
MODÉLISATION ET PRICING DES PRODUITS DÉRIVÉS INDEXÉS SUR L'INFLATION



Présenté par :

BIANCANIELLO	Enzo
DOUSTALY	Christophe
GUITTON	Jules
KHOURI	Tannous
PIQUANT	Mark

Encadrants Exiom Partners :

AMBROSINO	Benjamin
LOUAQAD	Chaimae

Encadrant CentraleSupélec :

GUO Gaoyue

Contents

1	Introduction	3
2	Sélection du modèle	4
3	Diffusion	4
3.1	Cadre de Heath-Jarrow-Morton (HJM)	5
3.1.1	La Dynamique du Taux Forward selon HJM	5
3.1.2	Le Taux Court instantané selon HJM	7
3.2	Le modèle Jarrow-Yildirim (JY)	8
3.2.1	Définitions et notations	8
3.2.2	Les équations de diffusion	9
4	Pricing	10
4.1	Pricer un cap avec JY	10
4.1.1	Démonstration du résultat	11
4.1.2	Pricing d'un ZBP avec les paramètres du modèle	11
4.2	Pricer un caplet indexé par l'inflation avec JY	13
4.2.1	Notation et Payoff du Caplet	13
4.2.2	Évaluation au temps t	13
4.2.3	Méthodologie de Brigo et Mercurio pour JY	14
5	Calibration	15
5.1	Calibration de a_n et σ_n	16
5.2	Calibration de a_r , σ_r , σ_I , $\rho_{n,r}$, $\rho_{n,I}$ et $\rho_{r,I}$	16
5.3	Itérations et convergence	17
5.4	Résultats de la calibration	18
6	Diffusion du modèle et pricing de produits exotiques indexés sur l'inflation	18
6.1	Diffusion et corrélation des browniens	18
6.2	Pricing d'options exotiques indexées sur l'inflation	19
6.2.1	Option Lookback	19
6.2.2	Inflation Call up and in	20
6.2.3	5Y Inflation Autocall	21
7	Conclusion	23
8	Bibliographie	24

List of Figures

1	Prix des caps - taux nominaux	16
2	Taux réels, nominaux et forward inflation	16
3	Convergence des résultats	17
4	Prix d'une Option Lookback en fonction de la maturité de l'option, en utilisant une diffusion avec $N=10000$ chemins.	19
5	Prix du call up and in en fonction de la maturité et de la barrière, pour un strike de 0, en utilisant une diffusion avec $N=10000$ chemins.	20
6	Vega du call up and in en fonction de la maturité et du niveau de la barrière, en utilisant des diffusions avec $N=50000$ chemins.	21
7	Prix de l'autocall Inflation en fonction du niveau de la barrière, en utilisant des diffusions avec $N=10000$ chemins.	22
8	Sensibilité du prix de l'autocall au paramètre a_r du modèle, en utilisant des diffusions avec $N=10000$ chemins.	22

1 Introduction

De 2012 et jusque'à 2022, les États-Unis et l'Europe ont connu dix années de très faible inflation (annuellement inférieure à 2.5%) dû notamment à des prix d'énergie relativement faibles et à un abaissement des coûts de production liés à la mondialisation et aux progrès technologiques [Ciccarelli, 2017]. Certains économistes parlant même de "missing inflation puzzle" aux États-Unis [Heise, 2022].

En 2022, conjointement l'augmentation des coûts énergétiques liés à la fois à la guerre en Ukraine et aux sanction économiques contre la Russie [Schnabel, 2022], la reprise économique post-COVID-19, à une disruption des chaînes d'approvisionnement [Vasquez, 2023], et une dizaine d'années de taux d'intérêts historiquement faibles et de quantitative easing (assouplissement quantitatif) [Strauss 2022] ont fait grimper l'inflation à 8% aux États-Unis et 8.8% en Europe.

Dans un contexte inflationniste, la nécessité de comprendre et de se prémunir contre ce phénomène devient primordiale pour les acteurs du marché financier. Cette situation a suscité un regain d'intérêt pour les produits dérivés indexés sur l'inflation, des instruments financiers conçus pour offrir une protection contre la perte de pouvoir d'achat induite par l'inflation.

Ces produits dérivés, dont les paiements sont ajustés selon l'évolution de l'inflation, représentent une solution stratégique pour les investisseurs et les entreprises cherchant à gérer le risque inflationniste. Leur importance s'accroît à mesure que l'inflation devient plus volatile, soulignant l'importance d'une modélisation et d'un pricing précis et efficace de ces produits.

La France a été en Septembre 1998, le premier pays de la zone euro à émettre des obligations indexées sur l'inflation (OATi) indexé sur l'indice. En 2001, la France émettait pour la première fois une obligation indexée sur l'inflation mesuré par l'indice des prix à la consommation européen (tabac exclu), nommé OAT€i. Au total, 53 milliards (valeur nominale) d'OAT€i sont en cours de circulation. En mai 2022, le premier "OAT€i vert" a été émit, pour un montant de 4 milliards d'euros. Les états ayant des revenus qui dépendent de façon directe de l'inflation (les taxes sur la consommation par exemple), les émissions d'obligations indexées sur l'inflation leur permettent d'équilibrer les actifs et les passifs de leurs bilans.

En plus des États, les acteurs dont les revenus augmentent avec l'inflation sont les entreprises immobilières, les entreprises de financement de projet, et certains entreprises de la grande distribution. Ces acteurs sont qualifiés de "payeurs" d'inflation. eDe l'autre côté, les principaux "receveurs" d'inflation sont les fonds de pensions dont les retraites payées doivent être indexées sur l'inflation mais aussi les banques et les assurances. Les fonds d'investissements peuvent êtres payeurs comme receveurs [Kerkhof 2005].

Notre projet, réalisé en collaboration avec Exiom Partners, se concentre sur l'analyse de l'inflation et son impact sur les marchés financiers à travers l'utilisation d'un modèle classique en finance. Nous aborderons l'étude de l'inflation sous toutes ses facettes, depuis sa dynamique jusqu'au pricing des produits dérivés indexés sur l'inflation, en passant par la calibration du modèle avec des données réelles du marché. Ce travail nous permettra d'appliquer nos connaissances théoriques à une classe d'actifs complexe, en utilisant Python pour la mise en œuvre pratique de notre étude.

2 Sélection du modèle

Pour la modélisation de dérivés indexés sur l'inflation, tels que les Caps et les Floors, plusieurs modèles peuvent être envisagés. Toutefois, deux d'entre eux se distinguent particulièrement et sont souvent utilisés comme référence dans l'industrie des dérivés :

- **Le modèle Hull-White:** Ce modèle est fréquemment utilisé en raison de sa simplicité et de sa capacité à modéliser les taux d'intérêt. Cependant, il présente des limites significatives pour notre contexte spécifique. Premièrement, le modèle Hull-White ne parvient pas à capturer la volatilité implicite, notamment le phénomène de skewness ou 'smile' des options, qui est crucial dans la valorisation précise des dérivés. De plus, il ne prend pas en compte la dynamique de volatilité, ce qui peut mener à une sous-estimation du risque dans des marchés volatils. Enfin, il ignore les corrélations existantes entre les taux d'intérêt et d'autres variables financières essentielles, rendant ses prédictions moins robustes dans un environnement économique interconnecté.
- **Le modèle Jarrow-Yildirim:** Le modèle Jarrow-Yildirim est une extension du cadre de Heath-Jarrow-Morton (HJM). Le modèle intègre une meilleure gestion de la volatilité des taux d'intérêt et permet une modélisation plus précise des corrélations entre les taux et l'inflation. Ces caractéristiques le rendent plus adapté pour les produits dérivés sensibles à l'inflation.

