Если $v_1 = v_{n+1}$, то маршрут называется *замкнутым*.
- Если все e_i в маршруте различны, то замкнутый маршрут называется *циклом*, а незамкнутый — *цепью (путем)*.
- Цепь(цикл) называется *простой (-ым)*, если все вершины в нем различны.

Определение 1.2.3. Граф называется *связным*, если любые две вершины графа соединены маршрутом.

Определение 1.2.4. *Дерево* — связный граф без циклов.

Теорема 1.2.1. *Для любого графа G следующие утверждения эквивалентны:*

1. G — дерево,
2. между любыми 2-мя вершинами G есть ровно один простой путь,
3. G — связный граф и количество ребер в G на единицу меньше количества вершин,
4. в G нет циклов и количество ребер в G на единицу меньше количества вершин.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2):

Граф G — связан \Rightarrow между любыми вершинами есть хотя бы 1 маршрут. Если же между какими-то 2-мя вершинами есть 2 пути, то значит в G найдется цикл. Путь не может зайти в одну вершину два раза, т.к. это противоречит ацикличности, а значит любой путь в графе G — простой.

2) \Rightarrow 3):

Очевидно, что G — связан. Докажем, что $|E| = |V| - 1$ по индукции по числу вершин. Для $|V| = 1, 2$ утверждение очевидно. Предположим, что $|V| = n$, а утверждение верно для всех $k < n$. Удалим из графа G некоторое ребро. Т.к. между любыми двумя вершинами существует **ровно один** простой путь, то G распался на 2 компоненты связности. Применим предположение индукции для каждой из них и получим требуемое.

3) \Rightarrow 4):

Если в G есть цикл, то одно из его ребер можно удалить из графа без потери связности. Получим связный граф на n вершинах с $n - 2$ ребрами, чего быть не может.

4) \Rightarrow 1):

Если в G несколько компонент связности, то хотя бы в одной из компонент число дуг не меньше числа вершин. Но тогда в ней есть цикл. \square

Обозначим за t_n количество различных деревьев на n занумерованных вершинах. Выпишем первые значения

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 1$$

$$t_3 = 3$$

$$t_4 = 16$$

$$t_5 = 125$$

Интуитивно можно догадаться до следующего утверждения:

Теорема 1.2.2. (*формула Кэли*)

Пусть $n > 1$. Тогда $t_n = n^{n-2}$.

Доказательство. Построим биекцию между помеченными деревьями и словами длины $n - 2$ над алфавитом $\{1, \dots, n\}$ (Эта биекция называется *коды Прюфера*). Для этого используется следующим очевидным утверждением:

Утверждение 1.2.1.1. В каждом дереве на $n > 1$ вершинах есть висячая вершина (вершина степени 1). (*б/д*)

Докажем инъективность кодов Прюфера по индукции. Случаи когда $|V| = 2, 3$ проверяются руками. Предположим, что два различных дерева T_1, T_2 отвечают одному коду $v_1 \dots v_n, v_i \in \{1, \dots, n\}$. Возможны следующие случаи:

1. Листы с наименьшим номером в T_1 и T_2 различны. Но тогда различны их коды Прюфера. (т.к. каждая вершина v_i появляется в коде ровно $\deg(v_i) - 1$ раз.
2. Листы с наименьшим номером совпадают, но различны их соседи. Но тогда их коды отличаются по очевидным причинам.
3. Если совпадают листы с наименьшими номерами и их соседи, то первое число кодов деревьев совпадают, но после вычеркивания остаются два дерева, коды которых различны по предположению индукции.

Примем факт того, что φ — сюръекция, без доказательства. \square

1.2.2 Унициклические графы

Определение 1.2.5. Граф G называется *унициклическим*, если он связан и содержит ровно один цикл.

Обозначим за $U(n)$ количество унициклических графов на n вершинах. Достаточно трудно, но можно понять, что справедлива формула

$$U(n) = \sum_{r=3}^n C_n^r \frac{(r-1)!}{2} n^{n-1-r} r$$

где

1. $r \in \{3, \dots, n\}$ — длина единственного цикла,
2. C_n^r — число способов выбрать r вершин в цикл,
3. $\frac{(r-1)!}{2}$ — число способов расставить на них цикл,
4. Пусть цикл состоит из вершин v_1, \dots, v_r . Если выкинуть ребра цикла, то останется лес из r деревьев на n вершинах, где i -ое дерево содержит v_i . Таких деревьев ровно $n^{n-1-r} r$.

Теорема 1.2.3.

$$U(n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} n^{n-\frac{1}{2}}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} U(n) &= \sum_{r=3}^n C_n^r \frac{(r-1)!}{2} n^{n-1-r} r \\ &= \frac{1}{2} n^{n-1} \sum_{r=3}^n n(n-1) \dots (n-r+1) n^{-r} \\ &= \frac{1}{2} n^{n-1} \sum_{r=3}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно $\sum_{r=3}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right)$. По доказанному ранее

$$\begin{aligned} &\sum_{r=3}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) = \\ &= \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) + \sum_{r=[n^{0.6}]+1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) \\ &= S_1 + S_2, \end{aligned}$$

Оценим сначала S_2 :

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq \sum_{r=[n^{0.6}]+1}^n \exp \left[-\frac{r(r-1)}{2n} \right] \\
&\leq \sum_{r=[n^{0.6}]+1}^n \exp \left[-\frac{n^{0.6}(n^{0.6}-1)}{2n} \right] \\
&= \sum_{r=[n^{0.6}]+1}^n \exp \left[-\frac{n^{1.2}(1+o(1))}{2n} \right] \\
&= \sum_{r=[n^{0.6}]+1}^n \exp \left[-\frac{n^{0.2}(1+o(1))}{2} \right] \\
&< ne^{-\frac{n^{0.2}(1+o(1))}{2}} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Теперь оценим S_1 . Для этого заметим сначала, что при $r > \sqrt{n}$ дробь $\frac{-r(r-1)}{2n} \rightarrow -\infty \Rightarrow \exp \left[\frac{-r(r-1)}{2n} \right] \rightarrow 0$, а при $r < n^{\frac{2}{3}} : O(\frac{r^3}{n^2}) = o(1)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
S_1 &\sim \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} \exp \left[-\frac{r(r-1)}{2n} + O\left(\frac{r^3}{n^2}\right) \right] \\
&\sim \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} \exp \left[-\frac{r(r-1)}{2n} \right] \\
&\sim \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} \exp \left[-\frac{r^2}{2n} \right] \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \exp \left[-\frac{r^2}{2n} \right] - \sum_{r=0}^2 \exp \left[-\frac{r^2}{2n} \right] - \sum_{r=[0.6n]+1}^{\infty} \exp \left[-\frac{r^2}{2n} \right]
\end{aligned}$$

Очевидно, что $\sum_{r=0}^2 \exp \left[-\frac{r^2}{2n} \right] \rightarrow 3$ при $n \rightarrow \infty$, а

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty} \exp \left[-\frac{r^2}{2n} \right] &\sim \int_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2n}} dr \\
&= \sqrt{n} \int_{x=0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \sqrt{n} \frac{\sqrt{\pi 2}}{2} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}
\end{aligned}$$

$$\sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{\infty} \exp \left[-\frac{r^2}{2n} \right] = \underbrace{\sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{n^2} \exp \left[-\frac{r^2}{2n} \right]}_{S'_1} + \underbrace{\sum_{n^2+1}^{\infty} \exp \left[-\frac{r^2}{2n} \right]}_{S'_2}$$

Аналогично оценке S_2 , $S'_1 \leq \sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{n^2} e^{-\frac{n^{1.2}}{2n}} < n^2 e^{-\frac{n^{0.2}}{2}} \rightarrow 0$. Для того, чтобы оценить S'_2 заметим, что отношение соседних слагаемых в S'_2 на самом деле не превосходит e^{-n} . Действительно

$$e^{-\frac{(r+1)^2 - r^2}{2n}} = e^{-\frac{2r+1}{2n}} < e^{-\frac{r}{n}} < e^{-n}.$$

Тогда имеем:

$$S'_2 < \exp \left[-\frac{(n^2 + 1)^2}{2n} \right] (1 + e^{-n} + e^{-2n} + \dots) = \exp \left[-\frac{(n^2 + 1)^2}{2n} \right] \frac{1}{1 - e^{-n}} \rightarrow 0.$$

Итого получается

$$U(n) \sim \frac{1}{2} n^{n-1} (S_1 + S_2) \sim \frac{1}{2} n^{n-1} \sqrt{\frac{\pi n}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} n^{n-\frac{1}{2}}.$$

□

1.2.3 Эйлеровы графы

Определение 1.2.6. Граф называется *эйлеровым*, если он является циклом (т.е. существует простой замкнутый маршрут, проходящий по всем ребрам этого графа).

Теорема 1.2.4. Для связного графа следующие утверждения эквивалентны:

1. граф эйлеров,
2. степень каждой вершины графа четная,
3. множество ребер графа распадается в объединение непересекающихся по ребрам простых циклов.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2): Очевидно.

2) \Rightarrow 3):

Зафиксируем вершину x_1 . Выберем любого его соседа x_2 . Так как $\deg(x_2) > 0$ и четная, то $\exists x_3 \neq x_1 \in V$, связанный ребром с x_2 . Будем идти далее по произвольному ребру из только что выбранной вершины x_k , пока не вернемся в одну из уже выбранных вершин. Тогда мы найдем некоторый простой цикл Z_1 . Удалим все его ребра из G и получим новый граф, возможно с несколькими компонентами связности. Прделаем аналогичную операцию в остальных компонентах и заметим при этом, что величина $|V| + |E|$ уменьшается. Прделая так в каждой компаненте, мы разобьем множество E на требуемое объединение.

3) \Rightarrow 1):

Доказательство по индукции. Для одного простого цикла утверждение очевидно. Предположим что в G больше простых циклов. Удалим один простой цикл C . Полученный граф G' расподется на некоторые компоненты связности, каждая из которых распадается на простые циклы. Начнем обходить граф G по вершинам цикла C , причем если мы попали в вершину $v \in V$, лежащую в одной из компонент связности G' , то обойдем ее по предположению индукции и вернемся в v . Продолжим идти по циклу C , обходя еще не посещенные компоненты связности G' . Таким образом, мы обойдем весь граф G . □

1.2.4 Планарные графы

Определение 1.2.7. Пусть дан граф $G = (V, E)$. Укладкой графа G на плоскости назовем пару отображений (F, H) , такую что:

$$F : V \rightarrow S, S \subset \mathbb{R}^2, |S| < \infty \text{ — биекция}$$

$$H : E \rightarrow \text{некоторые гладкие кривые, т.ч. } (u, v) \in E \iff H(u, v) \text{ соединяет } F(u) \text{ с } F(v)$$

Плоской (планарной) называют такую укладку, у которой никакая пара кривых, соответствующих ребрам графа G , не пересекается в точках, отличных от образа F , причем если две кривых пересекаются в вершине, то эта вершина является концом этих кривых.

Граф называется планарным, если существует его плоская укладка на плоскости.

Определение 1.2.8. Грань планарной укладки — область, ограниченная циклом или незамкнутой кривой и не содержащая циклов внутри себя.

Теорема 1.2.5. (Эйлер)

Пусть граф G связан и планарен, $|V| = n$, $|E| = e$. Тогда для любой его планарной укладки с числом граней f верно равенство

$$n - e + f = 2$$

Доказательство. Индукция по $e - n$.

База: $e - n = -1 \Rightarrow G$ — дерево и $f = 1$.

Переход: Поскольку G не дерево, то в нем имеются циклы. Удалим из G одно ребро (из некоторого цикла), отделяющее две различные грани. Получим граф G' , в котором $f' = f - 1$, $e' = e - 1$, $n' = n$. Тогда

$$2 = n' - e' + f' = n - (e - 1) + (f - 1) = n - e + f.$$

□

Следствие. Пусть G — связный планарный граф и есть какая-то его укладка. Пусть t — длина наименьшего цикла в G . Тогда

$$e \geq \frac{t}{2}f.$$

Доказательство. Пусть e_i — число ребер, отделяющих i грань от других, $i = 1, \dots, f$. Тогда

$$2e \geq \sum_{i=1}^f e_i \geq fk.$$

□

Следствие. Пусть G — связный планарный граф и есть какая-то его укладка. Пусть t — длина наименьшего цикла в G . Тогда

$$e \leq \frac{t}{t-2}(n-2).$$

Доказательство. По теореме Эйлера

$$2 = n - e + f \leq n - e + \frac{2}{t}e = \frac{2-t}{t}e + n.$$

□

Утверждение 1.2.4.1. Графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.

Доказательство. Применяем следствие 1.2.4. Для K_5 : $n = 5, e = 10, t \geq 3$; для $K_{3,3}$: $n = 6, e = 9, t \geq 4$. □

Утверждение 1.2.4.2. Если граф планарен, то $e \leq 3n - 6$.

Доказательство. $e \leq \frac{t}{t-2}(n-2) \leq 3n - 6$. □

Определение 1.2.9. Граф G *гомеоморфен* графу H , если существует конечная цепочка преобразований f_1, \dots, f_n , каждое из которых имеет один вид из следующих:

1. Изоморфизм графов.
2. Удаление ребра (u, v) , добавление новой вершины w в граф и ребер $(u, w), (w, v)$ — разбиение ребра.
3. Удаление ребра (u, v) и вершин u, v , вставка новой вершины w , связанной ребрами со всеми, с кем были связаны u и v — стягивание ребра (u, v) ,

которая начинается с G , а заканчивается в H .

Теорема 1.2.6. (б/д, Критерий Понтрягина-Кураковского)

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$.

Определение 1.2.10. Граф H называется *минором* графа G , если из G можно получить H цепочкой преобразований, каждое из которых либо удаление, либо стягивание ребра.

Теорема 1.2.7. (б/д, Критерий Визинга)

Граф G планарен тогда и только тогда, когда G не содержит подграфа, являющегося минором для K_5 или $K_{3,3}$.

Теорема 1.2.8. *Вершины любого связного планарного графа G можно покрасить в 5 цветов так, чтобы любые две соседние вершины имели разный цвет.*

Доказательство. Покажем сначала, что в G есть вершина степени ≤ 5 . Действительно, если $\forall v \deg v \geq 6$, то $e \geq \frac{1}{2} \sum \deg v_i \geq 3n$ — противоречие с утверждением 1.2.4.2.

Индукция по числу вершин.

База: $n \leq 5 \Rightarrow$ каждую вершину красим в свой цвет.

Шаг: Пусть v это вершина степени ≤ 5 . Если $\deg v < 5$, то удалим v , раскрасим оставшийся граф по предположению индукции в 5 цветов и покрасим v в оставшийся цвет.

Пусть $\deg v = 5$ и все соседи v покрашены в разные цвета. Занумеруем связанные с v вершины по часовой стрелке: v_1, \dots, v_5 . Пусть $V_{1,3}$ — все те вершины G , до которых можно дойти из v_1 только по вершинам 1 и 3 цвета. Если $v_3 \notin V_{1,3}$, то поменяем цвет всех вершин из $V_{1,3}$ на противоположный и покрасим v в первый цвет.

Если же $v_3 \in V_{1,3}$, то рассмотрим множество $V_{2,4}$ тех вершин, в которые можно дойти из вершины v_2 только по вершинам 2 и 4 цвета. Если $v_4 \in V_{2,4}$, то граф G не планарный, поскольку $V_{2,4}$ целиком содержится внутри цикла из вершин цветов 1, 3 и v . Тогда меняем цвет на противоположный в $V_{2,4}$ и красим v во второй цвет. \square

1.2.5 Гамильтоновы графы

Определение 1.2.11. Граф называется *гамильтоновым*, если существует простой цикл, проходящий через все вершины графа.

Теорема 1.2.9. (*признак Дирака*)

Если в связном графе n вершин степень любой вершины $\geq \frac{n}{2}$, то этот связный граф — гамильтонов.

Доказательство. Пусть $P = v_1 v_2 \dots v_k$ — самый длинный путь в графе G . Если v_1 смежна с некоторой вершиной $x \notin P$, то существует путь длиннее P — противоречие. Аналогичное рассуждение с $v_k \Rightarrow v_1$ и v_k смежны **только** с вершинами из P . Поскольку $\deg(v_1) \geq \frac{n}{2}$ и в графе нет петель, то $k \geq \frac{n}{2} + 1$.

Утверждение 1.2.5.1. Существует $1 \leq j \leq k$, такое что v_j инцидентна с v_k , а v_{j+1} с v_1 .

Доказательство. Предположим, что такой ситуации не оказалось. Тогда в P есть как минимум $\deg(v_1)$ вершин, несвязанных с v_k (предыдущие в пути от соседей v_1). Поскольку все вершины, связанные с v_k находятся в пути и v_k не инцидентна сама с собой, то в P хотя бы $\deg(v_1) + \deg(v_k) + 1 = n + 1$ вершин. Противоречие. \square

Из утверждения следует, что в G существует простой цикл $C = v_{j+1} \dots v_k v_j v_{j-1} \dots v_1 v_{j+1}$. Покажем, что этот цикл — гамильтонов. Предположим, что существует $v \in V \setminus C$. Поскольку граф связан, v должна быть связана каким-то путем с некоторой $v_i \in C$. Но тогда существует путь $P' = v$ — путь от v до C — круг по C , длиннее чем P , что противоречит выбору P . \square

Определение 1.2.12. Пусть дан граф $G = (V, E)$. Тогда его *числом независимости* называется число $\alpha(G) = \max\{k \in \mathbb{N} : \exists W \subseteq V : |W| = k \wedge \forall x, y \in W (x, y) \notin E\}$. Множество вершин W , между любыми двумя из которых нет ребра, называется *независимым* множеством вершин.

Определение 1.2.13. Вершинной связностью графа, обозначаемой $k(G)$, называется *минимальное количество вершин*, в результате удаления которых граф перестает быть связным.

Теорема 1.2.10. (*признак Эрдеша-Хватала*)

Пусть $G = (V, E)$ — граф, такой, что $|V| \geq 3$ и $\alpha(G) \leq k(G)$. Тогда G — гамильтонов.

Доказательство. Положим $n := |V| \geq 3$.

Предположим сначала, что в G нет циклов. Поскольку $\alpha(G) \geq 1$ и $k(G) \geq \alpha(G)$, граф связный, а значит G это дерево. Т.к. $n \geq 3$, то в G есть хотя бы две несвязные висячие вершины (*это упражнение*), а значит

$$\begin{cases} \alpha(G) \geq 2 \\ k(G) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{предположение неверно}$$

а значит в G есть хотя бы один цикл.

Пусть $C = \{x_1, \dots, x_k\}$ — самый длинный простой цикл в G , причем $k < n$. Удалим из G все вершины, лежащие в C , и обозначим за W любую связную компоненту в оставшемся графе. Определим $N_W(G) = \{x \in V : x \notin W \wedge \exists y \in W : (x, y) \in E\}$. Сразу ясно, что $N_W(G) \subseteq C$ (действительно, связность могла нарушиться только из-за удаления ребер в C). Более того, $N_W(G)$ не содержит $\{x_i, x_{i+1}\}$ для любого i из множества $\{1, \dots, k\}$ (положим $x_{k+1} = x_1$), иначе в G есть цикл, длиннее C (доказательство картинкой). Все вышесказанное означает, что $N_W(G) \subset C$ и $N_W(G) \neq C$, а значит $k(G) \leq |N_W(G)|$, поскольку

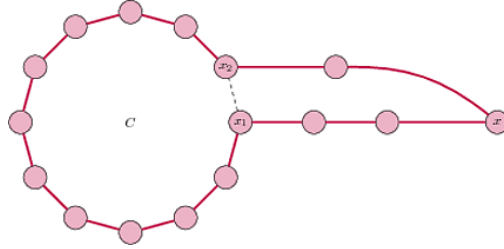


Рис. 1.1: цикл, длиннее чем C в первом случае

при удалении $N_W(G)$ множество W уже образует отдельную компоненту связности. Определим $M := \{x_{i+1} \mid x_i \in N_W(G)\} = \{y_i\}$ — соседи всех x_i из $N_W(G)$, например, против часовой стрелки. Из рисунка выше следует, что $M \cap N_W(G)$ пусто $\Rightarrow |M| = |N_W(G)| \geq k(G)$. Заметим теперь, что M — независимое множество, иначе в G , опять-таки, есть цикл длиннее C (доказательство картинкой :). а значит

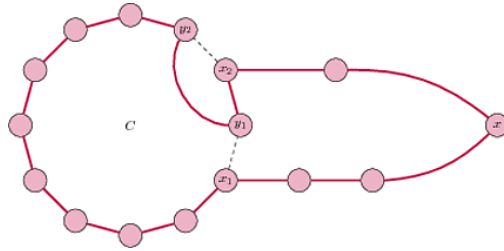


Рис. 1.2: цикл, длиннее чем C во втором случае

$|M| \leq \alpha(G)$, откуда $\alpha(G) \geq |M| \geq k(G)$.

