

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ ИННОВАЦИЙ И ВЫСОКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

# Дискретный анализ

*Лектор: А.М. Райгородский*

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

автор: АЛЕКСАНДР МАРКОВ

1 июня 2017 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>1 семестр</b>	<b>3</b>
1.1	Асимптотики комбинаторных величин . . . . .	3
1.1.1	Количество треугольников в $G(n, r, s)$ . . . . .	3
1.1.2	Асимптотика биномиальных коэффициентов . . . . .	4
1.2	Основы теории графов . . . . .	6
1.2.1	Определения. Деревья . . . . .	6
1.2.2	Унициклические графы . . . . .	8
1.2.3	Эйлеровы графы . . . . .	10
1.2.4	Планарные графы . . . . .	11
1.2.5	Гамильтоновы графы . . . . .	13
1.3	Случайные графы . . . . .	16
1.3.1	Немного о случайном блуждании . . . . .	16
1.3.2	Модель Эрдеша-Реньи случайного графа . . . . .	16
1.3.3	Теоремы о связности случайного графа . . . . .	17
1.3.4	Теоремы о хроматическом числе случайного графа . . . . .	19
1.3.5	Жадный алгоритм поиска $\chi$ , $\alpha$ , $\omega$ . . . . .	23
1.4	Основы линейно-алгебраического метода . . . . .	26
1.4.1	Определение экстремальных велечин в гиперграфе . . . . .	26
1.4.2	Оценки для $f(n, k, t)$ . . . . .	26
1.4.3	Оценки для $h(n, k, t)$ и $m(n, k, t)$ . . . . .	28
1.4.4	Асимптотические оценки . . . . .	30
1.5	Хроматическое число пространства . . . . .	32
<b>2</b>	<b>2 семестр</b>	<b>34</b>
2.1	Турановские результаты . . . . .	34
2.2	Рамсеевские задачи . . . . .	36
2.2.1	Оценки чисел Рамсея . . . . .	36
2.2.2	Диагональные числа Рамсея . . . . .	36

2.2.3	$R(3, t)$ . . . . .	42
2.2.4	Двудольные диагональные числа Рамсея . . . . .	43
2.3	Системы общих представителей . . . . .	46
2.3.1	Тривиальные оценки . . . . .	46
2.3.2	Жадный алгоритм . . . . .	46
2.3.3	Конструктивная оценка размера минимальной соп . . . . .	50
2.4	Размерность Вапника-Червоненкиса . . . . .	51
2.4.1	Теорема Вапника-Червоненкиса . . . . .	51
2.4.2	Некоторое практическое применение . . . . .	55
2.5	Матрицы Адамара . . . . .	57
2.5.1	Гипотеза Адамара . . . . .	57
2.5.2	Раскраски гиперграфов . . . . .	58
2.6	Кнезеровский граф . . . . .	60
2.6.1	Определение и некоторые свойства . . . . .	60
2.6.2	Хроматическое число кнезеровского графа . . . . .	60

# Глава 1

## 1 семестр

### 1.1 Асимптотики комбинаторных величин

#### 1.1.1 Количество треугольников в $G(n, r, s)$

**Определение 1.1.1.** Графом называется пара множеств  $(V, E) = G$ , где  $V$  – множество каких-то объектов, а  $E$  – множество пар объектов из  $V$ .

Опишем некоторый граф  $G(n, r, s)$ , где  $n, r, s \in \mathbb{N}$ .

Рассмотрим множество  $\{1, \dots, n\} =: [n]$ . Пусть множество вершин описываемого графа  $V(n, r)$  – множество всех  $r$ -элементных подмножеств в  $[n]$ . Нетрудно понять, что  $|V| = C_n^r$ . Соединим две вершины этого графа ребром, если мощность их пересечения равна в точности  $s$ .

*Утверждение 1.1.1.1.* В графе  $G(n, r, s)$  число ребер равно  $|E| = \frac{1}{2} C_n^r C_r^s C_{n-r}^{r-s}$

*Доказательство.* Разберем что написано:  $C_n^r$  – кол-во  $r$ -элементных подмножеств.  $C_r^s$  – кол-во способов выбрать  $s$  элементов из этого множества, по которым оно будет пересекаться с другим множеством.  $C_{n-r}^{r-s}$  – кол-во способов добрать оставшиеся элементы во 2-е множество. Деление на 2 возникает, т.к. каждое ребро было посчитано дважды.  $\square$

**Определение 1.1.2.** Граф называется регулярным, если степени всех его вершин равны.

Для примера, граф  $G(n, r, s)$  – регулярен.  $\deg(v) = C_r^s \cdot C_{n-r}^{r-s}$

*Утверждение 1.1.1.2.* Количество треугольников в графе  $G(n, r, s)$  равно

$$\frac{|E|}{3} \left( \sum_{i=0}^s C_s^i C_{r-s}^{s-i} C_{r-s}^{s-i} C_{n-2r+s}^{r-2s+i} \right).$$

*Доказательство.* Зафиксируем 2 вершины, соединенные ребром. Кол-во способов сделать это  $|E|$ . Пусть  $i$  это мощность пересечения зафиксированных 2-х подмножеств с 3. Тогда:

- $C_s^i$  – кол-во способов выбрать  $i$  элементов в пересечение всех троих множеств  $v_1 \cap v_2 \cap v_3$

- $C_{r-s}^{s-i}$  – кол-во способов выбрать элементы в  $v_2 \cap v_3$  и  $v_3 \cap v_1$ .
- В  $v_3$  выбрано  $i + (s - i) + (s - i) = 2s - i$  элементов. Т.к.  $|v_3| = r$ , то необходимо выбрать еще  $r - 2s + i$  элементов, отличных от уже выбранных и не лежащих в  $v_1 \cup v_2$ . Кол-во способов сделать это  $C_{n-2r+s}^{r-2s+i}$
- Деление на 3 возникает, т.к. каждый треугольник был посчитан три раза.

□

При  $r = \frac{n}{2}$ ,  $s = \frac{n}{4}$  сумма в 1.1.1.2 равна: (для удобства  $k = \frac{n}{4}$ )

$$\sum_{i=0}^k (C_k^i)^4,$$

а значит, было бы приятно знать, чему равна сумма четвертых степеней биномиальных коэффициентов. Или же, чему она *асимптотически равна*.

## 1.1.2 Асимптотика биномиальных коэффициентов

**Определение 1.1.3.** Пусть даны две функции  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда они называются *асимптотически равными* при  $n \rightarrow \infty$ , если  $f(n) = (1 + o(1))g(n)$  или, что эквивалентно,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$ . Обозначение  $f \sim g$ .

**Пример 1.1.1.** Рассмотрим  $C_{2n}^n$ . Понятно, что

$$\frac{2^{2n}}{2n+1} \leq C_{2n}^n \leq 2^{2n}.$$

Логарифмируя, получаем:

$$2n \ln 2 - \ln(2n+1) \leq \ln C_{2n}^n \leq 2n \ln 2 \Rightarrow 2n \ln 2(1 - \frac{\ln(2n+1)}{2n \ln 2}) \leq \ln C_{2n}^n \leq 2n \ln 2 \Rightarrow 2n \ln 2(1 + o(1)) \leq \ln C_{2n}^n \leq 2n \ln 2 \Rightarrow \ln C_{2n}^n \sim 2n \ln 2$$

*Обозначение:* Если  $a_n$  – некоторая функция и  $\ln a_n \sim cn$ ,  $c > 0$ , то  $\ln a_n \sim cn \iff a_n = (e^c + o(1))^n$

**Теорема 1.1.1.** *Формула Стирлинга (б/д)*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

**Теорема 1.1.2.** Пусть  $a \in (0, 1)$ . Тогда

$$C_n^{[an]} = \left( \frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}} + o(1) \right)^n.$$

*Доказательство.* Распишем  $C_n^{[an]} = \frac{n!}{[an]!(n-[an])!} = \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi [an]} \left(\frac{[an]}{e}\right)^{[an]} \sqrt{2\pi(n-[an])} \left(\frac{(n-[an])}{e}\right)^{(n-[an])}} =$

$$P(n) \frac{n^n}{(an)^{an}(n-an)^{n-an}} = \left( \frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}} \right)^n P(n)$$

где  $P(n) = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi[an]}\sqrt{2\pi(n-[an])}}.$

Тогда

$$\ln C_n^{[an]} = \ln P(n) + n \ln \left( \frac{1}{(a)^a (1-a)^{1-a}} \right) \sim n \ln \left( \frac{1}{(a)^a (1-a)^{1-a}} \right)$$

что и требовалось.

(Поскольку  $[an]^{[an]} = (an - \varepsilon)^{an - \varepsilon} \sim (an)^{an} (an)^{-\varepsilon} e^{-\varepsilon}$ , а два последних множителя при логарифмировании "пропадают").  $\square$

*Замечание.* Найдем асимптотику  $C_n^k$  при различных  $k$ .

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}$$

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} &= \frac{n^k}{k!} \exp \left[ \ln \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \right] \leq \frac{n^k}{k!} \exp \left[ -\frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \dots - \frac{k-1}{n} \right] \\ &= \frac{n^k}{k!} \exp \left[ \frac{-k(k-1)}{2n} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} &= \frac{n^k}{k!} \exp \left[ \frac{-k(k-1)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{(k-1)^2}{n^2}\right) \right] = \\ &= \frac{n^k}{k!} \exp \left[ \frac{-k(k-1)}{2n} + O\left(\frac{k^3}{n^2}\right) \right] \end{aligned}$$

**Следствие.** При  $k^2 = o(n)$ , (т.е.  $k = o(\sqrt{n})$ ) имеем  $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$ .

**Следствие.** При  $k^3 = o(n^2)$ , (т.е.  $k = o(n^{\frac{2}{3}})$  и  $O(\frac{k^3}{n^2}) \rightarrow 0$ ), а значит  $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k^2}{2n}}$ .

## 1.2 Основы теории графов

### 1.2.1 Определения. Деревья

**Определение 1.2.1.** *Графом* называется пара множеств  $(V, E) = G$ , где  $V$  — множество каких-то объектов, а  $E$  — множество пар объектов из  $V$ .

**Определение 1.2.2.** *Маршрутом* в графе  $G = (V, E)$  называется последовательность  $v_1 e_1 v_2 \dots e_n v_{n+1}$ . ( $e_i$  и  $v_i$  могут повторяться).

- Если  $v_1 = v_{n+1}$ , то маршрут называется *замкнутым*.
- Если все  $e_i$  в маршруте различны, то замкнутый маршрут называется *циклом*, а незамкнутый — *цепью (путем)*.
- Цепь(цикл) называется *простой (-ым)*, если все вершины в нем различны.

**Определение 1.2.3.** Граф называется *связным*, если любые две вершины графа соединены маршрутом.

**Определение 1.2.4.** *Дерево* — связный граф без циклов.

**Теорема 1.2.1.** *Для любого графа  $G$  следующие утверждения эквивалентны:*

1.  $G$  — дерево,
2. между любыми 2-мя вершинами  $G$  есть ровно один простой путь,
3.  $G$  — связный граф и количество ребер в  $G$  на единицу меньше количества вершин,
4. в  $G$  нет циклов и количество ребер в  $G$  на единицу меньше количества вершин.

*Доказательство.* 1)  $\Rightarrow$  2):

Граф  $G$  — связан  $\Rightarrow$  между любыми вершинами есть хотя бы 1 маршрут. Если же между какими-то 2-мя вершинами есть 2 пути, то значит в  $G$  найдется цикл. Путь не может зайти в одну вершину два раза, т.к. это противоречит ацикличности, а значит любой путь в графе  $G$  — простой.

2)  $\Rightarrow$  3):

Очевидно, что  $G$  — связан. Докажем, что  $|E| = |V| - 1$  по индукции по числу вершин. Для  $|V| = 1, 2$  утверждение очевидно. Предположим, что  $|V| = n$ , а утверждение верно для всех  $k < n$ . Удалим из графа  $G$  некоторое ребро. Т.к. между любыми двумя вершинами существует **ровно один** простой путь, то  $G$  распался на 2 компоненты связности. Применим предположение индукции для каждой из них и получим требуемое.

3)  $\Rightarrow$  4):

Если в  $G$  есть цикл, то одно из его ребер можно удалить из графа без потери связности. Получим связный граф на  $n$  вершинах с  $n - 2$  ребрами, чего быть не может.

4)  $\Rightarrow$  1):

Если в  $G$  несколько компонент связности, то хотя бы в одной из компонент число дуг не меньше числа вершин. Но тогда в ней есть цикл.  $\square$

Обозначим за  $t_n$  количество различных деревьев на  $n$  занумерованных вершинах. Выпишем первые значения

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 1$$

$$t_3 = 3$$

$$t_4 = 16$$

$$t_5 = 125$$

Интуитивно можно догадаться до следующего утверждения:

**Теорема 1.2.2.** (формула Кэли)

Пусть  $n > 1$ . Тогда  $t_n = n^{n-2}$ .

*Доказательство.* Построим биекцию между помеченными деревьями и словами длины  $n - 2$  над алфавитом  $\{1, \dots, n\}$  (Эта биекция называется *коды Прюфера*). Для этого используется следующим очевидным утверждением:

*Утверждение 1.2.1.1.* В каждом дереве на  $n > 1$  вершинах есть висячая вершина (вершина степени 1). (б/д)

Докажем инъективность кодов Прюфера по индукции. Случаи когда  $|V| = 2, 3$  проверяются руками. Предположим, что два различных дерева  $T_1, T_2$  отвечают одному коду  $v_1 \dots v_n, v_i \in \{1, \dots, n\}$ . Возможны следующие случаи:

1. Листы с наименьшим номером в  $T_1$  и  $T_2$  различны. Но тогда различны их коды Прюфера. (т.к. каждая вершина  $v_i$  появляется в коде ровно  $\deg(v_i) - 1$  раз.
2. Листы с наименьшим номером совпадают, но различны их соседи. Но тогда их коды отличаются по очевидным причинам.
3. Если совпадают листы с наименьшими номерами и их соседи, то первое число кодов деревьев совпадают, но после вычеркивания остаются два дерева, коды которых различны по предположению индукции.

Примем факт того, что  $\varphi$  — сюръекция, без доказательства.  $\square$



## 1.2.2 Унициклические графы

**Определение 1.2.5.** Граф  $G$  называется *унициклическим*, если он связан и содержит ровно один цикл.

Обозначим за  $U(n)$  количество унициклических графов на  $n$  вершинах. Достаточно трудно, но можно понять, что справедлива формула

$$U(n) = \sum_{r=3}^n C_n^r \frac{(r-1)!}{2} n^{n-1-r} r$$

где

1.  $r \in \{3, \dots, n\}$  — длина единственного цикла,
2.  $C_n^r$  — число способов выбрать  $r$  вершин в цикл,
3.  $\frac{(r-1)!}{2}$  — число способов расставить на них цикл,
4. Пусть цикл состоит из вершин  $v_1, \dots, v_r$ . Если выкинуть ребра цикла, то останется лес из  $r$  деревьев на  $n$  вершинах, где  $i$ -ое дерево содержит  $v_i$ . Таких деревьев ровно  $n^{n-1-r} r$ .

**Теорема 1.2.3.**

$$U(n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} n^{n-\frac{1}{2}}.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} U(n) &= \sum_{r=3}^n C_n^r \frac{(r-1)!}{2} n^{n-1-r} r \\ &= \frac{1}{2} n^{n-1} \sum_{r=3}^n n(n-1) \dots (n-r+1) n^{-r} \\ &= \frac{1}{2} n^{n-1} \sum_{r=3}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно  $\sum_{r=3}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right)$ . По доказанному ранее

$$\begin{aligned} &\sum_{r=3}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) = \\ &= \sum_{r=3}^{[0,6n]} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) + \sum_{r=[0,6n]+1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) \\ &= S_1 + S_2, \end{aligned}$$

Оценим сначала  $S_2$ :

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq \sum_{r=[0,6n]+1}^n \exp \left[ -\frac{r(r-1)}{2n} \right] \\
&\leq \sum_{r=[0,6n]+1}^n \exp \left[ -\frac{n^{0,6}(n^{0,6}-1)}{2n} \right] \\
&= \sum_{r=[0,6n]+1}^n \exp \left[ -\frac{n^{1,2}(1+o(1))}{2n} \right] \\
&= \sum_{r=[0,6n]+1}^n \exp \left[ -\frac{n^{0,2}(1+o(1))}{2} \right] \\
&< ne^{-\frac{n^{0,2}(1+o(1))}{2}} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Теперь оценим  $S_1$ . Для этого заметим сначала, что при  $r > \sqrt{n}$  дробь  $\frac{-r(r-1)}{2n} \rightarrow -\infty \Rightarrow \exp \left[ \frac{-r(r-1)}{2n} \right] \rightarrow 0$ , а при  $r < n^{\frac{2}{3}} : O(\frac{r^3}{n^2}) = o(1)$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned}
S_1 &\sim \sum_{r=3}^{[0,6n]} \exp \left[ -\frac{r(r-1)}{2n} + O\left(\frac{r^3}{n^2}\right) \right] \\
&\sim \sum_{r=3}^{[0,6n]} \exp \left[ -\frac{r(r-1)}{2n} \right] \\
&\sim \sum_{r=3}^{[0,6n]} \exp \left[ -\frac{r^2}{2n} \right] \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{r^2}{2n} \right] - \sum_{r=0}^2 \exp \left[ -\frac{r^2}{2n} \right] - \sum_{r=[0,6n]+1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{r^2}{2n} \right]
\end{aligned}$$

Очевидно, что  $\sum_{r=0}^2 \exp \left[ -\frac{r^2}{2n} \right] \rightarrow 3$  при  $n \rightarrow \infty$ , а

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{r^2}{2n} \right] &\sim \int_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2n}} dr \\
&= \sqrt{n} \int_{x=0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \sqrt{n} \frac{\sqrt{\pi 2}}{2} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}
\end{aligned}$$

$$\sum_{r=[0,6n]+1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{r^2}{2n} \right] = \underbrace{\sum_{r=[0,6n]+1}^{n^2} \exp \left[ -\frac{r^2}{2n} \right]}_{S'_1} + \underbrace{\sum_{n^2+1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{r^2}{2n} \right]}_{S'_2}$$

Аналогично оценке  $S_2$ ,  $S'_1 \leq \sum_{r=[0,6n]+1}^{n^2} e^{-\frac{n^{1,2}}{2n}} < n^2 e^{-\frac{n^{0,2}}{2}} \rightarrow 0$ . Для того, чтобы оценить  $S'_2$  заметим, что отношение соседних слагаемых в  $S'_2$  на самом деле не превосходит  $e^{-n}$ . Действительно

$$e^{-\frac{(r+1)^2 - r^2}{2n}} = e^{-\frac{2r+1}{2n}} < e^{-\frac{r}{n}} < e^{-n}.$$

Тогда имеем:

$$S'_2 < \exp \left[ -\frac{(n^2 + 1)^2}{2n} \right] (1 + e^{-n} + e^{-2n} + \dots) = \exp \left[ -\frac{(n^2 + 1)^2}{2n} \right] \frac{1}{1 - e^{-n}} \rightarrow 0.$$

Итого получается

$$U(n) \sim \frac{1}{2} n^{n-1} (S_1 + S_2) \sim \frac{1}{2} n^{n-1} \sqrt{\frac{\pi n}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} n^{n-\frac{1}{2}}.$$

□

### 1.2.3 Эйлеровы графы

**Определение 1.2.6.** Граф называется *эйлеровым*, если он является циклом (т.е. существует простой замкнутый маршрут, проходящий по всем ребрам этого графа).

**Теорема 1.2.4.** Для связного графа следующие утверждения эквивалентны:

1. граф эйлеров,
2. степень каждой вершины графа четная,
3. множество ребер графа распадается в объединение непересекающихся по ребрам простых циклов.

*Доказательство.* 1)  $\Rightarrow$  2): Очевидно.

2)  $\Rightarrow$  3):

Зафиксируем вершину  $x_1$ . Выберем любого его соседа  $x_2$ . Так как  $\deg(x_2) > 0$  и четная, то  $\exists x_3 \neq x_1 \in V$ , связанный ребром с  $x_2$ . Будем идти далее по произвольному ребру из только что выбранной вершины  $x_k$ , пока не вернемся в одну из уже выбранных вершин. Тогда мы найдем некоторый простой цикл  $Z_1$ . Удалим все его ребра из  $G$  и получим новый граф, возможно с несколькими компонентами связности. Прделаем аналогичную операцию в остальных компонентах и заметим при этом, что величина  $|V| + |E|$  уменьшается. Прделая так в каждой компаненте, мы разобьем множество  $E$  на требуемое объединение.

3)  $\Rightarrow$  1):

Доказательство по индукции. Для одного простого цикла утверждение очевидно. Предположим что в  $G$  больше простых циклов. Удалим один простой цикл  $C$ . Полученный граф  $G'$  расподется на некоторые компоненты связности, каждая из которых распадается на простые циклы. Начнем обходить граф  $G$  по вершинам цикла  $C$ , причем если мы попали в вершину  $v \in V$ , лежащую в одной из компонент связности  $G'$ , то обойдем ее по предположению индукции и вернемся в  $v$ . Продолжим идти по циклу  $C$ , обходя еще не посещенные компоненты связности  $G'$ . Таким образом, мы обойдем весь граф  $G$ . □

### 1.2.4 Планарные графы

**Определение 1.2.7.** Пусть дан граф  $G = (V, E)$ . Укладкой графа  $G$  на плоскости назовем пару отображений  $(F, H)$ , такую что:

$$F : V \rightarrow S, S \subset \mathbb{R}^2, |S| < \infty \text{ — биекция}$$

$$H : E \rightarrow \text{некоторые гладкие кривые, т.ч. } (u, v) \in E \iff H(u, v) \text{ соединяет } F(u) \text{ с } F(v)$$

Плоской (планарной) называют такую укладку, у которой никакая пара кривых, соответствующих ребрам графа  $G$ , не пересекается в точках, отличных от образа  $F$ , причем если две кривых пересекаются в вершине, то эта вершина является концом этих кривых.

Граф называется планарным, если существует его плоская укладка на плоскости.

**Определение 1.2.8.** Грань планарной укладки — область, ограниченная циклом или незамкнутой кривой и не содержащая циклов внутри себя.

**Теорема 1.2.5.** (Эйлер)

Пусть граф  $G$  связан и планарен,  $|V| = n$ ,  $|E| = e$ . Тогда для любой его планарной укладки с числом граней  $f$  верно равенство

$$n - e + f = 2$$

*Доказательство.* Индукция по  $e - n$ .