Compte tenu de ces éléments et du fait que l'équipe de l'année dernière a travaillé sur le premier modèle en révélant ses faiblesses, nous avons décidé de nous consacrer au second modèle.

3 Diffusion

Cette partie de notre étude est dédiée à la compréhension et à l'application des modèles de diffusion qui sont au cœur de la calibration des équations des produits dérivés indexés par l'inflation.

Nous débuterons avec une exploration détaillée du cadre de Heath-Jarrow-Morton (HJM), qui est le fondement théorique décrivant la dynamique des taux forwards instantanés et leur corrélation avec les prix des obligations zéro-coupon.

Puis, nous nous pencherons sur le concept de markovianité dans les processus de taux courts. Cette propriété est primordiale, car elle permet la simplification des calculs et une meilleure compréhension des structures par termes.

Enfin, nous aborderons l'élaboration du modèle Jarrow-Yildirim (JY), un pas de géant dans la modélisation des risques de taux d'intérêt et de change, notamment dans leur interaction avec l'inflation. Ce modèle sera crucial pour notre objectif.

3.1 Cadre de Heath-Jarrow-Morton (HJM)

Le cadre HJM est une alternative importante aux modèles de taux courts.

À la différence des modèles de taux courts qui permettent une grande liberté dans le choix de la dynamique, le modèle HJM décrit l'évolution de l'ensemble de la structure par termes des taux d'intérêt sur une base continue. Dans le modèle HJM, les taux forwards instantanés sont utilisés comme des quantités fondamentales pour dériver la courbe des taux d'intérêt.

En termes de modélisation, le HJM diffère des modèles de taux courts car la dynamique de l'évolution des taux forwards instantanés est complètement déterminée par le choix du coefficient de volatilité.

L'approche du modèle HJM est basée sur l'absence d'opportunité d'arbitrage et implique une dynamique des taux forwards sous la forme:

$$\begin{aligned} df(t, T) &= \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t), \\ f(0, T) &= f^M(0, T) \end{aligned} \tag{1}$$

où $W(t)$ est un mouvement brownien (éventuellement multidimensionnel), $f(t, T)$ est le taux forward instantané et $T \mapsto f^M(0, T)$ est la courbe forward initial du marché.

La difficulté principale reste la définition d'une fonction de volatilité appropriée pour les applications pratiques.

On peut montrer que le modèle HJM à un facteur avec volatilité déterministe est équivalent au modèle de Hull et White.

3.1.1 La Dynamique du Taux Forward selon HJM

On se place dans le cadre Heath-Jarrow-Morton (HJM) : On suppose que pour une maturité fixe T , le taux forward instantané $f(t, T)$ évolue selon le processus de diffusion suivant :

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t),$$

où $W(t)$ représente un mouvement brownien N -dimensionnel et $\alpha(t, T)$ est le terme de dérive adapté pour assurer l'absence d'opportunités d'arbitrage.

Le modèle permet de lier les prix des obligations zéro-coupon avec les taux forwards par les équations suivantes :

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}, \quad (2)$$

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}. \quad (3)$$

Ces dynamiques ne sont pas nécessairement exemptes d'arbitrage. En effet, Heath, Jarrow et Morton ont prouvé que pour qu'une mesure martingale équivalente unique existe, la fonction α ne peut pas être choisie arbitrairement, mais doit être égale à une quantité dépendant à la fois de la volatilité vectorielle σ et des taux de dérive dans la dynamique des prix des N obligations zéro-coupon sélectionnées. En particulier, si la dynamique (2) est sous la mesure risque-neutre, alors nous devons avoir :

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds = \sum_{i=1}^N \sigma_i(t, T) \int_t^T \sigma_i(t, s) ds,$$

de sorte que la dynamique intégrée de $f(t, T)$ sous la mesure risque-neutre soit

$$\begin{aligned} f(t, T) &= f(0, T) + \int_0^t \sigma(u, T) \left(\int_u^T \sigma(u, s) ds \right) du + \int_0^t \sigma(s, T) dW(s), \\ &= f(0, T) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_i(u, T) \left(\int_u^T \sigma_i(u, s) ds \right) du + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_i(s, T) dW_i(s), \end{aligned}$$

et sont entièrement spécifiées une fois que la fonction de volatilité vectorielle σ est fournie. Étant donné cette dynamique du taux forward instantané $f(t, T)$, l'application de la formule d'Itô donne la dynamique suivante du prix de l'obligation zéro-coupon $P(t, T)$:

$$dP(t, T) = P(t, T)r(t)dt - P(t, T) \left(\int_t^T \sigma(t, s) ds \right) dW(t),$$

où $r(t)$ est le taux d'intérêt à court terme instantané au temps t , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} r(t) &= f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \sigma(u, t) \left(\int_u^t \sigma(u, s) ds \right) du + \int_0^t \sigma(s, t) dW(s), \\ &= f(0, t) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_i(u, t) \left(\int_u^t \sigma_i(u, s) ds \right) du + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_i(s, t) dW_i(s). \end{aligned}$$

Le modèle HJM exprime donc la dynamique intégrée de $f(t, T)$ sous la mesure risque-neutre, et spécifie une fonction de volatilité afin d'obtenir un modèle pratique pour l'évaluation des dérivés de taux d'intérêt.

3.1.2 Le Taux Court instantané selon HJM

Le processus de taux court n'est pas nécessairement markovien en général. Néanmoins, il existe des spécifications pour lesquelles le taux court est markovien. Une telle spécification est possible si le terme de volatilité $\sigma(t, T)$ peut être séparé en produit de deux fonctions, l'une dépendant seulement du temps t et l'autre uniquement de la maturité T :

$$\sigma_i(t, T) = \xi_i(t)\phi_i(T)$$

Sous une telle spécification, le taux court devient :

$$r(t) = f(0, t) + \sum_{i=1}^N \xi^{(i)}(t) \int_0^t \zeta^{(i)}(u) \phi^{(s)}(u, s) du + \sum_{i=1}^N \xi^{(i)}(t) \int_0^t \zeta^{(i)}(s) dW^{(i)}(s),$$

où $\xi^{(i)}(t)$ et $\zeta^{(i)}(T)$ sont des fonctions du temps strictement positives et déterministes, et $W^{(i)}(t)$ est un mouvement brownien.

Dans le cas unifactoriel, si on définit la fonction $A(t)$ comme suit :

$$A(t) := f(0, t) + \psi_1(t) \int_0^t \xi_1^2(u) \left(\int_u^t \phi_1(s) ds \right) du,$$

Et en supposant qu'elle est différentiable, alors la dynamique du taux court peut être exprimée par :

$$dr(t) = \left[A'(t) + \psi_1'(t) \frac{r(t) - A(t)}{\psi_1(t)} \right] dt + \psi_1(t) \xi_1(t) dW_1(t)$$

où $\sigma_t(t)$ est une fonction de volatilité déterministe et strictement positive.