Рассмотрим произвольную вершину $v \in W$ и множество $M \cup \{v\}$. Поскольку $N_W(G) \cap M = \emptyset$, то $M \cup \{v\}$ — тоже независимое множество, а значит $\alpha(G) \geq |M \cup \{v\}| = |M| + 1 \geq k(G) + 1 > k(G)$ — противоречие. \square

Следствие. Рассмотрим $G(n, 3, 1)$ — граф, $V = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = 3\} = \{A \subset \{1, \dots, n\} : |A| = 3\}$, $E = \{(\bar{x}, \bar{y}) : \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 1\} = \{(A, B) : |A \cap B| = 1\}$. Начиная с некоторого, n этот граф — гамильтонов.

Доказательство. Сначала поймем, почему для этого графа не применим признак Дирака. Действительно, $|V| = C_n^3 \sim \frac{n^3}{6}$, а степень любой вершины $\deg(x) = 3 \cdot C_{n-3}^2 \sim \frac{3n^2}{6}$, т.е. при больших n количество ребер, выходящих из каждой вершины, примерно в n раз меньше общего количества вершин. Воспользуемся теоремой Эрдеша-Хватала. Для этого найдем $\alpha(G)$ и $k(G)$.

Пусть $W = \{x_1, \dots, x_s\}$ — независимое множество вершин в G . Это означает, что

$$\forall i \neq j, \langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

Это означает, что вектора $\{x_1, \dots, x_s\}$ линейно-независимы в пространстве \mathbb{Z}_2^n . Действительно, рассмотрим их произвольную нулевую линейную комбинацию: $c_1 x_1 + \dots + c_s x_s = 0$ с $c_i \in \mathbb{Z}_2$. Умножение обеих частей равенства скалярно на x_i доказывает, что $c_i = 0$, откуда следует, что $|W| \leq \dim \mathbb{Z}_2^n = n \Rightarrow \alpha(G) \leq n$.

Рассмотрим теперь две несмежные вершины A и B и обозначим за $N \subset V$ множество их общих соседей. Легко понять, что $\min |N| \leq k(G)$. Рассмотрим случаи:

1. $A \cap B = \emptyset$. Тогда $|N| = 3 \cdot 3 \cdot C_{n-6}^1 = 9n - 54$, что больше n при $n \geq 7$
2. $|A \cap B| = 1$. Тогда $|N| \geq C_{n-5}^2$ (посчитаны только соседи, пересекающиеся с A и B по их общему элементу), что с некоторого n тоже больше n .
3. $|A \cap B| = 2$. В таком случае $|N| \geq 2C_{n-4}^2$ (посчитаны только соседи, пересекающиеся с A и B по их общим элементам), что так же больше n с некоторого момента.

Мы получили, что начиная с некоторого n верно неравенство $\alpha(G) \leq k(G)$. По теореме Эрдеша-Хватала, граф G — гамильтонов. \square

Факт.

$$\alpha(G(n, 3, 1)) = \begin{cases} n, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ n - 1 & n \equiv 1 \pmod{4}, \\ n - 2 & \text{иначе.} \end{cases}$$

(попробуйте привести явную конструкцию)

1.3 Случайные графы

Предполагается, что читатель знаком с фактами из теории вероятностей, используемыми в этом разделе и далее в курсе, поэтому упоминаться и доказываться здесь отдельно они не будут.

1.3.1 Немного о случайном блуждании

Теорема 1.3.1. Рассмотрим модель простейшего симметричного случайного блуждания $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Для удобства обозначим $S_n = \xi$. Тогда для любого $a > 0$ верно:

$$P(\xi \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

Доказательство. Сначала проясним, почему эта оценка в значительной степени улучшает неравенство Чебышева. Заметим, что $E\xi = 0$, а значит

$$\begin{aligned} P(\xi \geq a) &= P(\xi - E\xi \geq a - E\xi) \leq P(|\xi - E\xi| \geq a - E\xi) = \\ &= P(|\xi - E\xi| \geq a) \leq \frac{D\xi}{a^2} = \frac{nD\xi_1}{a^2} = \frac{n}{a^2} \end{aligned}$$

Если взять $a = n^{\frac{2}{3}}$, то, по выше доказанному, $P(\xi \geq a) \leq n^{-\frac{1}{3}}$. С другой стороны, применяя теорему, $P(\xi \geq a) \leq \exp\left[-n^{\frac{1}{3}}/2\right]$, что с ростом n убывает к 0 значительно быстрее.

Приступим к доказательству теоремы: возьмем произвольное $\lambda > 0$. Получим

$$P(\xi \geq a) = P(\lambda\xi \geq \lambda a) = P(e^{\lambda\xi} \geq e^{\lambda a}) \leq e^{-\lambda a} Ee^{\lambda a}.$$

Последняя оценка обусловлена неравенством Маркова. Далее, т.к. ξ_1, \dots, ξ_n — независимые, имеем: $Ee^{\lambda\xi} = Ee^{\lambda\xi_1} \dots Ee^{\lambda\xi_n}$. При этом ясно, что

$$Ee^{\lambda\xi_i} = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}},$$

и в итоге

$$P(\xi \geq a) \leq e^{-\lambda a} e^{n\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Взяв $\lambda = \frac{a}{n}$ получаем требуемое. □

Замечание. Это частный случай неравенства больших уклонений.

1.3.2 Модель Эрдеша-Реньи случайного графа

Для удобства будем считать, что множеством вершин случайного графа является $V = V_n = \{1, \dots, n\}$.

Определение 1.3.1. Зафиксируем число вершин в графе n . Рассмотрим полный граф K_n и занумеруем все его ребра в некотором порядке: e_1, e_2, \dots, e_N , где $N = C_n^2$. Пусть вероятность "появления" ребра в графе равна p , все ребра появляются с равной вероятностью и независимо друг от друга. Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) , где $\Omega = \{\text{множество последовательностей из 0 и 1 длины } C_n^2\}$, $\mathcal{F}_n =$

2^Ω , $P(G) = p^{|E|} q^{\binom{n}{2} - |E|}$ и $|E|$ это число единиц в $\omega \in \Omega$. Тогда граф $G = G(n, p) = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_{n,p})$ является моделью Эрдеша-Реньи случайного графа. При этом 0 на i -ом месте означает отсутствие ребра e_i в графе, а 1 — присутствие.

Определение 1.3.2. Некоторое свойство A_n выполняется асимптотически почти наверное, если $P(A_n) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$.

Для знакомства со случайными графами полезно рассмотреть следующую теорему

Теорема 1.3.2. Пусть $G(n, p)$ — случайный граф, вероятность появления ребра в котором равна $p = p(n) = o(\frac{1}{n})$. Тогда асимптотически почти наверное граф не содержит треугольников (т.е. подграфов K_3).

Доказательство. Рассмотрим случайную величину X равную числу треугольников в графе G . Нам нужно доказать, что $P(X = 0) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, что эквивалентно $P(X \geq 1) \rightarrow 0$. Воспользуемся неравенством Маркова: $P(X \geq 1) \leq EX$. Покажем, что в случае $p = \frac{\alpha(n)}{n}$, $\alpha(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ математическое ожидание X стремится к 0.

Пусть t_1, \dots, t_k — все тройки вершин из G . Нетрудно понять, что $k = C_n^3$. Введем случайные величины X_1, \dots, X_k , такие что $X_i = I(t_i \text{ образуют треугольник})$. Тогда, по свойствам математического ожидания, имеем

$$\begin{aligned} EX &= E(X_1 + \dots + X_k) = EX_1 + \dots + EX_k = kEX_1 = C_n^3 P(t_1 \text{ образует треугольник}) = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} p^3 = \frac{n(n-1)(n-2)\alpha^3}{6n^3} \sim \frac{\alpha^3}{6} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

откуда сразу следует требуемое утверждение. \square

1.3.3 Теоремы о связности случайного графа

Теорема 1.3.3. Рассмотрим случайный граф $G(n, p)$. Пусть вероятность ребра в этом графе $p = p(n) = \frac{c \cdot \ln n}{n}$.

1. $c > 1$. Тогда асимптотически почти наверное случайный граф связан.
2. $c < 1$. Тогда асимптотически почти наверное случайный граф не связан. Более того, в нем почти наверное содержатся изолированные вершины.
3. $(\delta/\partial) p = \frac{\ln n + \lambda + o(1)}{n}$. Тогда вероятность того, что граф связан, стремится к числу $e^{-e^{-\lambda}}$

Доказательство. 1. Покажем, что $P(G \text{ не связан}) \rightarrow 0$. Имеем

$$\begin{aligned} P(G \text{ не связан}) &= P(\text{в графе есть хотя бы 2 компоненты связности}) \\ &= P(\text{в } G \text{ есть связные компоненты, содержащие } \leq n-1 \text{ вершин}) \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \bigcup_{i=1}^{C_n^k} A_i^k \text{ образует к.с. в графе } G\right) \end{aligned}$$

где за $A_1^k, \dots, A_{C_n^k}^k$ обозначим всевозможные подмножества V мощности k . Как известно, вероятность объединения не превосходит суммы вероятностей, а значит

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \bigcup_{i=1}^{C_n^k} A_i^k \text{ образует к.с. в графе } G\right) &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{C_n^k} \mathbb{P}(A_i^k \text{ образует к.с. в графе } G) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{C_n^k} \mathbb{P}(\forall v \in A_i^k \forall w \in V \setminus A_i^k : (v, w) \notin E) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{C_n^k} (1-p)^{k(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (1-p)^{k(n-k)} \end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемое при $k = 1$. Воспользуемся тем, что $\ln(1+x) = x + o(x)$:

$$n(1-p)^{n-1} = ne^{(n-1)\ln(1-p)} = ne^{-pn(1+o(1))} = ne^{-c \ln n(1+o(1))} = \frac{n}{n^{c(1+o(1))}} \rightarrow 0.$$

Оставшуюся сумму оценим с помощью следующей идеи: обозначим за $a_k(n) = C_n^k (1-p)^{k(n-k)}$.

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k(n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n/2} a_k(n) \rightarrow 0$$

поскольку $a_k(n)$ симметричны относительно центра $k_0 = \frac{n}{2}$. Предположим теперь, что выполнено неравенство

$$\frac{a_{k+1}(n)}{a_k(n)} \leq q(n) \rightarrow 0$$

В таком случае, имеем

$$\sum_{k=1}^{n/2} a_k(n) = a_1(n) \left(1 + \frac{a_2(n)}{a_1(n)} + \frac{a_3(n)}{a_2(n)} \cdot \frac{a_2(n)}{a_1(n)} + \dots \right) \leq a_1(n)(1 + q(n) + q^2(n) + \dots) < \frac{a_1(n)}{1 - q(n)} \rightarrow 0$$

Что ж, приступим к оценке оставшейся суммы:

$$\sum_{k=1}^{n/2} C_n^k (1-p)^{k(n-k)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n/\sqrt{\ln n}} a_k(n)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{k=n/\sqrt{\ln n}+1}^{n/2} a_k(n)}_{S_2}$$

Оценим S_1 с помощью нашей идеи:

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}(n)}{a_k(n)} &= \frac{C_n^{k+1} (1-p)^{(k+1)(n-k-1)}}{C_n^k (1-p)^{k(n-k)}} = \frac{n-k}{k+1} (1-p)^{n-2k-1} < \\ &< n(1-p)^{n-2k-1} \leq n(1-p)^{n-\frac{2n}{\sqrt{\ln n}}-1} = n(1-p)^{n(1+o(1))} \\ &= ne^{-pn(1+o(1))} = q(n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

а значит $S_1 \rightarrow 0$.

Займемся S_2 : $k > \frac{n}{\sqrt{\ln n}}$, $k \leq \frac{n}{2}$. Для $a_k(n)$ имеем

$$\begin{aligned} a_k(n) &= C_n^k (1-p)^{k(n-k)} < 2^n e^{-pk(n-k)} \leq 2^n e^{-pk \frac{n}{2}} \leq \\ &\leq 2^n \exp \left[-\frac{c \ln n}{n} \cdot \frac{n}{\sqrt{\ln n}} \cdot \frac{n}{2} \right] \\ &= 2^n \exp \left[-\frac{cn\sqrt{\ln n}}{2} \right] = \exp \left[n \ln 2 - \frac{c}{2} n\sqrt{n} \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

В таком случае вся сумма $S_2 \leq n \exp \left[n \ln 2 - \frac{c}{2} n \sqrt{n} \right] = \exp \left[\ln n + n \ln 2 - \frac{c}{2} n \sqrt{n} \right] \rightarrow 0$, откуда следует утверждение первого пункта теоремы.

2. Докажем, что в условиях 2) в графе а.п.н. есть изолированная вершина. Пусть $X = X(G)$ — случайная величина, равная числу изолированных вершин в G , X_i — индикатор того, что $v_i \in V$ — изолированная. Найдем DX . Легко понять, что

$$EX = n(1-p)^{n-1} = ne^{(n-1)\ln(1-p)} = ne^{-pn(1+o(1))}$$

Далее

$$EX^2 = EX_1 + \dots + EX_n + \sum_{i \neq j} EX_i X_j = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}$$

а значит $DX = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - n^2(1-p)^{2n-2}$. Оценим $P(\text{ в } G \text{ есть изолированная вершина})$ по неравенству Чебышева.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X \leq 0) = 1 - P(EX - X \geq EX) \geq 1 - P(|EX - X| \geq EX) \geq 1 - \frac{DX}{(EX)^2} \\ &= \frac{n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - n^2(1-p)^{2n-2}}{(EX)^2} = \\ &= \frac{1}{EX} + \frac{n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} - 1 = o(1) + 1 + o(1) - 1 = o(1) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

поскольку $\frac{n(n-1)}{n^2} = 1 + o(1)$ и $\frac{(1-p)^{2n-3}}{(1-p)^{2n-2}} = \frac{1}{1-p} = 1 + o(1)$. Теорема доказана. □

Теорема 1.3.4. (б/д) Рассмотрим случайный граф $G(n, p)$, где $p = \frac{c}{n}$, $c > 0$.

1. если $c < 1$, то $\exists \beta > 0$ такая, что а.п.н. число вершин в каждой связной компоненте G не превосходит $\beta \ln n$,
2. если $c > 1$, то $\exists \beta > 0$, $\exists \gamma \in (0, 1)$ такие, что а.п.н. в G ровно одна связная компонента имеет $\geq \gamma n$ вершин, а все остальные связные компоненты состоят из $\leq \beta \ln n$ вершин.

1.3.4 Теоремы о хроматическом числе случайного графа

Определение 1.3.3. Хроматическим числом графа G называется величина $\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k \forall i \forall x, y \in V_i (x, y) \notin E\}$.

Утверждение 1.3.4.1. $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$.

Доказательство. Действительно, $|V| = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |V_i| \leq \chi(G) \cdot \max |V_i| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$. □

Определение 1.3.4. Кликовым числом графа G называется величина $\kappa(G) = \max\{k \in \mathbb{N} : \exists W \subseteq V : |W| = k \wedge \forall x, y \in W (x, y) \in E\}$.

Заметим следующие очевидные соотношения между числом независимости, кликовым числом и хроматическим числом графа:

1. $\alpha(G) = \kappa(\overline{G})$
2. $\chi(G) \geq \max\{\kappa(G), \frac{|V|}{\alpha(G)}\}$

Теорема 1.3.5. *А.н.н. число независимости $\alpha(G)$ графа $G(n, \frac{1}{2})$ не превосходит $2 \log_2 n$.*

Доказательство. Пусть $k := \lceil 2 \log_2 n \rceil$. Определим случайные величины $X_k(G)$ = количеству независимых множеств размера k в графе G . Тогда имеем

$$P(\alpha(G) < k) = P(X_k = 0) = 1 - P(X_k \geq 1) \geq 1 - EX_k = 1 - C_n^k 2^{-C_k^2}$$

Учитывая, что $k \in [2 \log_2 n - 1, 2 \log_2 n]$, получаем следующее

$$\begin{aligned} C_n^k 2^{-C_k^2} &\leq \frac{n^k}{k!} 2^{-k(k-1)/2} = \frac{2^{k \log_2 n}}{k!} \cdot 2^{-\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}} \leq \\ &\leq \frac{2^{2 \log_2^2 n - \frac{(2 \log_2 n - 1)^2}{2} + \log_2 n}}{k!} = \frac{2^{3 \log_2 n - \frac{1}{2}}}{k!} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

поскольку

$$k! = \lceil 2 \log_2 n \rceil! > \left(\frac{k}{2}\right)^{\left(\frac{k}{2}\right)} > (\log_2 n - 1)^{\log_2 n - 1}$$

откуда $EX_k \rightarrow 0 \Rightarrow P(\alpha(G) < k) \rightarrow 1$. □

Следствие. *А.н.н. $\chi(G) \geq \frac{n}{2 \log_2 n}$ для $G(n, \frac{1}{2})$.*

Определение 1.3.5. Обхватом графа G называется величина $g(G)$, равная длине кратчайшего цикла в графе.

Теорема 1.3.6. *(Эрдёш, 1957)*

$$\forall k, l \in \mathbb{N} \exists G = (V, E) : \chi(G) > k \wedge g(G) > l$$

Доказательство. Рассмотрим случайный граф $G(n, p)$ с вероятностью ребра $p = p(n) = n^{\theta-1}$, где $\theta = \frac{1}{2l}$. Определим случайные величины X^r как количество простых циклов в графе G длины r и X_l , равные количеству простых циклов длины $\leq l$. Имеем тогда:

$$\begin{aligned} EX_l &= \sum_{r=3}^l EX^r = \sum_{r=3}^l \sum_{\substack{W \subseteq V \\ |W|=r}} \sum_{\text{нумерациям } W} p^r = \sum_{r=3}^l C_n^r \frac{(r-1)!}{2} p^r \\ &\leq \sum_{r=3}^l \frac{n^r}{r!} \cdot \frac{(r-1)!}{2} p^r < \sum_{r=3}^l n^r p^r = \\ &= \sum_{r=3}^l n^{\theta r} \leq l n^{\theta l} = l \sqrt{n} \end{aligned}$$

а значит

$$P(X_l \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{EX_l}{n/2} \leq \frac{l\sqrt{n}}{n/2} \rightarrow 0$$

откуда следует, что $\exists n_1 \forall n > n_1 : P(X_l \geq \frac{n}{2}) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(X_l < \frac{n}{2}) > \frac{1}{2}$.