*База:*  $e - n = -1 \Rightarrow G$  — дерево и  $f = 1$ .

*Переход:* Поскольку  $G$  не дерево, то в нем имеются циклы. Удалим из  $G$  одно ребро (из некоторого цикла), отделяющее две различные грани. Получим граф  $G'$ , в котором  $f' = f - 1$ ,  $e' = e - 1$ ,  $n' = n$ . Тогда

$$2 = n' - e' + f' = n - (e - 1) + (f - 1) = n - e + f.$$

□

**Следствие.** Пусть  $G$  — связный планарный граф и есть какая-то его укладка. Пусть  $t$  — длина наименьшего цикла в  $G$ . Тогда

$$e \geq \frac{t}{2}f.$$

*Доказательство.* Пусть  $e_i$  — число ребер, отделяющих  $i$  грань от других,  $i = 1, \dots, f$ . Тогда

$$2e \geq \sum_{i=1}^f e_i \geq tk.$$

□

**Следствие.** Пусть  $G$  — связный планарный граф и есть какая-то его укладка. Пусть  $t$  — длина наименьшего цикла в  $G$ . Тогда

$$e \leq \frac{t}{t-2}(n-2).$$

*Доказательство.* По теореме Эйлера

$$2 = n - e + f \leq n - e + \frac{2}{t}e = \frac{2-t}{t}e + n.$$

□

**Утверждение 1.2.4.1.** Графы  $K_5$  и  $K_{3,3}$  не планарны.

*Доказательство.* Применяем следствие 1.2.4. Для  $K_5$  :  $n = 5, e = 10, t \geq 3$ ; для  $K_{3,3}$  :  $n = 6, e = 9, t \geq 4$ . □

**Утверждение 1.2.4.2.** Если граф планарен, то  $e \leq 3n - 6$ .

*Доказательство.*  $e \leq \frac{t}{t-2}(n-2) \leq 3n - 6$ . □

**Определение 1.2.9.** Граф  $G$  *гомеоморфен* графу  $H$ , если существует конечная цепочка преобразований  $f_1, \dots, f_n$ , каждое из которых имеет один вид из следующих:

1. Изоморфизм графов.
2. Удаление ребра  $(u, v)$ , добавление новой вершины  $w$  в граф и ребер  $(u, w)$ ,  $(w, v)$  — разбиение ребра.
3. Удаление ребра  $(u, v)$  и вершин  $u, v$ , вставка новой вершины  $w$ , связанной ребрами со всеми, с кем были связаны  $u$  и  $v$  — стягивание ребра  $(u, v)$ ,

которая начинается с  $G$ , а заканчивается в  $H$ .

**Теорема 1.2.6.** (б/д, Критерий Понтрягина-Куратовского)

*Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .*

**Определение 1.2.10.** Граф  $H$  называется *минором* графа  $G$ , если из  $G$  можно получить  $H$  цепочкой преобразований, каждое из которых либо удаление, либо стягивание ребра.

**Теорема 1.2.7.** (б/д, Критерий Визинга)

*Граф  $G$  планарен тогда и только тогда, когда  $G$  не содержит подграфа, являющегося минором для  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .*

**Теорема 1.2.8.** *Вершины любого связного планарного графа  $G$  можно покрасить в 5 цветов так, чтобы любые две соседние вершины имели разный цвет.*

*Доказательство.* Покажем сначала, что в  $G$  есть вершина степени  $\leq 5$ . Действительно, если  $\forall v \deg v \geq 6$ , то  $e \geq \frac{1}{2} \sum \deg v_i \geq 3n$  — противоречие с утверждением 1.2.4.2.

Индукция по числу вершин.

*База:*  $n \leq 5 \Rightarrow$  каждую вершину красим в свой цвет.

*Шаг:* Пусть  $v$  это вершина степени  $\leq 5$ . Если  $\deg v < 5$ , то удалим  $v$ , раскрасим оставшийся граф по предположению индукции в 5 цветов и покрасим  $v$  в оставшийся цвет.

Пусть  $\deg v = 5$  и все соседи  $v$  покрашены в разные цвета. Занумеруем связанные с  $v$  вершины по часовой стрелке:  $v_1, \dots, v_5$ . Пусть  $V_{1,3}$  — все те вершины  $G$ , до которых можно дойти из  $v_1$  только по вершинам 1 и 3 цвета. Если  $v_3 \notin V_{1,3}$ , то поменяем цвет всех вершин из  $V_{1,3}$  на противоположный и покрасим  $v$  в первый цвет.

Если же  $v_3 \in V_{1,3}$ , то рассмотрим множество  $V_{2,4}$  тех вершин, в которые можно дойти из вершины  $v_2$  только по вершинам 2 и 4 цвета. Если  $v_4 \in V_{2,4}$ , то граф  $G$  не планарный, поскольку  $V_{2,4}$  целиком содержится внутри цикла из вершин цветов 1, 3 и  $v$ . Тогда меняем цвет на противоположный в  $V_{2,4}$  и красим  $v$  во второй цвет.  $\square$

## 1.2.5 Гамильтоновы графы

**Определение 1.2.11.** Граф называется *гамильтоновым*, если существует простой цикл, проходящий через все вершины графа.

**Теорема 1.2.9.** (*признак Дирака*)

*Если в связном графе  $n$  вершин степень любой вершины  $\geq \frac{n}{2}$ , то этот связный граф — гамильтонов.*

*Доказательство.* Пусть  $P = v_1 v_2 \dots v_k$  — самый длинный путь в графе  $G$ . Если  $v_1$  смежна с некоторой вершиной  $x \notin P$ , то существует путь длиннее  $P$  — противоречие. Аналогичное рассуждение с  $v_k \Rightarrow v_1$  и  $v_k$  смежны **только** с вершинами из  $P$ . Поскольку  $\deg(v_1) \geq \frac{n}{2}$  и в графе нет петель, то  $k \geq \frac{n}{2} + 1$ .

*Утверждение 1.2.5.1.* Существует  $1 \leq j \leq k$ , такое что  $v_j$  инцидентна с  $v_k$ , а  $v_{j+1}$  с  $v_1$ .

*Доказательство.* Предположим, что такой ситуации не оказалось. Тогда в  $P$  есть как минимум  $\deg(v_1)$  вершин, несвязанных с  $v_k$  (предыдущие в пути от соседей  $v_1$ ). Поскольку все вершины, связанные с  $v_k$  находятся в пути и  $v_k$  не инцидентна сама с собой, то в  $P$  хотя бы  $\deg(v_1) + \deg(v_k) + 1 = n + 1$  вершин. Противоречие.  $\square$

Из утверждения следует, что в  $G$  существует простой цикл  $C = v_{j+1} \dots v_k v_j v_{j-1} \dots v_1 v_{j+1}$ . Покажем, что этот цикл — гамильтонов. Предположим, что существует  $v \in V \setminus C$ . Поскольку граф связан,  $v$  должна быть связана каким-то путем с некоторой  $v_i \in C$ . Но тогда существует путь  $P' = v$  — путь от  $v$  до  $C$  — круг по  $C$ , длиннее чем  $P$ , что противоречит выбору  $P$ .  $\square$

**Определение 1.2.12.** Пусть дан граф  $G = (V, E)$ . Тогда его *числом независимости* называется число  $\alpha(G) = \max\{k \in \mathbb{N} : \exists W \subseteq V : |W| = k \wedge \forall x, y \in W (x, y) \notin E\}$ . Множество вершин  $W$ , между любыми двумя из которых нет ребра, называется *независимым* множеством вершин.

**Определение 1.2.13.** Вершинной связностью графа, обозначаемой  $k(G)$ , называется *минимальное количество вершин*, в результате удаления которых граф перестает быть связным.

**Теорема 1.2.10.** (*признак Эрдеша-Хватала*)

Пусть  $G = (V, E)$  — граф, такой, что  $|V| \geq 3$  и  $\alpha(G) \leq k(G)$ . Тогда  $G$  — гамильтонов.

*Доказательство.* Положим  $n := |V| \geq 3$ .

Предположим сначала, что в  $G$  нет циклов. Поскольку  $\alpha(G) \geq 1$  и  $k(G) \geq \alpha(G)$ , граф связный, а значит  $G$  это дерево. Т.к.  $n \geq 3$ , то в  $G$  есть хотя бы две несвязные висячие вершины (*это упражнение*), а значит

$$\begin{cases} \alpha(G) \geq 2 \\ k(G) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{предположение неверно}$$

а значит в  $G$  есть хотя бы один цикл.

Пусть  $C = \{x_1, \dots, x_k\}$  — самый длинный простой цикл в  $G$ , причем  $k < n$ . Удалим из  $G$  все вершины, лежащие в  $C$ , и обозначим за  $W$  любую связную компоненту в оставшемся графе. Определим  $N_W(G) = \{x \in V : x \notin W \wedge \exists y \in W : (x, y) \in E\}$ . Сразу ясно, что  $N_W(G) \subseteq C$  (действительно, связность могла нарушиться только из-за удаления ребер в  $C$ ). Более того,  $N_W(G)$  не содержит  $\{x_i, x_{i+1}\}$  для любого  $i$  из множества  $\{1, \dots, k\}$  (положим  $x_{k+1} = x_1$ ), иначе в  $G$  есть цикл, длиннее  $C$  (доказательство картинкой). Все вышесказанное означает, что  $N_W(G) \subset C$  и  $N_W(G) \neq C$ , а значит  $k(G) \leq |N_W(G)|$ , поскольку

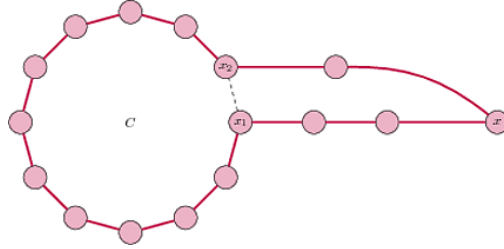


Рис. 1.1: цикл, длиннее чем  $C$  в первом случае

при удалении  $N_W(G)$  множество  $W$  уже образует отдельную компоненту связности. Определим  $M := \{x_{i+1} \mid x_i \in N_W(G)\} = \{y_i\}$  — соседи всех  $x_i$  из  $N_W(G)$ , например, против часовой стрелки. Из рисунка выше следует, что  $M \cap N_W(G)$  пусто  $\Rightarrow |M| = |N_W(G)| \geq k(G)$ . Заметим теперь, что  $M$  — независимое множество, иначе в  $G$ , опять-таки, есть цикл длиннее  $C$  (доказательство картинкой :). а значит

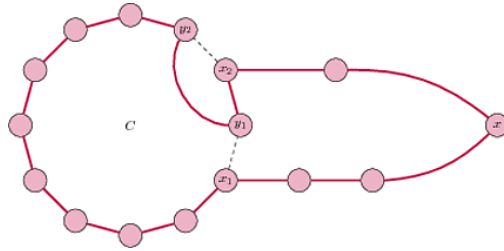


Рис. 1.2: цикл, длиннее чем  $C$  во втором случае

$|M| \leq \alpha(G)$ , откуда  $\alpha(G) \geq |M| \geq k(G)$ .

Рассмотрим произвольную вершину  $v \in W$  и множество  $M \cup \{v\}$ . Поскольку  $N_W(G) \cap M = \emptyset$ , то  $M \cup \{v\}$  — тоже независимое множество, а значит  $\alpha(G) \geq |M \cup \{v\}| = |M| + 1 \geq k(G) + 1 > k(G)$  — противоречие.  $\square$

**Следствие.** Рассмотрим  $G(n, 3, 1)$  — граф,  $V = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = 3\} = \{A \subset \{1, \dots, n\} : |A| = 3\}$ ,  $E = \{(\bar{x}, \bar{y}) : \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 1\} = \{(A, B) : |A \cap B| = 1\}$ . Начиная с некоторого,  $n$  этот граф — гамильтонов.

*Доказательство.* Сначала поймем, почему для этого графа не применим признак Дирака. Действительно,  $|V| = C_n^3 \sim \frac{n^3}{6}$ , а степень любой вершины  $\deg(x) = 3 \cdot C_{n-3}^2 \sim \frac{3n^2}{6}$ , т.е. при больших  $n$  количество ребер, выходящих из каждой вершины, примерно в  $n$  раз меньше общего количества вершин. Воспользуемся теоремой Эрдеша-Хватала. Для этого найдем  $\alpha(G)$  и  $k(G)$ .

Пусть  $W = \{x_1, \dots, x_s\}$  — независимое множество вершин в  $G$ . Это означает, что

$$\forall i \neq j, \langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

Это означает, что вектора  $\{x_1, \dots, x_s\}$  линейно-независимы в пространстве  $\mathbb{Z}_2^n$ . Действительно, рассмотрим их произвольную нулевую линейную комбинацию:  $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = 0$  с  $c_i \in \mathbb{Z}_2$ . Умножение обеих частей равенства скалярно на  $x_i$  доказывает, что  $c_i = 0$ , откуда следует, что  $|W| \leq \dim \mathbb{Z}_2^n = n \Rightarrow \alpha(G) \leq n$ .

Рассмотрим теперь две несмежные вершины  $A$  и  $B$  и обозначим за  $N \subset V$  множество их общих соседей. Легко понять, что  $\min |N| \leq k(G)$ . Рассмотрим случаи:

1.  $A \cap B = \emptyset$ . Тогда  $|N| = 3 \cdot 3 \cdot C_{n-6}^1 = 9n - 54$ , что больше  $n$  при  $n \geq 7$
2.  $|A \cap B| = 1$ . Тогда  $|N| \geq C_{n-5}^2$  (посчитаны только соседи, пересекающиеся с  $A$  и  $B$  по их общему элементу), что с некоторого  $n$  тоже больше  $n$ .
3.  $|A \cap B| = 2$ . В таком случае  $|N| \geq 2C_{n-4}^2$  (посчитаны только соседи, пересекающиеся с  $A$  и  $B$  по их общим элементам), что так же больше  $n$  с некоторого момента.

Мы получили, что начиная с некоторого  $n$  верно неравенство  $\alpha(G) \leq k(G)$ . По теореме Эрдеша-Хватала, граф  $G$  — гамильтонов.  $\square$

**Факт.**

$$\alpha(G(n, 3, 1)) = \begin{cases} n, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ n - 1 & n \equiv 1 \pmod{4}, \\ n - 2 & \text{иначе.} \end{cases}$$

(попробуйте привести явную конструкцию)



## 1.3 Случайные графы

Предполагается, что читатель знаком с фактами из теории вероятностей, используемыми в этом разделе и далее в курсе, поэтому упоминаться и доказываться здесь отдельно они не будут.

### 1.3.1 Немного о случайном блуждании

**Теорема 1.3.1.** Рассмотрим модель простейшего симметричного случайного блуждания  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Для удобства обозначим  $S_n = \xi$ . Тогда для любого  $a > 0$  верно:

$$P(\xi \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

*Доказательство.* Сначала проясним, почему эта оценка в значительной степени улучшает неравенство Чебышева. Заметим, что  $E\xi = 0$ , а значит

$$\begin{aligned} P(\xi \geq a) &= P(\xi - E\xi \geq a - E\xi) \leq P(|\xi - E\xi| \geq a - E\xi) = \\ &= P(|\xi - E\xi| \geq a) \leq \frac{D\xi}{a^2} = \frac{nD\xi_1}{a^2} = \frac{n}{a^2} \end{aligned}$$

Если взять  $a = n^{\frac{2}{3}}$ , то, по выше доказанному,  $P(\xi \geq a) \leq n^{-\frac{1}{3}}$ . С другой стороны, применяя теорему,  $P(\xi \geq a) \leq \exp\left[-n^{\frac{1}{3}}/2\right]$ , что с ростом  $n$  убывает к 0 значительно быстрее.

Приступим к доказательству теоремы: возьмем произвольное  $\lambda > 0$ . Получим

$$P(\xi \geq a) = P(\lambda\xi \geq \lambda a) = P(e^{\lambda\xi} \geq e^{\lambda a}) \leq e^{-\lambda a} Ee^{\lambda a}.$$

Последняя оценка обусловлена неравенством Маркова. Далее, т.к.  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — независимые, имеем:  $Ee^{\lambda\xi} = Ee^{\lambda\xi_1} \dots Ee^{\lambda\xi_n}$ . При этом ясно, что

$$Ee^{\lambda\xi_i} = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}},$$

и в итоге

$$P(\xi \geq a) \leq e^{-\lambda a} e^{n\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Взяв  $\lambda = \frac{a}{n}$  получаем требуемое. □

*Замечание.* Это частный случай неравенства больших уклонений.

### 1.3.2 Модель Эрдеша-Реньи случайного графа

Для удобства будем считать, что множеством вершин случайного графа является  $V = V_n = \{1, \dots, n\}$ .

**Определение 1.3.1.** Зафиксируем число вершин в графе  $n$ . Рассмотрим полный граф  $K_n$  и занумеруем все его ребра в некотором порядке:  $e_1, e_2, \dots, e_N$ , где  $N = C_n^2$ . Пусть вероятность "появления" ребра в графе равна  $p$ , все ребра появляются с равной вероятностью и независимо друг от друга. Рассмотрим вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , где  $\Omega = \{\text{множество последовательностей из 0 и 1 длины } C_n^2\}$ ,  $\mathcal{F}_n =$

$2^\Omega$ ,  $P(G) = p^{|E|} q^{\binom{n}{2} - |E|}$  и  $|E|$  это число единиц в  $\omega \in \Omega$ . Тогда граф  $G = G(n, p) = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_{n,p})$  является моделью Эрдеша-Реньи случайного графа. При этом 0 на  $i$ -ом месте означает отсутствие ребра  $e_i$  в графе, а 1 — присутствие.

**Определение 1.3.2.** Некоторое свойство  $A_n$  выполняется *асимптотически почти наверное*, если  $P(A_n) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ .

Для знакомства со случайными графами полезно рассмотреть следующую теорему

**Теорема 1.3.2.** Пусть  $G(n, p)$  — случайный граф, вероятность появления ребра в котором равна  $p = p(n) = o(\frac{1}{n})$ . Тогда асимптотически почти наверное граф не содержит треугольников (т.е. подграфов  $K_3$ ).

*Доказательство.* Рассмотрим случайную величину  $X$  равную числу треугольников в графе  $G$ . Нам нужно доказать, что  $P(X = 0) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , что эквивалентно  $P(X \geq 1) \rightarrow 0$ . Воспользуемся неравенством Маркова:  $P(X \geq 1) \leq EX$ . Покажем, что в случае  $p = \frac{\alpha(n)}{n}, \alpha(n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  математическое ожидание  $X$  стремится к 0.

Пусть  $t_1, \dots, t_k$  — все тройки вершин из  $G$ . Нетрудно понять, что  $k = C_n^3$ . Введем случайные величины  $X_1, \dots, X_k$ , такие что  $X_i = I(t_i \text{ образуют треугольник})$ . Тогда, по свойствам математического ожидания, имеем

$$\begin{aligned} EX &= E(X_1 + \dots + X_k) = EX_1 + \dots + EX_k = kEX_1 = C_n^3 P(t_1 \text{ образует треугольник}) = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} p^3 = \frac{n(n-1)(n-2)\alpha^3}{6n^3} \sim \frac{\alpha^3}{6} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

откуда сразу следует требуемое утверждение.  $\square$

### 1.3.3 Теоремы о связности случайного графа

**Теорема 1.3.3.** Рассмотрим случайный граф  $G(n, p)$ . Пусть вероятность ребра в этом графе  $p = p(n) = \frac{c \cdot \ln n}{n}$ .

1.  $c > 1$ . Тогда асимптотически почти наверное случайный граф связан.
2.  $c < 1$ . Тогда асимптотически почти наверное случайный граф не связан. Более того, в нем почти наверное содержатся изолированные вершины.
3.  $(\delta/\partial) p = \frac{\ln n + \lambda + o(1)}{n}$ . Тогда вероятность того, что граф связан, стремится к числу  $e^{-e^{-\lambda}}$

*Доказательство.* 1. Покажем, что  $P(G \text{ не связан}) \rightarrow 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} P(G \text{ не связан}) &= P(\text{в графе есть хотя бы 2 компоненты связности}) \\ &= P(\text{в } G \text{ есть связные компоненты, содержащие } \leq n-1 \text{ вершин}) \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \bigcup_{i=1}^{C_n^k} A_i^k \text{ образует к.с. в графе } G\right) \end{aligned}$$

где за  $A_1^k, \dots, A_{C_n^k}^k$  обозначим всевозможные подмножества  $V$  мощности  $k$ . Как известно, вероятность объединения не превосходит суммы вероятностей, а значит

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \bigcup_{i=1}^{C_n^k} A_i^k \text{ образует к.с. в графе } G\right) &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{C_n^k} \mathbb{P}(A_i^k \text{ образует к.с. в графе } G) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{C_n^k} \mathbb{P}(\forall v \in A_i^k \forall w \in V \setminus A_i^k : (v, w) \notin E) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{C_n^k} (1-p)^{k(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (1-p)^{k(n-k)} \end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемое при  $k = 1$ . Воспользуемся тем, что  $\ln(1+x) = x + o(x)$ :

$$n(1-p)^{n-1} = ne^{(n-1)\ln(1-p)} = ne^{-pn(1+o(1))} = ne^{-c \ln n(1+o(1))} = \frac{n}{n^{c(1+o(1))}} \rightarrow 0.$$

Оставшуюся сумму оценим с помощью следующей идеи: обозначим за  $a_k(n) = C_n^k (1-p)^{k(n-k)}$ .

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k(n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n/2} a_k(n) \rightarrow 0$$

поскольку  $a_k(n)$  симметричны относительно центра  $k_0 = \frac{n}{2}$ . Предположим теперь, что выполнено неравенство

$$\frac{a_{k+1}(n)}{a_k(n)} \leq q(n) \rightarrow 0$$

В таком случае, имеем

$$\sum_{k=1}^{n/2} a_k(n) = a_1(n) \left( 1 + \frac{a_2(n)}{a_1(n)} + \frac{a_3(n)}{a_2(n)} \cdot \frac{a_2(n)}{a_1(n)} + \dots \right) \leq a_1(n)(1 + q(n) + q^2(n) + \dots) < \frac{a_1(n)}{1 - q(n)} \rightarrow 0$$

Что ж, приступим к оценке оставшейся суммы:

$$\sum_{k=1}^{n/2} C_n^k (1-p)^{k(n-k)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n/\sqrt{\ln n}} a_k(n)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{k=n/\sqrt{\ln n}+1}^{n/2} a_k(n)}_{S_2}$$

Оценим  $S_1$  с помощью нашей идеи:

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}(n)}{a_k(n)} &= \frac{C_n^{k+1} (1-p)^{(k+1)(n-k-1)}}{C_n^k (1-p)^{k(n-k)}} = \frac{n-k}{k+1} (1-p)^{n-2k-1} < \\ &< n(1-p)^{n-2k-1} \leq n(1-p)^{n-\frac{2n}{\sqrt{\ln n}}-1} = n(1-p)^{n(1+o(1))} \\ &= ne^{-pn(1+o(1))} = q(n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

а значит  $S_1 \rightarrow 0$ .