En posant les termes suivants :

$$\sigma_1(t, T) = \sigma e^{-a(T-t)},$$

où a et σ sont maintenant des constantes réelles, de sorte que:

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \sigma e^{at}, \\ \psi_1(T) &= e^{-aT}, \\ A(t) &= f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2. \end{aligned}$$

On peut facilement dériver les dynamiques suivantes du taux court :

$$dr(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial T}(0, t) + af(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-2at}) - ar(t) \right] dt + \sigma dW_1(t),$$

3.2 Le modèle Jarrow-Yildirim (JY)

Dans cette section, nous nous penchons sur l'approche proposée par Jarrow et Yildirim (2003) pour la modélisation conjointe des taux d'intérêt et de l'inflation. Ce modèle vise à restreindre l'analyse à une paramétrisation spécifique des volatilités des taux forwards, facilitant ainsi le pricing des dérivés indexés sur l'inflation.

3.2.1 Définitions et notations

Nous désignons généralement les quantités liées aux économies nominale et réelle avec les sous-scripts n et r , respectivement.

Les structures à terme des facteurs d'actualisation, au temps t , pour les économies nominale et réelle sont respectivement données par $T \mapsto P_n(t, T)$ et $T \mapsto P_r(t, T)$ pour $T \geq t$.

Étant donnés les temps futurs T_{i-1} et T_i , les taux LIBOR à terme associés, au temps t , sont définis par :

$$F_x(t; T_{i-1}, T_i) = \frac{P_x(t, T_{i-1}) - P_x(t, T_i)}{\tau_i P_x(t, T_i)}, \quad (4)$$

où $x \in \{n, r\}$, et τ_i est la fraction de l'année pour l'intervalle $[T_{i-1}, T_i]$, qui est supposée être la même pour les taux nominaux et réels.

Les taux forward instantanés nominaux et réels au temps t pour la maturité T sont définis par:

$$f_x(t, T) = -\frac{\partial \ln P_x(t, T)}{\partial T}, \quad (5)$$

où $x \in \{n, r\}$.

Nous désignons ensuite les taux courts instantanés nominaux et réels, respectivement, par

$$n(t) = f_n(t, t) \quad (6)$$

$$r(t) = f_r(t, t). \quad (7)$$

Nous désignons par Q_n et Q_r les mesures neutres au risque nominales et réelles, respectivement, et par E_x l'espérance associée à Q_x , où $x \in \{n, r\}$.

Enfin, l'indice des prix à la consommation à terme au temps t pour la maturité T_i est noté $Z_i(t)$ et défini par

$$Z_i(t) := I(t) \frac{P_r(t, T_i)}{P_n(t, T_i)}. \quad (8)$$

3.2.2 Les équations de diffusion

Sous l'espace de probabilité réel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, Jarrow et Yildirim ont considéré les dynamiques suivantes pour les taux forwards nominaux et réels ainsi que pour l'indice des prix à la consommation (CPI) :

$$\begin{aligned} dn(t, T) &= \alpha_n(t, T)dt + \sigma_n(t, T)dW_n^{\mathbb{P}}(t), \\ dr(t, T) &= \alpha_r(t, T)dt + \sigma_r(t, T)dW_r^{\mathbb{P}}(t), \\ dI(t) &= I(t) (\mu(t)dt + \sigma_I(t)dW_I^{\mathbb{P}}(t)), \end{aligned}$$

où $I(0) = I_0 > 0$, et $f_x(0, T) = f_x^{\mathbb{M}}(0, T)$ pour $x \in \{n, r\}$, indiquant que les taux forwards observés sur le marché au temps 0 sont pris comme point de départ pour les maturités T .

Pour faciliter la tarification des dérivés dans les sections suivantes, nous modélisons les volatilités des taux forwards comme :

$$\begin{aligned} \sigma_n(t, T) &= \sigma_n e^{-a_n(T-t)}, \\ \sigma_r(t, T) &= \sigma_r e^{-a_r(T-t)}, \end{aligned}$$

avec σ_n , σ_r , a_n , et a_r étant des constantes positives.

En utilisant cette paramétrisation, on peut suivre une formulation équivalente à la partie 3.1.2 pour déterminer la dynamique du taux court instantané :

Sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q}_n , le taux nominal, le taux réel, et le CPI sont :

$$dn(t) = [\theta_n(t) - a_n n(t)] dt + \sigma_n dW_n \quad (9)$$

$$dr(t) = [\theta_r(t) - \rho_{r,I} \sigma_I \sigma_r - a_r r(t)] dt + \sigma_r dW_r \quad (10)$$

$$dI(t) = I(t) [n(t) - r(t)] dt + \sigma_I I(t) dW_I \quad (11)$$

où (W_n, W_r, W_I) sont des mouvements browniens avec des corrélations $\rho_{n,r}$, $\rho_{n,I}$ et $\rho_{r,I}$, et $\theta_n(t)$ et $\theta_r(t)$ sont des fonctions déterministes pour être utilisées pour ajuster exactement les structures à terme des taux nominaux et réels, respectivement, i.e.:

$$\theta_x(t) = \frac{\partial f_x(0, t)}{\partial T} + a_x f_x(0, t) + \frac{\sigma_x^2}{2a_x}(1 - e^{-2a_x t}), \quad x \in \{n, r\}, \quad (12)$$

où $\frac{\partial}{\partial T}$ dénote la dérivée partielle de f_x par rapport à son deuxième argument.

Jarrow et Yildirim ont par suite démontré que l'index d'inflation suit une distribution log-normale :

$$I(T) = I(t) e^{\int_t^T (n(u) - r(u)) du - \frac{1}{2} \sigma_I^2 (T-t) + \sigma_I (W_I(T) - W_I(t))}. \quad (15.3) \quad (13)$$

Dans ce qui suit nous allons appliquer le modèle JY pour pricer les zéros-coupons avec les taux nominaux.

4 Pricing

Lors de la calibration de notre modèle, deux résultats essentiels sont nécessaires :

- Comment pricer un cap en utilisant la diffusion du taux nominal.
- Comment pricer les caplets indexés sur l'inflation en fonction des paramètres du modèle.

Dans cette partie, nous allons développer ces deux résultats.

4.1 Pricer un cap avec JY

En notant $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ l'ensemble des dates de paiement des caps et τ_i la fraction d'année de t_{i-1} à t_i .

On utilise le résultat suivant pour pricer un cap avec la diffusion du taux nominal $n(t)$:

$$\text{Cap}(t, T, X) = \sum_{i=1}^n (1 + X\tau_i) ZBP(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1 + X\tau_i}) \quad (14)$$

où

$ZBP(t, T, S, X)$ est le prix à t d'un put européen de strike X , et de maturité T écrite sur une obligation arrivant à échéance au temps S .

Dans ce qui suit, nous allons d'abord démontrer cette formule et ensuite développer la méthode de tarification d'un ZBP utilisant le taux nominal, afin de lier le prix du cap aux paramètres du modèle.

