Группы и алгебры Ли II

Лекция 10

Решетки корней и весов

На прошлой лекции мы столкнулись с решеткой корней Q и решеткой весов P системы корней A_2. Дадим определения этих решеток в случае произвольной системы корней R.

Определение. *Решетка корней Q системы корней R - это абелева группа в E, порожденная R. Иначе говоря, если $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ набор простых корней R, то $Q = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}\alpha_i$.*

Вспомним, что конечномерность неприводимого представления старшего веса μ приводила к условию $\mu(H_{ij}) = \frac{2(e_i-e_j,\mu)}{(e_i-e_j,e_i-e_j)} \in \mathbb{Z}_+$. В случае A_2 из этого условия мы заключили, что μ лежит на решетке $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}e_i$ и назвали ее решеткой весов P.

Определение. *Решетка весов P системы корней R - это абелева группа в E, определенная следующим образом:*

$$P = \{\lambda \in E | \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha \in R\} \tag{1}$$

Определение. *Фундаментальные веса $\omega_i \in P$ - это веса, удовлетворяющие условию $\frac{2(\lambda_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)} = \delta_{ij}$.*

Фундаментальные веса образуют базис P:

$$P = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}\omega_i \tag{2}$$

Пример. *Фундаментальные веса решетки весов системы корней A_2 - это $\{e_1, e_2\}$.*

Пусть имеется какая-то решетка в евклидовом пространстве $L \subset E$, то есть некоторая абелева подгруппа E с числом образующих, равных размерности E.

Определение. *Два элемента $\alpha, \beta \in E$ конгруэнтны относительно решетки L, если $\alpha - \beta \in L$.*

Описание набора весовых подпространств, окончание

На прошлой лекции мы установили, что:

1. Всякое конечномерное представление V $\mathfrak{sl}_3$ имеет старший вес;

2. Старший вес μ неприводимого представления V единственный, лежит на решетке весов, и $dimV[\mu] = 1$;

3. Все веса неприводимого представления V заключены внутри шестиугольника с вершинами, полученными из μ отражениями относительно прямых $L_{e_i-e_j}$, причем если вес λ лежит на стороне шестиугольника, то $dimV[\lambda] = 1$.

Нам осталось понять, какие из весов внутри шестиугольника присутствуют в весовом разложении. По теореме 2 предыдущей лекции в него могут входить только веса, конгруэнтные μ, то есть такие λ, что $\lambda - \mu$ лежит на решетке корней. На самом деле каждый такой вес входит в разложение с ненулевой кратностью: возьмем любой вес β на одном из ребер шестиугольника, выберем $w \in V[\beta]$ и подействуем на него E_{ij} (выберем E_{ij} так, чтобы вес $\beta + e_i - e_j$ был внутри шестиугольника). Мы получим неприводимое представление $\mathfrak{sl}_2$-тройки $\{E_{ij}, H_{ij}, E_{ji}\}$, веса которого расположены симметрично относительно прямой $L_{e_i - e_j}$. Это значит, что все слагаемые прямой суммы $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} V[\beta + k(e_i - e_j)]$ ненулевые.

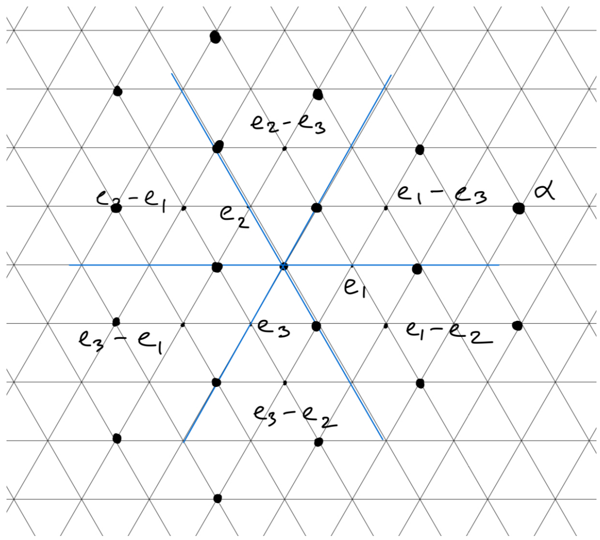

Рис. 1: набор весов неприводимого представления со страшим весом α

Теорема 1. *Пусть V - неприводимое конечномерное представление $\mathfrak{sl}_3$. Тогда для некоторого μ, лежащего на решетке весов, множество весов представления V - это такие $\lambda \in P$, что они конгруэнтны μ и лежат внутри шестиугольника с вершинами, полученными отражениями относительно прямых $L_{e_i - e_j}$.*

Примеры

Простейший нетривиальный пример неприводимого представления - это стандартное представление $V = \mathbb{C}^3$. В стандартном базисе $\{v_1, v_2, v_3\}$ для любого элемента $h \in \mathfrak{h}$ $h.v_i = h_i v_i = e_i(h) v_i$, поэтому весовое разложение $V = \bigoplus_{i=1}^3 V[e_i]$.