Займемся  $S_2$ :  $k > \frac{n}{\sqrt{\ln n}}$ ,  $k \leq \frac{n}{2}$ . Для  $a_k(n)$  имеем

$$\begin{aligned} a_k(n) &= C_n^k (1-p)^{k(n-k)} < 2^n e^{-pk(n-k)} \leq 2^n e^{-pk \frac{n}{2}} \leq \\ &\leq 2^n \exp \left[ -\frac{c \ln n}{n} \cdot \frac{n}{\sqrt{\ln n}} \cdot \frac{n}{2} \right] \\ &= 2^n \exp \left[ -\frac{cn\sqrt{\ln n}}{2} \right] = \exp \left[ n \ln 2 - \frac{c}{2} n\sqrt{n} \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

В таком случае вся сумма  $S_2 \leq n \exp \left[ n \ln 2 - \frac{c}{2} n \sqrt{n} \right] = \exp \left[ \ln n + n \ln 2 - \frac{c}{2} n \sqrt{n} \right] \rightarrow 0$ , откуда следует утверждение первого пункта теоремы.

2. Докажем, что в условиях 2) в графе а.п.н. есть изолированная вершина. Пусть  $X = X(G)$  — случайная величина, равная числу изолированных вершин в  $G$ ,  $X_i$  — индикатор того, что  $v_i \in V$  — изолированная. Найдем  $DX$ . Легко понять, что

$$EX = n(1-p)^{n-1} = ne^{(n-1)\ln(1-p)} = ne^{-pn(1+o(1))}$$

Далее

$$EX^2 = EX_1 + \dots + EX_n + \sum_{i \neq j} EX_i X_j = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}$$

а значит  $DX = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - n^2(1-p)^{2n-2}$ . Оценим  $P(\text{ в } G \text{ есть изолированная вершина})$  по неравенству Чебышева.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X \leq 0) = 1 - P(EX - X \geq EX) \geq 1 - P(|EX - X| \geq EX) \geq 1 - \frac{DX}{(EX)^2} \\ &= \frac{n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - n^2(1-p)^{2n-2}}{(EX)^2} = \\ &= \frac{1}{EX} + \frac{n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} - 1 = o(1) + 1 + o(1) - 1 = o(1) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

поскольку  $\frac{n(n-1)}{n^2} = 1 + o(1)$  и  $\frac{(1-p)^{2n-3}}{(1-p)^{2n-2}} = \frac{1}{1-p} = 1 + o(1)$ . Теорема доказана.

□

**Теорема 1.3.4.** (б/д) Рассмотрим случайный граф  $G(n, p)$ , где  $p = \frac{c}{n}$ ,  $c > 0$ .

1. если  $c < 1$ , то  $\exists \beta > 0$  такая, что а.п.н. число вершин в каждой связной компоненте  $G$  не превосходит  $\beta \ln n$ ,
2. если  $c > 1$ , то  $\exists \beta > 0$ ,  $\exists \gamma \in (0, 1)$  такие, что а.п.н. в  $G$  ровно одна связная компонента имеет  $\geq \gamma n$  вершин, а все остальные связные компоненты состоят из  $\leq \beta \ln n$  вершин.

### 1.3.4 Теоремы о хроматическом числе случайного графа

**Определение 1.3.3.** Хроматическим числом графа  $G$  называется величина  $\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k \forall i \forall x, y \in V_i (x, y) \notin E\}$ .

Утверждение 1.3.4.1.  $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$ .

Доказательство. Действительно,  $|V| = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |V_i| \leq \chi(G) \cdot \max |V_i| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$ . □

**Определение 1.3.4.** Кликовым числом графа  $G$  называется величина  $\kappa(G) = \max\{k \in \mathbb{N} : \exists W \subseteq V : |W| = k \wedge \forall x, y \in W (x, y) \in E\}$ .

Заметим следующие очевидные соотношения между числом независимости, кликовым числом и хроматическим числом графа:

1.  $\alpha(G) = \kappa(\overline{G})$
2.  $\chi(G) \geq \max\{\kappa(G), \frac{|V|}{\alpha(G)}\}$

**Теорема 1.3.5.** *А.н.н. число независимости  $\alpha(G)$  графа  $G(n, \frac{1}{2})$  не превосходит  $2 \log_2 n$ .*

*Доказательство.* Пусть  $k := \lceil 2 \log_2 n \rceil$ . Определим случайные величины  $X_k(G)$  = количеству независимых множеств размера  $k$  в графе  $G$ . Тогда имеем

$$P(\alpha(G) < k) = P(X_k = 0) = 1 - P(X_k \geq 1) \geq 1 - EX_k = 1 - C_n^k 2^{-C_k^2}$$

Учитывая, что  $k \in [2 \log_2 n - 1, 2 \log_2 n]$ , получаем следующее

$$\begin{aligned} C_n^k 2^{-C_k^2} &\leq \frac{n^k}{k!} 2^{-k(k-1)/2} = \frac{2^{k \log_2 n}}{k!} \cdot 2^{-\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}} \leq \\ &\leq \frac{2^{2 \log_2^2 n - \frac{(2 \log_2 n - 1)^2}{2} + \log_2 n}}{k!} = \frac{2^{3 \log_2 n - \frac{1}{2}}}{k!} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

поскольку

$$k! = \lceil 2 \log_2 n \rceil! > \left(\frac{k}{2}\right)^{\left(\frac{k}{2}\right)} > (\log_2 n - 1)^{\log_2 n - 1}$$

откуда  $EX_k \rightarrow 0 \Rightarrow P(\alpha(G) < k) \rightarrow 1$ . □

**Следствие.** *А.н.н.  $\chi(G) \geq \frac{n}{2 \log_2 n}$  для  $G(n, \frac{1}{2})$ .*

**Определение 1.3.5.** Обхватом графа  $G$  называется величина  $g(G)$ , равная длине кратчайшего цикла в графе.

**Теорема 1.3.6.** *(Эрдёш, 1957)*

$$\forall k, l \in \mathbb{N} \exists G = (V, E) : \chi(G) > k \wedge g(G) > l$$

*Доказательство.* Рассмотрим случайный граф  $G(n, p)$  с вероятностью ребра  $p = p(n) = n^{\theta-1}$ , где  $\theta = \frac{1}{2l}$ . Определим случайные величины  $X^r$  как количество простых циклов в графе  $G$  длины  $r$  и  $X_l$ , равные количеству простых циклов длины  $\leq l$ . Имеем тогда:

$$\begin{aligned} EX_l &= \sum_{r=3}^l EX^r = \sum_{r=3}^l \sum_{\substack{W \subseteq V \\ |W|=r}} \sum_{\text{нумерациям } W} p^r = \sum_{r=3}^l C_n^r \frac{(r-1)!}{2} p^r \\ &\leq \sum_{r=3}^l \frac{n^r}{r!} \cdot \frac{(r-1)!}{2} p^r < \sum_{r=3}^l n^r p^r = \\ &= \sum_{r=3}^l n^{\theta r} \leq l n^{\theta l} = l \sqrt{n} \end{aligned}$$

а значит

$$P(X_l \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{EX_l}{n/2} \leq \frac{l\sqrt{n}}{n/2} \rightarrow 0$$

откуда следует, что  $\exists n_1 \forall n > n_1 : P(X_l \geq \frac{n}{2}) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(X_l < \frac{n}{2}) > \frac{1}{2}$ .

Пусть  $m := \lceil \frac{3 \ln n}{p} \rceil$ . Определим случайную величину  $Y_m$  как количество независимых множеств на  $m$  вершинах в графе  $G$ .

$$P(\alpha(G) < m) = P(Y_m = 0) = 1 - P(Y_m \geq 1) \geq 1 - EY_m = 1 - C_n^m (1-p)^{C_m^2}$$

причем

$$C_n^m (1-p)^{C_m^2} \leq \frac{n^m}{m!} e^{C_m^2 \ln(1-p)} < n^m e^{-\frac{m^2}{2}(1+o(1))p} = e^{m(\ln n - \frac{mp}{2}(1+o(1)))}$$

а, коль скоро

$$\ln n - \frac{mp}{2}(1+o(1)) = \ln n - 1,5 \ln n(1+o(1)) \rightarrow -\infty$$

то  $P(\alpha(G) < m) \rightarrow 1 \Rightarrow \exists n_1 \forall n > n_1 P(\alpha(G) < m) > \frac{1}{2}$

Пусть  $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ . Тогда

$$\exists G : V(G) = n \Rightarrow \alpha(G) < m, X_l(G) < \frac{n}{2}.$$

Перейдем от графа  $G$  к графу  $G'$ , удаляя по одной любой вершины из каждого цикла длины  $\leq l$ . В полученном графе  $V(G') \geq \frac{n}{2}$ ,  $\alpha(G') \leq \alpha(G) < m \Rightarrow \chi(G') \geq \frac{n}{2m}$ ,  $X_l(G) = 0$  (т.е.  $g(G') \geq l$ ). Оценим  $\chi(G')$ :

$$\chi(G') = \frac{n}{2m} \sim \frac{n}{6 \ln n} p = \frac{n^\theta}{6 \ln n} = \frac{n^{1/2l}}{6 \ln n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \exists n_3 : \chi(G') > k \text{ при } n \geq n_3$$

В таком случае, при  $V(G) = n \geq \max\{n_1, n_2, n_3\}$  мы нашли требуемый граф.  $\square$

**Теорема 1.3.7.** (Боллобаш)

Рассмотрим  $G(n, p)$ . Пусть  $\alpha \in (\frac{5}{6}, 1)$ ,  $p = n^{-\alpha}$ . Тогда существует такая функция  $u(n, \alpha)$ , что а.п.н.

$$u \leq \chi(G) \leq u + 3$$

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, установим несколько вспомогательных фактов.

**Определение 1.3.6.** Назовем функцию  $f$  от графа липшицевой по ребрам, если для любых двух графов  $G, G'$ , таких что  $V_G = V_{G'}$ , отличающихся не более чем в одном ребре, выполнено неравенство  $|f(G) - f(G')| \leq 1$ .

**Пример 1.3.1.**  $f(G) = |E_G|$ ,  $f(G) = \chi(G)$ ,

**Определение 1.3.7.** Назовем функцию  $f$  от графа липшицевой по вершинам, если для любых двух графов  $G, G'$ , таких что  $V_G = V_{G'}$ , отличающихся не более чем во всех ребрах, связанных с одной вершиной, выполнено неравенство  $|f(G) - f(G')| \leq 1$ .

**Теорема 1.3.8.** (б/д, следствие из неравенства Азумы)

Пусть  $f$  — липшицева по вершинам функция. Тогда

$$\forall \lambda > 0 : P(|f - Ef| \geq \lambda \sqrt{n-1}) \leq 2^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

**Лемма 1.3.1.** Пусть  $\alpha \in (\frac{5}{6}, 1)$ ,  $p = n^{-\alpha}$ . Тогда  $\exists n_0 \forall n \geq n_0$  :

$$P(\exists S \subset V, |S| \leq \sqrt{n} \ln n : \chi(G|_S) \leq 3) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} P(\exists S \subset V : |S| \leq \sqrt{n} \ln n : \chi(G|_S) \geq 4) &= P(\exists S \subset V : |S| \in [4, \sqrt{n} \ln n] : \chi(G|_S) \geq 4) = \\ &= P(\exists S \subset V : |S| \in [4, \sqrt{n} \ln n] : \chi(G|_S) \geq 4, \text{ но } \forall x \in S : \chi(G|_{S-x}) \leq 3) = P(A) \end{aligned}$$

т.е. в конце рассматривается минимальное  $S$  по включению. Заметим, что если выполнено событие под вероятностью, то  $\forall x \in S \deg_{G|_S}(x) \geq 3$ . А значит

$$\begin{aligned} P(A) &\leq P(\exists S \subset V : |S| \in [4, \sqrt{n} \ln n], E(G|_S) \geq \frac{3|S|}{2}) \\ &\leq \sum_{s=4}^{\sqrt{n} \ln n} \sum_{S \subset V, |S|=s} P(E(G|_S) \geq \frac{3s}{2}) \\ &\leq \sum_{s=4}^{\sqrt{n} \ln n} \sum_{S \subset V} C_{C_s^2}^{3s/2} p^{3s/2} \\ &= \sum_s C_n^s C_{C_s^2}^{3s/2} p^{3s/2} \leq \sum_s \left(\frac{en}{s}\right)^s \left(\frac{eC_s^2}{3s/2}\right)^{3s/2} p^{3s/2} \end{aligned}$$

где последнее неравенство верно из оценки  $C_n^k \leq \frac{n^k}{k!}$  и формулы Стирлинга. Продолжаем

$$\begin{aligned} &< \sum_s \left(\frac{en}{s} \cdot s^{3/2} \cdot p^{3/2}\right)^s = \sum_{s=4}^{\sqrt{n} \ln n} \left(en\sqrt{s}p^{3/2}\right)^s \\ &\leq \sum_{s=4}^{\sqrt{n} \ln n} \left(en\sqrt[4]{n}\sqrt{\ln n}p^{3/2}\right)^s < \sum_{s=4}^{\infty} \left(en^{5/4}n^{-3\alpha/2}\sqrt{\ln n}\right)^s \\ &< \sum_{s=4}^{\infty} (n^{-\beta})^s = \frac{n^{-4\beta}}{1 - n^{-\beta}} < \frac{1}{\ln n} \end{aligned}$$

где последние два неравенства верны, начиная с некоторого  $n_0$ . Лемма доказана.  $\square$

*Доказательство теоремы 1.3.7.* Пусть  $n$  таково, что для него выполняется лемма 1.3.1. Возьмем минимальное  $u$ , такое что  $P(\chi(G) \leq u) > \frac{1}{\ln n}$  (такое существует, поскольку чем меньше  $u = n, n-1, \dots, 1, 0$ , тем меньше соответствующая вероятность). Тогда  $P(\chi(G) \leq u-1) \leq \frac{1}{\ln n} \Rightarrow P(\chi(G) \geq u) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$ .

Введем функцию  $f(G) := \min\{|S| : S \subset V \text{ и } \chi(G|_{V \setminus S}) \leq u\}$ . Нетрудно понять, что  $f$  — липшицева по вершинам (действительно, рассмотрим некоторую  $x \in V$ . Удалим из графа все ребра, выходящие из  $x$ . Тогда  $x$  нужно либо добавить в множество  $|S|$ , либо же убрать из него. В любом случае, отличие

в значениях функции  $f$  максимум в один). Возьмем  $\lambda := \sqrt{2n \ln \ln n}$  (тогда  $e^{-\lambda^2/2} = \frac{1}{\ln n}$ ). По теореме 1.3.8, верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} P(f - Ef \geq \lambda\sqrt{n-1}) &\leq e^{-\lambda^2/2} \\ P(f - Ef \leq -\lambda\sqrt{n-1}) &\leq e^{-\lambda^2/2} \end{aligned}$$

Предположим, что  $Ef \geq \lambda\sqrt{n-1}$ . Тогда

$$P(f - Ef \leq -\lambda\sqrt{n-1}) = P(f \leq Ef - \lambda\sqrt{n-1}) \geq P(f \leq 0) = P(\chi(G) \leq u) > \frac{1}{\ln n}$$

что противоречит следствию 1.3.8.

Значит,  $Ef < \lambda\sqrt{n-1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} P(f \geq Ef + \lambda\sqrt{n-1}) &\leq \frac{1}{\ln n} \\ \Rightarrow P(f \geq 2\lambda\sqrt{n-1}) &\leq \frac{1}{\ln n} \\ \Rightarrow P(f < 2\lambda\sqrt{n-1}) &\geq 1 - \frac{1}{\ln n} \\ \Rightarrow P(f < \sqrt{n} \ln n) &\geq 1 - \frac{1}{\ln n} \text{ [т.к. } \sqrt{n} \ln n \geq 2\lambda\sqrt{n-1} \text{ ]} \end{aligned}$$

Определим события:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\chi(G) \geq u\} \\ A_2 &:= \{\text{событие из леммы 1.3.1}\} \\ A_3 &:= \{f(G) \leq \sqrt{n} \ln n\} \end{aligned}$$

по доказанному выше,  $P(A_i) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$ . Пусть  $A := A_1 \cap A_2 \cap A_3$ . Тогда

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3) \leq \frac{3}{\ln n} \Rightarrow P(A) \geq 1 - \frac{3}{\ln n} \rightarrow 1$$

Возьмем произвольный  $G \in A$ . Поскольку  $G \in A_1$ , то  $\chi(G) \geq u$ . Поскольку  $G \in A_2 \cap A_3$ , то  $\chi(G) \leq u + 3$  (действительно, рассмотрим множество, удаление которого дает  $u$  цветов, а потом покрасим это множество еще в 3 цвета). Теорема доказана.  $\square$

### 1.3.5 Жадный алгоритм поиска $\chi$ , $\alpha$ , $\omega$

Пусть нам дан граф  $G$ . Зафиксируем некоторую нумерацию его вершин. Покрасим первую вершину в первый цвет. Далее, если она связана со второй, то покрасим вторую вершину в новый цвет, а иначе в первый. И вообще, пусть  $c : V \rightarrow \mathbb{N}$  — раскраска графа. Тогда  $c(v_i) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{вершину } v_i \text{ можно покрасить в цвет } k \text{ на данном шаге}\}$ . Тогда  $\max_{v_i} c = \chi_g(G)$ , а мощность самого большого цвета в полученной раскраски —  $\alpha_g(G)$ , а описанный алгоритм называется *жадным алгоритмом* раскраски графа.



**Теорема 1.3.9.** (Эрдеш-Боллобаш)

Для любого  $\varepsilon > 0$  в модели  $G(n, \frac{1}{2})$  а.н.н.

$$\frac{\alpha(G)}{\alpha_g(G)} \leq 2 + \varepsilon \iff \mathbf{P} \left( \frac{\alpha(G)}{\alpha_g(G)} \leq 2 + \varepsilon \right) \rightarrow 1.$$

*Доказательство.* Из теоремы 1.3.5 известно, что  $\mathbf{P}(\alpha(G) \leq 2 \log_2 n) \rightarrow 1$ . Это означает, что достаточно доказать, что

$$\mathbf{P}(\alpha_g(G) \leq (1 - \varepsilon) \log_2 n =: A) \rightarrow 1.$$

Пусть  $m := \left\lfloor \frac{n}{2(1 - \varepsilon) \log_2 n} \right\rfloor \leq \frac{n}{2(1 - \varepsilon) \log_2 n}$ . Если событие  $A$  выполнено, то

$$\exists a_1, \dots, a_m \exists C_1, \dots, C_m \subset V, \forall i |C_i| = a_i \leq (1 - \varepsilon) \log_2 n; \forall i, j: C_i \cap C_j = \emptyset.$$

Рассмотрим события  $B_{a_1, \dots, a_m; C_1, \dots, C_m} := \{\forall x \forall i \exists y \in C_i: (x, y) \in E_G\}$ . Для фиксированных  $x$  и  $i$  вероятность

$$\mathbf{P}(\exists y \in C_i: (x, y) \in E_G) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i},$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_{a_1, \dots, a_m; C_1, \dots, C_m}) &= \left( \prod_{i=1}^m \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i} \right) \right)^{n - a_1 - \dots - a_m} \\ &\leq \left( \prod_{i=1}^m \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i} \right) \right)^{n - m(1 - \varepsilon) \log_2 n} \\ &\leq \left( \prod_{i=1}^m \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i} \right) \right)^{\frac{n}{2}} \\ &\leq \left( \prod_{i=1}^m \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(1 - \varepsilon) \log_2 n} \right) \right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \left( 1 - \frac{1}{n^{1 - \varepsilon}} \right)^{\frac{mn}{2}} \\ &= \exp \left[ \frac{mn}{2} \ln \left( 1 - \frac{1}{n^{1 - \varepsilon}} \right) \right] \leq \exp \left[ - \frac{mn^\varepsilon}{2} \right] \\ &\leq \exp \left[ - \frac{1}{8} \frac{n}{\log_2 n} n^\varepsilon \right] \leq e^{-n^{1 + \frac{\varepsilon}{2}}} \end{aligned}$$

Зная это, оценим  $P(A)$  :

$$\begin{aligned}
P(A) &\leq \sum_{a_1=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} \dots \sum_{a_m=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} \sum_{C_1, \dots, C_m} P(B_{a_1, \dots, a_m; C_1, \dots, C_m}) \\
&\leq e^{-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{a_1} \dots \sum_{a_m} C_n^{a_1} \dots C_n^{a_m} \\
&< e^{-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{a_1} \dots \sum_{a_m} n^{a_1 + \dots + a_m} \\
&\leq e^{-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{a_1} \dots \sum_{a_m} n^{n/2} \\
&< e^{-n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{1}{2} \ln n} (\log_2 n)^m = \exp \left[ -n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{n}{2} \ln n + m \ln \log_2 n \right] \\
&\leq \exp \left[ -n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{n}{2} \ln n + \frac{n \ln \log_2 n}{2(1-\varepsilon)\log_2 n} \right] = \exp \left[ -n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} (1 + o(1)) \right] \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

□

**Теорема 1.3.10.** (*б/д, Кучера*)

$\forall \varepsilon, \delta > 0$  существует последовательность графов  $G_n$  на  $n$  вершинах, такая что

$$P \left( \frac{\alpha(G_n)}{\alpha_g(G_n)} \geq n^{1-\varepsilon} \right) \geq 1 - \delta.$$

*Утверждение 1.3.5.1.* Пусть в модели  $G(n, p)$  вероятность появления ребра  $p = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Тогда а.п.н. в  $G$  нет ребер.