4.1.1 Démonstration du résultat

Tout d'abord, un cap est une somme de caplets donc :

$$Cap(t, T, X) = \sum_{i=1}^n Cpl(t, t_{i-1}, t_i, \tau_i, X)$$

Il reste à établir le lien entre un caplet et un ZBP. Par définition on a :

$$Cpl(t, t_{i-1}, t_i, \tau_i, X) = \mathbb{E} \left(e^{-\int_t^{t_i} r_s ds} \tau_i (L(t_{i-1}, t_i) - X)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

On fait apparaître $P(t_{i-1}, t_i)$:

$$Cpl(t, t_{i-1}, t_i, \tau_i, X) = \mathbb{E} \left(e^{-\int_t^{t_{i-1}} r_s ds} P(t_{i-1}, t_i) \tau_i (L(t_{i-1}, t_i) - X)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

En remplaçant $L(t_{i-1}, t_i)$ par sa définition $L(t_{i-1}, t_i) = -\frac{P(t_{i-1}, t_i) - 1}{P(t_{i-1}, t_i) \tau_i}$:

$$Cpl(t, t_{i-1}, t_i, \tau_i, X) = \mathbb{E} \left(e^{-\int_t^{t_{i-1}} r_s ds} P(t_{i-1}, t_i) \left[\frac{1}{P(t_{i-1}, t_i)} - 1 - X \tau_i \right]^+ \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

En développant :

$$Cpl(t, t_{i-1}, t_i, \tau_i, X) = \mathbb{E} \left(e^{-\int_t^{t_{i-1}} r_s ds} [1 - (1 + X \tau_i) P(t_{i-1}, t_i)]^+ \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

On retrouve donc la formule d'un put européen :

$$Cpl(t, t_{i-1}, t_i, \tau_i, X) = (1 + X \tau_i) ZBP(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1 + X \tau_i})$$

D'où le résultat :

$$Cap(t, T, X) = \sum_{i=1}^n (1 + X \tau_i) ZBP(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1 + X \tau_i})$$

4.1.2 Pricing d'un ZBP avec les paramètres du modèle

Maintenant que l'on a établi le lien entre un cap sur taux et un ZBP, on cherche à pricer un ZBP. Commençons par regarder pour un call européen de strike X , d'échéance T et écrite sur une obligation à escompte pur arrivant à échéance à temps S (définition du ZBC)

Considérons l'équation différentielle stochastique donnée par

$$dn(t) = [\theta(t) - a_n n(t)]dt + \sigma_n dW(t).$$

En réarrangeant et intégrant, on retrouve une expression explicite pour $n(t)$:

$$n(t) = n(0)e^{-at} + \int_0^t \theta(s)e^{-a_n(t-s)}ds + \int_0^t \sigma_n e^{-a_n(t-s)}dW(s).$$

Précisément, nous pouvons démontrer que :

$$\int_t^T n(u)du \Big| \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N} \left(B(t, T)[n(t) - \alpha(t)] + \ln \frac{P^M(0, t)}{P^M(0, T)} + \frac{1}{2} [V(0, T) - V(0, t)], V(t, T) \right),$$

Avec :

$$B(t, T) = \frac{1}{a_n} \left[1 - e^{-a_n(T-t)} \right]$$

$$\alpha(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma_n^2}{2a_n^2} (1 - e^{-a_n t})^2$$

$$V(t, T) = \frac{\sigma^2}{a_n^2} \left[T - t + \frac{2}{a_n} e^{-a_n(T-t)} - \frac{1}{2a_n} e^{-2a_n(T-t)} - \frac{3}{2a_n} \right].$$

Or, une option d'achat européenne avec maturité T , prix d'exercice X et écrite sur une obligation zéro-coupon de principal unitaire avec maturité $S > T$ est défini par :

$$ZBC(t, T, S, X) = \mathbb{E} \left(e^{-\int_t^T n_u du} (P(T, S) - X)^+ \Big| \mathcal{F}_t \right).$$

On peut calculer l'espérance si l'on connaît n sous la forward mesure T . On peut montrer que sous la mesure neutre au risque Q^T , la distribution du taux $n(t)$ conditionnelle sur \mathcal{F}_s est toujours gaussienne avec :

$$\mathbb{E}^T \{n(t) | \mathcal{F}_s\} = n(s) e^{-a_n(t-s)} + \int_s^t \theta(u) e^{-a_n(t-u)} du,$$

$$\text{Var}^T \{n(t) | \mathcal{F}_s\} = \frac{\sigma_n^2}{2a_n} \left[1 - e^{-2a_n(t-s)} \right].$$

D'où le call s'écrit :

$$ZBC(t, T, S, X) = P(t, S) \Phi(h) - X P(t, T) \Phi(h - \sigma_p)$$

Où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et :

$$\sigma_p = \sigma_n \sqrt{\frac{1 - e^{-2a_n(T-t)}}{2a_n}} B(T, S)$$

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \left(\frac{P(t, S)}{P(t, T)X} \right) + \frac{\sigma_p}{2}$$

Donc le put s'écrit :

$$ZBP(t, T, S, X) = X P(t, T) \Phi(-h + \sigma_p \sqrt{T-t}) - P(t, S) \Phi(-h \sqrt{T-t})$$

Pour $t=0$, on a :

$$ZBP(0, T, S, X) = XP(0, T)\Phi(-h + \sigma_p\sqrt{T}) - P(0, S)\Phi(-h\sqrt{T})$$

On a maintenant une expression explicite pour pricer un cap avec notre modèle :

$$Cap(t, T, X) = \sum_{i=1}^n (1 + X\tau_i) ZBP(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{(1 + X\tau_i)})$$

Pour $t = 0$:

$$Cap(0, T, X) = \sum_{i=1}^n P(0, t_{i-1})\Phi(-h + \sigma_p\sqrt{t_{i-1}}) - (1 + X\tau_i)P(0, t_i)\Phi(-h\sqrt{t_{i-1}})$$

4.2 Pricer un caplet indexé par l'inflation avec JY

Dans cette partie on va pricer les caplets indexés sur l'inflation, notés IICplt (de l'anglais Inflation-Indexed Caplet).

4.2.1 Notation et Payoff du Caplet

Pour un caplet indexé sur l'inflation avec un strike K couvrant la période de T_{i-1} à T_i , où ϕ_i désigne la fraction d'année correspondant à l'intervalle $[T_{i-1}, T_i]$, le payoff est décrit par :

$$N\phi_i \left[\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - K \right]^+$$

4.2.2 Évaluation au temps t

La valeur de ce caplet au temps t peut être déterminée comme suit :

$$\text{IICplt}(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, K, N) = N\psi_i E_n \left\{ e^{-\int_t^{T_i} n(u) du} \left[\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - K \right]^+ \middle| F_t \right\}$$

Sous la mesure de probabilité $Q_n^{T_i}$, nous pouvons simplifier davantage :

$$\text{IICplt}(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, K, N) = N\psi_i P_n(t, T_i) E_n^{T_i} \left\{ \left[\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - K \right]^+ \middle| F_t \right\}$$

En supposant que le ratio $\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}$ suit une distribution log-normale, la formule de Black peut être appliquée :

$$E \{ (X - K)^+ \} = m\Phi \left(\frac{\ln(m/K) + v^2/2}{v} \right) - K\Phi \left(\frac{\ln(m/K) - v^2/2}{v} \right)$$

où $m = E[X]$, $v = (V[\ln(X)])^{1/2}$, et Φ représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

4.2.3 Méthodologie de Brigo et Mercurio pour JY

En suivant la méthodologie proposée par Brigo et Mercurio, il est possible d'exprimer la moyenne de $\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}$ et la variance de $\ln \frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}$ dans le cadre du modèle de Jarrow-Yildirim. On obtient ainsi une expression explicite de la valeur des caplets indexés sur l'inflation en fonction des paramètres du modèle qui permet de calibrer les paramètres restant.