Пусть $m := \lceil \frac{3 \ln n}{p} \rceil$. Определим случайную величину Y_m как количество независимых множеств на m вершинах в графе G .

$$P(\alpha(G) < m) = P(Y_m = 0) = 1 - P(Y_m \geq 1) \geq 1 - EY_m = 1 - C_n^m (1-p)^{C_m^2}$$

причем

$$C_n^m (1-p)^{C_m^2} \leq \frac{n^m}{m!} e^{C_m^2 \ln(1-p)} < n^m e^{-\frac{m^2}{2}(1+o(1))p} = e^{m(\ln n - \frac{mp}{2}(1+o(1)))}$$

а, коль скоро

$$\ln n - \frac{mp}{2}(1+o(1)) = \ln n - 1,5 \ln n(1+o(1)) \rightarrow -\infty$$

то $P(\alpha(G) < m) \rightarrow 1 \Rightarrow \exists n_1 \forall n > n_1 P(\alpha(G) < m) > \frac{1}{2}$

Пусть $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Тогда

$$\exists G : V(G) = n \Rightarrow \alpha(G) < m, X_l(G) < \frac{n}{2}.$$

Перейдем от графа G к графу G' , удаляя по одной любой вершины из каждого цикла длины $\leq l$. В полученном графе $V(G') \geq \frac{n}{2}$, $\alpha(G') \leq \alpha(G) < m \Rightarrow \chi(G') \geq \frac{n}{2m}$, $X_l(G) = 0$ (т.е. $g(G') \geq l$). Оценим $\chi(G')$:

$$\chi(G') = \frac{n}{2m} \sim \frac{n}{6 \ln n} p = \frac{n^\theta}{6 \ln n} = \frac{n^{1/2l}}{6 \ln n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \exists n_3 : \chi(G') > k \text{ при } n \geq n_3$$

В таком случае, при $V(G) = n \geq \max\{n_1, n_2, n_3\}$ мы нашли требуемый граф. \square

Теорема 1.3.7. (Боллобаш)

Рассмотрим $G(n, p)$. Пусть $\alpha \in (\frac{5}{6}, 1)$, $p = n^{-\alpha}$. Тогда существует такая функция $u(n, \alpha)$, что а.п.н.

$$u \leq \chi(G) \leq u + 3$$

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, установим несколько вспомогательных фактов.

Определение 1.3.6. Назовем функцию f от графа липшицевой по ребрам, если для любых двух графов G, G' , таких что $V_G = V_{G'}$, отличающихся не более чем в одном ребре, выполнено неравенство $|f(G) - f(G')| \leq 1$.

Пример 1.3.1. $f(G) = |E_G|$, $f(G) = \chi(G)$,

Определение 1.3.7. Назовем функцию f от графа липшицевой по вершинам, если для любых двух графов G, G' , таких что $V_G = V_{G'}$, отличающихся не более чем во всех ребрах, связанных с одной вершиной, выполнено неравенство $|f(G) - f(G')| \leq 1$.

Теорема 1.3.8. (б/д, следствие из неравенства Азумы)

Пусть f — липшицева по вершинам функция. Тогда

$$\forall \lambda > 0 : P(|f - Ef| \geq \lambda \sqrt{n-1}) \leq 2^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

Лемма 1.3.1. Пусть $\alpha \in (\frac{5}{6}, 1)$, $p = n^{-\alpha}$. Тогда $\exists n_0 \forall n \geq n_0 :$

$$P(\exists S \subset V, |S| \leq \sqrt{n} \ln n : \chi(G|_S) \leq 3) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(\exists S \subset V : |S| \leq \sqrt{n} \ln n : \chi(G|_S) \geq 4) &= P(\exists S \subset V : |S| \in [4, \sqrt{n} \ln n] : \chi(G|_S) \geq 4) = \\ &= P(\exists S \subset V : |S| \in [4, \sqrt{n} \ln n] : \chi(G|_S) \geq 4, \text{ но } \forall x \in S : \chi(G|_{S-x}) \leq 3) = P(A) \end{aligned}$$

т.е. в конце рассматривается минимальное S по включению. Заметим, что если выполнено событие под вероятностью, то $\forall x \in S \deg_{G|_S}(x) \geq 3$. А значит

$$\begin{aligned} P(A) &\leq P(\exists S \subset V : |S| \in [4, \sqrt{n} \ln n], E(G|_S) \geq \frac{3|S|}{2}) \\ &\leq \sum_{s=4}^{\sqrt{n} \ln n} \sum_{S \subset V, |S|=s} P(E(G|_S) \geq \frac{3s}{2}) \\ &\leq \sum_{s=4}^{\sqrt{n} \ln n} \sum_{S \subset V} C_{C_s^2}^{3s/2} p^{3s/2} \\ &= \sum_s C_n^s C_{C_s^2}^{3s/2} p^{3s/2} \leq \sum_s \left(\frac{en}{s}\right)^s \left(\frac{eC_s^2}{3s/2}\right)^{3s/2} p^{3s/2} \end{aligned}$$

где последнее неравенство верно из оценки $C_n^k \leq \frac{n^k}{k!}$ и формулы Стирлинга. Продолжаем

$$\begin{aligned} &< \sum_s \left(\frac{en}{s} \cdot s^{3/2} \cdot p^{3/2}\right)^s = \sum_{s=4}^{\sqrt{n} \ln n} \left(en\sqrt{s}p^{3/2}\right)^s \\ &\leq \sum_{s=4}^{\sqrt{n} \ln n} \left(en\sqrt[4]{n}\sqrt{\ln n}p^{3/2}\right)^s < \sum_{s=4}^{\infty} \left(en^{5/4}n^{-3\alpha/2}\sqrt{\ln n}\right)^s \\ &< \sum_{s=4}^{\infty} (n^{-\beta})^s = \frac{n^{-4\beta}}{1 - n^{-\beta}} < \frac{1}{\ln n} \end{aligned}$$

где последние два неравенства верны, начиная с некоторого n_0 . Лемма доказана. \square

Доказательство теоремы 1.3.7. Пусть n таково, что для него выполняется лемма 1.3.1. Возьмем минимальное u , такое что $P(\chi(G) \leq u) > \frac{1}{\ln n}$ (такое существует, поскольку чем меньше $u = n, n-1, \dots, 1, 0$, тем меньше соответствующая вероятность). Тогда $P(\chi(G) \leq u-1) \leq \frac{1}{\ln n} \Rightarrow P(\chi(G) \geq u) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$.

Введем функцию $f(G) := \min\{|S| : S \subset V \text{ и } \chi(G|_{V \setminus S}) \leq u\}$. Нетрудно понять, что f — липшицева по вершинам (действительно, рассмотрим некоторую $x \in V$. Удалим из графа все ребра, выходящие из x . Тогда x нужно либо добавить в множество $|S|$, либо же убрать из него. В любом случае, отличие в

значениях функции f максимум в один). Возьмем $\lambda := \sqrt{2 \ln \ln n}$ (тогда $e^{-\lambda^2/2} = \frac{1}{\ln n}$). По теореме 1.3.8, верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} P(f - Ef \geq \lambda\sqrt{n-1}) &\leq e^{-\lambda^2/2} \\ P(f - Ef \leq -\lambda\sqrt{n-1}) &\leq e^{-\lambda^2/2} \end{aligned}$$

Предположим, что $Ef \geq \lambda\sqrt{n-1}$. Тогда

$$P(f - Ef \leq -\lambda\sqrt{n-1}) = P(f \leq Ef - \lambda\sqrt{n-1}) \geq P(f \leq 0) = P(\chi(G) \leq u) > \frac{1}{\ln n}$$

что противоречит следствию 1.3.8.

Значит, $Ef < \lambda\sqrt{n-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} P(f \geq Ef + \lambda\sqrt{n-1}) &\leq \frac{1}{\ln n} \\ \Rightarrow P(f \geq 2\lambda\sqrt{n-1}) &\leq \frac{1}{\ln n} \\ \Rightarrow P(f < 2\lambda\sqrt{n-1}) &\geq 1 - \frac{1}{\ln n} \\ \Rightarrow P(f < \sqrt{n} \ln n) &\geq 1 - \frac{1}{\ln n} \text{ [т.к. } \sqrt{n} \ln n \geq 2\lambda\sqrt{n-1} \text{]} \end{aligned}$$

Определим события:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\chi(G) \geq u\} \\ A_2 &:= \{\text{событие из леммы 1.3.1}\} \\ A_3 &:= \{f(G) \leq \sqrt{n} \ln n\} \end{aligned}$$

по доказанному выше, $P(A_i) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$. Пусть $A := A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Тогда

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3) \leq \frac{3}{\ln n} \Rightarrow P(A) \geq 1 - \frac{3}{\ln n} \rightarrow 1$$

Возьмем произвольный $G \in A$. Поскольку $G \in A_1$, то $\chi(G) \geq u$. Поскольку $G \in A_2 \cap A_3$, то $\chi(G) \leq u + 3$ (действительно, рассмотрим множество, удаление которого дает u цветов, а потом покрасим это множество еще в 3 цвета). Теорема доказана. \square

1.3.5 Жадный алгоритм поиска χ , α , ω

Пусть нам дан граф G . Зафиксируем некоторую нумерацию его вершин. Покрасим первую вершину в первый цвет. Далее, если она связана со второй, то покрасим вторую вершину в новый цвет, а иначе в первый. И вообще, пусть $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ — раскраска графа. Тогда $c(v_i) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{вершину } v_i \text{ можно покрасить в цвет } k \text{ на данном шаге}\}$. Тогда $\max_{v_i} c = \chi_g(G)$, а мощность самого большого цвета в полученной раскраски — $\alpha_g(G)$, а описанный алгоритм называется *жадным алгоритмом* раскраски графа.

Теорема 1.3.9. (Эрдеш-Боллобаш)

Для любого $\varepsilon > 0$ в модели $G(n, \frac{1}{2})$ а.н.н.

$$\frac{\alpha(G)}{\alpha_g(G)} \leq 2 + \varepsilon \iff \mathbf{P} \left(\frac{\alpha(G)}{\alpha_g(G)} \leq 2 + \varepsilon \right) \rightarrow 1.$$

Доказательство. Из теоремы 1.3.5 известно, что $\mathbf{P}(\alpha(G) \leq 2 \log_2 n) \rightarrow 1$. Это означает, что достаточно доказать, что

$$\mathbf{P}(\alpha_g(G) \leq (1 - \varepsilon) \log_2 n =: A) \rightarrow 0.$$

Пусть $m := \left\lfloor \frac{n}{2(1 - \varepsilon) \log_2 n} \right\rfloor \leq \frac{n}{2(1 - \varepsilon) \log_2 n}$. Если событие A выполнено, то

$$\exists a_1, \dots, a_m \exists C_1, \dots, C_m \subset V, \forall i |C_i| = a_i \leq (1 - \varepsilon) \log_2 n; \forall i, j: C_i \cap C_j = \emptyset.$$

Рассмотрим события $B_{a_1, \dots, a_m; C_1, \dots, C_m} := \{\forall x \forall i \exists y \in C_i: (x, y) \in E_G\}$. Для фиксированных x и i вероятность

$$\mathbf{P}(\exists y \in C_i: (x, y) \in E_G) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i},$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_{a_1, \dots, a_m; C_1, \dots, C_m}) &= \left(\prod_{i=1}^m \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i} \right) \right)^{n - a_1 - \dots - a_m} \\ &\leq \left(\prod_{i=1}^m \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i} \right) \right)^{n - m(1 - \varepsilon) \log_2 n} \\ &\leq \left(\prod_{i=1}^m \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i} \right) \right)^{\frac{n}{2}} \\ &\leq \left(\prod_{i=1}^m \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(1 - \varepsilon) \log_2 n} \right) \right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^{1 - \varepsilon}} \right)^{\frac{mn}{2}} \\ &= \exp \left[\frac{mn}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^{1 - \varepsilon}} \right) \right] \leq \exp \left[- \frac{mn^\varepsilon}{2} \right] \\ &\leq \exp \left[- \frac{1}{8} \frac{n}{\log_2 n} n^\varepsilon \right] \leq e^{-n^{1 + \frac{\varepsilon}{2}}} \end{aligned}$$

Зная это, оценим $P(A)$:

$$\begin{aligned}
P(A) &\leq \sum_{a_1=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} \dots \sum_{a_m=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} \sum_{C_1, \dots, C_m} P(B_{a_1, \dots, a_m; C_1, \dots, C_m}) \\
&\leq e^{-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{a_1} \dots \sum_{a_m} C_n^{a_1} \dots C_n^{a_m} \\
&< e^{-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{a_1} \dots \sum_{a_m} n^{a_1 + \dots + a_m} \\
&\leq e^{-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{a_1} \dots \sum_{a_m} n^{n/2} \\
&< e^{-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{1}{2} \ln n} (\log_2 n)^m = \exp \left[-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{n}{2} \ln n + m \ln \log_2 n \right] \\
&\leq \exp \left[-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{n}{2} \ln n + \frac{n \ln \log_2 n}{2(1-\varepsilon)\log_2 n} \right] = \exp \left[-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} (1 + o(1)) \right] \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

□

Теорема 1.3.10. (6/д, Кучера)

$\forall \varepsilon, \delta > 0$ существует последовательность графов G_n на n вершинах, такая что

$$P \left(\frac{\alpha(G_n)}{\alpha_g(G_n)} \geq n^{1-\varepsilon} \right) \geq 1 - \delta.$$

Утверждение 1.3.5.1. Пусть в модели $G(n, p)$ вероятность появления ребра $p = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Тогда а.п.н. в G нет ребер.

Доказательство. Пусть ξ — случайная величина, равная числу ребер в G . Тогда

$$P(\xi \geq 1) \leq E\xi = C_n^2 p \sim \frac{n^2}{2} p \rightarrow 0.$$

□

Утверждение 1.3.5.2. Пусть в модели $G(n, p)$ вероятность появления ребра $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Тогда а.п.н. $\chi(G) \leq 2$.

Доказательство. Пусть ξ — случайная величина, равная числу простых циклов в G . Тогда

$$P(\xi \geq 1) \leq E\xi = \sum_{r=3}^n C_n^r \frac{(r-1)!}{2} p^r < \sum_r \frac{n^r}{r!} \frac{(r-1)!}{2} p^r < \sum_{r=3}^{\infty} (np)^r = \frac{(np)^3}{1-np} \rightarrow 0.$$

□

Упражнение. Пусть $p = \frac{c}{n}, c \in (0, 1)$. Тогда а.п.н. все компоненты связности в G либо деревья, либо унициклические графы и $\chi(G) \leq 3$.

1.4 Основы линейно-алгебраического метода

1.4.1 Определение экстремальных величин в гиперграфе

Определение 1.4.1. *Гиперграфом* называется пара $H = (V, E)$, где V — множество вершин, а E — произвольное подмножество 2^V (т.е. в отличие от обычного графа, ребро гиперграфа это произвольное неупорядоченное множество вершин).

Определение 1.4.2. Гиперграф называется k -однородным (для $k \geq 2$), если $\forall a \in E : |a| = k$.

Определение 1.4.3. Основные экстремальные величины, рассматриваемые в этом разделе:

$$\begin{aligned} f(n, k, t) &= \max\{f \in \mathbb{N} : \exists k\text{-однородный гиперграф } H = (V, E), |V| = n, |E| = f, \forall A, B \in E : |A \cap B| \geq t\} \\ h(n, k, t) &= \max\{h \in \mathbb{N} : \exists k\text{-однородный гиперграф } H = (V, E), |V| = n, |E| = h, \forall A, B \in E : |A \cap B| \leq t\} \\ m(n, k, t) &= \max\{m \in \mathbb{N} : \exists k\text{-однородный гиперграф } H = (V, E), |V| = n, |E| = m, \forall A, B \in E : |A \cap B| \neq t\} \end{aligned}$$

Для примера рассмотрим граф $G(n, r, s)$ (надпись для тех, кто не помнит что это). Интерпретируем вершины этого графа как ребра некоторого r -однородного гиперграфа, а пару вершин, пересекающихся по s элементам — ребром. Легко понять, что $\alpha(G(n, 3, 1)) = m(n, 3, 1)$, и вообще

$$\alpha(G(n, k, t)) = m(n, k, t)$$

1.4.2 Оценки для $f(n, k, t)$

Теорема 1.4.1. (*Эрдеши-Ко-Радо*)

$$f(n, k, 1) = \begin{cases} C_n^k & 2k > n \\ C_{n-1}^{k-1} & 2k \leq n \end{cases}$$

Доказательство. Первый случай очевиден. Верхняя оценка $f(n, k, 1) \geq C_{n-1}^{k-1}$ в случае $2k \leq n$ тоже проста: достаточно рассмотреть совокупность $\mathcal{M} = \{M \subset [n], |M| = k \wedge 1 \in M\}$. Покажем теперь, что $f(n, k, 1) \leq C_{n-1}^{k-1}$. Рассмотрим совокупность $\mathcal{F} = H_E = \{F_1, \dots, F_s\}$, $\forall i, |F_i| = k, \forall i, j : |F_i \cap F_j| \geq 1$. Наша цель показать, что $s \leq C_{n-1}^{k-1}$.

Рассмотрим семейство множеств $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$, где $A_1 = \{1, 2, \dots, k\}, A_2 = \{2, \dots, k+1\}, \dots, A_n = \{n, 1, 2, \dots, k-1\}$. Докажем сначала следующую лемму:

Лемма 1.4.1. $|\mathcal{F} \cap \mathcal{A}| \leq k$ (*круговой метод Катона*)

Доказательство. Если $\mathcal{F} \cap \mathcal{A} = \emptyset$, то все очевидно. Иначе, без ограничения общности, считаем, что $A_1 \in \mathcal{F}$. Все остальные $A_i \in \mathcal{F} \cap \mathcal{A}$ должны пересекать A_1 и пересекаться между собой. Разобем их на пары следующим образом: (A_i, A_{n-k+i}) для $i \geq 2$ (например, пара (A_2, A_{n-k+2}) — A_2 начинается с 2, а A_{n-k+2} кончается в 1). Тогда $A_i \cap A_{n-k+i} = \emptyset$. Рассмотрим следующие пары: $(A_2, A_{n-k+2}), \dots, (A_k, A_n)$.

В этих парах все множества пересекают A_1 , но при этом два множества из одной пары не пересекаются. Это означает, что в $\mathcal{A} \cap \mathcal{F}$ не более одного множества из каждой пары, откуда следует

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{F}| \leq 1 (A_1) + (\text{количество пар}) = 1 + k - 1 = k$$

и лемма доказана. \square

Изначально $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Рассмотрим любую перестановку $\sigma \in S_n$. Определим множества $V_\sigma = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$ и $\mathcal{A}_\sigma = \{\sigma(A_1), \dots, \sigma(A_n)\}$, где $\sigma(A_i)$ означает множество $\{\sigma(i), \sigma(i+1), \dots\}$. Например, для $n = 7$ и σ такой, что $V_\sigma = \{2, 5, 1, 3, 4, 6, 7\}$ совокупность \mathcal{A}_σ это множество $\{\{2, 5, 1\}, \{5, 1, 3\}, \dots, \{6, 7, 2\}, \{7, 2, 5\}\}$

Лемма 1.4.2. $|\mathcal{F} \cap \mathcal{A}_\sigma| \leq k$ — доказательство аналогично предыдущей лемме.