*Доказательство.* Пусть  $\xi$  — случайная величина, равная числу ребер в  $G$ . Тогда

$$P(\xi \geq 1) \leq E\xi = C_n^2 p \sim \frac{n^2}{2} p \rightarrow 0.$$

□

*Утверждение 1.3.5.2.* Пусть в модели  $G(n, p)$  вероятность появления ребра  $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$ . Тогда а.п.н.  $\chi(G) \leq 2$ .

*Доказательство.* Пусть  $\xi$  — случайная величина, равная числу простых циклов в  $G$ . Тогда

$$P(\xi \geq 1) \leq E\xi = \sum_{r=3}^n C_n^r \frac{(r-1)!}{2} p^r < \sum_r \frac{n^r}{r!} \frac{(r-1)!}{2} p^r < \sum_{r=3}^{\infty} (np)^r = \frac{(np)^3}{1-np} \rightarrow 0.$$

□

*Упражнение.* Пусть  $p = \frac{c}{n}, c \in (0, 1)$ . Тогда а.п.н. все компоненты связности в  $G$  либо деревья, либо унициклические графы и  $\chi(G) \leq 3$ .

## 1.4 Основы линейно-алгебраического метода

### 1.4.1 Определение экстремальных величин в гиперграфе

**Определение 1.4.1.** *Гиперграфом* называется пара  $H = (V, E)$ , где  $V$  — множество вершин, а  $E$  — произвольное подмножество  $2^V$  (т.е. в отличие от обычного графа, ребро гиперграфа это произвольное неупорядоченное множество вершин).

**Определение 1.4.2.** Гиперграф называется  $k$ -однородным (для  $k \geq 2$ ), если  $\forall a \in E : |a| = k$ .

**Определение 1.4.3.** Основные экстремальные величины, рассматриваемые в этом разделе:

$$\begin{aligned} f(n, k, t) &= \max\{f \in \mathbb{N} : \exists k\text{-однородный гиперграф } H = (V, E), |V| = n, |E| = f, \forall A, B \in E : |A \cap B| \geq t\} \\ h(n, k, t) &= \max\{h \in \mathbb{N} : \exists k\text{-однородный гиперграф } H = (V, E), |V| = n, |E| = h, \forall A, B \in E : |A \cap B| \leq t\} \\ m(n, k, t) &= \max\{m \in \mathbb{N} : \exists k\text{-однородный гиперграф } H = (V, E), |V| = n, |E| = m, \forall A, B \in E : |A \cap B| \neq t\} \end{aligned}$$

Для примера рассмотрим граф  $G(n, r, s)$  (надпись для тех, кто не помнит что это). Интерпретируем вершины этого графа как ребра некоторого  $r$ -однородного гиперграфа, а пару вершин, пересекающихся по  $s$  элементам — ребром. Легко понять, что  $\alpha(G(n, 3, 1)) = m(n, 3, 1)$ , и вообще

$$\alpha(G(n, k, t)) = m(n, k, t)$$

### 1.4.2 Оценки для $f(n, k, t)$

**Теорема 1.4.1.** (*Эрдеши-Ко-Радо*)

$$f(n, k, 1) = \begin{cases} C_n^k & 2k > n \\ C_{n-1}^{k-1} & 2k \leq n \end{cases}$$

*Доказательство.* Первый случай очевиден. Верхняя оценка  $f(n, k, 1) \geq C_{n-1}^{k-1}$  в случае  $2k \leq n$  тоже проста: достаточно рассмотреть совокупность  $\mathcal{M} = \{M \subset [n], |M| = k \wedge 1 \in M\}$ . Покажем теперь, что  $f(n, k, 1) \leq C_{n-1}^{k-1}$ . Рассмотрим совокупность  $\mathcal{F} = H_E = \{F_1, \dots, F_s\}$ ,  $\forall i, |F_i| = k, \forall i, j : |F_i \cap F_j| \geq 1$ . Наша цель показать, что  $s \leq C_{n-1}^{k-1}$ .

Рассмотрим семейство множеств  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ , где  $A_1 = \{1, 2, \dots, k\}, A_2 = \{2, \dots, k+1\}, \dots, A_n = \{n, 1, 2, \dots, k-1\}$ . Докажем сначала следующую лемму:

**Лемма 1.4.1.**  $|\mathcal{F} \cap \mathcal{A}| \leq k$  (*круговой метод Катона*)

*Доказательство.* Если  $\mathcal{F} \cap \mathcal{A} = \emptyset$ , то все очевидно. Иначе, без ограничения общности, считаем, что  $A_1 \in \mathcal{F}$ . Все остальные  $A_i \in \mathcal{F} \cap \mathcal{A}$  должны пересекать  $A_1$  и пересекаться между собой. Разобем их на пары следующим образом:  $(A_i, A_{n-k+i})$  для  $i \geq 2$  (например, пара  $(A_2, A_{n-k+2})$  —  $A_2$  начинается с 2, а  $A_{n-k+2}$  кончается в 1). Тогда  $A_i \cap A_{n-k+i} = \emptyset$ . Рассмотрим следующие пары:  $(A_2, A_{n-k+2}), \dots, (A_k, A_n)$ .

В этих парах все множества пересекают  $A_1$ , но при этом два множества из одной пары не пересекаются. Это означает, что в  $\mathcal{A} \cap \mathcal{F}$  не более одного множества из каждой пары, откуда следует

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{F}| \leq 1 (A_1) + (\text{количество пар}) = 1 + k - 1 = k$$

и лемма доказана.  $\square$

Изначально  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Рассмотрим любую перестановку  $\sigma \in S_n$ . Определим множества  $V_\sigma = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$  и  $\mathcal{A}_\sigma = \{\sigma(A_1), \dots, \sigma(A_n)\}$ , где  $\sigma(A_i)$  означает множество  $\{\sigma(i), \sigma(i+1), \dots\}$ . Например, для  $n = 7$  и  $\sigma$  такой, что  $V_\sigma = \{2, 5, 1, 3, 4, 6, 7\}$  совокупность  $\mathcal{A}_\sigma$  это множество  $\{\{2, 5, 1\}, \{5, 1, 3\}, \dots, \{6, 7, 2\}, \{7, 2, 5\}\}$

**Лемма 1.4.2.**  $|\mathcal{F} \cap \mathcal{A}_\sigma| \leq k$  — доказательство аналогично предыдущей лемме.

Определим индикаторы  $I(\sigma, F_i) = \begin{cases} 1 & F_i \in \mathcal{A}_\sigma, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$  и посмотрим на следующую величину:

$$\sum_{\sigma} \sum_{i=1}^s I(\sigma, F_i) = \sum_{i=1}^s \sum_{\sigma} I(\sigma, F_i)$$

При фиксированной перестановке сумма  $\sum_{i=1}^s I(\sigma, F_i) = |\mathcal{A}_\sigma \cap \mathcal{F}| \leq k$ , а значит сумма слева не превосходит  $n!k$ . С другой стороны, при фиксированном  $i$ ,  $F_i$  может оказаться на одном из  $n$  мест в множестве  $\mathcal{A}_\sigma$ , и перестановок, в которых возникает  $F_i$ , ровно  $k!(n-k)!$ , а значит  $\sum_{\sigma} I(\sigma, F_i) = nk!(n-k)!$  и вся сумма справа  $= snk!(n-k)!$ . Окончательно получаем

$$snk!(n-k)! = \sum_{i=1}^s \sum_{\sigma} I(\sigma, F_i) = \sum_{\sigma} \sum_{i=1}^s I(\sigma, F_i) \leq kn! \Rightarrow s \leq C_{n-1}^{k-1}$$

$\square$

**Пример 1.4.1.** Аналогично теореме Эрдеша-Ко-Радо получаем оценку для  $f(n, k, 2)$ :

$$f(n, k, 2) = \begin{cases} C_{n-2}^{k-2} & 2k \leq n+1, \\ C_n^k & 2k > n+1 \end{cases}.$$

Рассмотрим  $f(8, 4, 2)$ : имеем оценку

$$f(8, 4, 2) \geq C_6^2 = 15.$$

Однако, рассмотрим совокупность

$$\mathcal{F} = \{A \sqcup B \mid A \subset \{1, \dots, 4\}, |A| = 3; B \subset \{5, \dots, 8\}, |B| = 1\}.$$

Нетрудно понять, что  $|\mathcal{F}| = 16$  и любые два множества из  $\mathcal{F}$  пересекаются ровно по двум элементам. При этом в  $\mathcal{F}$  можно добавить, например, множество  $\{1, \dots, 4\}$  и получить новую совокупность с  $|\mathcal{F}'| = 17$ , подходящую под определение  $f(8, 4, 2)$ , что говорит о том, что полученная оценка не является наилучшей.

Рассмотрим историю улучшений оценки для  $f(n, k, t)$ .

**Теорема 1.4.2.** (6/д, 1961г — Эрдеши-Ко-Радо)

$$\forall k, t, \exists n_0(k, t) : \forall n \geq n_0 : f(n, k, t) = C_{n-t}^{k-t}$$

**Теорема 1.4.3.** (6/д, 1979г — Франкль)

Если  $k \geq 15$ , то

$$n_0(k, t) = (k - t + 1)(t + 1).$$

**Теорема 1.4.4.** (6/д, 1983г — Уилсон)

$$\forall k, t : n_0 = (k - t + 1)(t + 1). \text{ Для } n \geq n_0 \text{ } f(n, k, t) = C_{n-t}^{k-t}, \text{ а для меньших } n \text{ } f(n, k, t) > C_{n-t}^{k-t}.$$

Зафиксируем  $k$  и  $t$  и рассмотрим  $n$ , такое что  $(k - t + 1)(2 + \frac{t-1}{2}) \leq n < (k - t + 1)(t + 1)$  (замечание:  $t + 1 = 2 + \frac{t-1}{1}$ ). Тогда оптимальной является следующая конструкция:

$$\mathcal{F} = \{F \subset \{1, \dots, n\}, |F| = k, |F \cap \{1, 2, \dots, t + 2\}| \geq t + 1\}$$

В таком случае  $|F| = C_{t+2}^{t+1} \cdot C_{n-t-2}^{k-t-1} + C_{t+2}^{t+2} \cdot C_{n-t-2}^{k-t-2}$ . Разумно задаться вопросом "что это?". Так вот, ответ на это дает последняя теорема в нашем списке:

**Теорема 1.4.5.** (6/д, 1996г — Алсведе-Хачатрян)

Зафиксируем  $k, t$ . Пусть  $n, r$  таковы, что

$$(k - t + 1)(2 + \frac{t-1}{r+1}) \leq n < (k - t + 1)(2 + \frac{t-1}{r})$$

Тогда  $f(n, k, t) = |\mathcal{F}|$ , где

$$\mathcal{F} = \{F \subset [n], |F| = k, |F \cap \{1, \dots, t + 2r\}| \geq t + r\}$$

(при  $r = 0$  это теорема Эрдеши-Ко-Радо).

### 1.4.3 Оценки для $h(n, k, t)$ и $m(n, k, t)$

**Теорема 1.4.6.**

$$h(n, k, t) = \frac{C_n^{t+1}}{C_k^{t+1}}$$

*Доказательство.* Пусть  $H = (V, E)$  — гиперграф с условием из определения  $h(n, k, t)$ . Для каждого его ребра (мощность каждого ребра —  $k$ ) рассмотрим все его  $t + 1$  элементные подмножества. Поскольку для любых двух ребер  $|A \cap B| \leq t < t + 1$ , то для разных ребер графа  $H$  множества их  $t + 1$ -элементных подмножеств различны. При этом в каждом наборе ровно  $C_k^{t+1}$  элементов. Тогда

$$|E| C_k^{t+1} \leq C_n^{t+1}$$

откуда следует требуемое неравенство. □

**Теорема 1.4.7.** (б/д, 1980е, Рёдль)

Если  $k$  и  $t$  фиксированные, а  $n \rightarrow \infty$ , то

$$h(n, k, t) \sim \frac{C_n^{t+1}}{C_k^{t+1}}$$

**Теорема 1.4.8.** (б/д, 2014-2015, Кивовш)

Если  $k$  и  $t$  фиксированные, а  $n \rightarrow \infty$ , то, в естественных условиях делимости, выполнено равенство

$$h(n, k, t) = \frac{C_n^{t+1}}{C_k^{t+1}}$$

**Теорема 1.4.9.** (Франкл, Уилсон, 1981)

Пусть  $k - t = p^\alpha$ , где  $p$  — простое, а  $\alpha$  — натуральное число больше нуля. Пусть  $k - 2p^\alpha < 0$ .

Тогда выполнено неравенство

$$m(n, k, t) \leq \sum_{i=0}^{p^\alpha-1} C_n^i$$

*Доказательство.* (Доказательство для  $\alpha = 1$ , остальное — упражнение)

Рассмотрим произвольный гиперграф  $H$  с указанными в определении числа  $m$  ограничениями.  $E = \{A_1, \dots, A_s\}$ ,  $|A_i| = k$ ,  $\forall i \neq j : |A_i \cap A_j| \neq t$ . Каждому  $A_i$  сопоставим вектор  $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_n)$ , где  $x_i = 1$ , если  $i \in A_i$  и  $x_i = 0$  иначе (заметим, что  $|A_i \cap A_j| = \langle \bar{x}_i, \bar{x}_j \rangle$ ). Сопоставим теперь каждому  $\bar{x}_i$  многочлен от  $n$  переменных над  $\mathbb{Z}_p$  следующим образом:

$$F_{\bar{x}_i}(\bar{y}) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq t \pmod{p}}}^p (j - \langle \bar{x}_i, \bar{y} \rangle)$$

Докажем, что многочлены  $F_{\bar{x}_1}, \dots, F_{\bar{x}_s}$  — линейно независимы над  $\mathbb{Z}_p$ . Предположим противное: пусть нашлись коэффициенты  $\{c_i\}$ , такие что

$$c_1 F_{\bar{x}_1} + \dots + c_s F_{\bar{x}_s} = 0$$

Тогда  $\forall y : c_1 F_{\bar{x}_1}(y) + \dots + c_s F_{\bar{x}_s}(y) \equiv 0 \pmod{p}$ . В частности, рассмотрим  $y = x_i$ . Имеем  $\langle x_i, x_i \rangle = k \equiv t \pmod{p}$  (поскольку  $k - t = p^\alpha$ ), а значит  $F_{\bar{x}_i}(x_i) \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

Теперь

$$\left. \begin{aligned} \langle x_i, x_j \rangle &< k \text{ т.к. } i \neq j \\ \langle x_i, x_j \rangle &\neq t \text{ т.к. граф из определения } m(n, k, t) \\ \langle x_i, x_j \rangle &\neq t - p \text{ т.к. } t - p = k - 2p < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle \neq t \pmod{p} \Rightarrow F_{\bar{x}_j}(x_i) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Отсюда следует, что  $\forall i c_i = 0$ , а значит количество многочленов не превосходит размерности пространства многочленов.

Раскроем в каждом многочлене скобки, и уменьшим в каждом одночлене степень входящих в него до 1. Получим новые многочлены  $\tilde{F}_{\bar{x}_i}$ , причем  $\tilde{F}_{\bar{x}_i}(x) = F_{\bar{x}_i}(x)$  при  $x \in \mathbb{Z}_2^n$ . Базис, порождающий пространство  $\tilde{F}_{\bar{x}_i}$ , — это одночлены, коих  $\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i$ , откуда  $s \leq \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i$ .  $\square$

**Теорема 1.4.10.** Пусть  $k - t = p$ , где  $p$  — простое,  $k - 2p \geq 0$ ,  $d = k - 2p + 1$ . Тогда

$$m(n, k, t) \leq \frac{C_n^d}{C_k^d} \sum_{i=0}^{p-1} C_{n-d}^i.$$

*Доказательство.* Рассмотрим всевозможные подмножества вершин гиперграфа мощности  $d : D_1, \dots, D_{C_n^d}$  и систему

$$\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_s \mid |F_i| = k, |F_i \cap F_j| \neq t\}$$

и определим функции

$$I(D_i, F_j) = \begin{cases} 1 & D_i \subset F_j, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{C_n^d} \sum_{j=1}^s I(D_i, F_j) &= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{C_n^d} I(D_i, F_j) \\ &= \sum_{j=1}^s C_k^d = s C_k^d \end{aligned}$$

откуда  $\exists i : \sum_{j=1}^s I(D_i, F_j) \geq \frac{s C_k^d}{C_n^d}$ .

Рассмотрим совокупность  $\mathcal{F}'$  всех  $F_j$  из  $\mathcal{F}$ , таких что  $D_i \subset F_j$ . Сопоставим каждому  $F_j$  из  $\mathcal{F}'$  вектор  $x_j \in \mathbb{Z}_2^k$  и многочлен  $F_{x_j}$  аналогично доказательству теоремы 1.4.9. Проводим дальше рассуждение, аналогичное доказательству теоремы 1.4.9, с той лишь разницей, что  $\langle x_j, x'_j \rangle = |F_j \cap F'_j| \geq d$  и

$$\begin{cases} \langle x_j, x'_j \rangle = k \\ \langle x_j, x'_j \rangle \neq k - p \text{ по условию теоремы} \\ \langle x_j, x'_j \rangle \neq k - 2p < d \end{cases} \Rightarrow \langle x_j, x'_j \rangle \neq k \pmod{p} \text{ при } x_j \neq x'_j.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{p-1} C_{n-d}^i \geq |\mathcal{F}'| \geq \frac{s C_k^d}{C_n^d} \Rightarrow s \leq \frac{C_n^d}{C_k^d} \sum_{i=0}^{p-1} C_{n-d}^i.$$

□

#### 1.4.4 Асимптотические оценки

Пусть  $k, t = \text{const}$ ,  $n \rightarrow +\infty$ ,  $p = k - t$  — простое. Тогда в условиях теоремы 1.4.9:

$$m(n, k, t) \leq \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i \sim \frac{n^{p-1}}{(p-1)!} = \frac{n^{k-t-1}}{(k-t-1)!}.$$

При этом

$$m(n, k, t) \geq f(n, k, t+1) \geq C_{n-t-1}^{k-t-1} \sim \frac{(n-t-1)^{k-t-1}}{(k-t-1)!} \sim \frac{n^{k-t-1}}{(k-t-1)!}.$$

Пусть теперь мы находимся в условиях теоремы 1.4.10.  $d = k - 2p + 1 = k - 2(k - t) + 1 = 2t - k + 1$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
m(n, k, t) &\leq \frac{C_n^d}{C_k^d} \sum_{i=0}^{p-1} C_{n-d}^i \sim \frac{n^{2t-k+1} (n-d)^{p-1}}{C_k^d d! (p-1)!} \\
&\sim \frac{n^{2t-k+k-t}}{d! (k-t-1)! C_k^{2t-k+1}} = \frac{n^t}{(k-t-1)! \frac{k!}{d!(k-d)!} d!} \\
&= n^t \left( \frac{(2k-2t-1)!}{k!(k-t-1)!} \right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим как можно большую совокупность  $F_1, \dots, F_s$ , такую что  $|F_i| = r$  и  $|F_i \cap F_j| \leq t-1$ , причем любые два  $k$ -элементных подмножества  $r$ -элементного множества пересекаются по  $\geq t+1$  элементу. Заметим, что  $\min r = 2k - t - 1$ .

Ясно, что  $s = h(n, r, t-1)$ . Возьмем все  $k$ -элементные подмножества, которые содержатся в одном  $F_i$ . Любые два таких множества не могут пересекаться по  $t$ . Таким множеств  $C_r^k h(n, r, t-1)$ . Тогда

$$\begin{aligned}
m(n, k, t) &\geq C_r^k h(n, r, t-1) \sim C_r^k \cdot \frac{C_n^t}{C_r^t} \\
&\sim \frac{(2k-t-1)!}{k!(k-t-1)!} \cdot \frac{n^t t! (r-t)!}{t! r!} = \frac{(2k-t-1)!}{k!(k-t-1)!} \cdot \frac{n^t (2k-2t-1)!}{(2k-t-1)!} \\
&= n^t \frac{(2k-2t-1)!}{k!(k-t-1)!}
\end{aligned}$$



## 1.5 Хроматическое число пространства

**Определение 1.5.1.**

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \{\min k \in \mathbb{N} \mid \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k : \forall i : \forall x, y \in V_i : |x - y| \neq 1\}.$$

**Известные значения:**

1.  $\chi(\mathbb{R}) = 2$ .
2.  $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ , причем если потребовать измеримость множеств  $V_i$  по Лебегу, то  $5 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ .
3.  $6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$ .
4.  $10 \leq \chi(\mathbb{R}^4) \leq 54$ .

*Утверждение 1.5.0.1.*

$$n + 1 \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (4\sqrt{n})^n$$

*Доказательство.* Оценка  $n + 1 \leq \chi(\mathbb{R}^n)$  следует из существования симплекса в  $\mathbb{R}^n$ , все вершины которого должны быть покрашены в разные цвета.

Рассмотрим  $n$ -мерный куб со стороной 2. Разобьем его на  $(4\sqrt{n})^n$  маленьких кубиков со стороной  $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ . Покрасим точки внутри одного маленького кубика в свой цвет. Поскольку мы правильно раскрасили куб со стороной 2, то аналогично мы раскрасим всё пространство, откуда

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leq (4\sqrt{n})^n.$$

□

**Теорема 1.5.1.** (6/д)

Пусть  $\chi$  бесконечного графа (т.е.  $|V| = \infty$ ) конечное хроматическое число. Тогда существует его конечный подграф, имеющий то же хроматическое число.

**Определение 1.5.2.** Граф называется *дистанционным*, если  $V \subset \mathbb{R}^n$ , а  $E = \{(x, y) \in V : |x - y| = a > 0\}$ .

Рассмотрим  $G(n, k, t) = (V, E)$ ,  $V = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 + \dots + x_n = k, x_i \in \{0, 1\}\}$ ,  $E = \{(x, y) : \langle x, y \rangle = t \Leftrightarrow |x - y| = \sqrt{2k - 2t}\}$ .

Тогда

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G(n, k, t)) \geq \frac{|V|}{m(n, k, t)} = \frac{C_n^k}{m(n, k, t)} \Rightarrow \chi(\mathbb{R}^n) \geq \max_{k, t} \left\{ \frac{C_n^k}{m(n, k, t)} \right\}.$$

*Утверждение 1.5.0.2.* (б/д)

Максимум достигается при  $k = k(n) = \left\lceil \frac{2-\sqrt{2}}{2}n \right\rceil$ ,  $t = k - p$  где  $p$  — простое, такое что  $k - 2p < 0$ . А, как известно, на  $[x, x + Cx^{0.525}]$  есть простое число  $\Rightarrow p \sim \frac{k}{2}$ .