L'espérance conditionnelle sous la mesure neutre au risque est donnée par :

$$E_n^{T_i} \left\{ \frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} \middle| F_t \right\} = \frac{P_n(t, T_{i-1})}{P_n(t, T_i)} \frac{P_r(t, T_i)}{P_r(t, T_{i-1})} e^{C(t, T_{i-1}, T_i)}$$

La variance conditionnelle du logarithme du ratio d'inflation est complexe en raison de l'interaction de plusieurs paramètres du modèle :

$$V_n^{T_i} \left\{ \ln \frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} \middle| F_t \right\} = \sum_{\text{termes}} \text{expression}$$

où les termes incluent :

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_n^2}{2a_n^3} (1 - e^{-a_n(T_i - T_{i-1})})^2 \left[1 - e^{-2a_n(T_{i-1} - t)} \right] + \sigma_I^2 (T_i - T_{i-1}) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-a_r(T_i - T_{i-1})})^2 \left[1 - e^{-2a_r(T_{i-1} - t)} \right] \\ & - 2\rho_{n,r} \frac{\sigma_n \sigma_r}{a_n a_r (a_n + a_r)} \cdot (1 - e^{-a_n(T_i - T_{i-1})}) (1 - e^{-a_r(T_i - T_{i-1})}) \left(1 - e^{-(a_n + a_r)(T_{i-1} - t)} \right) \\ & + \frac{\sigma_n^2}{a_n^2} \left[T_i - T_{i-1} + \frac{2}{a_n} e^{-a_n(T_i - T_{i-1})} - \frac{1}{2a_n} e^{-2a_n(T_i - T_{i-1})} - \frac{3}{2a_n} \right] \\ & + \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \left[T_i - T_{i-1} + \frac{2}{a_r} e^{-a_r(T_i - T_{i-1})} - \frac{1}{2a_r} e^{-2a_r(T_i - T_{i-1})} - \frac{3}{2a_r} \right] \\ & - 2\rho_{n,r} \frac{\sigma_n \sigma_r}{a_n a_r} \left[T_i - T_{i-1} - \frac{1 - e^{-a_n(T_i - T_{i-1})}}{a_n} - \frac{1 - e^{-a_r(T_i - T_{i-1})}}{a_r} + \frac{1 - e^{-(a_n + a_r)(T_i - T_{i-1})}}{a_n + a_r} \right] \\ & + 2\rho_{n,I} \frac{\sigma_n \sigma_I}{a_n} \left[T_i - T_{i-1} - \frac{1}{a_n} e^{-a_n(T_i - T_{i-1})} \right] - 2\rho_{r,I} \frac{\sigma_r \sigma_I}{a_r} \left[T_i - T_{i-1} - \frac{1 - e^{-a_r(T_i - T_{i-1})}}{a_r} \right] \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} B_r(t, T) &= \frac{1}{a_r} \left[1 - e^{-a_r(T-t)} \right], \\ A_r(t, T) &= \frac{P_r^M(0, T)}{P_r^M(0, t)} \exp \left\{ B_r(t, T) f_r^M(0, t) - \frac{\sigma_r^2}{4a_r} (1 - e^{-2a_r t}) B_r(t, T)^2 \right\}, \\ P_r(t, T) &= A_r(t, T) e^{-B_r(t, T) r(t)}, \\ C(t, T_{i-1}, T_i) &= \sigma_r B_r(T_{i-1}, T_i) \left[B_r(t, T_{i-1}) (\rho_{r,I} \sigma_I - \frac{1}{2} \sigma_r B_r(t, T_{i-1})) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\rho_{n,r} \sigma_n}{a_n + a_r} (1 + a_r B_n(t, T_{i-1})) - \frac{\rho_{n,r} \sigma_n}{a_n + a_r} B_n(t, T_{i-1}) \right]. \end{aligned}$$

5 Calibration

La calibration du modèle de Jarrow-Yildirim est une étape cruciale pour assurer que notre modèle reflète fidèlement les conditions du marché.

Rappelons nos équations de diffusion :

$$\begin{aligned}dn(t) &= [\theta_n(t) - a_n n(t)] dt + \sigma_n dW_n \\dr(t) &= [\theta_r(t) - \rho_{r,I} \sigma_I \sigma_r - a_r r(t)] dt + \sigma_r dW_r \\dI(t) &= I(t) [n(t) - r(t)] dt + \sigma_I I(t) dW_I\end{aligned}$$

Nous devons donc calibrer 8 paramètres : $a_n, a_r, \sigma_n, \sigma_I, \sigma_r, \rho_{r,I}, \rho_{r,n}, \rho_{n,I}$

Le problème d'optimisation pour la calibration peut être formulé comme suit :

$$\arg \min \sum_i (price_i^{\text{market}} - price_i^{\text{model}})^2.$$

Nous procédons en quatre étapes pour cela :

1. On commence par la diffusion du taux d'intérêt nominal $n(t)$, que l'on peut calibrer sur des caps classiques sur taux d'intérêts. En effet, la relation entre le prix d'un put européen sur taux et celui d'un cap permet de dériver une formule explicite pour le pricing de caps basée sur la diffusion du taux d'intérêt nominal.
2. Ensuite, on fixe les corrélations entre le CPI, les taux réels et nominaux à l'aide d'un raisonnement macroéconomique. Ces paramètres étant fixés, il nous reste maintenant à calibrer les 3 paramètres restants : σ_I, σ_r et a_r , sur les Caps/Floors inflation à l'aide du modèle de Jarrow-Yildirim décrit précédemment (4.2).
3. On calibre les corrélations.
4. On répète les étapes 2 et 3 de cette démarche sur plusieurs itérations jusqu'à convergence des résultats.

A la fin de cette partie, on aura obtenu les paramètres calibrés de notre modèle, qui pourront être utilisés pour pricer des options exotiques indexées sur l'inflation.

Nous nous autorisons une plage de valeurs acceptables pour nos données : $0 < a < 2$, $0 \leq \sigma \leq 0.5$ et $-1 \leq \rho \leq 1$.

On précisera au début de chaque partie les données de marchés qui ont été utilisées. Nous remercions chaleureusement l'équipe d'Exiom qui a bien voulu nous fournir ces données.