Определим индикаторы $I(\sigma, F_i) = \begin{cases} 1 & F_i \in \mathcal{A}_\sigma, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$ и посмотрим на следующую величину:

$$\sum_{\sigma} \sum_{i=1}^s I(\sigma, F_i) = \sum_{i=1}^s \sum_{\sigma} I(\sigma, F_i)$$

При фиксированной перестановке сумма $\sum_{i=1}^s I(\sigma, F_i) = |\mathcal{A}_\sigma \cap \mathcal{F}| \leq k$, а значит сумма слева не превосходит $n!k$. С другой стороны, при фиксированном i , F_i может оказаться на одном из n мест в множестве \mathcal{A}_σ , и перестановок, в которых возникает F_i , ровно $k!(n-k)!$, а значит $\sum_{\sigma} I(\sigma, F_i) = nk!(n-k)!$ и вся сумма справа = $snk!(n-k)!$. Окончательно получаем

$$snk!(n-k)! = \sum_{i=1}^s \sum_{\sigma} I(\sigma, F_i) = \sum_{\sigma} \sum_{i=1}^s I(\sigma, F_i) \leq kn! \Rightarrow s \leq C_{n-1}^{k-1}$$

\square

Пример 1.4.1. Аналогично теореме Эрдеша-Ко-Радо получаем оценку для $f(n, k, 2)$:

$$f(n, k, 2) = \begin{cases} C_{n-2}^{k-2} & 2k \leq n+1, \\ C_n^k & 2k > n+1 \end{cases}.$$

Рассмотрим $f(8, 4, 2)$: имеем оценку

$$f(8, 4, 2) \geq C_6^2 = 15.$$

Однако, рассмотрим совокупность

$$\mathcal{F} = \{A \sqcup B \mid A \subset \{1, \dots, 4\}, |A| = 3; B \subset \{5, \dots, 8\}, |B| = 1\}.$$

Нетрудно понять, что $|\mathcal{F}| = 16$ и любые два множества из \mathcal{F} пересекаются ровно по двум элементам. При этом в \mathcal{F} можно добавить, например, множество $\{1, \dots, 4\}$ и получить новую совокупность с $|\mathcal{F}'| = 17$, подходящую под определение $f(8, 4, 2)$, что говорит о том, что полученная оценка не является наилучшей.

Рассмотрим историю улучшений оценки для $f(n, k, t)$.

Теорема 1.4.2. (6/д, 1961г — Эрдеши-Ко-Радо)

$$\forall k, t, \exists n_0(k, t) : \forall n \geq n_0 : f(n, k, t) = C_{n-t}^{k-t}$$

Теорема 1.4.3. (6/д, 1979г — Франкль)

Если $k \geq 15$, то

$$n_0(k, t) = (k - t + 1)(t + 1).$$

Теорема 1.4.4. (6/д, 1983г — Уилсон)

$$\forall k, t : n_0 = (k - t + 1)(t + 1). \text{ Для } n \geq n_0 \text{ } f(n, k, t) = C_{n-t}^{k-t}, \text{ а для меньших } n \text{ } f(n, k, t) > C_{n-t}^{k-t}.$$

Зафиксируем k и t и рассмотрим n , такое что $(k - t + 1)(2 + \frac{t-1}{2}) \leq n < (k - t + 1)(t + 1)$ (замечание: $t + 1 = 2 + \frac{t-1}{1}$). Тогда оптимальной является следующая конструкция:

$$\mathcal{F} = \{F \subset \{1, \dots, n\}, |F| = k, |F \cap \{1, 2, \dots, t + 2\}| \geq t + 1\}$$

В таком случае $|F| = C_{t+2}^{t+1} \cdot C_{n-t-2}^{k-t-1} + C_{t+2}^{t+2} \cdot C_{n-t-2}^{k-t-2}$. Разумно задаться вопросом "что это?". Так вот, ответ на это дает последняя теорема в нашем списке:

Теорема 1.4.5. (6/д, 1996г — Алсведе-Хачатрян)

Зафиксируем k, t . Пусть n, r таковы, что

$$(k - t + 1)(2 + \frac{t-1}{r+1}) \leq n < (k - t + 1)(2 + \frac{t-1}{r})$$

Тогда $f(n, k, t) = |\mathcal{F}|$, где

$$\mathcal{F} = \{F \subset [n], |F| = k, |F \cap \{1, \dots, t + 2r\}| \geq t + r\}$$

(при $r = 0$ это теорема Эрдеши-Ко-Радо).

1.4.3 Оценки для $h(n, k, t)$ и $m(n, k, t)$

Теорема 1.4.6.

$$h(n, k, t) = \frac{C_n^{t+1}}{C_k^{t+1}}$$

Доказательство. Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф с условием из определения $h(n, k, t)$. Для каждого его ребра (мощность каждого ребра — k) рассмотрим все его $t + 1$ элементные подмножества. Поскольку для любых двух ребер $|A \cap B| \leq t < t + 1$, то для разных ребер графа H множества их $t + 1$ -элементных подмножеств различны. При этом в каждом наборе ровно C_k^{t+1} элементов. Тогда

$$|E| C_k^{t+1} \leq C_n^{t+1}$$

откуда следует требуемое неравенство. □

Теорема 1.4.7. (б/д, 1980е, Рёдль)

Если k и t фиксированные, а $n \rightarrow \infty$, то

$$h(n, k, t) \sim \frac{C_n^{t+1}}{C_k^{t+1}}$$

Теорема 1.4.8. (б/д, 2014-2015, Кивовш)

Если k и t фиксированные, а $n \rightarrow \infty$, то, в естественных условиях делимости, выполнено равенство

$$h(n, k, t) = \frac{C_n^{t+1}}{C_k^{t+1}}$$

Теорема 1.4.9. (Франкл, Уилсон, 1981)

Пусть $k - t = p^\alpha$, где p — простое, а α — натуральное число больше нуля. Пусть $k - 2p^\alpha < 0$.

Тогда выполнено неравенство

$$m(n, k, t) \leq \sum_{i=0}^{p^\alpha-1} C_n^i$$

Доказательство. (Доказательство для $\alpha = 1$, остальное — упражнение)

Рассмотрим произвольный гиперграф H с указанными в определении числа m ограничениями. $E = \{A_1, \dots, A_s\}$, $|A_i| = k$, $\forall i \neq j : |A_i \cap A_j| \neq t$. Каждому A_i сопоставим вектор $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_n)$, где $x_i = 1$, если $i \in A_i$ и $x_i = 0$ иначе (заметим, что $|A_i \cap A_j| = \langle \bar{x}_i, \bar{x}_j \rangle$). Сопоставим теперь каждому \bar{x}_i многочлен от n переменных над \mathbb{Z}_p следующим образом:

$$F_{\bar{x}_i}(\bar{y}) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq t \pmod{p}}}^p (j - \langle \bar{x}_i, \bar{y} \rangle)$$

Докажем, что многочлены $F_{\bar{x}_1}, \dots, F_{\bar{x}_s}$ — линейно независимы над \mathbb{Z}_p . Предположим противное: пусть нашлись коэффициенты $\{c_i\}$, такие что

$$c_1 F_{\bar{x}_1} + \dots + c_s F_{\bar{x}_s} = 0$$

Тогда $\forall y : c_1 F_{\bar{x}_1}(y) + \dots + c_s F_{\bar{x}_s}(y) \equiv 0 \pmod{p}$. В частности, рассмотрим $y = x_i$. Имеем $\langle x_i, x_i \rangle = k \equiv t \pmod{p}$ (поскольку $k - t = p^\alpha$), а значит $F_{\bar{x}_i}(x_i) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Теперь

$$\left. \begin{aligned} \langle x_i, x_j \rangle &< k \text{ т.к. } i \neq j \\ \langle x_i, x_j \rangle &\neq t \text{ т.к. граф из определения } m(n, k, t) \\ \langle x_i, x_j \rangle &\neq t - p \text{ т.к. } t - p = k - 2p < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle \neq t \pmod{p} \Rightarrow F_{\bar{x}_j}(x_i) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Отсюда следует, что $\forall i c_i = 0$, а значит количество многочленов не превосходит размерности пространства многочленов.

Раскроем в каждом многочлене скобки, и уменьшим в каждом одночлене степень входящих в него до 1. Получим новые многочлены $\tilde{F}_{\bar{x}_i}$, причем $\tilde{F}_{\bar{x}_i}(x) = F_{\bar{x}_i}(x)$ при $x \in \mathbb{Z}_2^n$. Базис, порождающий пространство $\tilde{F}_{\bar{x}_i}$, — это одночлены, коих $\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i$, откуда $s \leq \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i$. \square

Теорема 1.4.10. Пусть $k - t = p$, где p — простое, $k - 2p \geq 0$, $d = k - 2p + 1$. Тогда

$$m(n, k, t) \leq \frac{C_n^d}{C_k^d} \sum_{i=0}^{p-1} C_{n-d}^i.$$

Доказательство. Рассмотрим всевозможные подмножества вершин гиперграфа мощности $d : D_1, \dots, D_{C_n^d}$ и систему

$$\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_s \mid |F_i| = k, |F_i \cap F_j| \neq t\}$$

и определим функции

$$I(D_i, F_j) = \begin{cases} 1 & D_i \subset F_j, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{C_n^d} \sum_{j=1}^s I(D_i, F_j) &= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{C_n^d} I(D_i, F_j) \\ &= \sum_{j=1}^s C_k^d = s C_k^d \end{aligned}$$

откуда $\exists i : \sum_{j=1}^s I(D_i, F_j) \geq \frac{s C_k^d}{C_n^d}$.

Рассмотрим совокупность \mathcal{F}' всех F_j из \mathcal{F} , таких что $D_i \subset F_j$. Сопоставим каждому F_j из \mathcal{F}' вектор $x_j \in \mathbb{Z}_2^k$ и многочлен F_{x_j} аналогично доказательству теоремы 1.4.9. Проводим дальше рассуждение, аналогичное доказательству теоремы 1.4.9, с той лишь разницей, что $\langle x_j, x'_j \rangle = |F_j \cap F'_j| \geq d$ и

$$\begin{cases} \langle x_j, x'_j \rangle = k \\ \langle x_j, x'_j \rangle \neq k - p \text{ по условию теоремы} \\ \langle x_j, x'_j \rangle \neq k - 2p < d \end{cases} \Rightarrow \langle x_j, x'_j \rangle \neq k \pmod{p} \text{ при } x_j \neq x'_j.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{p-1} C_{n-d}^i \geq |\mathcal{F}'| \geq \frac{s C_k^d}{C_n^d} \Rightarrow s \leq \frac{C_n^d}{C_k^d} \sum_{i=0}^{p-1} C_{n-d}^i.$$

□

1.4.4 Асимптотические оценки

Пусть $k, t = \text{const}$, $n \rightarrow +\infty$, $p = k - t$ — простое. Тогда в условиях теоремы 1.4.9:

$$m(n, k, t) \leq \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i \sim \frac{n^{p-1}}{(p-1)!} = \frac{n^{k-t-1}}{(k-t-1)!}.$$

При этом

$$m(n, k, t) \geq f(n, k, t+1) \geq C_{n-t-1}^{k-t-1} \sim \frac{(n-t-1)^{k-t-1}}{(k-t-1)!} \sim \frac{n^{k-t-1}}{(k-t-1)!}.$$

Пусть теперь мы находимся в условиях теоремы 1.4.10. $d = k - 2p + 1 = k - 2(k - t) + 1 = 2t - k + 1$.

Тогда

$$\begin{aligned}
m(n, k, t) &\leq \frac{C_n^d}{C_k^d} \sum_{i=0}^{p-1} C_{n-d}^i \sim \frac{n^{2t-k+1} (n-d)^{p-1}}{C_k^d d! (p-1)!} \\
&\sim \frac{n^{2t-k+k-t}}{d!(k-t-1)! C_k^{2t-k+1}} = \frac{n^t}{(k-t-1)! \frac{k!}{d!(k-d)!} d!} \\
&= n^t \left(\frac{(2k-2t-1)!}{k!(k-t-1)!} \right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим как можно большую совокупность F_1, \dots, F_s , такую что $|F_i| = r$ и $|F_i \cap F_j| \leq t-1$, причем любые два k -элементных подмножества r -элементного множества пересекаются по $\geq t+1$ элементу. Заметим, что $\min r = 2k - t - 1$.

Ясно, что $s = h(n, r, t-1)$. Возьмем все k -элементные подмножества, которые содержатся в одном F_i . Любые два таких множества не могут пересекаться по t . Таким множеств $C_r^k h(n, r, t-1)$. Тогда

$$\begin{aligned}
m(n, k, t) &\geq C_r^k h(n, r, t-1) \sim C_r^k \cdot \frac{C_n^t}{C_r^t} \\
&\sim \frac{(2k-t-1)!}{k!(k-t-1)!} \cdot \frac{n^t t! (r-t)!}{t! r!} = \frac{(2k-t-1)!}{k!(k-t-1)!} \cdot \frac{n^t (2k-2t-1)!}{(2k-t-1)!} \\
&= n^t \frac{(2k-2t-1)!}{k!(k-t-1)!}
\end{aligned}$$

1.5 Хроматическое число пространства

Определение 1.5.1.

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \{\min k \in \mathbb{N} \mid \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k : \forall i : \forall x, y \in V_i : |x - y| \neq 1\}.$$

Известные значения:

1. $\chi(\mathbb{R}) = 2$.
2. $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$, причем если потребовать измеримость множеств V_i по Лебегу, то $5 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$.
3. $6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$.
4. $10 \leq \chi(\mathbb{R}^4) \leq 54$.

Утверждение 1.5.0.1.

$$n + 1 \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (4\sqrt{n})^n$$

Доказательство. Оценка $n + 1 \leq \chi(\mathbb{R}^n)$ следует из существования симплекса в \mathbb{R}^n , все вершины которого должны быть покрашены в разные цвета.

Рассмотрим n -мерный куб со стороной 2. Разобьем его на $(4\sqrt{n})^n$ маленьких кубиков со стороной $\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Покрасим точки внутри одного маленького кубика в свой цвет. Поскольку мы правильно раскрасили куб со стороной 2, то аналогично мы раскрасим всё пространство, откуда

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leq (4\sqrt{n})^n.$$

□

Теорема 1.5.1. (6/д)

Пусть χ бесконечного графа (т.е. $|V| = \infty$) конечное хроматическое число. Тогда существует его конечный подграф, имеющий то же хроматическое число.

Определение 1.5.2. Граф называется *дистанционным*, если $V \subset \mathbb{R}^n$, а $E = \{(x, y) \in V : |x - y| = a > 0\}$.

Рассмотрим $G(n, k, t) = (V, E)$, $V = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 + \dots + x_n = k, x_i \in \{0, 1\}\}$, $E = \{(x, y) : \langle x, y \rangle = t \Leftrightarrow |x - y| = \sqrt{2k - 2t}\}$.

Тогда

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G(n, k, t)) \geq \frac{|V|}{m(n, k, t)} = \frac{C_n^k}{m(n, k, t)} \Rightarrow \chi(\mathbb{R}^n) \geq \max_{k, t} \left\{ \frac{C_n^k}{m(n, k, t)} \right\}.$$

Утверждение 1.5.0.2. (б/д)

Максимум достигается при $k = k(n) = \left\lceil \frac{2-\sqrt{2}}{2}n \right\rceil$, $t = k - p$ где p — простое, такое что $k - 2p < 0$. А, как известно, на $[x, x + Cx^{0.525}]$ есть простое число $\Rightarrow p \sim \frac{k}{2}$.

Следствие.

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.207 + o(1))^n$$

Доказательство. Пусть $a := \frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $k = an$. Имеем

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{R}^n) &\geq \frac{C_n^k}{\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i} = \frac{\left(\frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}} + o(1) \right)^n}{\left(\left(\frac{a}{2} \right)^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{a}{2} \right)^{1-\frac{a}{2}} + o(1) \right)^n} \\ &= \left(\frac{\left(\frac{a}{2} \right)^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{a}{2} \right)^{1-\frac{a}{2}}}{a^a(1-a)^{1-a}} + o(1) \right)^n \\ &= \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} + o(1) \right)^n = (1.207 + o(1))^n \end{aligned}$$

□

Теорема 1.5.2. (*б/д, Райгородский*)

$$(1.239 + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

Глава 2

2 семестр

2.1 Турановские результаты

Теорема 2.1.1. (Туран)

Пусть у графа $G = (V, E)$ число вершин $|V| = n$ и $\alpha = \alpha(G)$. Тогда в этом графе

$$|E| \geq n \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \left[\frac{n}{\alpha} + 1 \right] \cdot \frac{\alpha}{2}$$

Доказательство. Пусть $A \subset V$ — наибольшее независимое множество, $|A| = \alpha$. Тогда $\forall x \in V \setminus A \exists y \in A : (x, y) \in E$, что уже дает $\geq n - \alpha$ ребер. Удалим из графа множество A вместе со всеми ребрами. В оставшемся графе G' снова рассмотрим наибольшее независимое множество A' , $|A'| \leq \alpha$. Аналогично находим еще как минимум $n - 2\alpha$ ребер и снова повторяем наши действия.

Всего будет $\geq \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor$ шагов, а суммарно найдено будет как минимум

$$\left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \cdot n - \alpha \left(1 + 2 + \dots + \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \right) = n \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \left[\frac{n}{\alpha} + 1 \right] \cdot \frac{\alpha}{2}$$

ребер. □

Заметим, что полученная оценка неулучшаема. Действительно, пусть $\alpha \mid n$. Тогда оценка имеет вид $\frac{n^2}{\alpha} - \frac{n(n/\alpha+1)}{2} = \frac{n^2}{2\alpha} - \frac{n}{2}$. Рассмотрим тогда α клик на $\frac{n}{\alpha}$ вершинах. В таком графе число ребер равно $C_{\frac{n}{\alpha}}^2 \cdot \alpha = \frac{n^2}{2\alpha} - \frac{n}{2}$.

Заметим также, что если в формулировке теоремы 2.1.1 от графа G перейти к графу \overline{G} , то, используя равенство $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$, получим утверждение, что если в графе много ребер, то в нем обязательно есть клика.

Следствие. Пусть $G_n = (V_n, E_n)$ — последовательность графов с $|V_n| = n$ и $\alpha_n = \alpha(G_n)$. Пусть $\alpha_n = o(n)$. Тогда

$$|E_n| \geq \frac{n^2}{2\alpha_n} (1 + o(1))$$

(В этих условиях $\left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \rightarrow \infty \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \sim \frac{n}{\alpha}$)

Определение 2.1.1. Граф G называется *дистанционным* графов, если $V \subset \mathbb{R}^n$ и $E = \{(x, y) : |x - y| = a\}$

Теорема 2.1.2. Пусть $G = (V, E)$ — дистанционный граф на плоскости, $|V| = 4n$, $\alpha(G) = n$. Тогда $|E| \geq 7n$.

Доказательство. Повторяя полностью рассуждения из теоремы Турана получаем оценку $|E| \geq 6n$, при этом найдя на первом шаге $\geq 3n$ ребер. Покажем, что на первом шаге можно найти $\geq 4n$ ребер.

Пусть A — наибольшее независимое множество в V , $V \setminus A = V_1 \sqcup V_2$, где $V_1 = \{v \in V \setminus A \mid v \text{ ровно один сосед в } A\}$ а $V_2 = \{v \in V \setminus A \mid v \text{ хотя бы 2 соседа в } A\}$. Предположим, что $|V_1| > 2n$. Тогда $\exists y \in A : \exists x_1, x_2, x_3 \in V_1 : \{(x_1, y), (x_2, y), (x_3, y)\} \subset E$. Если одного из ребер (x_i, x_j) нет в графе, то добавив в A вершины x_i, x_j и удалив из A вершину y получим новое независимое множество большего размера. Иначе мы нашли 4 точки на плоскости y, x_1, x_2, x_3 , попарные расстояние между которыми равны, чего быть не может $\Rightarrow |V_1| \leq 2n$.

Из доказанного выше следует, что $|V_2| \geq n$, причем каждая вершина из V_2 дает хотя бы 2 ребра. Поскольку $|V_1| + |V_2| = 3n$, то всего на первом шаге будет набрано $\geq 4n$ ребер. \square

Факт. Самый лучший известный результат: $|E| \geq \frac{26}{3}n$.