**Следствие.**

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.207 + o(1))^n$$

*Доказательство.* Пусть  $a := \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ,  $k = an$ . Имеем

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{R}^n) &\geq \frac{C_n^k}{\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i} = \frac{\left( \frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}} + o(1) \right)^n}{\left( \left( \frac{a}{2} \right)^{\frac{a}{2}} \left( 1 - \frac{a}{2} \right)^{1-\frac{a}{2}} + o(1) \right)^n} \\ &= \left( \frac{\left( \frac{a}{2} \right)^{\frac{a}{2}} \left( 1 - \frac{a}{2} \right)^{1-\frac{a}{2}}}{a^a(1-a)^{1-a}} + o(1) \right)^n \\ &= \left( \frac{1 + \sqrt{2}}{2} + o(1) \right)^n = (1.207 + o(1))^n \end{aligned}$$

□

**Теорема 1.5.2.** (*б/д, Райгородский*)

$$(1.239 + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

# Глава 2

## 2 семестр

### 2.1 Турановские результаты

**Теорема 2.1.1.** (Туран)

Пусть у графа  $G = (V, E)$  число вершин  $|V| = n$  и  $\alpha = \alpha(G)$ . Тогда в этом графе

$$|E| \geq n \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \left[ \frac{n}{\alpha} + 1 \right] \cdot \frac{\alpha}{2}$$

*Доказательство.* Пусть  $A \subset V$  — наибольшее независимое множество,  $|A| = \alpha$ . Тогда  $\forall x \in V \setminus A \exists y \in A : (x, y) \in E$ , что уже дает  $\geq n - \alpha$  ребер. Удалим из графа множество  $A$  вместе со всеми ребрами. В оставшемся графе  $G'$  снова рассмотрим наибольшее независимое множество  $A'$ ,  $|A'| \leq \alpha$ . Аналогично находим еще как минимум  $n - 2\alpha$  ребер и снова повторяем наши действия.

Всего будет  $\geq \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor$  шагов, а суммарно найдено будет как минимум

$$\left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \cdot n - \alpha \left( 1 + 2 + \dots + \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \right) = n \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \left[ \frac{n}{\alpha} + 1 \right] \cdot \frac{\alpha}{2}$$

ребер. □

Заметим, что полученная оценка неулучшаема. Действительно, пусть  $\alpha \mid n$ . Тогда оценка имеет вид  $\frac{n^2}{\alpha} - \frac{n(n/\alpha+1)}{2} = \frac{n^2}{2\alpha} - \frac{n}{2}$ . Рассмотрим тогда  $\alpha$  клик на  $\frac{n}{\alpha}$  вершинах. В таком графе число ребер равно  $C_{\frac{n}{\alpha}}^2 \cdot \alpha = \frac{n^2}{2\alpha} - \frac{n}{2}$ .

Заметим также, что если в формулировке теоремы 2.1.1 от графа  $G$  перейти к графу  $\overline{G}$ , то, используя равенство  $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ , получим утверждение, что если в графе много ребер, то в нем обязательно есть клика.

**Следствие.** Пусть  $G_n = (V_n, E_n)$  — последовательность графов с  $|V_n| = n$  и  $\alpha_n = \alpha(G_n)$ . Пусть  $\alpha_n = o(n)$ . Тогда

$$|E_n| \geq \frac{n^2}{2\alpha_n} (1 + o(1))$$

(В этих условиях  $\left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \rightarrow \infty \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \sim \frac{n}{\alpha}$ )

**Определение 2.1.1.** Граф  $G$  называется *дистанционным* графов, если  $V \subset \mathbb{R}^n$  и  $E = \{(x, y) : |x - y| = a\}$

**Теорема 2.1.2.** Пусть  $G = (V, E)$  — дистанционный граф на плоскости,  $|V| = 4n$ ,  $\alpha(G) = n$ . Тогда  $|E| \geq 7n$ .

*Доказательство.* Повторяя полностью рассуждения из теоремы Турана получаем оценку  $|E| \geq 6n$ , при этом найдя на первом шаге  $\geq 3n$  ребер. Покажем, что на первом шаге можно найти  $\geq 4n$  ребер.

Пусть  $A$  — наибольшее независимое множество в  $V$ ,  $V \setminus A = V_1 \sqcup V_2$ , где  $V_1 = \{v \in V \setminus A \mid v \text{ ровно один сосед в } A\}$  а  $V_2 = \{v \in V \setminus A \mid v \text{ хотя бы 2 соседа в } A\}$ . Предположим, что  $|V_1| > 2n$ . Тогда  $\exists y \in A : \exists x_1, x_2, x_3 \in V_1 : \{(x_1, y), (x_2, y), (x_3, y)\} \subset E$ . Если одного из ребер  $(x_i, x_j)$  нет в графе, то добавив в  $A$  вершины  $x_i, x_j$  и удалив из  $A$  вершину  $y$  получим новое независимое множество большего размера. Иначе мы нашли 4 точки на плоскости  $y, x_1, x_2, x_3$ , попарные расстояние между которыми равны, чего быть не может  $\Rightarrow |V_1| \leq 2n$ .

Из доказанного выше следует, что  $|V_2| \geq n$ , причем каждая вершина из  $V_2$  дает хотя бы 2 ребра. Поскольку  $|V_1| + |V_2| = 3n$ , то всего на первом шаге будет набрано  $\geq 4n$  ребер.  $\square$

**Факт.** Самый лучший известный результат:  $|E| \geq \frac{26}{3}n$ .

**Теорема 2.1.3.** Пусть  $G_d = (V_d, E_d)$  — последовательность дистанционных графов в  $\mathbb{R}^d$ .  $|V_d| = n = n(d)$ ,  $\alpha(G_d) = \alpha(d)$  Тогда, если  $d\alpha = o(n)$ , то

$$|E_d| \geq \frac{n^2}{\alpha} (1 + o(1))$$

*Доказательство.* Аналогично теореме выше, рассмотрим  $V \setminus A = V_1 \sqcup V_2$  и докажем, что  $|V_1| \leq \alpha d$ . Действительно, предположив противное, найдем в  $A$  вершину  $y$ , имеющую  $(d+1)$  соседа в  $V_1$  и аналогично получим противоречие с тем, что в  $\mathbb{R}^d$  нет дистанционного графа  $K_{d+2}$  (6/д).

Тогда, пользуясь тем, что  $|V_1| = v \leq \alpha d$ , на первом шаге мы нашли  $v + 2(n - \alpha - v) \geq \underbrace{d\alpha}_{V_1} + \underbrace{2(n - \alpha - \alpha d)}_{V_2}$

ребер. Всего шагов  $\left\lceil \frac{n - \alpha d}{\alpha} \right\rceil$ , а суммарное число ребер

$$\begin{aligned} & \left\lceil \frac{n - \alpha d}{\alpha} \right\rceil \cdot \alpha d + 2n \left\lceil \frac{n - \alpha d}{\alpha} \right\rceil - 2\alpha d \left\lceil \frac{n - \alpha d}{\alpha} \right\rceil - 2\alpha \left\lceil \frac{n - \alpha d}{\alpha} \right\rceil \left\lceil \frac{n - \alpha d}{\alpha} + 1 \right\rceil / 2 \\ &= \frac{2n^2}{\alpha} - \alpha n - \frac{n^2}{\alpha} = \frac{n^2 - n\alpha d}{\alpha} = \frac{n^2 + o(n^2)}{\alpha} \sim \frac{n^2}{\alpha} \end{aligned}$$

$\square$

## 2.2 Рамсеевские задачи

### 2.2.1 Оценки чисел Рамсея

**Определение 2.2.1.** Пусть  $s, t \in \mathbb{N}$ . Число Рамсея  $R(s, t) := \min\{n \in \mathbb{N} : \text{при любой раскраски ребер } K_n \text{ в красный и синий цвета либо найдется } K_s, \text{ все ребра у которого красные, либо } K_t, \text{ все ребра которого синие}\}$ .

Эквивалентное определение  $R(s, t) := \min\{n \in \mathbb{N} : \forall G = (V, E), |V| = n \text{ и либо } \omega(G) \geq s, \text{ либо } \alpha(G) \geq t\}$

*Замечание.* 1.  $R(1, t) = 1$

2.  $R(2, t) = t$

3.  $R(3, t)$  никто не знает.

**Теорема 2.2.1.** (Эрдеш, Секереш, 1935)

$$R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1)$$

*Доказательство.*  $n := R(s-1, t) + R(s, t-1)$ . Зафиксируем произвольную раскраску  $K_n$  в 2 цвета и вершину  $v \in V$ . Из нее выходит  $n-1$  ребро. От противного получаем, что из нее выходит либо  $\geq R(s-1, t)$  красных ребер, либо  $\geq R(s, t-1)$  синих. Без ограничения общности считаем, что  $\geq R(s-1, t)$  красных.  $V_1 := \{u \in V, (v, u) - \text{красное}\}$ . Поскольку  $|V_1| \geq R(s-1, t)$ , то в  $V_1$  есть либо синий  $K_t$ , либо красный  $K_{s-1}$ , который вместе с вершиной  $v$  дает искомый красный  $K_s$ .  $\square$

**Следствие.**  $R(s, t) \leq C_{s+t-2}^{t-1}$  — индукция по  $s$  и  $t$ .

**Следствие.**  $R(s, s) \leq C_{2s-1}^{s-1} = \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi s}}(1 + o(1))$

**Следствие.**  $R(3, 3) \leq C_4^2 = 6$ , при этом  $R(3, 3) > 5$  (цикл на 5 вершинах).

### 2.2.2 Диагональные числа Рамсея

**Определение 2.2.2.** Число Рамсея  $R(s, s)$  называется *диагональным*.

Выше доказана оценка  $R(s, s) \leq C_{2s-1}^{s-1} = \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi s}}(1 + o(1))$

**Теорема 2.2.2.** (Туран)

$$R(s, s) > (s-1)^2$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $s-1$  копии  $K_{s-1}$ , несвязанные между собой. Для такого графа  $\alpha(G) = s-1 = \omega(G)$ .  $\square$

**Теорема 2.2.3.** (Эрдеш, Секереш, 1935)

$$R(s, s) \geq (1 + o(1)) \frac{1}{e\sqrt{2}} \cdot s^{s/2}$$

*Доказательство.*  $n := (1 + o(1)) \frac{1}{e\sqrt{2}} \cdot s^{s/2}$ . Покажем, что существует раскраска  $K_n$ , в которой нет одноцветного  $K_s$ . Рассмотрим случайную раскраску ребер  $K_n$  в два цвета, где  $P(e - \text{красное}) = P(e - \text{синее}) = \frac{1}{2}$ . Пусть  $S \subset V$ ,  $|S| = s$  и  $A_S = \{K_s, \text{ порожденный } S - \text{одноцветный}\}$ . Тогда  $P(A_S) = 2 \cdot 2^{-C_s^2} = 2^{1-C_s^2}$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{\substack{S \subset V \\ |S|=s}} A_S\right) &\leq \sum_{\substack{S \subset V \\ |S|=s}} P(A_S) = C_n^s 2^{1-C_s^2} \leq \frac{n^s}{s!} 2^{1-s^2/2+s/2} \\ &= \frac{1}{s!} (1 + o(1))^s \cdot \frac{1}{e^s 2^{s/2}} \cdot s^s 2^{s^2/2} 2^{1-s^2/2+s/2} = \frac{(1 + o(1))^s}{\sqrt{2\pi s} \frac{s^s}{e^s} (1 + o(1))} \cdot \frac{s^s}{e^s} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \cdot \frac{(1 + o(1))^s}{(1 + o(1))} \end{aligned}$$

Подбором  $o(1)$  в числителе и знаменателе можно сделать так, что полученное число  $< 1$  при всех  $s$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $s \in \mathbb{N}$  и  $n$  таково, что  $C_n^s 2^{1-C_s^2} < 1$ . Тогда  $R(s, s) > n$ .

**Теорема 2.2.4.** Пусть дано  $s \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\forall n$

$$R(s, s) \geq n - C_n^s 2^{1-C_s^2}$$

*Доказательство.* Рассмотрим случайную раскраску  $K_n$  в два цвета. Определим случайную величину  $\xi :=$  кол-во одноцветных  $K_s$  в раскраске.

$$E\xi = C_n^s 2^{1-C_s^2} \rightarrow \exists \chi : \xi(\chi) \leq C_n^s 2^{1-C_s^2}$$

Если  $C_n^s 2^{1-C_s^2} < 1$ , то мы нашли подходящую раскраску.

Иначе зафиксируем раскраску  $\chi$  и удалим из каждого одноцветного  $K_s$  по любой вершине (возможно, одну и ту же вершину для нескольких  $K_s$ ). После удаления в графе осталось  $\geq n - C_n^s 2^{1-C_s^2}$  вершин, причем для раскраски  $\chi$  в нем нет одноцветных  $K_s$ .  $\square$

**Следствие.**

$$R(s, s) \geq (1 + o(1)) \frac{1}{e} s^{s/2}$$

*Доказательство.* Аналогично теореме 2.2.3 имеет  $C_n^s 2^{1-C_s^2} = \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \cdot \frac{(1 + o(1))^s}{(1 + o(1))} \cdot 2^{s/2}$ . Тогда, по теореме 2.2.4:

$$(1 + o(1)) \frac{s^{s/2}}{e} - \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \cdot \frac{(1 + o(1))^s}{(1 + o(1))} \cdot 2^{s/2} = (1 + o(1)) \frac{1}{e} \cdot s^{s/2}$$

$\square$

**Теорема 2.2.5.** (Спенсер, 1975)

$$R(s, s) \geq (1 + o(1)) \frac{\sqrt{2}}{e} s^{s/2}$$

*Замечание.* Это самый лучший известный результат.

Для доказательства этой теоремы мы будем использовать локальную лемму Ловаса (далее ЛЛЛ), причем сначала мы покажем, как теорема следует из ЛЛЛ в симметричной форме, потом выведем ЛЛЛ в симметричной форме из ЛЛЛ в общем случае, а далее докажем ЛЛЛ в общем случае.

**Теорема 2.2.6.** (Локальная лемма Ловаса в симметричной форме, 1973г, Ловас)

Пусть  $A_1, \dots, A_n$  — события на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Пусть известно, что  $\forall i P(A_i) \leq p < 1$  и  $\forall i A_i$  не зависит от совокупности всех остальных событий, кроме не более  $d$  штук (событие  $A$  не зависит от группы событий  $B_1, \dots, B_k$ , если  $P(A_i | \text{пересечение и объединение событий из } B_1, \dots, B_k) = P(A_i)$ ) и числа  $p, d$  не зависят от  $i$ . Тогда, если  $ep(d+1) < 1$  то

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) > 0$$

*Вывод теоремы Спенсера из ЛЛЛ в симметричной форме.* Пусть  $A_1, \dots, A_{C_n^s}$  — события, заключающиеся в том, что конкретные  $s$  вершин образуют одноцветный  $K_s$  в случайной раскраске  $K_n$ , где  $n = (1 + o(1)) \frac{\sqrt{2}}{e} s^{2s/2}$ .

$d \leq$  кол-во  $S$ -элементных множеств вершин, пересекающих множество, отвечающее событию  $A_i$ , хотя бы по 2 вершинам  $= C_s^2 C_n^{s-2}$ . Проверим условие ЛЛЛ:

$$\begin{aligned} e^{2^{1-C_s^2}} (C_s^2 C_n^{s-2} + 1) &< e^{2^{1-s^2/2+s/2}} \cdot \frac{s^2}{2} \cdot \frac{n^{s-2}}{(s-2)!} \\ &= e s^2 2^{-s^2/2+s/2} \frac{1}{(1+o(1)) \sqrt{2\pi s} \frac{(s-2)^{s-2}}{e^{s-2}}} \cdot (1+o(1))^s \frac{(\sqrt{2})^{s-2}}{e^{s-2}} 2 \end{aligned}$$

Перепишем  $(s-2)^{s-2} = s^{s-2} (1 - \frac{2}{s})^{s-2} \sim s^{s-2} (1 - \frac{2}{s})^s \sim s^{s-2} e^{-2}$  и продолжим

$$\begin{aligned} &\sim e^3 s^2 2^{-s^2/2+s/2} \frac{1}{(1+o(1)) \sqrt{2\pi s}} 2^{\frac{s-2}{2}} 2^{s^2/2-2s/2} (1+o(1))^{s-2} \\ &= e^3 \frac{s^2 (1+o(1))^s}{2 \sqrt{2\pi s} (1+o(1))} < 1 \text{ при всех } s \text{ для подходящей } \varphi = o(1) \end{aligned}$$

□

**Определение 2.2.3.** Рассмотрим события  $A_1, \dots, A_n$ . Граф  $G = (V, E)$  называется *орграфом зависимостей* для  $(A_1, \dots, A_n)$ , если  $V = (A_1, \dots, A_n)$  и  $\forall i : A_i$  не зависит от совокупности тех  $A_j$ , для которых  $(A_i, A_j) \notin E$ .

*Замечание.* Для зависимых событий ребра могут как быть в графе, так и не быть.

*Замечание.* Для фиксированной совокупности событий существует не единственный орграф зависимостей.

**Теорема 2.2.7.** (ЛЛЛ, общий случай)

Пусть  $A_1, \dots, A_n$  — события на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и  $G = (V, E)$  — их орграф зависимостей, такой что  $\exists x_1, \dots, x_n \in [0, 1)$ , т.ч.  $\forall i \ P(A_i) \leq x_i \prod_{j: (A_i, A_j) \in E} (1 - x_j)$ . Тогда

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) \geq \prod_{j=1}^n (1 - x_j) > 0$$

Вывод ЛЛЛ в симметричной форме из ЛЛЛ в общем случае. 1.  $d = 0 \Rightarrow A_1, \dots, A_n$  независимы в совокупности  $\Rightarrow$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) = \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)) \geq (1 - p)^n \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right)^n > 0$$

2.  $d \geq 1$ : Рассмотрим  $G$  — орграф зависимостей. Из  $A_i$  проводим ребра в те и только те события, от которых  $A_i$  может зависеть. Тогда  $\forall i \ \deg_{\text{out}}(A_i) \leq d$ . Положим  $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{d+1} \in [0, 1)$ .

$$ep(d+1) \leq 1 \Rightarrow p(d+1) \leq \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d \Rightarrow P(A_i) \leq p \leq \frac{1}{d+1} \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d = x_i \prod_{j: (A_i, A_j) \in E} (1 - x_j)$$

□

Доказательство ЛЛЛ в общем случае.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) \dots P(\bar{A}_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} \bar{A}_i) = (1 - P(A_1))(1 - P(A_2 | \bar{A}_1)) \dots \left(1 - P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} \bar{A}_i)\right) \quad (2.1)$$

Заметим, что из следующей леммы будет следовать ЛЛЛ:

**Лемма 2.2.1.**

$$\forall i \ \forall J \subset \{1, \dots, n\} \setminus \{i\} : P(A_i | \bigcap_{j \in J} \bar{A}_j) \leq x_i$$

Доказательство. Пусть сначала  $J = \emptyset$ . Тогда имеем

$$P(A_i | \bigcap_{j \in \emptyset} \bar{A}_j) = P(A_i | \Omega) = P(A_i) \leq x_i \prod_{j \in \emptyset} (1 - x_j) \leq x_i$$

Иначе  $J = J_1 \sqcup J_2$ , где  $J_1 := \{j \in J : (A_i, A_j) \in E\}$ ,  $J_2 := J \setminus J_1$ . Будем вести индукцию по  $|J_1|$ . База  $|J_1| = 0$ . Тогда  $P(A_i | \bigcap_{j \in J} \bar{A}_j) = P(A_i | \bigcap_{j \in J_2} \bar{A}_j) = P(A_i) \leq x_i$ .

Пусть  $J_1 = \{j_1, \dots, j_r\}$ ,  $r \geq 1$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} P(A_i | \bigcap_{j \in J} \bar{A}_j) &= P\left(A_i | \left(\bigcap_{j \in J_1} \bar{A}_j\right) \cap \left(\bigcap_{j \in J_2} \bar{A}_j\right)\right) = \frac{P\left(A_i \cap \left(\bigcap_{j \in J_1} \bar{A}_j\right) | \bigcap_{j \in J_2} \bar{A}_j\right)}{P\left(\bigcap_{j \in J_1} \bar{A}_j | \bigcap_{j \in J_2} \bar{A}_j\right)} \\ &\leq \frac{P\left(A_i | \bigcap_{j \in J_2} \bar{A}_j\right)}{P\left(\bigcap_{j \in J_1} \bar{A}_j | \bigcap_{j \in J_2} \bar{A}_j\right)} \leq \frac{x_i \prod_{j: (A_i, A_j) \in E} (1 - x_j)}{P\left(\bigcap_{j \in J_1} \bar{A}_j | \bigcap_{j \in J_2} \bar{A}_j\right)} \end{aligned}$$



Обозначим  $A_{J_i} := \bigcap_{j \in J_i} \bar{A}_j$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда осталось доказать, что  $P(A_{J_1} \mid A_{J_2}) \geq \prod_{j: (A_i, A_j) \in E} (1 - x_j)$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} P(A_{J_1} \mid A_{J_2}) &= P(\bar{A}_{j_1} \mid A_{J_2}) \cdot P(\bar{A}_{j_2} \mid \bar{A}_{j_1} \cap A_{J_2}) \cdots P(\bar{A}_{j_r} \mid \bar{A}_{j_1} \cap \cdots \cap \bar{A}_{j_2} \cap A_{J_2}) \\ &= (1 - P(A_{j_1} \mid A_{J_2})) (1 - P(A_{j_2} \mid \bar{A}_{j_1} \cap A_{J_2})) \cdots (1 - P(A_{j_r} \mid \bar{A}_{j_1} \cap \cdots \cap \bar{A}_{j_2} \cap A_{J_2})) \\ &\stackrel{\text{I. H.}}{\geq} \prod_{j \in J_1} (1 - x_{j_1}) \cdots (1 - x_{j_r}) \geq \prod_{j: (A_i, A_j) \in E} (1 - x_j) \end{aligned}$$

□

Применяя лемму для событий из равенства 2.1 получаем утверждение ЛЛЛ. □

**Теорема 2.2.8.** (Франкл, Уилсон)

Можно явно указать графы, у которых число вершин  $f$  ведет себя как  $f = (e^{1/4} + o(1))^{\ln^2 s / \ln \ln s}$ , в которых нет ни  $s$  клик, ни независимых множеств размера  $s$ .