5.1 Calibration de a_n et σ_n

Dans cette partie, nous ferons usage des prix des caps qui reposent sur les taux nominaux chaleureusement fournis par Exiom partners :

Expir.	0.50%	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	3.50%	4.00%	5.00%	6.00%	7.00%
1Yr	244.85	138.60	114.11	89.66	65.29	41.13	17.95	2.88	0.29	0.10	0.05
2Yr	523.55	372.70	302.45	233.28	166.25	103.76	51.30	20.57	7.98	4.68	3.19
3Yr	683.56	570.92	460.88	354.92	255.51	166.64	94.65	50.60	23.57	13.78	9.02
4Yr	919.63	769.95	625.37	488.08	361.27	249.42	158.98	100.65	54.71	34.24	23.23
5Yr	1148.82	961.92	782.35	613.16	458.47	323.60	215.23	143.58	81.03	51.70	35.61
6Yr	1377.3	1155.21	942.74	743.60	562.56	405.44	279.02	193.27	111.83	71.72	49.30
7Yr	1599.54	1343.71	1099.88	872.27	666.16	487.62	343.51	243.57	142.42	90.74	61.54
8Yr	1819.31	1531.08	1257.18	1002.3	772.07	572.79	411.32	297.21	175.79	111.72	75.06
9Yr	2036.8	1717.05	1413.9	1132.48	878.77	659.27	480.84	352.84	211.39	134.85	90.50
10Yr	2254.08	1903.49	1571.62	1264.03	987.07	747.48	552.18	410.28	248.73	159.64	107.43
12Yr	2679.67	2270.31	1883.59	1525.86	1204.16	925.64	697.33	528.09	326.44	211.80	143.42
15Yr	3257.73	2769.81	2310.25	1886.25	1505.49	1175.49	903.21	697.08	440.14	289.05	196.94
20Yr	4019.41	3427.29	2872.95	2364.26	1909.17	1514.91	1187.96	935.84	608.87	409.94	285.23
25Yr	4626.83	3952.06	3323.74	2749.91	2238.27	1795.63	1427.61	1141.03	760.90	524.71	373.62
30Yr	5146.53	4400.76	3709.55	3080.94	2522.28	2039.75	1638.19	1323.44	900.01	633.23	460.19

Figure 1: Prix des caps - taux nominaux

Les données ont été récupérés le 08/09/2023 et sont exprimés en bps.

On utilise la diffusion nominale pour pricer les caps (4.1) et on utilise ces prix pour calibrer a_n et σ_n en minimisant la MSE.

5.2 Calibration de a_r , σ_r , σ_I , $\rho_{n,r}$, $\rho_{n,I}$ et $\rho_{r,I}$

En se basant sur [8] et les données d'Exiom, on peut représenter les taux suivants :

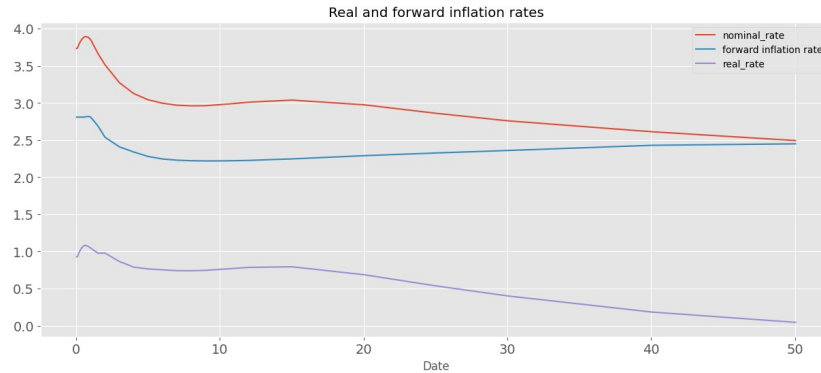


Figure 2: Taux réels, nominaux et forward inflation

En un premier lieu, on doit fixer les corrélations. En utilisant les données ci-dessus on a réussi à trouver une valeur de 0.28 pour la corrélation entre n et I , on utilise donc cette valeur pour la première itération. Pour le reste, on se base sur l'équation de Fisher : $n = r + I$. Le taux nominal suit la dynamique d'un taux réel corrigé par l'inflation. Cette équation est cohérente avec la pratique car les Banques centrales augmentent le taux nominal pour lutter contre l'inflation (choc Volcker). On peut donc supposer que le taux nominal est corrélé positivement avec l'inflation.

Avec cette équation on peut fixer les signes des corrélations initiales que l'on va prendre :

$$\rho_{r,I} < 0$$

$$\rho_{r,n} > 0$$

$$\rho_{n,I} > 0$$

On a déjà fixé $\rho_{n,I} = 0.28$. Pour les deux autres on commence avec $\rho_{r,I} = -0.3$ et $\rho_{r,n} = 0.3$.

Par suite, on price les caplets indexés par l'inflation avec nos diffusions (4.2) et on utilise les prix réels pour calibrer a_r , σ_r et σ_I en minimisant la MSE.

En utilisant ces résultats on peut calibrer $\rho_{n,r}$, $\rho_{n,I}$ et $\rho_{r,I}$.

5.3 Itérations et convergence

Avec les valeurs de $\rho_{n,r}$, $\rho_{n,I}$ et $\rho_{r,I}$ calibrées, on relance la calibration de a_r , σ_r et σ_I . On répète ce processus plusieurs fois jusqu'à convergence des résultats.

On obtient le graphique suivant qui montre la convergence des résultats :

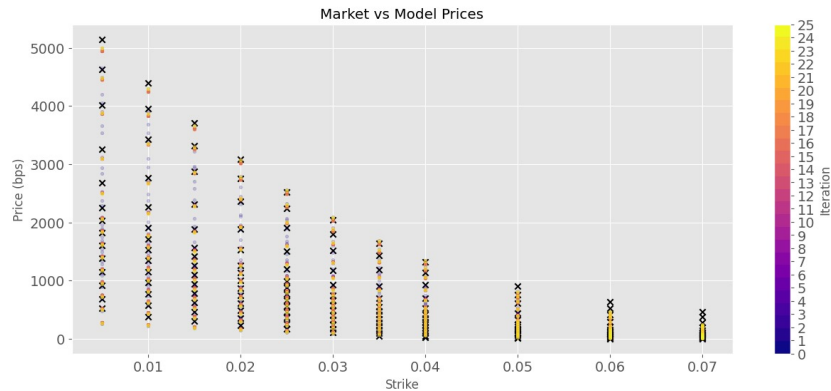


Figure 3: Convergence des résultats

5.4 Résultats de la calibration

En suivant ces trois étapes et sur plusieurs itérations jusqu'à convergence, on obtient finalement les paramètres suivants :

$$a_n = 0.19$$

$$a_r = 0.6$$

$$\sigma_n = 0.02$$

$$\sigma_I = 0.02$$

$$\sigma_r = 0.02$$

$$\rho_{r,I} = 1.0$$

$$\rho_{r,n} = 0.2$$

$$\rho_{n,I} = -0.2$$

6 Diffusion du modèle et pricing de produits exotiques indexés sur l'inflation

6.1 Diffusion et corrélation des browniens

Dans la mise en œuvre numérique du modèle JY, une étape cruciale est la simulation des chemins des taux réels, nominaux et de l'inflation. La diffusion est faite en deux étapes : la décomposition de Cholesky pour gérer la corrélation entre les mouvements browniens et l'application de ces mouvements pour simuler les trajectoires des taux d'intérêt.

La décomposition de Cholesky est utilisée pour transformer un processus de Brownien standard en un processus de Brownien corrélé. Étant donné une matrice de corrélation symétrique et définie positive \mathbf{C} , la décomposition de Cholesky permet d'obtenir une matrice triangulaire inférieure \mathbf{L} telle que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

Cette matrice \mathbf{L} est ensuite utilisée pour ajuster un vecteur de mouvements browniens standards afin d'introduire la corrélation souhaitée parmi eux. Dans notre cas, nous appliquons \mathbf{L} sur un ensemble de vecteurs gaussiens indépendants \mathbf{e} échelonnés selon un pas de temps $\sqrt{\Delta t}$, pour obtenir le vecteur des mouvements browniens corrélés:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{e}\sqrt{\Delta t})$$

Les trajectoires des facteurs de risque sont générées en propageant les conditions initiales à travers le temps, en utilisant les équations différentielles stochastiques spécifiées par le modèle.