Теорема 2.1.3. Пусть $G_d = (V_d, E_d)$ — последовательность дистанционных графов в \mathbb{R}^d . $|V_d| = n = n(d)$, $\alpha(G_d) = \alpha(d)$ Тогда, если $d\alpha = o(n)$, то

$$|E_d| \geq \frac{n^2}{\alpha} (1 + o(1))$$

Доказательство. Аналогично теореме выше, рассмотрим $V \setminus A = V_1 \sqcup V_2$ и докажем, что $|V_1| \leq \alpha d$. Действительно, предположив противное, найдем в A вершину y , имеющую $(d+1)$ соседа в V_1 и аналогично получим противоречие с тем, что в \mathbb{R}^d нет дистанционного графа K_{d+2} (6/д).

Тогда, пользуясь тем, что $|V_1| = v \leq \alpha d$, на первом шаге мы нашли $v + 2(n - \alpha - v) \geq \underbrace{d\alpha}_{V_1} + \underbrace{2(n - \alpha - \alpha d)}_{V_2}$

ребер. Всего шагов $\left\lceil \frac{n - \alpha d}{\alpha} \right\rceil$, а суммарное число ребер

$$\begin{aligned} & \left\lceil \frac{n - \alpha d}{\alpha} \right\rceil \cdot \alpha d + 2n \left\lceil \frac{n - \alpha d}{\alpha} \right\rceil - 2\alpha d \left\lceil \frac{n - \alpha d}{\alpha} \right\rceil - 2\alpha \left\lceil \frac{n - \alpha d}{\alpha} \right\rceil \left\lceil \frac{n - \alpha d}{\alpha} + 1 \right\rceil / 2 \\ &= \frac{2n^2}{\alpha} - dn - \frac{n^2}{\alpha} = \frac{n^2 - n\alpha d}{\alpha} = \frac{n^2 + o(n^2)}{\alpha} \sim \frac{n^2}{\alpha} \end{aligned}$$

\square

2.2 Рамсеевские задачи

2.2.1 Оценки чисел Рамсея

Определение 2.2.1. Пусть $s, t \in \mathbb{N}$. Число Рамсея $R(s, t) := \min\{n \in \mathbb{N} : \text{при любой раскраски ребер } K_n \text{ в красный и синий цвета либо найдется } K_s, \text{ все ребра у которого красные, либо } K_t, \text{ все ребра которого синие}\}$.

Эквивалентное определение $R(s, t) := \min\{n \in \mathbb{N} : \forall G = (V, E), |V| = n \text{ и либо } \omega(G) \geq s, \text{ либо } \alpha(G) \geq t\}$

Замечание. 1. $R(1, t) = 1$

2. $R(2, t) = t$

3. $R(3, t)$ никто не знает.

Теорема 2.2.1. (Эрдеш, Секереш, 1935)

$$R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1)$$

Доказательство. $n := R(s-1, t) + R(s, t-1)$. Зафиксируем произвольную раскраску K_n в 2 цвета и вершину $v \in V$. Из нее выходит $n-1$ ребро. От противного получаем, что из нее выходит либо $\geq R(s-1, t)$ красных ребер, либо $\geq R(s, t-1)$ синих. Без ограничения общности считаем, что $\geq R(s-1, t)$ красных. $V_1 := \{u \in V, (v, u) \text{ — красное}\}$. Поскольку $|V_1| \geq R(s-1, t)$, то в V_1 есть либо синий K_t , либо красный K_{s-1} , который вместе с вершиной v дает искомый красный K_s . \square

Следствие. $R(s, t) \leq C_{s+t-2}^{t-1}$ — индукция по s и t .

Следствие. $R(s, s) \leq C_{2s-1}^{s-1} = \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi s}}(1 + o(1))$

Следствие. $R(3, 3) \leq C_4^2 = 6$, при этом $R(3, 3) > 5$ (цикл на 5 вершинах).

2.2.2 Диагональные числа Рамсея

Определение 2.2.2. Число Рамсея $R(s, s)$ называется *диагональным*.

Выше доказана оценка $R(s, s) \leq C_{2s-1}^{s-1} = \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi s}}(1 + o(1))$

Теорема 2.2.2. (Туран)

$$R(s, s) > (s-1)^2$$

Доказательство. Рассмотрим $s-1$ копии K_{s-1} , несвязанные между собой. Для такого графа $\alpha(G) = s-1 = \omega(G)$. \square

Теорема 2.2.3. (Эрдеш, Секереш, 1935)

$$R(s, s) \geq (1 + o(1)) \frac{1}{e\sqrt{2}} \cdot s^{s/2}$$

Доказательство. $n := (1 + o(1)) \frac{1}{e\sqrt{2}} \cdot s^{s/2}$. Покажем, что существует раскраска K_n , в которой нет одноцветного K_s . Рассмотрим случайную раскраску ребер K_n в два цвета, где $P(e - \text{красное}) = P(e - \text{синее}) = \frac{1}{2}$. Пусть $S \subset V$, $|S| = s$ и $A_S = \{K_s, \text{ порожденный } S - \text{одноцветный}\}$. Тогда $P(A_S) = 2 \cdot 2^{-C_s^2} = 2^{1-C_s^2}$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{\substack{S \subset V \\ |S|=s}} A_S\right) &\leq \sum_{\substack{S \subset V \\ |S|=s}} P(A_S) = C_n^s 2^{1-C_s^2} \leq \frac{n^s}{s!} 2^{1-s^2/2+s/2} \\ &= \frac{1}{s!} (1 + o(1))^s \cdot \frac{1}{e^s 2^{s/2}} \cdot s^s 2^{s^2/2} 2^{1-s^2/2+s/2} = \frac{(1 + o(1))^s}{\sqrt{2\pi s} \frac{s^s}{e^s} (1 + o(1))} \cdot \frac{s^s}{e^s} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \cdot \frac{(1 + o(1))^s}{(1 + o(1))} \end{aligned}$$

Подбором $o(1)$ в числителе и знаменателе можно сделать так, что полученное число < 1 при всех s . \square

Следствие. Пусть $s \in \mathbb{N}$ и n таково, что $C_n^s 2^{1-C_s^2} < 1$. Тогда $R(s, s) > n$.

Теорема 2.2.4. Пусть дано $s \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall n$

$$R(s, s) \geq n - C_n^s 2^{1-C_n^s}$$

Доказательство. Рассмотрим случайную раскраску K_n в два цвета. Определим случайную величину $\xi :=$ кол-во одноцветных K_s в раскраске.

$$E\xi = C_n^s 2^{1-C_s^2} \rightarrow \exists \chi : \xi(\chi) \leq C_n^s 2^{1-C_s^2}$$

Если $C_n^s 2^{1-C_s^2} < 1$, то мы нашли подходящую раскраску.

Иначе зафиксируем раскраску χ и удалим из каждого одноцветного K_s по любой вершине (возможно, одну и ту же вершину для нескольких K_s). После удаления в графе осталось $\geq n - C_n^s 2^{1-C_s^2}$ вершин, причем для раскраски χ в нем нет одноцветных K_s . \square

Следствие.

$$R(s, s) \geq (1 + o(1)) \frac{1}{e} s^{s/2}$$

Доказательство. Аналогично теореме 2.2.3 имеет $C_n^s 2^{1-C_s^2} = \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \cdot \frac{(1 + o(1))^s}{(1 + o(1))} \cdot 2^{s/2}$. Тогда, по теореме 2.2.4:

$$(1 + o(1)) \frac{s^{s/2}}{e} - \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \cdot \frac{(1 + o(1))^s}{(1 + o(1))} \cdot 2^{s/2} = (1 + o(1)) \frac{1}{e} \cdot s^{s/2}$$

\square

Теорема 2.2.5. (Спенсер, 1975)

$$R(s, s) \geq (1 + o(1)) \frac{\sqrt{2}}{e} s^{s/2}$$

Замечание. Это самый лучший известный результат.

Для доказательства этой теоремы мы будем использовать локальную лемму Ловаса (далее ЛЛЛ), причем сначала мы покажем, как теорема следует из ЛЛЛ в симметричной форме, потом выведем ЛЛЛ в симметричной форме из ЛЛЛ в общем случае, а далее докажем ЛЛЛ в общем случае.

Теорема 2.2.6. (*Локальная лемма Ловаса в симметричной форме, 1973г, Ловас*)

Пусть A_1, \dots, A_n — события на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Пусть известно, что $\forall i \mathbb{P}(A_i) \leq p < 1$ и $\forall i A_i$ не зависит от совокупности всех остальных событий, кроме не более d штук (событие A не зависит от группы событий B_1, \dots, B_k , если $\mathbb{P}(A_i | \text{пересечение и объединение событий из } B_1, \dots, B_k) = \mathbb{P}(A_i)$) и числа p, d не зависят от i . Тогда, если $ep(d+1) < 1$ то

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) > 0$$

Вывод теоремы Спенсера из ЛЛЛ в симметричной форме. Пусть $A_1, \dots, A_{C_n^s}$ — события, заключающиеся в том, что конкретные s вершин образуют одноцветный K_s в случайной раскраске K_n , где $n = (1 + o(1)) \frac{\sqrt{2}}{e} s^{s/2}$.

$d \leq$ кол-во S -элементных множеств вершин, пересекающих множество, отвечающее событию A_i , хотя бы по 2 вершинам $= C_s^2 C_n^{s-2}$. Проверим условие ЛЛЛ:

$$\begin{aligned} e^{2^{1-C_s^2}} (C_s^2 C_n^{s-2} + 1) &< e^{2^{1-s^2/2+s/2}} \cdot \frac{s^2}{2} \cdot \frac{n^{s-2}}{(s-2)!} \\ &= e^{s^2 2^{-s^2/2+s/2}} \frac{1}{(1+o(1))\sqrt{2\pi s} \frac{(s-2)^{s-2}}{e^{s-2}}} \cdot (1+o(1))^s \frac{(\sqrt{2})^{s-2}}{e^{s-2}} 2 \end{aligned}$$

Перепишем $(s-2)^{s-2} = s^{s-2} (1 - \frac{2}{s})^{s-2} \sim s^{s-2} (1 - \frac{2}{s})^s \sim s^{s-2} e^{-2}$ и продолжим

$$\begin{aligned} &\sim e^3 s^2 2^{-s^2/2+s/2} \frac{1}{(1+o(1))\sqrt{2\pi s}} 2^{\frac{s-2}{2}} 2^{s^2/2-2s/2} (1+o(1))^{s-2} \\ &= e^3 \frac{s^2 (1+o(1))^s}{2\sqrt{2\pi s} (1+o(1))} < 1 \text{ при всех } s \text{ для подходящей } \varphi = o(1) \end{aligned}$$

□

Определение 2.2.3. Рассмотрим события A_1, \dots, A_n . Граф $G = (V, E)$ называется *орграфом зависимостей* для (A_1, \dots, A_n) , если $V = (A_1, \dots, A_n)$ и $\forall i : A_i$ не зависит от совокупности тех A_j , с которыми оно не соединено ребрами, т.е. с теми A_j , для которых $(A_i, A_j) \notin E$ (т.к. это орграф, то порядок имеет значение).

Замечание. Если ребро есть, то события могут как зависеть, так и не зависеть. Главное, чтобы для независимых событий ребер не было.

Замечание. Для фиксированной совокупности событий существует не единственный орграф зависимостей.

Теорема 2.2.7. (ЛЛЛ, общий случай)

Пусть A_1, \dots, A_n — события на (Ω, \mathcal{F}, P) и $G = (V, E)$ — их орграф зависимостей, такой что $\exists x_1, \dots, x_n \in [0, 1)$, т.ч. $\forall i \ P(A_i) \leq x_i \prod_{j: (A_i, A_j) \in E} (1 - x_j)$. Тогда

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) \geq \prod_{j=1}^n (1 - x_j) > 0$$

Вывод ЛЛЛ в симметричной форме из ЛЛЛ в общем случае. 1. $d = 0 \Rightarrow A_1, \dots, A_n$ независимы в совокупности \Rightarrow

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) = \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)) \geq (1 - p)^n \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right)^n > 0$$

2. $d \geq 1$: Рассмотрим G — орграф зависимостей. Из A_i проводим ребра в те и только те события, от которых A_i может зависеть. Тогда $\forall i \ \deg_{\text{out}}(A_i) \leq d$. Положим $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{d+1} \in [0, 1)$.

$$ep(d+1) \leq 1 \Rightarrow p(d+1) \leq \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d \Rightarrow P(A_i) \leq p \leq \frac{1}{d+1} \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d = x_i \prod_{j: (A_i, A_j) \in E} (1 - x_j)$$

□

Доказательство ЛЛЛ в общем случае.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) \dots P(\bar{A}_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} \bar{A}_i) = (1 - P(A_1))(1 - P(A_2 | \bar{A}_1)) \dots \left(1 - P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} \bar{A}_i)\right) \quad (2.1)$$

Заметим, что из следующей леммы будет следовать ЛЛЛ:

Лемма 2.2.1.

$$\forall i \ \forall J \subset \{1, \dots, n\} \setminus \{i\} : P(A_i | \bigcap_{j \in J} \bar{A}_j) \leq x_i$$

Доказательство. Пусть сначала $J = \emptyset$. Тогда имеем

$$P(A_i | \bigcap_{j \in \emptyset} \bar{A}_j) = P(A_i | \Omega) = P(A_i) \leq x_i \prod_{j \in \emptyset} (1 - x_j) \leq x_i$$

Иначе $J = J_1 \sqcup J_2$, где $J_1 := \{j \in J : (A_i, A_j) \in E\}$, $J_2 := J \setminus J_1$. Будем вести индукцию по $|J_1|$. База $|J_1| = 0$. Тогда $P(A_i | \bigcap_{j \in J} \bar{A}_j) = P(A_i | \bigcap_{j \in J_2} \bar{A}_j) = P(A_i) \leq x_i$.

Пусть $J_1 = \{j_1, \dots, j_r\}$, $r \geq 1$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} P(A_i \mid \bigcap_{j \in J} \bar{A}_j) &= P\left(A_i \mid \left(\bigcap_{j \in J_1} \bar{A}_j\right) \cap \left(\bigcap_{j \in J_2} \bar{A}_j\right)\right) = \frac{P\left(A_i \cap \left(\bigcap_{j \in J_1} \bar{A}_j\right) \mid \bigcap_{j \in J_2} \bar{A}_j\right)}{P\left(\bigcap_{j \in J_1} \bar{A}_j \mid \bigcap_{j \in J_2} \bar{A}_j\right)} \\ &\leq \frac{P\left(A_i \mid \bigcap_{j \in J_2} \bar{A}_j\right)}{P\left(\bigcap_{j \in J_1} \bar{A}_j \mid \bigcap_{j \in J_2} \bar{A}_j\right)} \leq \frac{x_i \prod_{j: (A_i, A_j) \in E} (1 - x_j)}{P\left(\bigcap_{j \in J_1} \bar{A}_j \mid \bigcap_{j \in J_2} \bar{A}_j\right)} \end{aligned}$$

Обозначим $A_{J_i} := \bigcap_{j \in J_i} \bar{A}_j$, $i = 1, 2$. Тогда осталось доказать, что $P(A_{J_1} \mid A_{J_2}) \geq \prod_{j: (A_i, A_j) \in E} (1 - x_j)$.

Имеем:

$$\begin{aligned} P(A_{J_1} \mid A_{J_2}) &= P(\bar{A}_{j_1} \mid A_{J_2}) \cdot P(\bar{A}_{j_2} \mid \bar{A}_{j_1} \cap A_{J_2}) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_{j_r} \mid \bar{A}_{j_1} \cap \dots \cap \bar{A}_{j_{r-1}} \cap A_{J_2}) \\ &= (1 - P(A_{j_1} \mid A_{J_2})) (1 - P(A_{j_2} \mid \bar{A}_{j_1} \cap A_{J_2})) \dots (1 - P(A_{j_r} \mid \bar{A}_{j_1} \cap \dots \cap \bar{A}_{j_{r-1}} \cap A_{J_2})) \\ &\stackrel{\text{I. H.}}{\geq} \prod_{j \in J_1} (1 - x_{j_1}) \dots (1 - x_{j_r}) \geq \prod_{j: (A_i, A_j) \in E} (1 - x_j) \end{aligned}$$

□

Применяя лемму для событий из равенства 2.1 получаем утверждение ЛЛЛ. □

Теорема 2.2.8. (Франкл, Уилсон)

Можно явно указать графы, у которых число вершин f ведет себя как $f = (e^{1/4} + o(1))^{\ln^2 s / \ln \ln s}$, в которых нет ни s клик, ни независимых множеств размера s .

Замечание. $s^c = e^{c \ln s} < f < e^{sc}$, поскольку $\ln^2 s \geq c \ln s \ln \ln s$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное простое p и $m := p^3, k := p^2$. Определим граф $G = (V, E)$: $V = \{x = (x_1, \dots, x_m) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_m = k\}$; $E = \{(x, y) : \langle x, y \rangle \equiv 0 \pmod{p}\}$, $|V| = n = C_m^k$.

Мы покажем, что $\alpha(G) < \sum_{i=0}^{p-1} C_m^i + 1$; $\omega(G) > \sum_{i=0}^p C_m^i + 1$. Доказав это, теорема Франка-Уилсона будет доказана для всех s вида $\sum_{i=0}^p C_m^i + 1$, где p — простое, но нужно будет проверить, что $C_m^k = (e^{1/4} + o(1))^{\ln^2 s / \ln \ln s}$.

Лемма 2.2.2.

$$C_m^k = \left(e^{1/4} + o(1)\right)^{\ln^2 s / \ln \ln s}$$

Доказательство. $C_m^k = \frac{p^3}{p^3} = \frac{p^3(p^3-1)\dots(p^3-p^2+1)}{(p^2)!}$. Перепишем отдельно числитель и знаменатель:

$$(p^2)! = (1 + o(1)) \sqrt{2\pi p^2} \left(\frac{p^2}{e}\right)^{p^2} = (p^2)^{(1+o(1))p^2}. \text{ Аналогично } p^3(p^3-1)\dots(p^3-p^2+1) = (p^3)^{p^2(1+o(1))}$$

Тогда имеем

$$C_m^k = \frac{(p^3)^{p^2(1+o(1))}}{(p^2)^{p^2(1+o(1))}} = p^{p^2(1+o(1))}$$

Для $s = \sum_{i=0}^p C_m^i + 1$ верны оценки: $C_m^p + 1 < s < (p+1)C_m^p + 1$, откуда, пользуясь тем, что $C_m^p = C_{p^3}^p = \frac{p^{3(1+o(1))p}}{p^{p(1+o(1))}} = p^{2p(1+o(1))}$, получаем, что $s \sim p^{2p(1+o(1))}$.

Имеем $\ln s(1+o(1))2p \ln p$; $\ln \ln s = (1+o(1)) \ln p$; $\ln^2 s = 4(1+o(1))p^2 \ln^2 p$, а $\frac{\ln^2 s}{\ln \ln s} = 4(1+o(1))p^2 \ln p$

$$\ln n = (1+o(1))p^2 \ln p = \frac{1}{4}(1+o(1)) \frac{\ln^2 s}{\ln \ln s} \Rightarrow n = \left(e^{1/4} + o(1)\right)^{\ln^2 s / \ln \ln s}$$

□

Лемма 2.2.3.

$$\alpha(G) < \sum_{i=0}^{p-1} C_m^i + 1$$

Доказательство. Рассмотрим независимое множество $W \subset V$, $\forall x, y \in W : \langle x, y \rangle \not\equiv 0 \pmod{p}$. Пусть $W = \{x_1, \dots, x_t\}$. Нам необходимо доказать, что $t \leq \sum_{i=1}^{p-1} C_m^i$.