*Замечание.*  $s^c = e^{c \ln s} < f < e^{sc}$ , поскольку  $\ln^2 s \geq c \ln s \ln \ln s$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное простое  $p$  и  $m := p^3, k := p^2$ . Определим граф  $G = (V, E)$ :  $V = \{x = (x_1, \dots, x_m) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_m = k\}$ ;  $E = \{(x, y) : \langle x, y \rangle \equiv 0 \pmod{p}\}$ ,  $|V| = n = C_m^k$ .

Мы покажем, что  $\alpha(G) < \sum_{i=0}^{p-1} C_m^i + 1$ ;  $\omega(G) > \sum_{i=0}^p C_m^i + 1$ . Доказав это, теорема Франка-Уилсона будет доказана для всех  $s$  вида  $\sum_{i=0}^p C_m^i + 1$ , где  $p$  — простое, но нужно будет проверить, что  $C_m^k = (e^{1/4} + o(1))^{\ln^2 s / \ln \ln s}$ .

**Лемма 2.2.2.**

$$C_m^k = \left( e^{1/4} + o(1) \right)^{\ln^2 s / \ln \ln s}$$

*Доказательство.*  $C_m^k = C_{p^3}^{p^2} = \frac{p^3(p^3-1)\cdots(p^3-p^2+1)}{(p^2)!}$ . Перепишем отдельно числитель и знаменатель:

$$(p^2)! = (1 + o(1)) \sqrt{2\pi p^2} \left( \frac{p^2}{e} \right)^{p^2} = (p^2)^{(1+o(1))p^2}. \text{ Аналогично } p^3(p^3-1)\cdots(p^3-p^2+1) = (p^3)^{p^2(1+o(1))}$$

Тогда имеем

$$C_m^k = \frac{(p^3)^{p^2(1+o(1))}}{(p^2)^{p^2(1+o(1))}} = p^{p^2(1+o(1))}$$

Для  $s = \sum_{i=0}^p C_m^i + 1$  верны оценки:  $C_m^p + 1 < s < (p+1)C_m^p + 1$ , откуда, пользуясь тем, что  $C_m^p = C_{p^3}^p = \frac{p^{3(1+o(1))p}}{p^{p(1+o(1))}} = p^{2p(1+o(1))}$ , получаем, что  $s \sim p^{2p(1+o(1))}$ .

Имеем  $\ln s(1+o(1))2p \ln p$ ;  $\ln \ln s = (1+o(1)) \ln p$ ;  $\ln^2 s = 4(1+o(1))p^2 \ln^2 p$ , а  $\frac{\ln^2 s}{\ln \ln s} = 4(1+o(1))p^2 \ln p$

$$\ln n = (1+o(1))p^2 \ln p = \frac{1}{4}(1+o(1)) \frac{\ln^2 s}{\ln \ln s} \Rightarrow n = \left( e^{1/4} + o(1) \right)^{\ln^2 s / \ln \ln s}$$

□

**Лемма 2.2.3.**

$$\alpha(G) < \sum_{i=0}^{p-1} C_m^i + 1$$

*Доказательство.* Рассмотрим независимое множество  $W \subset V$ ,  $\forall x, y \in W : \langle x, y \rangle \neq 0 \pmod{p}$ . Пусть  $W = \{x_1, \dots, x_t\}$ . Нам необходимо доказать, что  $t \leq \sum_{i=1}^{p-1} C_m^i$ .

Поставим в соответствие каждой вершине  $x_i$  многочлен  $F_{x_i}(y) \in \mathbb{Z}_p[y_1, \dots, y_m]$  от  $m$  переменных степени  $\leq p-1$ :

$$F_{x_i}(y) = \prod_{j=1}^{p-1} (j - \langle x_i, y \rangle)$$

Раскроем все скобки и уменьшим степень всех одночленов  $F_{x_i} \mapsto \tilde{F}_{x_i} : \sum y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots y_{i_q}^{\alpha_{i_q}} = \sum c y_{i_1} \dots y_{i_q}$ . Размерность пространства многочленов, в котором лежат  $\tilde{F}_{x_i}$  не превосходит  $C_m^0 + \dots + C_m^{p-1}$ , поскольку порождается одночленами. Осталось показать, что многочлены  $\tilde{F}_{x_1}, \dots, \tilde{F}_{x_t}$  линейно независимы над  $\mathbb{Z}_p^2$ , откуда будет следовать утверждение леммы.

Рассмотрим произвольную нулевую линейную комбинацию  $G = c_1 \tilde{F}_{x_1} + \dots + c_t \tilde{F}_{x_t} \equiv 0 \Rightarrow \forall y \in \{0, 1\}^m : G(y) \equiv 0 \pmod{p}$ . Для таких  $y$  выполнено равенство:  $F_{x_i}(y) = \tilde{F}_{x_i}(y)$

$$\begin{cases} F_{x_i}(x_i) = \prod_{j=1}^{p-1} (j - k) \neq 0 \pmod{p} \\ F_{x_i}(x_j) = \prod_{j=1}^{p-1} (j - \langle x_i, x_l \rangle) \equiv 0 \pmod{p} \end{cases} \Rightarrow c_i \equiv 0 \pmod{p} \quad \forall i$$

□

**Лемма 2.2.4.**

$$\omega(G) < \sum_{i=0}^p C_m^i + 1$$

*Доказательство.*  $W = \{x_1, \dots, x_t \mid \langle x_i, x_j \rangle \equiv 0 \pmod{p}\}$ . Опять же, поставим в соответствие вершинам из  $W$  многочлены

$$F_{x_i}(y) := \langle x_i, y \rangle (\langle x_i, y \rangle - p) \dots (\langle x_i, y \rangle - p(p-1)) \in \mathbb{R}[y_1, \dots, y_m]$$

причем  $\deg F_{x_i} \leq p$ . Построим новые многочлены  $F_{x_i} \mapsto \tilde{F}_{x_i}$  по тому же правилу, что и выше. Аналогично, если новые многочлены ЛНЗ, то  $t \leq \sum_{i=0}^p C_m^i$ .

$$\begin{cases} F_{x_1}(x_1) = p^2(p^2 - p)(p^2 - 2p) \dots (p^2 - p(p-1)) \neq 0 \text{ т.к. многочлены над } \mathbb{R} \\ i \geq 2 : F_{x_1}(x_i) = \langle x_1, x_i \rangle (\langle x_1, x_i \rangle - p) \dots (\langle x_1, x_i \rangle - p(p-1)) = 0 \end{cases}$$

и лемма доказана. □

Применяя 3 леммы, получаем, что теорема верна для всех  $s$  вида  $\sum_{i=0}^p C_m^i + 1$ . **Б/д:** теорема верна для произвольного  $s$ . □

### 2.2.3 $R(3, t)$

В этой главе мы займемся оценкой числа  $R(3, t)$ . Как мы помним,  $R(s, t) \leq C_{s+t-2}^{t-1}$ . Пользуясь этим, легко получить оценку  $R(3, t) \leq C_{t-1}^2 \sim \frac{t^2}{2}$ . Попытаемся улучшить ее.

Рассмотрим случайную раскраску  $K_n$  в два цвета с  $p \in [0, 1]$  — вероятностью, что ребро красного цвета и  $1 - p$  — синего. Пусть  $A_1, \dots, A_{C_n^3}$  — события, отвечающие тому, что фиксированная тройка вершин образует красный треугольник, а  $B_1, \dots, B_{C_n^t}$  события, заключающиеся в том, что  $i$ -тое фиксированное множество из  $t$  вершин образует синий  $K_t$ . Тогда  $R(3, t) > n \iff P(\bigcap_{i=1}^{C_n^3} \bar{A}_i \cap \bigcap_{i=1}^{C_n^t} \bar{B}_i) > 0$  (аналогично доказательству теоремы Спенсера 2.2.2). Воспользуемся ЛЛЛ.

Зафиксируем событие  $A_i$ . В ор.графе зависимостей  $(A_i, A_j) \in E \iff$  тройка, отвечающая  $A_j$ , имеет 2 общие вершины с  $i$ -той тройкой, а  $(A_i, B_j) \in E \iff$  набор из  $t$  вершин, отвечающий  $B_j$ , имеет не менее 2 общих вершин с  $i$ -той тройкой. Аналогично для фиксированного  $B_i$ . Обозначим за  $\#(A \rightarrow B)$  количество ребер из события  $A$  в событие  $B$  в ор.графе зависимостей. Тогда

$$\begin{cases} \#(A_i \rightarrow A_j) = 3(n-3) \\ \#(A_i \rightarrow B_j) = 3C_{n-3}^{t-2} + C_{n-3}^{t-3} \\ \#(B_i \rightarrow B_j) = (n-t)C_t^2 + C_t^3 \\ \#(B_i \rightarrow B_j) = C_n^t - tC_{n-1}^{t-1} - C_{n-t}^t \end{cases}$$

**Теорема 2.2.9.** Пусть дано  $t$ , а  $n$  — максимальное число, для которого найдутся  $p \in [0, 1]$ ;  $x, y \in [0, 1)$ , такие что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} P(A_i) \leq x(1-x)^{\#(A_i \rightarrow A_j)}(1-y)^{\#(A_i \rightarrow B_j)} \\ P(B_i) \leq y(1-x)^{\#(B_i \rightarrow A_j)}(1-y)^{\#(B_i \rightarrow B_j)} \end{cases}$$

Тогда  $R(3, t) > n$ .

**Следствие.**  $R(3, t) \geq c \frac{t^2}{\ln^2 t}$  — без доказательства.

#### История улучшений

**Теорема 2.2.10.** (1980, б/д, Ajtai–Komlós–Szemeréd)

$$R(3, t) \leq (1 + o(1)) \frac{t^2}{\ln t}$$

**Теорема 2.2.11.** (1995, б/д, Кум)

$$R(3, t) \geq \left( \frac{1}{162} + o(1) \right) \frac{t^2}{\ln t}$$

**Теорема 2.2.12.** (2013, б/д)

$$R(3, t) \geq \left( \frac{1}{4} + o(1) \right) \frac{t^2}{\ln t}$$

*Замечание.* Это наилучшие известные результаты на текущий момент

*Замечание.* Про число  $R(4, t)$  известно лишь, что  $R(4, t) = t^{5/2+o(1)}$ .

## 2.2.4 Двудольные диагональные числа Рамсея

**Определение 2.2.4.**  $b(k) := \min\{n \in \mathbb{N} : \text{для любой раскраски ребер } K_{n,n} \text{ в два цвета найдется одноцветный } K_{k,k}\}$

**Теорема 2.2.13.**

$$b(k) \geq (1 + o(1)) \frac{2\sqrt{2}}{e} k 2^{k/2} = n$$

*Замечание.* В два раза больше, чем оценка  $R(k, k)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим случайную раскраску  $K_{n,n}$  в два цвета с  $p_k = p_c = \frac{1}{2}$ . Пусть события  $A_i, i = 1, \dots, \binom{k}{n}^2$  отвечают тому, что  $i$ -тая пара  $k$ -элементных множеств образует одноцветный  $K_{k,k}$ . Воспользуемся ЛЛЛ.

$$P(A_i) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k^2} = 2^{1-k^2} =: p, \quad d \leq k^2 \left(C_{n-1}^{k-1}\right)^2 - \text{зафиксировали по одной вершине в каждой доли.}$$

При подстановки  $n$  из условия теоремы имеем  $ep(d+1) \leq 1 \Rightarrow P(\bigcap \bar{A}_i) > 0$ .  $\square$

**Определение 2.2.5.** Пусть  $H$  подграф графа  $G$ . Тогда его *плотность* равна  $\frac{|E_H|}{|E_G|}$ .

**Теорема 2.2.14.** Пусть  $G$  — произвольный подграф  $K_{l,m}$ , плотность которого равна  $p \in [0, 1]$  и  $(s-1)C_l^r < mC_{lp}^r$ . Тогда  $G$  содержит подграф  $K_{r,s}$ .

*Доказательство.* Предположим, что в  $G$  нет  $K_{r,s}$ . Для определенности будем считать, что  $l$  вершин содержится в первой доле  $K_{l,m}$  и  $m$  во второй. Посчитаем двумя способами число подграфов  $K_{r,1}$  в  $G$ .

1.  $\leq C_l^r(s-1)$ , поскольку для любого  $r$ -элементного подмножества первой доли во второй существует не более  $s-1$  вершины, связанной с каждой из фиксированных вершин первой доли.

2. Пусть  $d_1, \dots, d_m$  — степени вершин нижней доли. Тогда

$$\#K_{r,1} = C_{d_1}^r + \dots + C_{d_m}^r \geq mC_{\frac{d_1+\dots+d_m}{m}}^r = mC_{\frac{|E|}{m}}^r = mC_{lp}^r$$

где неравенство следует из неравенства Йенсена.

Тогда имеем  $mC_{lp}^r \leq \#K_{r,1} \leq (s-1)C_l^r$  что противоречит условию теоремы.  $\square$

Пусть  $k^2 = o(n)$ ,  $r^2 = o(l)$ ,  $p \geq \text{const} \Rightarrow C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$ ,  $C_l^r \sim \frac{l^r}{r!}$ ,  $C_{lp}^r \sim \frac{l^r p^r}{r!}$ . В таких условиях неравенство в теореме переписывается как

$$(s-1) < mp^r \text{ или } m \geq (s-1)p^{-r}(1+\varepsilon), \quad \varepsilon > 0$$

**Теорема 2.2.15.** Пусть  $k \rightarrow \infty$ ,  $r = r(k) \left\{ \begin{array}{l} l = l(k) \\ s = s(k) \end{array} \right\} \rightarrow \infty, r^2 = o(l), p \in [0, 1] = \text{const}$ . Пусть  $G_{l,m} \subseteq K_{l,m}$  — подграф, такой что его плотность  $\geq p$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  и

$$m \geq (s-1)p^{-r}(1+\varepsilon)$$

Тогда  $\exists k_0 \forall k \geq k_0$  в  $G_{l,m}$  есть подграф  $K_{r,s}$

*Доказательство.* Это иная формулировка доказанной выше теоремы.  $\square$

**Теорема 2.2.16.**

$$b(k) \leq (1 + o(1))2^k k$$

*Доказательство.* Положим  $n := (1 + \varepsilon)2^k k$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $b(k) \leq n \iff$  в любой раскраски  $K_{n,n}$  найдется одноцветный  $K_{k,k}$ . Пусть  $G^k$  и  $G^c$  графы на всех красных и синих ребрах раскарски соответственно. Б.о.о. плотность  $G^k$   $p \geq \frac{1}{2}$ .

В условиях теоремы 2.2.15 имеем  $m = l = n$ ,  $s = r = k$ . Имеем

$$n > (k - 1) \left( \frac{1}{2} \right)^{-k} (1 + \varepsilon) = (k - 1)2^k (1 + \varepsilon)$$

и по теореме 2.2.15  $b(k) \leq n$ .  $\square$

**Теорема 2.2.17.**

$$b(k) \leq (1 + o(1))2^{k+1} \log_2 k$$

*Доказательство.* Положим  $n := (1 + \varepsilon)2^{k+1} \log_2 k$  и зафиксируем некоторую раскраску  $K_{n,n}$ . Рассмотрим вершины второй доли. Назовем вершину из второй доли красной, если из нее выходит красных ребер *больше*, чем синих (а иначе — синей). Без ограничения общности считаем, что красных вершин  $\geq \frac{n}{2}$ .

Рассмотрим красный граф  $G_{n, \frac{n}{2}}$ , где  $\frac{n}{2}$  отвечает множеству красных вершин из второй доли. Из определения красной вершины, плотность  $G = p \geq \frac{1}{2}$ . Тогда, по теореме 2.2.15 имеем (для  $l = n$ ,  $m = \frac{n}{2}$ )

$$\frac{n}{2} > (s - 1)2^r (1 + \varepsilon') \Leftrightarrow (1 + \varepsilon)2^k \log_2 k > (s - 1)2^r (1 + \varepsilon')$$

Возьмем  $r := k - 2 \log_2 k$ ,  $s := k^2 \log_2 k$ . Тогда

$$(s - 1)2^r = k^2 \log_2 k (1 + o(1))2^{k-2 \log_2 k} = 2^k (1 + o(1)) \log_2 k$$

и

$$(1 + \varepsilon)2^k \log_2 k > 2^k (1 + o(1)) \log_2 k (1 + \varepsilon')$$

что соблюдается для  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда, по теореме 2.2.15, мы нашли в  $G$  подграф  $K_{r,s}$ .

В графе  $K_{r,s} \subset G_{n, n/2}$  имеется  $k - 2 \log_2 k$  вершин в верхней доле и  $k^2 \log_2 k$  в нижней. Пусть  $A$  это множество вершин из нижней доли, лежащие в  $K_{r,s}$ , а  $C$  — множество вершин из верхней доли, не лежащие в  $K_{r,s}$ . Тогда нам необходимо найти  $2 \log_2 k$  вершин в  $C$  и  $k$  вершин из  $A$ , связанных между собой только красными ребрами. Тогда, вершины из верхней доли в графе  $K_{r,s}$  вместе с вершинами из  $C$  и  $k$  вершин из нижней доли дадут нам искомый одноцветный  $K_{k,k}$ .

Возьмем  $G_{l,m}$ , такой что  $l = k^2 \log_2 k$ ,  $m = n - (k - 2 \log_2 k) = n(1 + o(1))$ ,  $r = k$ ,  $s = 2 \log_2 k$ . Покажем, что его плотность  $p \geq \frac{1}{2} - \frac{k}{2^k}$ .

Из каждой вершины нижней доли вверх идет хотя бы  $\frac{n}{2}$  ребер  $\Rightarrow$  из каждой вершины  $A$  в  $C$  идет не меньше чем  $\frac{n}{2} - (k - 2 \log_2 k)$  ребер. Тогда

$$p \geq \frac{l \left( \frac{n}{2} - k + 2 \log_2 k \right)}{lm} > \frac{\frac{n}{2} - k}{m} > \frac{\frac{n}{2} - k}{n} = \frac{1}{2} - \frac{k}{n} > \frac{1}{2} - \frac{k}{2^k}$$

Заметим, что

$$\left( \frac{1}{2} - \frac{k}{n} \right)^k = \left( \frac{1}{2} - \frac{k}{2^{k+1} \log_2 k} (1 + o(1)) \right)^k \sim \frac{1}{2^k}$$

Тогда, для  $G_{l,m}$  имеем

$$\begin{aligned} m &> (s-1)p^{-r}(1+\varepsilon') \Leftrightarrow n(1+o(1)) > 2 \log_2 k(1+o(1))2^k(1+\varepsilon') \\ &\Leftrightarrow 2^{k+1}(1+\varepsilon) \log_2 k(1+o(1)) > 2 \log_2 k(1+o(1))2^k(1+\varepsilon') \\ &\Leftrightarrow (1+\varepsilon)(1+o(1)) > (1+\varepsilon')(1+o(1)) \end{aligned}$$

что верно для  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$  и при достаточно больших  $k$ . Применяем теорему 2.2.15 и получаем требуемое.  $\square$

## 2.3 Системы общих представителей

### 2.3.1 Тривиальные оценки

Определим  $R_n := \{1, \dots, n\}$   $\mathcal{M} := \{M_1, \dots, M_s \mid \forall i \ M_i \subseteq R_n \text{ и } M_i \neq M_j\}$ .

**Определение 2.3.1.** *Системой общих представителей* (далее — соп) для совокупности множеств  $\mathcal{M}$  назовем любое  $S \subseteq R_n$ , т.ч.  $\forall i \ M_i \cap S \neq \emptyset$ .  $\tau(\mathcal{M}) := \min\{\tau \in \mathbb{N} \mid \exists S \subseteq R_n, |S| = \tau \text{ и } S \text{ — соп для } \mathcal{M}\}$ .

*Замечание.* Для гиперграфа  $H = (\mathbb{R}_n, \mathcal{M})$  соп системы  $\mathcal{M}$  это вершинное покрытие  $H$ .

Пусть  $\forall i \ |M_i| = k$ ,  $|\mathcal{M}| = s$  и  $M_i \subseteq R_n$ . При фиксированных  $n, s, k$  количество  $\mathcal{M}$  с такими параметрами равно  $C_{C_n^k}^s$ .

**Теорема 2.3.1.**

$$\forall \mathcal{M} : \tau(\mathcal{M}) \leq \min\{s, n - k + 1\}$$

*Доказательство.* От  $n - k + 2$  до  $n$  ровно  $k - 1$  число, а значит, взяв все числа от 1 до  $n - k + 1$ , мы получим соп.  $\square$

**Теорема 2.3.2.**

$$\exists \mathcal{M} : \tau(\mathcal{M}) \geq \min\left\{\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil, s\right\}$$

*Доказательство.* Возможно два случая:

1.  $s \leq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ . Тогда  $\mathcal{M} = \{\{1, 2, \dots, k\}, \{k + 1, \dots, 2k\}, \dots, \{(s - 1)k + 1, \dots, sk\}\}$
2.  $s > \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ . В таком случае систему  $\mathcal{M}$  так же, как и в первый раз, добирая новые множества пока можем, а после добавляем произвольные множества, пока  $|\mathcal{M}|$  не равна  $s$ .

$\square$

### 2.3.2 Жадный алгоритм

**Теорема 2.3.3.**

$$\forall n, k, s \ \forall \mathcal{M} \ \tau(\mathcal{M}) \leq \max\left\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}\right\} + \frac{n}{k} + 1$$

*Доказательство.* Зафиксируем  $\mathcal{M}$ . Возможны следующие случаи:

1.  $s \leq \frac{n}{k} \Rightarrow \tau(\mathcal{M}) \leq s \leq \frac{n}{k}$
2.  $\frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \geq n \Rightarrow \tau(\mathcal{M}) \leq n \leq \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}$
3.  $s > \frac{n}{k}, \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} < n$ .

Для доказательства последнего случая воспользуемся *жадным алгоритмом* построения соп.

Возьмем любой элемент  $\nu_1 \in R_n$ , который принадлежит наибольшему числу множеств в  $\mathcal{M}$ . Пусть их  $\rho_1$  штук. Тогда  $\rho_1 \geq \frac{sk}{n}$ , поскольку  $sk = \sum_{i=1}^n \sum_{M \in \mathcal{M}} I_{\{i \in M\}} \leq \rho_1 n$ . Выкинем из  $\mathcal{M}$  все множества, содержавшие  $\nu_1$ . Осталась совокупность  $\mathcal{M}_1$ ,  $|\mathcal{M}_1| = s - \rho_1 = s_1$ . Снова сделаем шаг жадного алгоритма.