6.2 Pricing d'options exotiques indexées sur l'inflation

Une fois calibré, le modèle de Jarrow-Yildirim permet de pricer des produits dérivés indexés sur l'inflation qui n'ont pas de formule explicites pour le prix par la méthode de Monte Carlo. Cette méthode consiste à simuler N chemins par la méthode décrite précédemment et d'estimer le prix du produit dérivé par la moyenne actualisée des cashflows sur les N chemins. Nous présentons le pricing de certains de ces produits.

Les paramètres du modèle utilisés sont les suivants: $a_n = 0.02$, $a_r = 0.16$, $\sigma_n = 0.071$, $\sigma_I = 0.0989$, $\sigma_r = 0.13$, $\rho_{r,I} = -0.216$, $\rho_{r,n} = 0.798$ et $\rho_{n,I} = -0.76$, obtenus dans la publication de S. Cotticelli [9].

6.2.1 Option Lookback

L'option Lookback est *path-dependant*: le payoff dépend des valeurs prises par le sous-jacent lors de la vie du produit. Ce type de payoff est destiné d'avantage à la spéculation qu'à un besoin de couverture. Le payoff considéré ici est:

$$\text{Payoff Lookback} = \max_{i \in [1, \text{maturity}]} \left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1 \right)$$

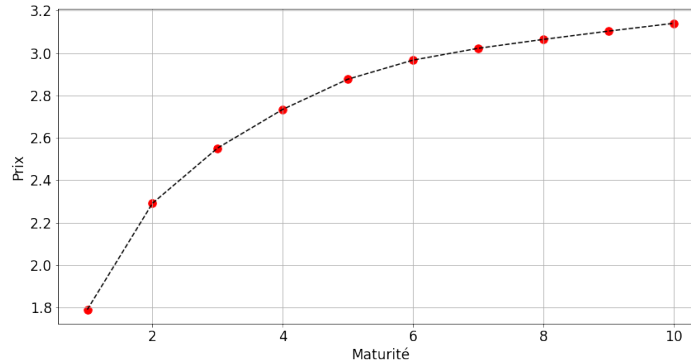


Figure 4: Prix d'une Option Lookback en fonction de la maturité de l'option, en utilisant une diffusion avec $N=10000$ chemins.

Le graphique de la figure 4 montre l'évolution du prix de l'option lookback en fonction de la maturité de l'option. Le prix est une fonction concave de la maturité. Cette concavité s'explique par deux facteurs: plus la maturité est grande, plus la probabilité qu'un nouveau maximum soit atteint sur l'année supplémentaire est faible et l'actualisation du prix par les taux d'intérêts fait baisser le prix des options de longue maturités.

6.2.2 Inflation Call up and in

Le Inflation Call up and in est un call sur l'inflation qui n'est payé que si l'inflation moyenne sur la période considérée est au dessus d'une certaine barrière. Ce genre de produit peut constituer une couverture efficace sur le risque d'inflation: l'acheteur est payé l'inflation dans le cas où elle est élevée (supérieure à la barrière). Cette option sera moins chère qu'un call traditionnel de même strike mais sa couverture est tout aussi efficace dans le cas où l'inflation est élevée. Le payoff est le suivant :

$$\text{Payoff Call Up and In} = \max \left(\left(\frac{I(T)}{I(0)} \right)^{1/T} - 1 - \text{strike}, 0 \right) * \mathbb{1}_{\left(\frac{I(T)}{I(0)} \right)^{1/T} - 1 > \text{barrière}}$$

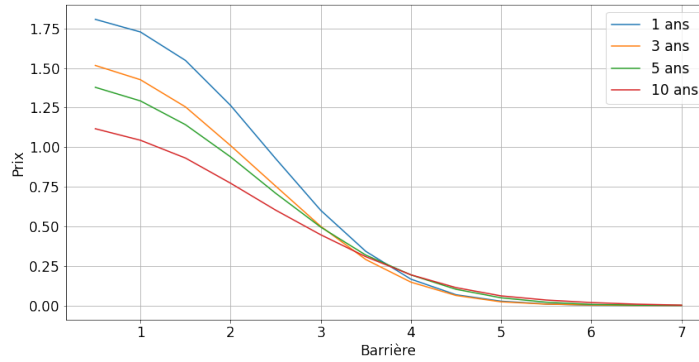


Figure 5: Prix du call up and in en fonction de la maturité et de la barrière, pour un strike de 0, en utilisant une diffusion avec N=10000 chemins.

Comme attendu, la figure 5 montre que le prix du call up and in décroît avec la barrière. Lorsque la maturité du produit augmente, un double effet fait baisser le prix: l'inflation est considérée sur une plus grande période donc elle est moins volatile, et l'actualisation du prix par les taux d'intérêts fait baisser le prix des options de longue maturités.

Nous traçons le vega du call up and in sur la figure 6. Pour ce faire, nous calculons les prix deux fois: une fois avec les paramètres obtenus lors de la calibration et une fois avec une volatilité 10% plus élevée:

$$\text{Vega Call Up and In} = \text{Prix Call Up and In}(1.1 \times \text{sigma}_I) - \text{Prix Call Up and In}(\text{sigma}_I)$$

La figure 6 montre que le prix du call up and in a un vega quasiment nul pour les maturités supérieures à 4 ans: le prix du produit a une très faible dépendance à la volatilité. Le vega est le plus grand pour des courtes maturités et surtout de la barrière 3%: dans ce cas, une augmentation de la volatilité augmente considérablement les chances de passer la barrière.

Étudier les sensibilité des produits permet de mieux les comprendre mais aussi à évaluer **l'importance de la calibration** sur le pricing: si une banque vend ce produit elle doit être plus vigilante à la calibration de la volatilité de l'inflation pour des courtes maturités que pour des longues.

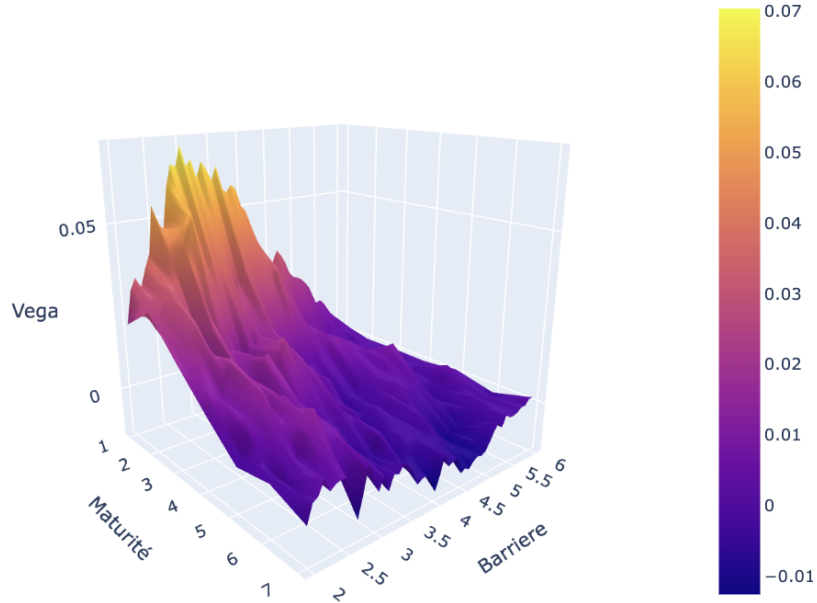


Figure 6: Vega du call up and in en fonction de la maturité et du niveau de la barrière, en utilisant des diffusions avec $N=50000$ chemins.