Поставим в соответствие каждой вершине x_i многочлен $F_{x_i}(y) \in \mathbb{Z}_p[y_1, \dots, y_m]$ от m переменных степени $\leq p-1$:

$$F_{x_i}(y) = \prod_{j=1}^{p-1} (j - \langle x_i, y \rangle)$$

Раскроем все скобки и уменьшим степень всех одночленов $F_{x_i} \mapsto \tilde{F}_{x_i} : \sum y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots y_{i_q}^{\alpha_{i_q}} = \sum c y_{i_1} \dots y_{i_q}$. Размерность пространства многочленов, в котором лежат \tilde{F}_{x_i} не превосходит $C_m^0 + \dots + C_m^{p-1}$, поскольку порождается одночленами. Осталось показать, что многочлены $\tilde{F}_{x_1}, \dots, \tilde{F}_{x_t}$ линейно независимы над \mathbb{Z}_p^2 , откуда будет следовать утверждение леммы.

Рассмотрим произвольную нулевую линейную комбинацию $G = c_1 \tilde{F}_{x_1} + \dots + c_t \tilde{F}_{x_t} \equiv 0 \Rightarrow \forall y \in \{0, 1\}^m : G(y) \equiv 0 \pmod{p}$. Для таких y выполнено равенство: $F_{x_i}(y) = \tilde{F}_{x_i}(y)$

$$\begin{cases} F_{x_i}(x_i) = \prod_{j=1}^{p-1} (j - k) \not\equiv 0 \pmod{p} \\ F_{x_i}(x_j) = \prod_{j=1}^{p-1} (j - \langle x_i, x_l \rangle) \equiv 0 \pmod{p} \end{cases} \Rightarrow c_i \equiv 0 \pmod{p} \quad \forall i$$

□

Лемма 2.2.4.

$$\omega(G) < \sum_{i=0}^p C_m^i + 1$$

Доказательство. $W = \{x_1, \dots, x_t \mid \langle x_i, x_j \rangle \equiv 0 \pmod{p}\}$. Опять же, поставим в соответствие вершинам из W многочлены

$$F_{x_i}(y) := \langle x_i, y \rangle (\langle x_i, y \rangle - p) \dots (\langle x_i, y \rangle - p(p-1)) \in \mathbb{R}[y_1, \dots, y_m]$$

причем $\deg F_{x_i} \leq p$. Построим новые многочлены $F_{x_i} \mapsto \tilde{F}_{x_i}$ по тому же правилу, что и выше. Аналогично, если новые многочлены ЛНЗ, то $t \leq \sum_{i=0}^p C_m^i$.

$$\begin{cases} F_{x_1}(x_1) = p^2(p^2 - p)(p^2 - 2p) \dots (p^2 - p(p-1)) \neq 0 \text{ т.к. многочлены над } \mathbb{R} \\ i \geq 2 : F_{x_1}(x_i) = \langle x_1, x_i \rangle (\langle x_1, x_i \rangle - p) \dots (\langle x_1, x_i \rangle - p(p-1)) = 0 \end{cases}$$

и лемма доказана. \square

Применяя 3 леммы, получаем, что теорема верна для всех s вида $\sum_{i=0}^p C_m^i + 1$. **Б/д:** теорема верна для произвольного s . \square

2.2.3 $R(3, t)$

В этой главе мы займемся оценкой числа $R(3, t)$. Как мы помним, $R(s, t) \leq C_{s+t-2}^{t-1}$. Пользуясь этим, легко получить оценку $R(3, t) \leq C_{t-1}^2 \sim \frac{t^2}{2}$. Попытаемся улучшить ее.

Рассмотрим случайную раскраску K_n в два цвета с $p \in [0, 1]$ — вероятностью, что ребро красного цвета и $1 - p$ — синего. Пусть $A_1, \dots, A_{C_n^3}$ — события, отвечающие тому, что фиксированная тройка вершин образует красный треугольник, а $B_1, \dots, B_{C_n^t}$ события, заключающиеся в том, что i -тое фиксированное множество из t вершин образует синий K_t . Тогда $R(3, t) > n \iff P(\bigcap_{i=1}^{C_n^3} \bar{A}_i \cap \bigcap_{i=1}^{C_n^t} \bar{B}_i) > 0$ (аналогично доказательству теоремы Спенсера 2.2.2). Воспользуемся ЛЛЛ.

Зафиксируем событие A_i . В ор.графе зависимостей $(A_i, A_j) \in E \iff$ тройка, отвечающая A_j , имеет 2 общие вершины с i -той тройкой, а $(A_i, B_j) \in E \iff$ набор из t вершин, отвечающий B_j , имеет не менее 2 общих вершин с i -той тройкой. Аналогично для фиксированного B_i . Обозначим за $\#(A \rightarrow B)$ количество ребер из события A в событие B в ор.графе зависимостей. Тогда

$$\begin{cases} \#(A_i \rightarrow A_j) = 3(n-3) \\ \#(A_i \rightarrow B_j) = 3C_{n-3}^{t-2} + C_{n-3}^{t-3} \\ \#(B_i \rightarrow B_j) = (n-t)C_t^2 + C_t^3 \\ \#(B_i \rightarrow B_j) = C_n^t - tC_{n-1}^{t-1} - C_{n-t}^t \end{cases}$$

Теорема 2.2.9. Пусть дано t , а n — максимальное число, для которого найдутся $p \in [0, 1]$; $x, y \in [0, 1]$, такие что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} P(A_i) \leq x(1-x)^{\#(A_i \rightarrow A_j)}(1-y)^{\#(A_i \rightarrow B_j)} \\ P(B_i) \leq y(1-x)^{\#(B_i \rightarrow A_j)}(1-y)^{\#(B_i \rightarrow B_j)} \end{cases}$$

Тогда $R(3, t) > n$.

Следствие. $R(3, t) \geq c \frac{t^2}{\ln^2 t}$ — без доказательства.

История улучшений

Теорема 2.2.10. (1980, 6/д, Ajtai–Komlós–Szemeréd)

$$R(3, t) \leq (1 + o(1)) \frac{t^2}{\ln t}$$

Теорема 2.2.11. (1995, 6/д, Кум)

$$R(3, t) \geq \left(\frac{1}{162} + o(1) \right) \frac{t^2}{\ln t}$$

Теорема 2.2.12. (2013, 6/д)

$$R(3, t) \geq \left(\frac{1}{4} + o(1) \right) \frac{t^2}{\ln t}$$

Замечание. Это наилучшие известные результаты на текущий момент

Замечание. Про число $R(4, t)$ известно лишь, что $R(4, t) = t^{5/2+o(1)}$.

2.2.4 Двудольные диагональные числа Рамсея

Определение 2.2.4. $b(k) := \min\{n \in \mathbb{N} : \text{для любой раскраски ребер } K_{n,n} \text{ в два цвета найдется одноцветный } K_{k,k}\}$

Теорема 2.2.13.

$$b(k) \geq (1 + o(1)) \frac{2\sqrt{2}}{e} k 2^{k/2} = n$$

Замечание. В два раза больше, чем оценка $R(k, k)$.

Доказательство. Рассмотрим случайную раскраску $K_{n,n}$ в два цвета с $p_k = p_c = \frac{1}{2}$. Пусть события $A_i, i = 1, \dots, \binom{k}{n}^2$ отвечают тому, что i -тая пара k -элементных множеств образует одноцветный $K_{k,k}$. Воспользуемся ЛЛЛ.

$P(A_i) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k^2} = 2^{1-k^2} =: p, \quad d \leq k^2 \binom{k-1}{n-1}^2$ — зафиксировали по одной вершине в каждой доле. При подстановки n из условия теоремы имеем $ep(d+1) \leq 1 \Rightarrow P(\bigcap \bar{A}_i) > 0$. \square

Определение 2.2.5. Пусть H подграф графа G . Тогда его *плотность* равна $\frac{|E_H|}{|E_G|}$.

Теорема 2.2.14. Пусть G — произвольный подграф $K_{l,m}$, плотность которого равна $p \in [0, 1]$ и $(s-1)C_l^r < mC_{lp}^r$. Тогда G содержит подграф $K_{r,s}$.

Доказательство. Предположим, что в G нет $K_{r,s}$. Для определенности будем считать, что l вершин содержится в первой доле $K_{l,m}$ и m во второй. Посчитаем двумя способами число подграфов $K_{r,1}$ в G .

1. $\leq C_l^r(s-1)$, поскольку для любого r -элементного подмножества первой доли во второй существует не более $s-1$ вершины, связанной с каждой из фиксированных вершин первой доли.
2. Пусть d_1, \dots, d_m — степени вершин нижней доли. Тогда

$$\#K_{r,1} = C_{d_1}^r + \dots + C_{d_m}^r \geq mC_{\frac{d_1+\dots+d_m}{m}}^r = mC_{\frac{|E|}{m}}^r = mC_{lp}^r$$

где неравенство следует из неравенства Йенсена.

Тогда имеем $mC_{lp}^r \leq \#K_{r,1} \leq (s-1)C_l^r$ что противоречит условию теоремы. \square

Пусть $k^2 = o(n)$, $r^2 = o(l)$, $p \geq \text{const} \Rightarrow C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$, $C_l^r \sim \frac{l^r}{r!}$, $C_{lp}^r \sim \frac{l^r p^r}{r!}$. В таких условиях неравенство в теореме переписывается как

$$(s-1) < mp^r \text{ или } m \geq (s-1)p^{-r}(1+\varepsilon), \quad \varepsilon > 0$$

Теорема 2.2.15. Пусть $k \rightarrow \infty$, $r = r(k) \left\{ \begin{array}{l} l = l(k) \\ s = s(k) \end{array} \right\} \rightarrow \infty, r^2 = o(l), p \in [0, 1] = \text{const}$. Пусть $G_{l,m} \subseteq K_{l,m}$ — подграф, такой что его плотность $\geq p$. Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$m \geq (s-1)p^{-r}(1+\varepsilon)$$

Тогда $\exists k_0 \forall k \geq k_0$ в $G_{l,m}$ есть подграф $K_{r,s}$

Доказательство. Это иная формулировка доказанной выше теоремы. \square

Теорема 2.2.16.

$$b(k) \leq (1+o(1))2^k k$$

Доказательство. Положим $n := (1+\varepsilon)2^k k, \varepsilon > 0$. Тогда $b(k) \leq n \iff$ в любой раскраски $K_{n,n}$ найдется одноцветный $K_{k,k}$. Пусть G^k и G^c графы на всех красных и синих ребрах раскраски соответственно. Б.о.о. плотность G^k $p \geq \frac{1}{2}$.

В условиях теоремы 2.2.15 имеем $m = l = n, s = r = k$. Имеем

$$n > (k-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{-k} (1+\varepsilon) = (k-1)2^k(1+\varepsilon)$$

и по теореме 2.2.15 $b(k) \leq n$. \square

Теорема 2.2.17.

$$b(k) \leq (1+o(1))2^{k+1} \log_2 k$$

Доказательство. Положим $n := (1+\varepsilon)2^{k+1} \log_2 k$ и зафиксируем некоторую раскраску $K_{n,n}$. Рассмотрим вершины второй доли. Назовем вершину из второй доли красной, если из нее выходит красных ребер больше, чем синих (а иначе — синей). Без ограничения общности считаем, что красных вершин $\geq \frac{n}{2}$.

Рассмотрим красный граф $G_{n, \frac{n}{2}}$, где $\frac{n}{2}$ отвечает множеству красных вершин из второй доли. Из определения красной вершины, плотность $G = p \geq \frac{1}{2}$. Тогда, по теореме 2.2.15 имеем (для $l = n, m = \frac{n}{2}$)

$$\frac{n}{2} > (s-1)2^r(1+\varepsilon') \Leftrightarrow (1+\varepsilon)2^k \log_2 k > (s-1)2^r(1+\varepsilon')$$

Возьмем $r := k - 2 \log_2 k, s := k^2 \log_2 k$. Тогда

$$(s-1)2^r = k^2 \log_2 k (1+o(1))2^{k-2 \log_2 k} = 2^k (1+o(1)) \log_2 k$$

и

$$(1 + \varepsilon)2^k \log_2 k > 2^k(1 + o(1)) \log_2 k(1 + \varepsilon')$$

что соблюдается для $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, по теореме 2.2.15, мы нашли в G подграф $K_{r,s}$.

В графе $K_{r,s} \subset G_{n,n/2}$ имеется $k - 2 \log_2 k$ вершин в верхней доле и $k^2 \log_2 k$ в нижней. Пусть A это множество вершин из нижней доли, лежащие в $K_{r,s}$, а C — множество вершин из верхней доли, не лежащие в $K_{r,s}$. Тогда нам необходимо найти $2 \log_2 k$ вершин в C и k вершин из A , связанных между собой только красными ребрами. Тогда, вершины из верхней доли в графе $K_{r,s}$ вместе с вершинами из C и k вершин из нижней доли дадут нам искомый одноцветный $K_{k,k}$.

Возьмем $G_{l,m}$, такой что $l = k^2 \log_2 k$, $m = n - (k - 2 \log_2 k) = n(1 + o(1))$, $r = k$, $s = 2 \log_2 k$. Покажем, что его плотность $p \geq \frac{1}{2} - \frac{k}{2^k}$.

Из каждой вершины нижней доли вверх идет хотя бы $\frac{n}{2}$ ребер \Rightarrow из каждой вершины A в C идет не меньше чем $\frac{n}{2} - (k - 2 \log_2 k)$ ребер. Тогда

$$p \geq \frac{l \left(\frac{n}{2} - k + 2 \log_2 k \right)}{lm} > \frac{\frac{n}{2} - k}{m} > \frac{\frac{n}{2} - k}{n} = \frac{1}{2} - \frac{k}{n} > \frac{1}{2} - \frac{k}{2^k}$$

Заметим, что

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{n} \right)^k = \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2^{k+1} \log_2 k} (1 + o(1)) \right)^k \sim \frac{1}{2^k}$$

Тогда, для $G_{l,m}$ имеем

$$\begin{aligned} m > (s - 1)p^{-r}(1 + \varepsilon') &\Leftrightarrow n(1 + o(1)) > 2 \log_2 k(1 + o(1))2^k(1 + \varepsilon') \\ &\Leftrightarrow 2^{k+1}(1 + \varepsilon) \log_2 k(1 + o(1)) > 2 \log_2 k(1 + o(1))2^k(1 + \varepsilon') \\ &\Leftrightarrow (1 + \varepsilon)(1 + o(1)) > (1 + \varepsilon')(1 + o(1)) \end{aligned}$$

что верно для $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ и при достаточно больших k . Применяем теорему 2.2.15 и получаем требуемое. \square

2.3 Системы общих представителей

2.3.1 Тривиальные оценки

Определим $R_n := \{1, \dots, n\}$ $\mathcal{M} := \{M_1, \dots, M_s \mid \forall i \ M_i \subseteq R_n \text{ и } M_i \neq M_j\}$.

Определение 2.3.1. *Системой общих представителей* (далее — соп) для совокупности множеств \mathcal{M} назовем любое $S \subseteq R_n$, т.ч. $\forall i \ M_i \cap S \neq \emptyset$.

$$\tau(\mathcal{M}) := \min\{\tau \in \mathbb{N} \mid \exists S \subseteq R_n, |S| = \tau \text{ и } S \text{ — соп для } \mathcal{M}\}.$$

Замечание. Для гиперграфа $H = (R_n, \mathcal{M})$ соп системы \mathcal{M} это вершинное покрытие H .

Пусть $\forall i \ |M_i| = k$, $|\mathcal{M}| = s$ и $M_i \subseteq R_n$. При фиксированных n, s, k обозначим \mathcal{M} с такими параметрами за $\mathcal{M}(n, k, s)$. Заметим, что количество \mathcal{M} с такими параметрами равно $C_{C_n^k}^s$.

Теорема 2.3.1.

$$\forall \mathcal{M} : \tau(\mathcal{M}) \leq \min\{s, n - k + 1\}$$

Доказательство. От $n - k + 2$ до n ровно $k - 1$ число, а значит, взяв все числа от 1 до $n - k + 1$, мы получим соп. □

Теорема 2.3.2.

$$\exists \mathcal{M} : \tau(\mathcal{M}) \geq \min\left\{\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil, s\right\}$$

Доказательство. Возможно два случая:

1. $s \leq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$. Тогда $\mathcal{M} = \{\{1, 2, \dots, k\}, \{k+1, \dots, 2k\}, \dots, \{(s-1)k+1, \dots, sk\}\}$
2. $s > \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$. В таком случае систему \mathcal{M} так же, как и в первый раз, добирая новые множества пока можем, а после добавляем произвольные множества, пока $|\mathcal{M}|$ не равна s .

□

2.3.2 Жадный алгоритм

Теорема 2.3.3.

$$\forall n, k, s \ \forall \mathcal{M} = \mathcal{M}(n, k, s) \ \tau(\mathcal{M}) \leq \max\left\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}\right\} + \frac{n}{k} + 1$$

Доказательство. Зафиксируем \mathcal{M} . Возможны следующие случаи:

1. $s \leq \frac{n}{k} \Rightarrow \tau(\mathcal{M}) \leq s \leq \frac{n}{k}$
2. $\frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \geq n \Rightarrow \tau(\mathcal{M}) \leq n \leq \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}$
3. $s > \frac{n}{k}, \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} < n$.

Для доказательства последнего случая воспользуемся *жадным алгоритмом* построения соп.

Возьмем любой элемент $\nu_1 \in R_n$, который принадлежит наибольшему числу множеств в \mathcal{M} . Пусть их ρ_1 штук. Тогда $\rho_1 \geq \frac{sk}{n}$, поскольку $sk = \sum_{i=1}^n \sum_{M \in \mathcal{M}} I_{\{i \in M\}} \leq \rho_1 n$. Выкинем из \mathcal{M} все множества, содержавшие ν_1 . Осталась совокупность \mathcal{M}_1 , $|\mathcal{M}_1| = s - \rho_1 = s_1$. Снова сделаем шаг жадного алгоритма.

Всего сделаем $N = \left\lceil \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \right\rceil + 1$ шагов ж.а, причем $\rho_i \geq \frac{s_{i-1}k}{n}$. После этого имеем построенное ж.а. множество $S = \{\nu_1, \dots, \nu_N\}$ и совокупность \mathcal{M}_N т.ч.

$$|\mathcal{M}_N| = s_N = s_{N-1} - \rho_N \leq s_{N-1} - \frac{s_{N-1}k}{n} \leq \dots \leq s \left(1 - \frac{k}{n}\right)^N = se^{N \ln(1 - \frac{k}{n})} \leq se^{-\frac{kN}{n}} \leq se^{-\frac{k}{n} \cdot \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}} = \frac{n}{k}$$

Итого $\tau(\mathcal{M}) \leq N + \frac{n}{k} \leq \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} + 1 + \frac{n}{k}$ □

Теорема 2.3.4. (Конструктивная нижняя оценка с.о.п.)

Пусть $n \geq 4$, $k \leq \frac{n}{4}$, $4 \leq \ln \frac{sk}{n} \leq k$. Тогда

$$\exists \mathcal{M} : \tau(\mathcal{M}) \geq \frac{1}{32} \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}$$

Доказательство. Возьмем $m := \left\lceil \frac{1}{2} \ln \frac{sk}{n} \right\rceil \geq 2$. Для удобства введем обозначение $R_{i,j} = \{i, \dots, j\}$. Рассмотрим разбиение

$$R_{2qm} = R_{1,2qm} = R_{1,2m} \sqcup R_{2m+1,4m} \sqcup \dots \sqcup R_{2(q-1)m+1,2qm}$$

где $q = \left\lceil \frac{2k}{m} \right\rceil$. Заметим, что разбиение определено корректно, поскольку из неравенства $\ln \frac{sk}{n} \leq k$ вытекает оценка

$$\frac{2k}{m} \geq \frac{2k}{\frac{1}{2} \ln \frac{sk}{n}} = \frac{4k}{\ln \frac{sk}{n}} \geq 4$$

означающая, во-первых, что $q > 1$ и $q \geq \frac{k}{m}$ (мы воспользовались неравенством $\lceil x \rceil \geq \frac{x}{2}$ для $x \geq 1$). Во-вторых, $2qm \leq 4k \leq \frac{n}{8}$.