Всего сделаем  $N = \left\lceil \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \right\rceil + 1$  шагов ж.а, причем  $\rho_i \geq \frac{s_{i-1}k}{n}$ . После этого имеем построенное ж.а. множество  $S = \{\nu_1, \dots, \nu_N\}$  и совокупность  $\mathcal{M}_N$  т.ч.

$$|\mathcal{M}_N| = s_N = s_{N-1} - \rho_N \leq s_{N-1} - \frac{s_{N-1}k}{n} \leq \dots \leq s(1 - \frac{k}{n})^N = se^{N \ln(1 - \frac{k}{n})} \leq se^{-\frac{kN}{n}} \leq se^{-\frac{k}{n} \cdot \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}} = \frac{n}{k}$$

$$\text{Итого } \tau(M) \leq N + \frac{n}{k} \leq \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} + 1 + \frac{n}{k} \quad \square$$

**Теорема 2.3.4.** Пусть  $n \geq 4$ ,  $k \leq \frac{n}{4}$ ,  $4 \leq \ln \frac{sk}{n} \leq k$ . Тогда

$$\exists \mathcal{M} : \tau(M) \geq \frac{1}{32} \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}$$

*Доказательство.* Возьмем  $m := \left\lceil \frac{1}{2} \ln \frac{sk}{n} \right\rceil \geq 2$ . Для удобства введем обозначение  $R_{i,j} = \{i, \dots, j\}$ . Рассмотрим разбиение

$$R_{2qm} = R_{1,2qm} = R_{1,2m} \sqcup R_{2m+1,4m} \sqcup \dots \sqcup R_{2(q-1)m+1,2qm}$$

где  $q = \left\lceil \frac{2k}{m} \right\rceil$ . Заметим, что разбиение определено корректно, поскольку из неравенства  $\ln \frac{sk}{n} \leq k$  вытекает оценка

$$\frac{2k}{m} \geq \frac{2k}{\frac{1}{2} \ln \frac{sk}{n}} = \frac{4k}{\ln \frac{sk}{n}} \geq 4$$

означающая, во-первых, что  $q > 1$  и  $q \geq \frac{k}{m}$  (мы воспользовались неравенством  $\lceil x \rceil \geq \frac{x}{2}$  для  $x \geq 1$ ).

Во-вторых,  $2qm \leq 4k \leq \frac{n}{8}$ .

Занумеруем в некотором порядке все  $m$  элементные подмножества множеств  $R_{1,2m}, \dots, R_{2(q-1)m+1,2qm}$ . Получим совокупности  $N^i = \{N_1^i, \dots, N_{C_{2m}^m}^i\}$ ,  $i = 1, \dots, q$ . Заметим, что  $|N^i| = C_{2m}^m < 2^{2m} \leq 2^{\ln \frac{sk}{n}} < \frac{sk}{n}$  и что  $\tau(N^i) = m + 1 > m$ .

Пусть  $\mathcal{M}^1 = \{\mathcal{M}_1^1, \dots, \mathcal{M}_{C_{2m}^m}^1\}$  это совокупность, состоящая из множеств

$$\mathcal{M}_j^1 = N_j^1 \cup N_j^2 \cup \dots \cup N_j^q, \quad j = 1, \dots, C_{2m}^m$$

как показано выше,  $|\mathcal{M}^1| < \frac{sk}{n}$  и  $\tau(\mathcal{M}^1) = m + 1$ . Более того,

$$|\mathcal{M}_j^1| = qm \geq \frac{mk}{m} = k$$

Положим  $t = \left\lceil \frac{n}{2qm} \right\rceil$ . Рассмотрим разбиение

$$R_{2qmt} = R_{1,2qmt} = R_{1,2qm} \sqcup \dots \sqcup R_{2qm(t-1)+1,2qmt} \subset R_n.$$

Очевидно, что  $t \geq 1$  и  $2qmt \leq n$ . В каждый элемент последнего разбиения поместим копию совокупности  $\mathcal{M}^1$ . Появятся совокупности  $\mathcal{M}^2, \dots, \mathcal{M}^t$  и рассмотрим совокупность

$$\mathcal{M}' := \mathcal{M}^1 \cup \dots \cup \mathcal{M}^t.$$



Понятно, что

$$|\mathcal{M}'| < \frac{sk}{n}t \leq \frac{n}{2mq} \frac{sk}{n} \leq \frac{n}{2k} \frac{sk}{n} < s.$$

Далее, мощность каждого множества  $M \in \mathcal{M}'$  не меньше  $k$ . Наконец,

$$\tau(\mathcal{M}') \geq (m+1)t > mt \geq m \frac{n}{4qm} \geq \frac{nm}{4 \cdot 2k} \geq \frac{n}{8k} \cdot \frac{1}{4} \ln \frac{sk}{n} = \frac{1}{32} \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}.$$

Если  $|\mathcal{M}'| < s$ , то добавим к ней произвольные множества мощности  $k$ . Далее, если какое-то множество  $A \in \mathcal{M}'$  содержит больше  $k$  элементов, то удалим из него любые произвольные элементы, сделав его мощность равной  $k$ . Получим итоговую совокупность  $\mathcal{M}$ , имеющую мощность  $s$  и состоящую только из  $k$ -элементных множеств. Поскольку  $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}'$ , получаем неравенство

$$\tau(\mathcal{M}) \geq \tau(\mathcal{M}') \geq \frac{1}{32} \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}.$$

□

**Теорема 2.3.5.** Пусть для данных  $n, s, k$  число  $l$  таково, что

$$C_n^l \cdot \frac{C_{C_n^k - C_{n-l}^k}^s}{C_{C_n^k}^s} < 1.$$

Тогда  $\exists \mathcal{M}$  с параметрами  $n, s, k$ , такая что  $\tau(\mathcal{M}) > l$ .

*Доказательство.* Берем случайную совокупность  $\mathcal{M}$  с параметрами  $n, s, k$  и  $P(\mathcal{M}) = \frac{1}{C_{C_n^k}^s}$ . Зафиксируем  $L \subseteq \{1, \dots, n\}$ , т.ч.  $|L| = l$ .

$$P(\text{для случ. } \mathcal{M} \text{ фикс. мн-во } L \text{ является соп}) = \frac{C_{C_n^k - C_{n-l}^k}^s}{C_{C_n^k}^s}$$

Выберем далее все множества, пересекающиеся с  $L$ , и возьмем любые  $s$  из них.

$$P(\exists L \text{ т.ч. } \mathcal{M} \text{ имеет } L \text{ в качестве соп}) \leq C_n^l \cdot \frac{C_{C_n^k - C_{n-l}^k}^s}{C_{C_n^k}^s} < 1.$$

□

**Теорема 2.3.6.** Пусть  $n \rightarrow \infty$ . Пусть  $s = s(n) \rightarrow \infty$ ,  $k = k(n) \rightarrow \infty$ ,  $\frac{sk}{n} \rightarrow \infty$ . Пусть дополнительно  $k^2 = o(n)$ ,  $\ln \ln k = o\left(\ln \frac{sk}{n}\right)$ ,  $\left(\ln \frac{sk}{n}\right)^2 = o(k)$ . Тогда

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \exists \mathcal{M} : \tau(\mathcal{M}) \geq \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} - \frac{n}{k} \ln \ln \frac{sk}{n} - \frac{n}{k} \ln \ln k - \frac{3n}{k} = (1 + o(1)) \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}$$

*Доказательство.* Обозначим  $l := \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} - \frac{n}{k} \ln \ln \frac{sk}{n} - \frac{n}{k} \ln \ln k - \frac{3n}{k}$  и подставим это в утверждение теоремы 2.3.5. Покажем, что для данного  $l$  выполнена сходимость

$$C_n^l \cdot \frac{C_{C_n^k - C_{n-l}^k}^s}{C_{C_n^k}^s} \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned}
\frac{C_{C_n^k - C_{n-l}^k}^s}{C_{C_n^k}^s} &= \frac{(C_n^k - C_{n-l}^k) \dots (C_n^k - C_{n-l}^k - s + 1)}{C_n^k (C_n^k - 1) \dots (C_n^k - s + 1)} \\
&= \left(1 - \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k}\right) \left(1 - \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k - 1}\right) \dots \left(1 - \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k - s + 1}\right) \\
&\sim \left(1 - \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k}\right)^s
\end{aligned}$$

Покажем последний переход:

$$\begin{aligned}
\frac{C_{n-l}^k}{C_n^k} &= \left(1 - \frac{l}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{l}{n-k+1}\right) = \exp \left[ \ln \left(1 - \frac{l}{n}\right) + \dots + \ln \left(1 - \frac{l}{n-k+1}\right) \right] \\
&= \exp \left[ -\frac{l}{n} + o\left(\frac{l^2}{n^2}\right) - \frac{l}{n-1} + \dots - \frac{l}{n-k+1} + o\left(\frac{l^2}{n^2}\right) \right] \\
&= \exp \left[ -l \frac{k}{n} \left(1 + o\left(\frac{k}{n^2}\right)\right) \right] = \exp \left[ -l \frac{k}{n} \left(1 + o\left(\frac{k}{n}\right)\right) \right] \\
&\sim e^{-(1+o(1)) \ln \frac{sk}{n}} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n-1} &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \left( 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
\frac{1}{n-k+1} &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1 - \frac{k-1}{n}} \right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{k}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

и

$$\frac{C_{n-l}^k}{C_n^k - s} = \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{s}{C_n^k}} = \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k} \left( 1 + \frac{s}{C_n^k} \right) (1 + o(1)) \text{ при } s/C_n^k \rightarrow 0.$$

установим это. Пусть  $\frac{s}{C_n^k} > a$  (т.е.  $\rightarrow 0$ ). Тогда  $s > aC_n^k$  и

$$\ln \frac{sk}{n} > \ln \frac{akC_n^k}{n} \sim \ln \frac{akn^k}{nk!} = \ln \frac{an^{k-1}}{(k-1)!} \geq \ln \frac{an^{k-1}}{k^{k-1}} = \ln \left[ a \left( \frac{n}{k} \right)^{k-1} \right] \sim k \ln \frac{n}{k} > k$$

что противоречит условию  $\ln^2 \frac{sk}{n} = o(k) \Rightarrow \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k - s} \sim \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k}$ . Поскольку  $l \frac{k^2}{n^2} \sim \frac{k}{n} \ln \frac{sk}{n} = o\left(\frac{\ln \frac{sk}{n}}{k}\right) \rightarrow 0$ ,

имеем  $\exp \left[ -\frac{lk}{n} (1 + o(\frac{k}{n})) \right] \sim e^{-\frac{lk}{n}}$ , а значит

$$\frac{C_{C_n^k - C_{n-l}^k}^s}{C_{C_n^k}^s} \sim \left(1 - \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k}\right)^s = \exp \left[ -(1 + o(1))s \frac{C_{n-l}^k}{C_n^k} \right] \sim \exp \left[ -(1 + o(1))se^{-\frac{lk}{n}} \right]$$

Подставляя  $l$ , получаем

$$e^{-\frac{lk}{n}} = \frac{n}{sk} \left( \ln \frac{sk}{n} \right) (\ln k) e^3 \Rightarrow \exp \left[ -(1 + o(1))se^{-\frac{lk}{n}} \right] = \exp \left[ -\frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \ln k e^3 \right]$$

Оценим теперь  $C_n^l$ , пользуясь тем, что  $l(1 + o(1)) \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}$ :

$$C_n^l \leq \left( \frac{ne}{l} \right)^l \leq \left( \frac{2ek}{\ln \frac{sk}{n}} \right)^l < k^l = e^{l \ln k} \leq e^{\frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \cdot \ln k}$$

Объединяя все вместе, получаем:

$$C_n^l \cdot \frac{C_n^s - C_{n-l}^k}{C_n^k} \sim \exp \left[ \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \ln k \right] \cdot \exp \left[ -(1+o(1)) \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \ln k e^3 \right] = \exp \left[ (1+o(1))(1-e^3) \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} \ln k \right] \rightarrow 0$$

□

### 2.3.3 Конструктивная оценка размера минимальной соп

Зафиксируем  $n, s, k$ . Мы хотим построить  $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s \mid |M_i| = k \text{ и } M_i \subseteq R_n\}$  с  $\tau(\mathcal{M}) > l$ .

Рассмотрим систему всех  $k$ -элементных подмножеств:  $K_1, \dots, K_{C_n^k} = \mathcal{K}$ . Нужно выбрать такие  $M_1, \dots, M_s \in \mathcal{K}$ , что

$$\forall L : |L| = n-l \exists i \ M_i \subseteq L \quad (2.2)$$

"Заменяем"  $K_1, \dots, K_{C_n^k}$  на числа  $1, \dots, C_n^k$ . Тогда условие 2.2 эквивалентно выбору

$$i_1, \dots, i_s : \forall L \ |L| = n-l \exists i_\nu : K_{i_\nu} \subseteq L \quad (2.3)$$

Сопоставим каждому  $L$  все его  $k$ -элементные подмножества, т.е. множество  $\mathcal{L} \subseteq \{1, \dots, C_n^k\}$  их номеров.

Очевидно  $|\mathcal{L}| = C_{n-l}^k$ .

Множества  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{C_n^l}$  образуют совокупность в  $\{1, \dots, C_n^k\}$  и  $i_1, \dots, i_\tau$  — ее соп. Тогда множества  $K_{i_1}, \dots, K_{i_\tau}$  это как раз те множества, обладающие свойством 2.3.

Мы построили  $\tau$  множеств, а хотели изначально  $s$ . Если  $\tau \leq s$ , то добавим произвольные множества в совокупность и размер соп не уменьшится. Значит необходимо проверить, что  $\tau < s$ .

По теореме о жадном алгоритме

$$\tau \leq \max \left\{ \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k}, \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k} \ln \frac{C_n^l C_{n-l}^k}{C_n^k} \right\} + \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k} + 1$$

**Следствие.** Пусть для фиксированных  $n, s, k$  число  $l$  таково, что

$$\max \left\{ \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k}, \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k} \ln \frac{C_n^l C_{n-l}^k}{C_n^k} \right\} + \frac{C_n^k}{C_{n-l}^k} + 1 \leq s$$

Тогда  $\exists \mathcal{M}$  с параметрами  $n, s, k$ , такая что  $\tau(\mathcal{M}) > l$ .

## 2.4 Размерность Вапника-Червоненкиса

Рассмотрим множество точек  $S \subset \mathbb{R}^n$  конечной мощности. Начнем пересекать его со всевозможными треугольниками в любой плоскости и пусть  $\mathcal{M}$  это система всех подмножеств  $S$ , которые можно получить, пересекая  $S$  с треугольниками.

Зафиксируем теперь  $\varepsilon \in (0, 1)$  и пусть  $\mathcal{M}_\varepsilon \subseteq \mathcal{M} = \{M \in \mathcal{M} \mid |M| \geq \varepsilon|S|\}$ .

**Теорема 2.4.1.** (Вапника-Червоненкиса, частный случай)

$\forall \varepsilon \exists \text{с.о.п.} N$  для совокупности  $\mathcal{M}_\varepsilon$ , такая что

$$|N| \leq \frac{500}{\varepsilon} \log_2 \frac{500}{\varepsilon}$$

*Замечание.* Мощность  $N$  не зависит от  $S$  и  $n$ .

### 2.4.1 Теорема Вапника-Червоненкиса

Рассмотрим пару  $(\mathcal{X}, R)$  — произвольное множество и систему его подмножеств.

**Определение 2.4.1.** Пара  $(\mathcal{X}, R)$  называется *ранжированным пространством*.

Подмножество  $A \subseteq \mathcal{X}$  *дробится* системой  $R$ , если

$$\forall B \subseteq A \exists r \in R: A \cap r = B,$$

причем *проекцией* системы  $R$  на  $A$  назовем множество  $Pr_A R = \{r \cap A \mid r \in R\}$  всевозможных пересечений  $r \in R$  с  $A$ . Очевидно, что  $A$  дробится тогда и только тогда, когда  $Pr_A R = 2^A$ .

**Пример 2.4.1.**  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ , где  $\mathcal{H}$  — семейство всех открытых полупространств (например для  $n = 2$  это полуплоскости).

**Определение 2.4.2.** *Размерность Вапника-Червоненкиса*  $VC(\mathcal{X}; R)$  ранжированного пространства  $(\mathcal{X}, R)$  по определению равна

$$VC(\mathcal{X}; R) := \max\{m \in \mathbb{N} \mid \exists A \subseteq \mathcal{X}, |A| = m: Pr_A R = 2^A\}$$

(если такого  $m$  не существует, то  $VC(\mathcal{X}; R) = +\infty$ ).

**Пример 2.4.2.**  $VC(\mathbb{N}; 2^{\mathbb{N}}) = +\infty$ .

**Теорема 2.4.2.** (Радон, б/д)

Любое множество из  $n + 2$  точек  $S \subset \mathbb{R}^n$  можно представить как  $S = A_1 \sqcup A_2$ , причем выпуклые оболочки  $A_1$  и  $A_2$  пересекаются, т.е.

$$\text{conv}(A_1) \cap \text{conv}(A_2) \neq \emptyset.$$

*Утверждение 2.4.1.1.*  $VC(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}) = n + 1$ .

*Доказательство.* Поскольку  $n+1$  вершина симплекса в  $\mathbb{R}^n$  дробится, то верно неравенство  $VC(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}) \geq n+1$ .

Для множества  $S$ ,  $|S| \geq n+2$  найдем представление  $A_1 \sqcup A_2$  из теоремы Радона. Тогда очевидно, что отдробить  $A_1$  не получится.  $\square$

**Лемма 2.4.1.** Пусть  $(\mathcal{X}, R)$  — ранжированное пространство, такое что  $VC(\mathcal{X}; R) = d$ ,  $|\mathcal{X}| = n$ . Тогда верно неравенство

$$|R| \leq g(n, d) = \sum_{i=0}^d C_n^i.$$

*Доказательство.* Заметим сначала, что  $g(n, d) = g(n-1, d) + g(n-1, d-1)$  — следствие из треугольника Паскаля.

Воспользуемся индукцией по  $n$  и  $d$ .

*База:* пусть  $n = 0$  и  $d$  произвольное. Тогда  $R$  равно либо  $\{\emptyset\}$ , либо  $\emptyset$ . В любом случае,  $|R| \leq 1$ . В то же время, очевидно, что  $VC(\mathcal{X}; R) \leq n = 0$ . Но тогда  $|R| \leq 1 = g(0, 0)$ . Пусть, наоборот,  $d = 0$  и  $n \geq 1$  — произвольное. Предположим, что  $|R| \geq 2$ . Тогда  $\exists r_1 \neq r_2 \in R$ , причем либо в  $r_1 \setminus r_2$ , либо в  $r_2 \setminus r_1$  содержится элемент  $x \in \mathcal{X}$ . Тогда множество  $A = \{x\}$  дробится  $r_1$  и  $r_2$ , что противоречит  $d = 0$ . Получаем  $|R| \leq 1 = g(n, 0)$  и база доказана.

*Переход:* зафиксируем  $(\mathcal{X}, R)$  с  $VC(\mathcal{X}; R) = d \geq 1$  и  $|\mathcal{X}| = n \geq 1$ . Рассмотрим произвольный  $x \in \mathcal{X}$  и определим пространства  $(\mathcal{X}_1, R_1)$ ,  $(\mathcal{X}_2, R_2)$  следующим образом:

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \mathcal{X} \setminus \{x\}$$

$$R_1 = \{r \setminus \{x\} \mid r \in R\}, R_2 = \{r \in R \mid x \notin r \text{ но } r \cup \{x\} \in R\}$$

Тогда имеем  $|R| = |R_1| + |R_2|$  (рассмотреть такие  $r \in R$ , что  $r \in R$  и  $r \cup \{x\} \in R$ ). Докажем два неравенства:

1.  $VC(\mathcal{X}_1; R_1) \leq d$  — очевидно.

2.  $VC(\mathcal{X}_2; R_2) \leq d-1$  — предположим  $VC(\mathcal{X}_2; R_2) \geq d$  и рассмотрим  $A \subseteq \mathcal{X}_2$ ,  $|A| = d$ ,  $Pr_{R_2} A = 2^A$ .

По определению  $R_2$ , множество  $A \cup \{x\}$  дробится системой  $R$ , но  $|A \cup \{x\}| \geq d+1$ , что противоречит  $VC(\mathcal{X}; R) = d$ .

Тогда, по предположению индукции, верно

$$|R| = |R_1| + |R_2| \leq g(n-1, d) + g(n-1, d-1) = g(n, d).$$

$\square$

**Следствие.** Пусть  $VC(\mathcal{X}; R) = d$ ,  $A \subseteq \mathcal{X}$ ,  $|A| = n$ . Тогда  $|Pr_A R| \leq g(n, d)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим пространство  $(A, Pr_A R)$  и применим к нему лемму 2.4.1.  $\square$

**Определение 2.4.3.**  $h \in \mathbb{N}$ . Тогда  $h$ -измельчение  $R$  это множество

$$R_h := \{r_1 \cap \dots \cap r_h : r_i \in R\}$$

**Пример 2.4.3.** Для  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$  измельчение  $R_h$  целиком содержит в себе совокупность всех выпуклых многогранников в  $\mathbb{R}^n$ , имеющих  $h$  граней. Для  $h = 3, n = 2$  это все треугольники на плоскости.

**Лемма 2.4.2.** Пусть  $d \geq 2, h \geq 2$  и  $VC(\mathcal{X}; R) = d$ . Тогда

$$VC(\mathcal{X}; R_h) \leq 2dh \log_2 dh$$

*Доказательство.* Зафиксируем любое  $A \subseteq \mathcal{X}$ , имеющее  $|A| = n > 2dh \log_2 dh$  и дробящееся  $R_h$  (если такое существует). По лемме 2.4.1 имеем  $|Pr_R A| \leq g(n, d)$ . Тогда

$$|Pr_A R_h| \leq |Pr_A R|^h \leq n^{dh}.$$

Поскольку  $n \geq 2$ , то в сумме  $g(n, d)$  максимально последнее слагаемое и  $g(n, d) \leq n^d$  (б/д, по индукции).