6.2.3 5Y Inflation Autocall

On propose finalement une version d'autocall sur l'inflation à maturité 5 ans. Dont le payoff peut être décrit de la façon suivante, où on considère que $I(T_0) = 100$:

$$\text{Payoff} = \begin{cases} 100 + 3 \times (I(T) - 100), & \text{si } I(T_i) \geq \text{barrière, à la date } T_i \\ 100, & \text{autrement, à maturité}(T = 5Y) \end{cases}$$

Ce payoff est adapté à différents types d'investisseurs et présente notamment l'avantage d'être à capital garanti. Sur la figure 7, on trace le prix de l'autocall en fonction de la barrière considérée. Pour une barrière supérieure à 130, le prix de l'autocall converge vers la valeur actualisée de 100 dans 5 ans: la probabilité de dépasser la barrière est négligeable.

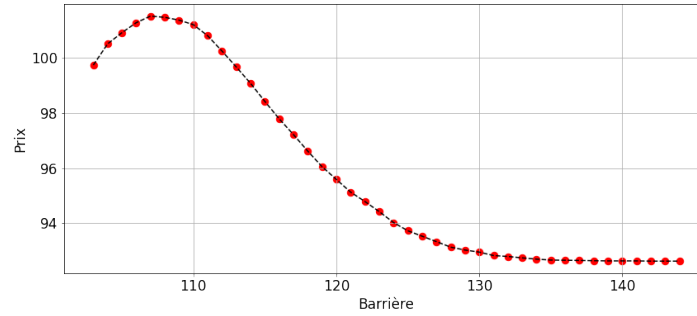


Figure 7: Prix de l'autocall Inflation en fonction du niveau de la barrière, en utilisant des diffusions avec $N=10000$ chemins.

Sur la figure 8 on s'intéresse à la sensibilité du prix de l'autocall au paramètre de calibration a_r . On définit cette sensibilité par la relation suivante:

$$\text{Sensibilité } a_r = \text{Prix}(a_r * 1.5) - \text{Prix}(a_r)$$

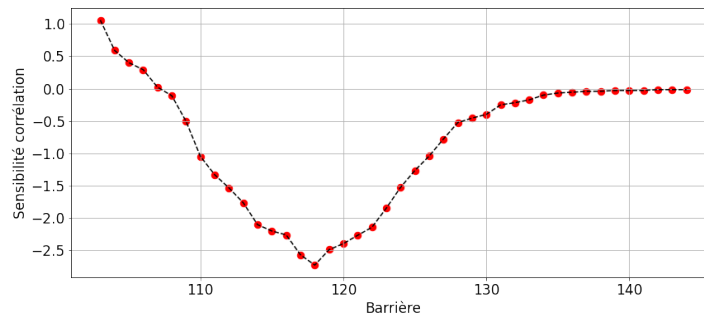


Figure 8: Sensibilité du prix de l'autocall au paramètre a_r du modèle, en utilisant des diffusions avec $N=10000$ chemins.

Pour des niveaux de barrière inférieurs à 130, le payoff est avec forte probabilité de 100 après 5 ans, le prix est donc bien indépendant de a_r . Pour les barrières compris entre 110 et 130: l'augmentation de a_r fait baisser la drift de $r(t)$ et donc diminue le drift de l'inflation $I(t)$: la probabilité de passer la barrière est donc plus faible. La sensibilité positive pour les faibles barrières est la conséquence des paramètres initiaux.

7 Conclusion

En conclusion, cette étude a fourni une analyse approfondie de la dynamique de l'inflation et de ses implications sur les marchés financiers, spécifiquement à travers les produits dérivés indexés sur l'inflation. En utilisant le modèle Jarrow-Yildirim, nous avons pu incorporer des hypothèses réalistes sur les taux d'intérêt et les corrélations de l'inflation, améliorant notre compréhension des interactions complexes au sein du marché. Le processus de calibration a affiné les paramètres de notre modèle, assurant leur alignement avec les conditions actuelles du marché, et augmentant ainsi la fiabilité de nos stratégies de tarification pour ces dérivés.

Nos résultats soulignent l'importance de techniques de modélisation robustes dans la gestion des risques financiers associés à l'inflation. La capacité de tarifier précisément les dérivés indexés sur l'inflation permet aux investisseurs et aux institutions financières de se couvrir plus efficacement contre les risques d'inflation. De plus, l'application pratique du modèle Jarrow-Yildirim démontre son adaptabilité dans des scénarios réels, en faisant un outil précieux pour les analystes financiers qui gèrent des instruments sensibles à l'inflation.

À mesure que la dynamique de l'inflation continue d'évoluer, la recherche continue et l'adaptation des approches de modélisation seront essentielles. Les études futures pourraient explorer des améliorations supplémentaires du modèle en incorporant des facteurs macroéconomiques additionnels ou en affinant le processus de calibration pour refléter les tendances émergentes du marché. Cela aidera à maintenir la pertinence et l'efficacité des modèles financiers dans un paysage économique en mutation, soutenant ainsi une meilleure prise de décision dans la gestion des risques d'inflation.

8 Bibliographie

- [1] Ciccarelli, M., Osbat, C., Bobeica, E., Jartet, C., Jarocinski, M., Mendicino, C., Notarpietro, A., Santoro, S., & Stevens, A. (2017). Low Inflation in the Euro Area: Causes and Consequences. ECB Occasional Paper No. 181.
- [2] Heise, S., Karahan, F., & Şahin, A. (2022). The Missing Inflation Puzzle: The Role of the Wage-Price Pass-Through. *Journal of Money, Credit and Banking*, 54(S1), 7-51.
- [3] Schnabel, I. (2022, March). A new age of energy inflation: climateflation, fossilflation and greenflation. Speech at a panel on “Monetary Policy and Climate Change” at the ECB and its Watchers XXII Conference.
- [4] Vasquez, L. (2023). Unpacking the Causes of Pandemic-Era Inflation in the US. *The NBER Digest*, NA-NA.
- [5] Strauss, D., & Giles, C. (2022, November 8). Bank of England’s stance on QE may have added to high inflation, says Pill. *Ft.com*.
- [6] Kerkhof, J. (2005). Inflation derivatives explained. *Fixed Income Quantitative Research*, Lehman Brothers (July), 1-80
- [7] Blanchard, A. (2020). The Two-Factor Hull-White Model: Pricing and Calibration of Interest Rates Derivatives
- [8] Federal Reserve Bank of Cleveland, 2024, Inflation Expectations, viewed 16 April 2024.
- [9] Cotticelli, S. (2022). A market consistent calibration of the Jarrow-Yildirim model. In *Rapporto Tecnico del Dipartimento di Scienze Statistiche*.