Занумеруем в некотором порядке все m элементные подмножества множеств $R_{1,2m}, \dots, R_{2(q-1)m+1,2qm}$. Получим совокупности $N^i = \{N_1^i, \dots, N_{C_{2m}^m}^i\}$, $i = 1, \dots, q$. Заметим, что $|N^i| = C_{2m}^m < 2^{2m} \leq 2^{\ln \frac{sk}{n}} < \frac{sk}{n}$ и что $\tau(N^i) = m + 1 > m$.

Пусть $\mathcal{M}^1 = \{\mathcal{M}_1^1, \dots, \mathcal{M}_{C_{2m}^m}^1\}$ это совокупность, состоящая из множеств

$$\mathcal{M}_j^1 = N_j^1 \cup N_j^2 \cup \dots \cup N_j^q, \quad j = 1, \dots, C_{2m}^m$$

как показано выше, $|\mathcal{M}^1| < \frac{sk}{n}$ и $\tau(\mathcal{M}^1) = m + 1$. Более того,

$$|\mathcal{M}_j^1| = qm \geq \frac{mk}{m} = k$$

Положим $t = \left\lceil \frac{n}{2qm} \right\rceil$. Рассмотрим разбиение

$$R_{2qmt} = R_{1,2qmt} = R_{1,2qm} \sqcup \dots \sqcup R_{2qm(t-1)+1,2qmt} \subset R_n.$$

Очевидно, что $t \geq 1$ и $2qmt \leq n$. В каждый элемент последнего разбиения поместим копию совокупности \mathcal{M}^1 . Появятся совокупности $\mathcal{M}^2, \dots, \mathcal{M}^t$ и рассмотрим совокупность

$$\mathcal{M}' := \mathcal{M}^1 \cup \dots \cup \mathcal{M}^t.$$

Понятно, что

$$|\mathcal{M}'| < \frac{sk}{n}t \leq \frac{n}{2mq} \frac{sk}{n} \leq \frac{n}{2k} \frac{sk}{n} < s.$$

Далее, мощность каждого множества $M \in \mathcal{M}'$ не меньше k . Наконец,

$$\tau(\mathcal{M}') \geq (m+1)t > mt \geq m \frac{n}{4qm} \geq \frac{nm}{4 \cdot 2k} \geq \frac{n}{8k} \cdot \frac{1}{4} \ln \frac{sk}{n} = \frac{1}{32} \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}.$$

Если $|\mathcal{M}'| < s$, то добавим к ней произвольные множества мощности k . Далее, если какое-то множество $A \in \mathcal{M}'$ содержит больше k элементов, то удалим из него любые произвольные элементы, сделав его мощность равной k . Получим итоговую совокупность \mathcal{M} , имеющую мощность s и состоящую только из k -элементных множеств. Поскольку $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}'$, получаем неравенство

$$\tau(\mathcal{M}) \geq \tau(\mathcal{M}') \geq \frac{1}{32} \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}.$$

□

Теорема 2.3.5. Пусть для данных n, s, k число l таково, что

$$C_n^l \cdot \frac{C_{C_n^k - C_{n-l}^k}^s}{C_{C_n^k}^s} < 1.$$

Тогда $\exists \mathcal{M} = \mathcal{M}(n, k, s)$ с $\tau(\mathcal{M}) > l$.

Доказательство. Берем случайную совокупность \mathcal{M} с параметрами n, s, k и $P(\mathcal{M}) = \frac{1}{C_{C_n^k}^s}$. Зафиксируем $L \subseteq \{1, \dots, n\}$, т.ч. $|L| = l$.

$$P(\text{для случ. } \mathcal{M} \text{ фикс. мн-во } L \text{ является соп}) = \frac{C_{C_n^k - C_{n-l}^k}^s}{C_{C_n^k}^s}$$

Выберем далее все множества, пересекающиеся с L , и возьмем любые s из них.

$$P(\exists L \text{ т.ч. } \mathcal{M} \text{ имеет } L \text{ в качестве соп}) \leq C_n^l \cdot \frac{C_{C_n^k - C_{n-l}^k}^s}{C_{C_n^k}^s} < 1.$$

□

Теорема 2.3.6. Пусть $n \rightarrow \infty$. Пусть $s = s(n) \rightarrow \infty$, $k = k(n) \rightarrow \infty$, $\frac{sk}{n} \rightarrow \infty$. Пусть дополнительно $k^2 = o(n)$, $\ln \ln k = o\left(\ln \frac{sk}{n}\right)$, $\ln \frac{sk}{n} = o(k)$. Тогда

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \exists \mathcal{M} : \tau(\mathcal{M}) \geq \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} - \frac{n}{k} \ln \ln \frac{sk}{n} - \frac{n}{k} \ln \ln k - \frac{3n}{k} = (1 + o(1)) \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}$$

Доказательство. Обозначим $l := \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} - \frac{n}{k} \ln \ln \frac{sk}{n} - \frac{n}{k} \ln \ln k - \frac{3n}{k}$ и подставим это в утверждение теоремы 2.3.5. Покажем, что для данного l выполнена сходимоть

$$C_n^l \cdot \frac{C_{C_n^k - C_{n-l}^k}^s}{C_{C_n^k}^s} \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{C_n^k - C_{n-l}^k}^s}{C_{C_n^k}^s} &= \frac{(C_n^k - C_{n-l}^k) \dots (C_n^k - C_{n-l}^k - s + 1)}{C_n^k (C_n^k - 1) \dots (C_n^k - s + 1)} \\ &= \left(1 - \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k}\right) \left(1 - \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k - 1}\right) \dots \left(1 - \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k - s + 1}\right) \\ &\sim \left(1 - \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k}\right)^s \end{aligned}$$

Покажем последний переход:

$$\begin{aligned} \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k} &= \left(1 - \frac{l}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{l}{n-k+1}\right) = \exp \left[\ln \left(1 - \frac{l}{n}\right) + \dots + \ln \left(1 - \frac{l}{n-k+1}\right) \right] \\ &= \exp \left[-\frac{l}{n} + O\left(\frac{l^2}{n^2}\right) - \frac{l}{n-1} + \dots - \frac{l}{n-k+1} + O\left(\frac{l^2}{n^2}\right) \right] \\ &= \exp \left[-l \frac{k}{n} \left(1 + O\left(\frac{k}{n^2}\right)\right) \right] = \exp \left[-l \frac{k}{n} (1 + o(1)) \right] \\ &\sim e^{-(1+o(1)) \ln \frac{sk}{n}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-1} &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \frac{1}{n-k+1} &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 - \frac{k-1}{n}} \right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{k}{n^2}\right) \end{aligned}$$

и

$$\frac{C_{n-l}^k}{C_n^k - s} = \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{s}{C_n^k}} = \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k} \left(1 + \frac{s}{C_n^k} \right) (1 + o(1)) \text{ при } s/C_n^k \rightarrow 0.$$

установим это. Пусть $\frac{s}{C_n^k} > a$ (т.е. $\rightarrow 0$). Тогда $s > aC_n^k$ и

$$\ln \frac{sk}{n} > \ln \frac{akC_n^k}{n} \sim \ln \frac{akn^k}{nk!} = \ln \frac{an^{k-1}}{(k-1)!} \geq \ln \frac{an^{k-1}}{k^{k-1}} = \ln \left[a \left(\frac{n}{k} \right)^{k-1} \right] \sim k \ln \frac{n}{k} > k$$

что противоречит условию $\ln \frac{sk}{n} = o(k) \Rightarrow \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k - s} \sim \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k}$. Поскольку $l \frac{k^2}{n^2} \sim \frac{k}{n} \ln \frac{sk}{n} = o\left(\frac{\ln \frac{sk}{n}}{k}\right) \rightarrow 0$,

имеем $\exp \left[-\frac{lk}{n} \left(1 + o\left(\frac{k}{n}\right)\right) \right] \sim e^{-\frac{lk}{n}}$, а значит

$$\frac{C_{C_n^k - C_{n-l}^k}^s}{C_{C_n^k}^s} \sim \left(1 - \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k}\right)^s = \exp \left[-(1 + o(1))s \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k} \right] \sim \exp \left[-(1 + o(1))se^{-\frac{lk}{n}} \right]$$

Подставляя l , получаем

$$e^{-\frac{lk}{n}} = \frac{n}{sk} \left(\ln \frac{sk}{n} \right) (\ln k) e^3 \Rightarrow \exp \left[- (1 + o(1)) se^{-\frac{lk}{n}} \right] = \exp \left[- \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \ln k e^3 \right]$$

Оценим теперь C_n^l , пользуясь тем, что $l = (1 + o(1)) \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}$:

$$C_n^l \leq \left(\frac{ne}{l} \right)^l \leq \left(\frac{2ek}{\ln \frac{sk}{n}} \right)^l < k^l = e^{l \ln k} \leq e^{\frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \cdot \ln k}$$

Объединяя все вместе, получаем:

$$C_n^l \cdot \frac{C_n^s - C_{n-l}^k}{C_{C_n^k}^s} \sim \exp \left[\frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \ln k \right] \cdot \exp \left[- (1 + o(1)) \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \ln k e^3 \right] = \exp \left[(1 + o(1))(1 - e^3) \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \ln k \right] \rightarrow 0$$

□

2.3.3 Оценка размера минимальной с.о.п. с помощью обобщенных с.о.п.

Зафиксируем n, s, k . Мы хотим построить $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s \mid |M_i| = k \text{ и } M_i \subseteq R_n\}$ с $\tau(\mathcal{M}) > l$.

Рассмотрим систему всех k -элементных подмножеств: $K_1, \dots, K_{C_n^k} = \mathcal{K}$. Нужно выбрать такие $M_1, \dots, M_s \in \mathcal{K}$, что

$$\forall L : |L| = n - l \exists i \ M_i \subseteq L \quad (2.2)$$

"Заменим" $K_1, \dots, K_{C_n^k}$ на числа $1, \dots, C_n^k$. Тогда условие 2.2 эквивалентно выбору

$$i_1, \dots, i_s : \forall L \ |L| = n - l \exists i_\nu : K_{i_\nu} \subseteq L \quad (2.3)$$

Сопоставим каждому L все его k -элементные подмножества, т.е. множество $\mathcal{L} \subseteq \{1, \dots, C_n^k\}$ их номеров.

Очевидно $|\mathcal{L}| = C_{n-l}^k$.

Множества $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{C_n^l}$ образуют совокупность в $\{1, \dots, C_n^k\}$ и i_1, \dots, i_τ — ее соп. Тогда множества $K_{i_1}, \dots, K_{i_\tau}$ это как раз те множества, обладающие свойством 2.3.

Мы построили τ множеств, а хотели изначально s . Если $\tau \leq s$, то добавим произвольные множества в совокупность и размер соп не уменьшится. Значит необходимо проверить, что $\tau < s$.

По теореме о жадном алгоритме

$$\tau \leq \max \left\{ \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k}, \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k} \ln \frac{C_n^l C_{n-l}^k}{C_n^k} \right\} + \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k} + 1$$

Следствие. Пусть для фиксированных n, s, k число l таково, что

$$\max \left\{ \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k}, \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k} \ln \frac{C_n^l C_{n-l}^k}{C_n^k} \right\} + \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k} + 1 \leq s$$

Тогда $\exists \mathcal{M} = \mathcal{M}(n, k, s)$ такая, что $\tau(\mathcal{M}) > l$.

2.4 Размерность Вapника-Червоненкиса

Рассмотрим множество точек $S \subset \mathbb{R}^n$ конечной мощности. Начнем пересекать его со всевозможными треугольниками в любой плоскости и пусть \mathcal{M} это система всех подмножеств S , которые можно получить, пересекая S с треугольниками.

Зафиксируем теперь $\varepsilon \in (0, 1)$ и пусть $\mathcal{M}_\varepsilon \subseteq \mathcal{M} = \{M \in \mathcal{M} \mid |M| \geq \varepsilon|S|\}$.

Теорема 2.4.1. (*Вapника-Червоненкиса, частный случай*)

$\forall \varepsilon \exists \text{ с.о.п. } N$ для совокупности \mathcal{M}_ε , такая что

$$|N| \leq \frac{500}{\varepsilon} \log_2 \frac{500}{\varepsilon}$$

Замечание. Мощность N не зависит от S и n .

2.4.1 Теорема Вapника-Червоненкиса

Рассмотрим пару (\mathcal{X}, R) — произвольное множество и систему его подмножеств.

Определение 2.4.1. Пара (\mathcal{X}, R) называется *ранжированным пространством*.

Подмножество $A \subseteq \mathcal{X}$ *дробится* системой R , если

$$\forall B \subseteq A \exists r \in R: A \cap r = B,$$

причем *проекцией* системы R на A назовем множество $Pr_A R = \{r \cap A \mid r \in R\}$ всевозможных пересечений $r \in R$ с A . Очевидно, что A дробится тогда и только тогда, когда $Pr_A R = 2^A$.

Пример 2.4.1. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$, где \mathcal{H} — семейство всех открытых полупространств (например для $n = 2$ это полуплоскости).

Определение 2.4.2. *Размерность Вapника-Червоненкиса* $VC(\mathcal{X}; R)$ ранжированного пространства (\mathcal{X}, R) по определению равна

$$VC(\mathcal{X}; R) := \max\{m \in \mathbb{N} \mid \exists A \subseteq \mathcal{X}, |A| = m: Pr_A R = 2^A\}$$

(если такого m не существует, то $VC(\mathcal{X}; R) = +\infty$).

Пример 2.4.2. $VC(\mathbb{N}; 2^{\mathbb{N}}) = +\infty$.

Теорема 2.4.2. (*Радон, б/д*)

Любое множество из $n + 2$ точек $S \subset \mathbb{R}^n$ можно представить как $S = A_1 \sqcup A_2$, причем выпуклые оболочки A_1 и A_2 пересекаются, т.е.

$$\text{conv}(A_1) \cap \text{conv}(A_2) \neq \emptyset.$$

Утверждение 2.4.1.1. $VC(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}) = n + 1$.

Доказательство. Поскольку $n+1$ вершина симплекса в \mathbb{R}^n дробится, то верно неравенство $VC(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}) \geq n+1$.

Для множества S , $|S| \geq n+2$ найдем представление $A_1 \sqcup A_2$ из теоремы Радона. Тогда очевидно, что отдробить A_1 не получится. \square

Лемма 2.4.1. Пусть (\mathcal{X}, R) — ранжированное пространство, такое что $VC(\mathcal{X}; R) = d$, $|\mathcal{X}| = n$. Тогда верно неравенство

$$|R| \leq g(n, d) = \sum_{i=0}^d C_n^i.$$

Доказательство. Заметим сначала, что $g(n, d) = g(n-1, d) + g(n-1, d-1)$ — следствие из треугольника Паскаля.

Воспользуемся индукцией по n и d .

База: пусть $n = 0$ и d произвольное. Тогда R равно либо $\{\emptyset\}$, либо \emptyset . В любом случае, $|R| \leq 1$. В то же время, очевидно, что $VC(\mathcal{X}; R) \leq n = 0$. Но тогда $|R| \leq 1 = g(0, 0)$. Пусть, наоборот, $d = 0$ и $n \geq 1$ — произвольное. Предположим, что $|R| \geq 2$. Тогда $\exists r_1 \neq r_2 \in R$, причем либо в $r_1 \setminus r_2$, либо в $r_2 \setminus r_1$ содержится элемент $x \in \mathcal{X}$. Тогда множество $A = \{x\}$ дробится r_1 и r_2 , что противоречит $d = 0$. Получаем $|R| \leq 1 = g(n, 0)$ и база доказана.

Переход: зафиксируем (\mathcal{X}, R) с $VC(\mathcal{X}; R) = d \geq 1$ и $|\mathcal{X}| = n \geq 1$. Рассмотрим произвольный $x \in \mathcal{X}$ и определим пространства (\mathcal{X}_1, R_1) , (\mathcal{X}_2, R_2) следующим образом:

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \mathcal{X} \setminus \{x\}$$

$$R_1 = \{r \setminus \{x\} \mid r \in R\}, R_2 = \{r \in R \mid x \notin r \text{ но } r \cup \{x\} \in R\}$$

Тогда имеем $|R| = |R_1| + |R_2|$ (рассмотреть такие $r \in R$, что $r \in R$ и $r \cup \{x\} \in R$). Докажем два неравенства:

1. $VC(\mathcal{X}_1; R_1) \leq d$ — очевидно.
2. $VC(\mathcal{X}_2; R_2) \leq d-1$ — предположим $VC(\mathcal{X}_2; R_2) \geq d$ и рассмотрим $A \subseteq \mathcal{X}_2$, $|A| = d$, $Pr_{R_2} A = 2^A$. По определению R_2 , множество $A \cup \{x\}$ дробится системой R , но $|A \cup \{x\}| \geq d+1$, что противоречит $VC(\mathcal{X}; R) = d$.

Тогда, по предположению индукции, верно

$$|R| = |R_1| + |R_2| \leq g(n-1, d) + g(n-1, d-1) = g(n, d).$$

\square

Следствие. Пусть $VC(\mathcal{X}; R) = d$, $A \subseteq \mathcal{X}$, $|A| = n$. Тогда $|Pr_A R| \leq g(n, d)$.

Доказательство. Рассмотрим пространство $(A, Pr_A R)$ и применим к нему лемму 2.4.1. \square

Определение 2.4.3. $h \in \mathbb{N}$. Тогда h -измельчение R это множество

$$R_h := \{r_1 \cap \dots \cap r_h : r_i \in R\}$$

Пример 2.4.3. Для $(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ измельчение R_h целиком содержит в себе совокупность всех выпуклых многогранников в \mathbb{R}^n , имеющих h граней. Для $h = 3, n = 2$ это все треугольники на плоскости.

Лемма 2.4.2. Пусть $d \geq 2, h \geq 2$ и $VC(\mathcal{X}; R) = d$. Тогда

$$VC(\mathcal{X}; R_h) \leq 2dh \log_2 dh$$

Доказательство. Зафиксируем любое $A \subseteq \mathcal{X}$, имеющее $|A| = n > 2dh \log_2 dh$ и дробящееся R_h (если такое существует). По лемме 2.4.1 имеем $|Pr_R A| \leq g(n, d)$. Тогда

$$|Pr_A R_h| \leq |Pr_A R|^h \leq n^{dh}.$$

Поскольку $n \geq 2$, то в сумме $g(n, d)$ максимально последнее слагаемое и $g(n, d) \leq n^d$ (б/д, по индукции).

Поскольку $|Pr_A R_h| = 2^n$, то должно быть выполнено неравенство

$$|Pr_A R_h| = 2^n \leq |Pr_A R|^h \leq n^{dh},$$

что неверно при $n > 2dh \log_2 dh$, а множества A с $|A| = n$, дробящегося R_h , не существует. \square

Определение 2.4.4. Пусть (\mathcal{X}, R) — произвольное ранжированное пространство. Зафиксируем любое конечное $A \subset \mathcal{X}$ с $n = |A|$ и $\varepsilon \in (0, 1)$. Определим совокупность

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_\varepsilon(A, R) = \{M_1, \dots, M_s\} = \{A \cap r \mid \forall r \in R : |r \cap A| \geq n\varepsilon\}.$$

Тогда ε -сетью для A называется любая с.о.п. совокупности \mathcal{M} .