Поскольку  $|Pr_A R_h| = 2^n$ , то должно быть выполнено неравенство

$$|Pr_A R_h| = 2^n \leq |Pr_A R|^h \leq n^{dh},$$

что неверно при  $n > 2dh \log_2 dh$ , а множества  $A$  с  $|A| = n$ , дробящегося  $R_h$ , не существует.  $\square$

**Определение 2.4.4.** Пусть  $(\mathcal{X}, R)$  — произвольное ранжированное пространство. Зафиксируем любое конечное  $A \subset \mathcal{X}$  с  $n = |A|$  и  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Определим совокупность

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_\varepsilon(A, R) = \{M_1, \dots, M_s\} = \{A \cap r \mid \forall r \in R : |r \cap A| \geq n\varepsilon\}.$$

Тогда  $\varepsilon$ -сетью для  $A$  называется любая с.о.п. совокупности  $\mathcal{M}$ .

**Теорема 2.4.3.** (Валника-Червоненкиса)

Пусть  $VC(\mathcal{X}; R) \leq d, \varepsilon \in (0, 1)$ . Тогда  $\forall A \subseteq \mathcal{X}$ , таких что  $|A| < +\infty$  существует  $\varepsilon$ -сеть  $N$ , такая что

$$|N| \leq \frac{8d}{\varepsilon} \log_2 \frac{8d}{\varepsilon}$$

*Доказательство.* Введем обозначения  $n := |A|, m := \lceil \frac{8d}{\varepsilon} \log_2 \frac{8d}{\varepsilon} \rceil$ . Построим по схеме выбора с возвращением по очереди два мультимножества  $N = \{x_1, \dots, x_m\}$  и  $T = \{y_1, \dots, y_m\}$ . Введем вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(N, T)\} = \{(\{x_1, \dots, x_m\}, \{y_1, \dots, y_m\}) : x_i, y_i \in A\}, \\ |\Omega| &= n^{2m}; \quad \mathcal{F} = 2^\Omega; \quad P((N, T)) = \frac{1}{n^{2m}} \quad \forall (N, T) \in \Omega \end{aligned}$$

и определим на нем два события:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(N, T) : \exists r \in R : |r \cap A| \geq \varepsilon n, r \cap N = \emptyset\} \\ E_2 &= \{(N, T) : \exists r \in R : |r \cap A| \geq \varepsilon n, r \cap N = \emptyset, |T \cap r| \geq \varepsilon \frac{m}{2}\} \end{aligned}$$

где  $|r \cap T|$  считается с учетом кратности элементов в мультимножестве  $T$ , т.е.  $r \cap T$  по-прежнему мультимножество.

**Лемма 2.4.3.**  $P(E_2) \geq \frac{1}{2}P(E_1)$

*Доказательство леммы 2.4.3.* Поскольку  $P(E_2|E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(E_2)}{P(E_1)}$ , то достаточно установить неравенство  $P(E_2|E_1) \geq \frac{1}{2}$ .

При условии  $E_1$  найдется  $r_1 \in R$ , такой что  $|r_1 \cap A| \geq \varepsilon n$  и  $r_1 \cap N = \emptyset$ . Тогда  $P(E_2|E_1) \leq P(|r_1 \cap T| \geq \frac{\varepsilon m}{2})$ .  $r_1$  не обязано целиком лежать в  $A$ , а поскольку все элементы  $T$  лежат в  $A$ , то уместно рассмотреть  $u := r_1 \cap A$  (помним, что  $|u| \geq \varepsilon n$ ) и оценить вероятность  $P(T : |u \cap T| \geq \frac{\varepsilon m}{2})$ . Фактически, мы рассматриваем схему испытаний Бернулли: всего  $m$  испытаний (извлекаем по элементу из  $T$ ) и успех состоит в том, что извлеченный элемент лежит в  $u$ , а искомая вероятность — это вероятность того, что произошло не менее  $\frac{\varepsilon m}{2}$  успехов. Причем вероятность отдельного успеха есть  $\frac{|u|}{|A|} \geq \varepsilon$ .

Рассмотрим случайную величину  $\xi \sim \text{Bin}(m, \varepsilon)$ . Как известно,  $E\xi = m\varepsilon$ ,  $D\xi = m\varepsilon(1 - \varepsilon) \leq m\varepsilon$ . Имеем

$$\begin{aligned} P(E_2|E_1) &\geq P\left(\xi \geq \frac{\varepsilon m}{2}\right) = P\left(\xi - E\xi \geq -\frac{\varepsilon m}{2}\right) = 1 - P\left(\xi - E\xi < -\frac{\varepsilon m}{2}\right) \\ &\geq 1 - P\left(|\xi - E\xi| > \frac{\varepsilon m}{2}\right) \geq 1 - 4\frac{D\xi}{\varepsilon^2 m^2} \geq 1 - \frac{4}{\varepsilon m} \end{aligned}$$

Вспоминаем, что

$$m \geq \frac{8d}{\varepsilon} \log_2 \frac{8d}{\varepsilon} \geq \frac{24}{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$1 - \frac{4}{\varepsilon m} \geq 1 - \frac{4}{24} = \frac{5}{6} \geq \frac{1}{2}.$$

и лемма доказана. □

**Лемма 2.4.4.**

$$P(E_2) \leq 2^{-\frac{\varepsilon n}{2}} g(2m, d)$$

*Доказательство леммы 2.4.4.* Чтобы установить утверждение леммы *немного поменяем* вероятностное пространство. А именно будет составлять пару  $(N, T)$  новым образом, не изменив вероятность  $E_2$  и  $E_1$ :

1. По схеме выбора с возвращением из  $A$  построим мультимножество  $U = \{z_1, \dots, z_{2m}\}$  с  $P(U) = \frac{1}{n^{2m}}$ .
2. Разбиваем множество индексов  $\{1, \dots, 2m\}$  на две равные части так, что все разбиения равновероятны с вероятностью  $\frac{1}{C_{2m}^m}$ .
3. Элементы, соответствующие первому множеству индексов относим в мультимножество  $N$ , а второму — в  $T$ .

По формуле полной вероятности  $P(E_2) = \sum_U P(E_2 | U)P(U)$ . Поскольку  $\sum_U P(U) = 1$  достаточно показать, что  $P(E_2 | U) \leq 2^{-\varepsilon m/2} g(2m, d)$ .

Представим  $E_2$  в следующем виде:

$$E_2 = \bigcup_{\substack{r \in R \\ |r \cap A| \geq \varepsilon n}} E_{2,r}; \quad E_{2,r} := \{(N, T) \mid r \cap N = \emptyset, |r \cap T| \geq \frac{\varepsilon m}{2}\}.$$

Заметим, что если  $U$  фиксированно, то для любых  $r_1, r_2 \in R$ , удовлетворяющих условию  $r_1 \cap U = r_2 \cap U$  события  $E_{2,r_1}$  и  $E_{2,r_2}$  совпадают  $\Rightarrow$  количество различных событий вида  $E_{2,r}$  это в точности число различных  $r \cap U$ , т.е.  $|Pr_U R| \leq g(2m, d)$  по лемме 2.4.1.

Осталось показать, что  $P(E_{2,r}|U) \leq 2^{-\varepsilon m/2}$ . Действительно, пусть  $|r \cap U| = p \geq \frac{\varepsilon n}{2}$ . Тогда

$$P(E_{2,r}|U) \leq P(r \cap N = \emptyset | U) = \frac{C_{2m-p}^p}{C_{2m}^m} = \frac{(2m-p)!}{(2m)!} \cdot \frac{m!}{(m-p)!} = \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{2m(2m-1) \dots (2m-p+1)} \leq 2^{-p} \leq 2^{-\varepsilon m/2}.$$

Тогда как для  $p < \frac{\varepsilon n}{2}$  вероятность  $P(E_{2,r}|U) = 0$ . □

**Лемма 2.4.5.**  $(\delta/\delta): g(2m, d)2^{-\varepsilon m/2} < \frac{1}{2}$

Используя леммы 2.4.3-2.4.5 получаем цепочку неравенств:

$$\frac{1}{2} > P(E_2) \geq \frac{1}{2} P(E_1) \Rightarrow P(E_1) < 1,$$

что и завершает доказательство. □

Вывод теоремы 2.4.1 из теоремы общего случая: по лемме 2.4.2

$$VC(\mathbb{R}^2; \Delta) = VC(\mathbb{R}^2; \mathcal{H}_3) \leq 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \log_2(3 \cdot 3) \leq 60$$

и  $8 \cdot 60 < 500$ . А дальше применяем теорему 2.4.3.

## 2.4.2 Некоторое практическое применение

Вспомним теорему Гливленко-Кантелли из математической статистики:

$$P\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^*(x) - F(x)| \rightarrow 0\right) = 1,$$

где  $F_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{X_i \leq x\}$  — эмпирическая функция распределения. Однако, по УЗБЧ верна сходимость

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{X_i \leq x\} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbf{E} I\{X_1 \leq x\} = P(X_1 \leq x) = F(x),$$

т.е. теорема Гливленко-Кантелли утверждает, что в законе больших чисел для схемы испытаний Бернулли выполнена равномерная сходимость.



**Теорема 2.4.4.** (б/д, 1971, Вапник, Червоненкис)

Пусть  $x \in \mathcal{X}$ . Рассмотрим последовательность событий  $A_1^x, \dots, A_n^x, \dots$  на некотором вероятностном пространстве, для которой  $\forall x : A_i^x$  независимы в совокупности и  $\forall x \forall n \ P(A_n^x) = p_x$ .

Тогда  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{A_i^x\}$  сходится по  $x$  равномерно к  $p_x$  тогда и только тогда, когда  $VC(\mathcal{X}; A_1^x, \dots, A_n^x, \dots) < +\infty$ .

## 2.5 Матрицы Адамара

### 2.5.1 Гипотеза Адамара

**Определение 2.5.1.** Матрица  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}^n)$ , составленная из  $\pm 1$ , такая что любые ее две строки (или два столбца, что эквивалентно) ортогональны, называется *матрицей Адамара*.

**Пример 2.5.1.** Матрицы Адамара для различных  $n$ :

1.  $n = 1$ :  $(1), (-1)$ .

2.  $n = 2$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3.  $n = 2k + 1$ : не существует.

**Определение 2.5.2.** Матрицей Адамара в *нормальной форме* называется матрица Адамара  $H$ , у которой первая строка и первый столбец составлены только из 1.

Для матрицы Адамара в нормальной форме порядка  $n > 3$  все строки (и столбцы), кроме первых, содержат по  $\frac{n}{2}$  минус единиц, причем количество "пересечений"  $(-1)$  с 1 в соседних строках делится на 4.

**Гипотеза (Адамара).** Матрица Адамара существует для любого  $n$ , кратного 4.

Рассмотрим граф  $G(n; \frac{n}{2}; \frac{n}{4})$  — вектора из  $\{0, 1\}^n$ , т.ч.  $\|x\| = \frac{n}{2}$  и ребро проводится, если  $\langle x, y \rangle = \frac{n}{4}$ . Тогда матрица Адамара в нормальной форме  $H$  порядка  $n$  без первой строки задает  $(n - 1)$  клику в графе  $G(n; \frac{n}{2}; \frac{n}{4})$ .

**Утверждение 2.5.1.1.** В графе  $G(n; \frac{n}{2}; \frac{n}{4})$  нет клик размера  $> n$ .

**Доказательство.**  $G(n; \frac{n}{2}; \frac{n}{4})$  — дистанционный граф  $\Rightarrow$  клика в  $G$  это симплекс в пространстве. Поскольку сумма координат вершин  $G$  фиксирована, то размерность пространства равна  $n - 1$  и симплекса из  $> n$  вершин (а значит и  $(> n)$ -клики) не существует.  $\square$

Доказано, что  $\exists m \in [n, n + o(n)]$ , такое, что существует  $A$  порядка  $m$ .

**Утверждение 2.5.1.2.** Гипотеза Адамара верна для  $n = 2^k$ .

**Доказательство.** Пусть  $A \in \text{Mat}_{n \times n}$ ;  $B \in \text{Mat}_{m \times m}$ . Тогда кронекеровским произведением  $A$  на  $B$  назовем матрицу

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{nm \times nm}$$

Покажем, что если  $A$  и  $A'$  — матрицы Адамара, то и  $B = A \otimes A'$  тоже. Действительно, найдем скалярное произведение первых двух строк матрицы  $B$ :

$$\begin{aligned} a_{11}a'_{11} \cdot a_{11}a'_{21} + a_{11}a'_{12} \cdot a_{11}a'_{22} + \dots + a_{11}a'_{1m} \cdot a_{11}a'_{2m} + \dots + a_{1n}a'_{11} \cdot a_{1n}a'_{21} + \dots + a_{1n}a'_{1m} \cdot a_{1n}a'_{2m} = \\ = a'_{11}a'_{22}(a_{11}a_{11} + \dots + a_{1n}a_{1n}) + \dots + a'_{1m}a'_{2m}(a_{11}a_{11} + \dots + a_{1n}a_{1n}) = \\ = n(a'_{11}a'_{21} + \dots + a'_{1m}a'_{2m}) = 0 \end{aligned}$$

поскольку  $A'$  — матрица Адамара. □

## 2.5.2 Раскраски гиперграфов

Рассмотрим гиперграф  $H = (V, E)$ ,  $V = \{1, \dots, n\}$ ,  $E = \{M_1, \dots, M_s \mid n \geq |M_i| \geq 2\}$ . Раскраской гиперграфа назовем функцию  $\chi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$ . Определим  $\chi(M_i) = \sum_{j \in M_i} \chi(j)$  и

$$\text{disc}(E) := \min_{\chi} \max_i |\chi(M_i)|.$$

**Теорема 2.5.1.**

$$\text{disc}(E) \leq \sqrt{2n \ln 2s}.$$

*Доказательство.* Зафиксируем гиперграф  $H$  и рассмотрим случайную раскраску. По неравенству больших уклонений 1.3.1 выполнено

$$\mathbb{P}(|\chi(M_i)| \geq a) \leq 2 \exp \left[ -\frac{a^2}{2|M_i|} \right] \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

Тогда

$$\mathbb{P}(\exists i : |\chi(M_i)| \geq a) \leq 2se^{-\frac{a^2}{2n}},$$

что меньше 1 при  $a = \sqrt{2n \ln 2s}$ . □

**Теорема 2.5.2.** (6/д, Спенсер)

Если  $s = n$ , то

$$\text{disc}(E) \leq 6\sqrt{n}.$$

**Теорема 2.5.3.** Если  $s = n$  и  $n$  — порядок матрицы Адамара, то  $\exists E : \text{disc}(E) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим матрицу Адамара в нормальной форме  $H$  и матрицу  $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ .

Рассмотрим матрицу  $\frac{1}{2}(H + J)$ , строки которой будут отвечать ребрам гиперграфа, и пусть  $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ ,  $v_i \in \{\pm 1\}$  — вектор-раскраска. В введенных обозначениях выполнено равенство

$$\frac{1}{2}(H + J)v = \begin{pmatrix} L'_1 := \chi(M_1) \\ \vdots \\ L'_n := \chi(M_n) \end{pmatrix},$$

и нам нужно проверить, что  $\forall v_1, \dots, v_n \exists i: |L'_i| \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$ .

Положим  $\lambda := \sum_{i=1}^n v_i$ ,  $H = (h_1, \dots, h_n)$  — столбцы матрицы  $H$ . Тогда

$$Hv = h_1v_1 + \dots + h_nv_n = (L_1, \dots, L_n)^T = L$$

и

$$L_1^2 + \dots + L_n^2 = (L, L) = v_1^2 \langle h_1, h_1 \rangle + \dots + v_n^2 \langle h_n, h_n \rangle = n^2$$

откуда  $\exists i L_i^2 \geq n \Rightarrow |L_i| \geq \sqrt{n}$ .

Заметим теперь, что  $(H + J)v = (L_1 + \lambda, \dots, L_n + \lambda)^T = (2L'_1, \dots, 2L'_n)^T = N$ . Покажем, что  $\langle N, N \rangle \geq n^2$ .

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle &= (L_1 + \lambda)^2 + \dots + (L_n + \lambda)^2 = L_1^2 + \dots + L_n^2 + 2\lambda(L_1 + \dots + L_n) + n\lambda^2 \\ &= n^2 + n\lambda^2 + 2\lambda nv_1 = n^2 \pm 2\lambda n + n\lambda^2 \end{aligned}$$

поскольку  $\sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^n h_{ij} = v_1 \sum_{j=1}^n h_{1j} = nv_1$ .

Рассмотрим  $f(\lambda) = n^2 \pm 2\lambda n + n\lambda^2$ . Поскольку  $2 \mid n$  ( $n$  — порядок матрицы Адамара), то  $2 \mid \lambda$ .  $\min f(\lambda)$  достигается в точке  $\mp \frac{2n}{2\lambda} = \mp 1$ , но, поскольку  $\lambda$  четное, необходимо перебрать  $\lambda \in \{\pm 2, 0\}$ . В любом случае получим  $f(\lambda) \geq n^2$ , откуда следует условие теоремы.  $\square$

## 2.6 Кнезеровский граф

### 2.6.1 Определение и некоторые свойства

**Определение 2.6.1.** *Кнезеровским графом  $KG_{n,k} = (V, E)$  называется граф, такой, что  $V$  — все  $k$ -элементные подмножества  $\{1, \dots, n\}$ , а  $E = \{(A, B) : A \cap B = \emptyset\}$ .*

Из теоремы Эрдеша-Ко-Радо следует, что

$$\alpha(KG_{n,k}) = \begin{cases} C_{n-1}^{k-1} & k \leq \frac{n}{2} \\ C_n^k & k > \frac{n}{2} \end{cases}$$

а  $\omega(KG_{n,k}) = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ . Тривиальными оценками для хроматического числа являются:

$$\begin{aligned} \chi(KG_{n,k}) &\geq \omega = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \\ &\geq \frac{|V|}{\alpha} = \frac{n}{k} \end{aligned}$$

Попробуем улучшить их.

### 2.6.2 Хроматическое число кнезеровского графа

Покрасим все множества, содержащие 1, в первый цвет. Аналогично поступим так со всеми остальными  $i = 2, \dots, n$ . Получим, что  $\chi(KG_{n,k}) \leq n$ . Заметим теперь, что нам достаточно покрасить в свой цвет только множества, содержащие  $1, 2, \dots, n - 2k + 1$ , и оставшиеся  $2k - 1$  число в еще один цвет, ведь любые два  $k$ -элементных подмножества из этих чисел пересекаются. В итоге имеем оценку  $\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 2$ .

**Гипотеза (Кнезер).**

$$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$$

Для продолжения сформулируем результат, который, казалось бы, никак не относится к этому вопросу.

**Теорема 2.6.1.** *(6/д 1930: Борсук, Улам; 1932: Люстерник, Шнирельман)*

*Пусть  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  — сфера в  $\mathbb{R}^n$  размерности  $n - 1$  с центром в начале координат покрыта множествами  $A_1, \dots, A_n$  (т.е.  $S^{n-1} = A_1 \cup \dots \cup A_n$ ), причем  $\forall i : A_i$  либо открыто, либо замкнуто. Тогда  $\exists i : A_i$  лежит две диаметрально противоположные точки.*

Докажем здесь частный случай этой теоремы, когда  $n = 2$  и оба  $A_1, A_2$  — замкнутые. Рассмотрим произвольную точку  $x$  окружности  $S^1$ . Пусть  $x \in A_1$ . Если  $-x$  тоже лежит в  $A_1$ , то утверждение доказано. Иначе будем двигаться по окружности по часовой стрелке. Поскольку  $-x \in A_2$  и  $A_1$  — замкнуто, то на дуге от  $x$  до  $-x$  найдется "крайняя" точка  $y \in A_1$ .

Заметим, что если  $y \notin A_2$ , то сдвинувшись еще дальше по окружности, мы найдем либо точку окружности, не лежащую в  $A_1 \cup A_2$ , что противоречит условию теоремы БУЛШ. Тогда  $y \in A_1 \cap A_2$  и  $-y \in A_i$  — искомая диаметрально противоположная пара точек.

*Замечание.* Теорема БУЛШ равносильна утверждению: Если  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывная функция, то  $\exists x \in S^n : f(x) = f(-x)$

**Теорема 2.6.2.** (Ловас)

$$\chi(KG_{n,k}) \geq n + 2k - 2$$

*Доказательство.* Предположим, что  $\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 1 = d$ . Пусть  $\chi_1, \dots, \chi_d$  — цвета раскраски вершин  $K_1, \dots, K_{C_n^k}$  вершин  $KG_{n,k}$ . Пусть  $S^d \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$  —  $d$ -мерная сфера в  $(d+1)$ -мерном пространстве. Назовем *экватором* любое центральное сечение этой сферы гиперплоскостью. Заметим, что экватор это всегда  $S^{d-1}$ .

Сопоставим числам  $\{1, \dots, n\}$  точки сферы  $x_1, \dots, x_n \in S^d$  так, чтобы на каждом экваторе лежало не более  $d$  точек. Теперь определим для точки  $y \in S^d$  множество  $H(y)$  — открытую полусферу с центром в точке  $y$ . Введем множества

$$A_i := \{x \in S^d : H(x) \text{ содержит целиком одно множество цвета } \chi_i, i = 1, \dots, d$$

$$A_{d+1} := \{x \in S^d : |H(x) \cap \{x_1, \dots, x_n\}| \leq k - 1\}$$

Легко понять, что  $S^d = A_1 \cup \dots \cup A_n$ . Поскольку все  $H(x)$  открыты, то открыты и  $A_i$  для  $i = 1, \dots, d$ , а  $A_{d+1}$  — замкнуто, поскольку это дополнение открытых до  $S^d$ . Тогда, по теореме БУЛШта  $\exists i \exists x : x, -x \in A_i$ .

Пусть  $i \leq d$ . Тогда в полусфере с центром в  $x$  содержится  $k$  точек цвета  $\chi_i$  и в полусфере с центром в  $-x$  тоже содержится  $k$  точек цвета  $\chi_i$ . Поскольку полусферы открыты, эти два множества не пересекаются, а значит не могут быть одного цвета по определению  $KG_{n,k}$ .

Пусть  $i = d + 1$ . В таком случае  $H(x)$  и  $H(-x)$  содержат  $\leq 2(k - 1)$  точек. Это значит, что все остальные точки лежат на экваторе. Но их

$$\geq n - 2(k - 1) = n - 2k + 2 = d + 1,$$

что противоречит выбору  $x_1, \dots, x_n$ . □