Теорема 2.4.3. (Валника-Червоненкиса)

Пусть $VC(\mathcal{X}; R) \leq d, \varepsilon \in (0, 1)$. Тогда $\forall A \subseteq \mathcal{X}$, таких что $|A| < +\infty$ существует ε -сеть N , такая что

$$|N| \leq \frac{8d}{\varepsilon} \log_2 \frac{8d}{\varepsilon}$$

Доказательство. Введем обозначения $n := |A|, m := \lceil \frac{8d}{\varepsilon} \log_2 \frac{8d}{\varepsilon} \rceil$. Построим по схеме выбора с возвращением по очереди два мультимножества $N = \{x_1, \dots, x_m\}$ и $T = \{y_1, \dots, y_m\}$. Введем вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(N, T)\} = \{(\{x_1, \dots, x_m\}, \{y_1, \dots, y_m\}) : x_i, y_i \in A\}, \\ |\Omega| &= n^{2m}; \quad \mathcal{F} = 2^\Omega; \quad P((N, T)) = \frac{1}{n^{2m}} \quad \forall (N, T) \in \Omega \end{aligned}$$

и определим на нем два события:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(N, T) : \exists r \in R : |r \cap A| \geq \varepsilon n, r \cap N = \emptyset\} \\ E_2 &= \{(N, T) : \exists r \in R : |r \cap A| \geq \varepsilon n, r \cap N = \emptyset, |T \cap r| \geq \varepsilon \frac{m}{2}\} \end{aligned}$$

где $|r \cap T|$ считается с учетом кратности элементов в мультимножестве T , т.е. $r \cap T$ по-прежнему мультимножество.

Лемма 2.4.3. $P(E_2) \geq \frac{1}{2}P(E_1)$

Доказательство леммы 2.4.3. Поскольку $P(E_2|E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(E_2)}{P(E_1)}$, то достаточно установить неравенство $P(E_2|E_1) \geq \frac{1}{2}$.

При условии E_1 найдется $r_1 \in R$, такой что $|r_1 \cap A| \geq \varepsilon n$ и $r_1 \cap N = \emptyset$. Тогда $P(E_2|E_1) \geq P(|r_1 \cap T| \geq \frac{\varepsilon m}{2})$. r_1 не обязано целиком лежать в A , а поскольку все элементы T лежат в A , то уместно рассмотреть $u := r_1 \cap A$ (помним, что $|u| \geq \varepsilon n$) и оценить вероятность $P(T : |u \cap T| \geq \frac{\varepsilon m}{2})$. Фактически, мы рассматриваем схему испытаний Бернулли: всего m испытаний (извлекаем по элементу из T) и успех состоит в том, что извлеченный элемент лежит в u , а искомая вероятность — это вероятность того, что произошло не менее $\frac{\varepsilon m}{2}$ успехов. Причем вероятность отдельного успеха есть $\frac{|u|}{|A|} \geq \varepsilon$.

Рассмотрим случайную величину $\xi \sim \text{Bin}(m, \varepsilon)$. Как известно, $E\xi = m\varepsilon$, $D\xi = m\varepsilon(1 - \varepsilon) \leq m\varepsilon$. Имеем

$$\begin{aligned} P(E_2|E_1) &\geq P\left(\xi \geq \frac{\varepsilon m}{2}\right) = P\left(\xi - E\xi \geq -\frac{\varepsilon m}{2}\right) = 1 - P\left(\xi - E\xi < -\frac{\varepsilon m}{2}\right) \\ &\geq 1 - P\left(|\xi - E\xi| > \frac{\varepsilon m}{2}\right) \geq 1 - 4\frac{D\xi}{\varepsilon^2 m^2} \geq 1 - \frac{4}{\varepsilon m} \end{aligned}$$

Вспоминаем, что

$$m \geq \frac{8d}{\varepsilon} \log_2 \frac{8d}{\varepsilon} \geq \frac{24}{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$1 - \frac{4}{\varepsilon m} \geq 1 - \frac{4}{24} = \frac{5}{6} \geq \frac{1}{2}.$$

и лемма доказана. □

Лемма 2.4.4.

$$P(E_2) \leq 2^{-\frac{\varepsilon m}{2}} g(2m, d)$$

Доказательство леммы 2.4.4. Чтобы установить утверждение леммы *немного поменяем* вероятностное пространство. А именно будет составлять пару (N, T) новым образом, не изменив вероятность E_2 и E_1 :

1. По схеме выбора с возвращением из A построим мультимножество $U = \{z_1, \dots, z_{2m}\}$ с $P(U) = \frac{1}{n^{2m}}$.
2. Разбиваем множество индексов $\{1, \dots, 2m\}$ на две равные части так, что все разбиения равновероятны с вероятностью $\frac{1}{C_{2m}^m}$.
3. Элементы, соответствующие первому множеству индексов относим в мультимножество N , а второму — в T .

По формуле полной вероятности $P(E_2) = \sum_U P(E_2 | U)P(U)$. Поскольку $\sum_U P(U) = 1$ достаточно показать, что $P(E_2 | U) \leq 2^{-\varepsilon m/2} g(2m, d)$.

Представим E_2 в следующем виде:

$$E_2 = \bigcup_{\substack{r \in R \\ |r \cap A| \geq \varepsilon n}} E_{2,r}; \quad E_{2,r} := \{(N, T) \mid r \cap N = \emptyset, |r \cap T| \geq \frac{\varepsilon m}{2}\}.$$

Заметим, что если U фиксированно, то для любых $r_1, r_2 \in R$, удовлетворяющих условию $r_1 \cap U = r_2 \cap U$ события E_{2,r_1} и E_{2,r_2} совпадают \Rightarrow количество различных событий вида $E_{2,r}$ это в точности число различных $r \cap U$, т.е. $|Pr_U R| \leq g(2m, d)$ по лемме 2.4.1.

Осталось показать, что $P(E_{2,r}|U) \leq 2^{-\varepsilon m/2}$. Действительно, пусть $|r \cap U| = p \geq \frac{\varepsilon m}{2}$. Тогда

$$P(E_{2,r}|U) \leq P(r \cap N = \emptyset | U) = \frac{C_{2m-p}^p}{C_{2m}^m} = \frac{(2m-p)!}{(2m)!} \cdot \frac{m!}{(m-p)!} = \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{2m(2m-1) \dots (2m-p+1)} \leq 2^{-p} \leq 2^{-\varepsilon m/2}.$$

Тогда как для $p < \frac{\varepsilon m}{2}$ вероятность $P(E_{2,r}|U) = 0$. □

Лемма 2.4.5. $(\delta/\delta): g(2m, d)2^{-\varepsilon m/2} < \frac{1}{2}$

Используя леммы 2.4.3-2.4.5 получаем цепочку неравенств:

$$\frac{1}{2} > P(E_2) \geq \frac{1}{2} P(E_1) \Rightarrow P(E_1) < 1,$$

что и завершает доказательство. □

Вывод теоремы 2.4.1 из теоремы общего случая: по лемме 2.4.2

$$VC(\mathbb{R}^2; \Delta) = VC(\mathbb{R}^2; \mathcal{H}_3) \leq 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \log_2(3 \cdot 3) \leq 60$$

и $8 \cdot 60 < 500$. А дальше применяем теорему 2.4.3.

2.4.2 Некоторое практическое применение

Вспомним теорему Гливленко-Кантелли из математической статистики:

$$P\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^*(x) - F(x)| \rightarrow 0\right) = 1,$$

где $F_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{X_i \leq x\}$ — эмпирическая функция распределения. Однако, по УЗБЧ верна сходимость

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{X_i \leq x\} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbf{E} I\{X_1 \leq x\} = P(X_1 \leq x) = F(x),$$

т.е. теорема Гливленко-Кантелли утверждает, что в законе больших чисел для схемы испытаний Бернулли выполнена равномерная сходимость.

Теорема 2.4.4. (б/д, 1971, Вапник, Червоненкис)

Пусть $x \in \mathcal{X}$. Рассмотрим последовательность событий $A_1^x, \dots, A_n^x, \dots$ на некотором вероятностном пространстве, для которой $\forall x : A_i^x$ независимы в совокупности и $\forall x \forall n \ P(A_n^x) = p_x$.

Тогда $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{A_i^x\}$ сходится по x равномерно к p_x тогда и только тогда, когда $VC(\mathcal{X}; A_1^x, \dots, A_n^x, \dots) < +\infty$.

2.5 Матрицы Адамара

2.5.1 Гипотеза Адамара

Определение 2.5.1. Матрица $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}^n)$, составленная из ± 1 , такая что любые ее две строки (или два столбца, что эквивалентно) ортогональны, называется *матрицей Адамара*.

Пример 2.5.1. Матрицы Адамара для различных n :

1. $n = 1$: $(1), (-1)$.

2. $n = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $n = 2k + 1$: не существует.

Определение 2.5.2. Матрицей Адамара в *нормальной форме* называется матрица Адамара H , у которой первая строка и первый столбец составлены только из 1.

Для матрицы Адамара в нормальной форме порядка $n > 3$ все строки (и столбцы), кроме первых, содержат по $\frac{n}{2}$ минус единиц, причем количество "пересечений" (-1) с 1 в соседних строках делится на 4.

Гипотеза (Адамара). Матрица Адамара существует для любого n , кратного 4.

Рассмотрим граф $G(n; \frac{n}{2}; \frac{n}{4})$ — вектора из $\{0, 1\}^n$, т.ч. $\|x\| = \frac{n}{2}$ и ребро проводится, если $\langle x, y \rangle = \frac{n}{4}$. Тогда матрица Адамара в нормальной форме H порядка n без первой строки задает $(n - 1)$ клику в графе $G(n; \frac{n}{2}; \frac{n}{4})$.

Утверждение 2.5.1.1. В графе $G(n; \frac{n}{2}; \frac{n}{4})$ нет клик размера $> n$.

Доказательство. $G(n; \frac{n}{2}; \frac{n}{4})$ — дистанционный граф \Rightarrow клика в G это симплекс в пространстве. Поскольку сумма координат вершин G фиксирована, то размерность пространства равна $n - 1$ и симплекса из $> n$ вершин (а значит и $(> n)$ -клики) не существует. \square

Доказано, что $\exists m \in [n, n + o(n)]$, такое, что существует A порядка m .

Утверждение 2.5.1.2. Гипотеза Адамара верна для $n = 2^k$.

Доказательство. Пусть $A \in \text{Mat}_{n \times n}$; $B \in \text{Mat}_{m \times m}$. Тогда кронекеровским произведением A на B назовем матрицу

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{nm \times nm}$$

Покажем, что если A и A' — матрицы Адамара, то и $B = A \otimes A'$ тоже. Действительно, найдем скалярное произведение первых двух строк матрицы B :

$$\begin{aligned} a_{11}a'_{11} \cdot a_{11}a'_{21} + a_{11}a'_{12} \cdot a_{11}a'_{22} + \dots + a_{11}a'_{1m} \cdot a_{11}a'_{2m} + \dots + a_{1n}a'_{11} \cdot a_{1n}a'_{21} + \dots + a_{1n}a'_{1m} \cdot a_{1n}a'_{2m} = \\ = a'_{11}a'_{22}(a_{11}a_{11} + \dots + a_{1n}a_{1n}) + \dots + a'_{1m}a'_{2m}(a_{11}a_{11} + \dots + a_{1n}a_{1n}) = \\ = n(a'_{11}a'_{21} + \dots + a'_{1m}a'_{2m}) = 0 \end{aligned}$$

поскольку A' — матрица Адамара. □

2.5.2 Раскраски гиперграфов

Рассмотрим гиперграф $H = (V, E)$, $V = \{1, \dots, n\}$, $E = \{M_1, \dots, M_s \mid n \geq |M_i| \geq 2\}$. Раскраской гиперграфа назовем функцию $\chi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$. Определим $\chi(M_i) = \sum_{j \in M_i} \chi(j)$ и

$$\text{disc}(E) := \min_{\chi} \max_i |\chi(M_i)|.$$

Теорема 2.5.1.

$$\text{disc}(E) \leq \sqrt{2n \ln 2s}.$$

Доказательство. Зафиксируем гиперграф H и рассмотрим случайную раскраску. По неравенству больших уклонений 1.3.1 выполнено

$$\mathbb{P}(|\chi(M_i)| \geq a) \leq 2 \exp \left[-\frac{a^2}{2|M_i|} \right] \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

Тогда

$$\mathbb{P}(\exists i : |\chi(M_i)| \geq a) \leq 2se^{-\frac{a^2}{2n}},$$

что меньше 1 при $a = \sqrt{2n \ln 2s}$. □

Теорема 2.5.2. (6/д, Спенсер)

Если $s = n$, то

$$\text{disc}(E) \leq 6\sqrt{n}.$$

Теорема 2.5.3. Если $s = n$ и n — порядок матрицы Адамара, то $\exists E : \text{disc}(E) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу Адамара в нормальной форме H и матрицу $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим матрицу $\frac{1}{2}(H + J)$, строки которой будут отвечать ребрам гиперграфа, и пусть $v = (v_1, \dots, v_n)^T$, $v_i \in \{\pm 1\}$ — вектор-раскраска. В введенных обозначениях выполнено равенство

$$\frac{1}{2}(H + J)v = \begin{pmatrix} L'_1 := \chi(M_1) \\ \vdots \\ L'_n := \chi(M_n) \end{pmatrix},$$

и нам нужно проверить, что $\forall v_1, \dots, v_n \exists i: |L'_i| \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Положим $\lambda := \sum_{i=1}^n v_i$, $H = (h_1, \dots, h_n)$ — столбцы матрицы H . Тогда

$$Hv = h_1v_1 + \dots + h_nv_n = (L_1, \dots, L_n)^T = L$$

и

$$L_1^2 + \dots + L_n^2 = (L, L) = v_1^2 \langle h_1, h_1 \rangle + \dots + v_n^2 \langle h_n, h_n \rangle = n^2$$

откуда $\exists i L_i^2 \geq n \Rightarrow |L_i| \geq \sqrt{n}$.

Заметим теперь, что $(H + J)v = (L_1 + \lambda, \dots, L_n + \lambda)^T = (2L'_1, \dots, 2L'_n)^T = N$. Покажем, что $\langle N, N \rangle \geq n^2$.

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle &= (L_1 + \lambda)^2 + \dots + (L_n + \lambda)^2 = L_1^2 + \dots + L_n^2 + 2\lambda(L_1 + \dots + L_n) + n\lambda^2 \\ &= n^2 + n\lambda^2 + 2\lambda nv_1 = n^2 \pm 2\lambda n + n\lambda^2 \end{aligned}$$

поскольку $\sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^n h_{ij} = v_1 \sum_{j=1}^n h_{1j} = nv_1$.

Рассмотрим $f(\lambda) = n^2 \pm 2\lambda n + n\lambda^2$. Поскольку $2 \mid n$ (n — порядок матрицы Адамара), то $2 \mid \lambda$. $\min f(\lambda)$ достигается в точке $\mp \frac{2n}{2\lambda} = \mp 1$, но, поскольку λ четное, необходимо перебрать $\lambda \in \{\pm 2, 0\}$. В любом случае получим $f(\lambda) \geq n^2$, откуда следует условие теоремы. \square

2.6 Кнезеровский граф

2.6.1 Определение и некоторые свойства

Определение 2.6.1. *Кнезеровским графом $KG_{n,k} = (V, E)$ называется граф, такой, что V — все k -элементные подмножества $\{1, \dots, n\}$, а $E = \{(A, B) : A \cap B = \emptyset\}$.*

Из теоремы Эрдеша-Ко-Радо следует, что

$$\alpha(KG_{n,k}) = \begin{cases} C_{n-1}^{k-1} & k, \leq \frac{n}{2} \\ C_n^k & k > \frac{n}{2} \end{cases}$$

а $\omega(KG_{n,k}) = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$. Тривиальными оценками для хроматического числа являются:

$$\begin{aligned} \chi(KG_{n,k}) &\geq \omega = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \\ &\geq \frac{|V|}{\alpha} = \frac{n}{k} \end{aligned}$$

Попробуем улучшить их.

2.6.2 Хроматическое число кнезеровского графа

Покрасим все множества, содержащие 1, в первый цвет. Аналогично поступим так со всеми остальными $i = 2, \dots, n$. Получим, что $\chi(KG_{n,k}) \leq n$. Заметим теперь, что нам достаточно покрасить в свой цвет только множества, содержащие $1, 2, \dots, n - 2k + 1$, и оставшиеся $2k - 1$ число в еще один цвет, ведь любые два k -элементных подмножества из этих чисел пересекаются. В итоге имеем оценку $\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 2$.

Гипотеза (Кнезер).

$$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$$

Для продолжения сформулируем результат, который, казалось бы, никак не относится к этому вопросу.

Теорема 2.6.1. *(6/д 1930: Борсук, Улам; 1932: Люстерник, Шнирельман)*

Пусть $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — сфера в \mathbb{R}^n размерности $n - 1$ с центром в начале координат покрыта множествами A_1, \dots, A_n (т.е. $S^{n-1} = A_1 \cup \dots \cup A_n$), причем $\forall i : A_i$ либо открыто, либо замкнуто. Тогда $\exists i : A_i$ лежит две диаметрально противоположные точки.

Докажем здесь частный случай этой теоремы, когда $n = 2$ и оба A_1, A_2 — замкнутые. Рассмотрим произвольную точку x окружности S^1 . Пусть $x \in A_1$. Если $-x$ тоже лежит в A_1 , то утверждение доказано. Иначе будем двигаться по окружности по часовой стрелке. Поскольку $-x \in A_2$ и A_1 — замкнуто, то на дуге от x до $-x$ найдется "крайняя" точка $y \in A_1$.

Заметим, что если $y \notin A_2$, то сдвинувшись еще дальше по окружности, мы найдем либо точку окружности, не лежащую в $A_1 \cup A_2$, что противоречит условию теоремы БУЛШ. Тогда $y \in A_1 \cap A_2$ и $-y \in A_i$ — искомая диаметрально противоположная пара точек.

Замечание. Теорема БУЛШ равносильна утверждению: Если $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, то $\exists x \in S^n : f(x) = f(-x)$

Теорема 2.6.2. (Ловас)

$$\chi(KG_{n,k}) \geq n + 2k - 2$$

Доказательство. Предположим, что $\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 1 = d$. Пусть χ_1, \dots, χ_d — цвета раскраски вершин $K_1, \dots, K_{C_n^k}$ вершин $KG_{n,k}$. Пусть $S^d \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ — d -мерная сфера в $(d+1)$ -мерном пространстве. Назовем *экватором* любое центральное сечение этой сферы гиперплоскостью. Заметим, что экватор это всегда S^{d-1} .

Сопоставим числам $\{1, \dots, n\}$ точки сферы $x_1, \dots, x_n \in S^d$ так, чтобы на каждом экваторе лежало не более d точек. Теперь определим для точки $y \in S^d$ множество $H(y)$ — открытую полусферу с центром в точке y . Введем множества

$$A_i := \{x \in S^d : H(x) \text{ содержит целиком одно множество цвета } \chi_i, i = 1, \dots, d$$

$$A_{d+1} := \{x \in S^d : |H(x) \cap \{x_1, \dots, x_n\}| \leq k - 1\}$$

Легко понять, что $S^d = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Поскольку все $H(x)$ открыты, то открыты и A_i для $i = 1, \dots, d$, а A_{d+1} — замкнуто, поскольку это дополнение открытых до S^d . Тогда, по теореме БУЛШта $\exists i \exists x : x, -x \in A_i$.

Пусть $i \leq d$. Тогда в полусфере с центром в x содержится k точек цвета χ_i и в полусфере с центром в $-x$ тоже содержится k точек цвета χ_i . Поскольку полусферы открыты, эти два множества не пересекаются, а значит не могут быть одного цвета по определению $KG_{n,k}$.

Пусть $i = d + 1$. В таком случае $H(x)$ и $H(-x)$ содержат $\leq 2(k - 1)$ точек. Это значит, что все остальные точки лежат на экваторе. Но их

$$\geq n - 2(k - 1) = n - 2k + 2 = d + 1,$$

что противоречит выбору x_1, \dots, x_n . □