Следующий пример - двойственное представление $W = V^*$. Поскольку $\forall x \in \mathfrak{g}$ $\langle x.v, u\rangle + \langle v, x.u\rangle = 0$, веса V^* - это веса V, взятые с противоположным знаком.

Рассмотрим $W = Sym^2 V$. Базис в этом случае - это мономы $v_i v_j$, причем $\mathbb{C} v_i v_j = W[e_i + e_j]$, $W = \bigoplus W[e_i + e_j]$. Представление W неприводимо, поскольку все его весовые подпространства одномерны.

Лемма 1. *Представление $V_{n,0} = Sym^a V$ неприводимо.*

Доказательство. Следует из того, что $Sym^a V$ имеет старший вектор v_1^a, а каждое его весовое подпространство одномерно: вес $k e_1 + l e_2 + m e_3$, $k + l + m = a$ соответствует подпространству $\mathbb{C} v_1^k v_2^l v_3^m$ и только ему. $\square$

Следствие. *Представление $V_{0,n} = Sym^a V^*$ неприводимо.*

Рассмотрим $W = V \otimes V^*$. В этом случае весовые подпространства $W[e_i - e_j] = \mathbb{C} v_i \otimes v_j^*$, $W = \bigoplus W[e_i - e_j]$. Представление W приводимо. В самом деле, мы можем рассмотреть морфизм представлений $i : V \otimes V^* \to \mathbb{C}$, заданный спариванием: $v \otimes u^* \mapsto \langle v, u^*\rangle$. Его ядро - это бесследовые операторы $\mathfrak{sl}(V)$: $i(\sum_{i,j} a_{ij} v_i \otimes v_j^*) = \sum_{i,j} a_{ij} \langle v_i, v_j^*\rangle = \sum_i a_{ii} = 0$. Но вообще-то ядро морфизма представлений - это тоже представление, причем в этом случае мы получили, что $\ker i$

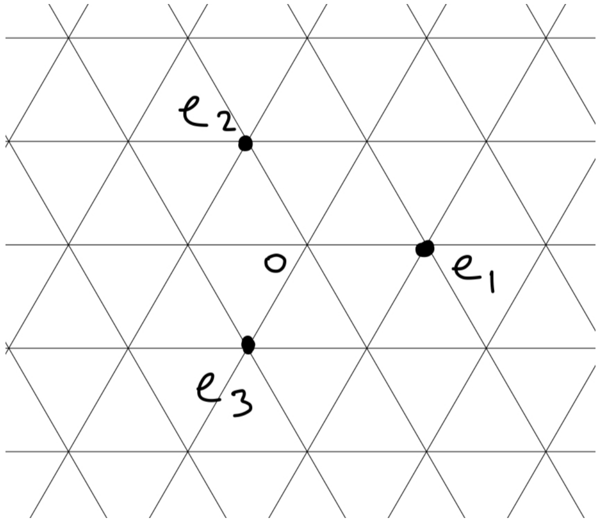

Рис. 2: Стандартное (фундаментальное) представление V

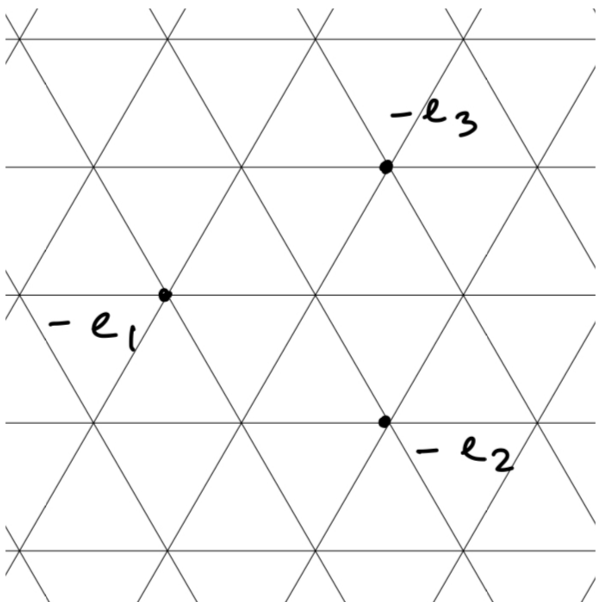

Рис. 3: Двойственное к стандартному представление V^*

- присоединенное представление, которое является неприводимым по доказанному на прошлой лекции. Так что $W = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}_3$.

Теперь рассмотрим $W = Sym^2 V \otimes V^*$. Это представление имеет одномерные весовые подпространства $W[e_i + e_j - e_k] = \mathbb{C} v_i v_j \otimes v_k^*$ для $k \neq i, j$ и трехмерные весовые подпространства $W[e_i] = \mathbb{C} v_i v_j \otimes v_j^* \oplus \mathbb{C} v_i v_k \otimes v_k^* \oplus \mathbb{C} v_i v_i \otimes v_i^*$). Представление W снова приводимо. В самом деле, рассмотрим морфизм представлений $i : Sym^2 V \otimes V^* \to V$, снова заданный спариванием: $uv \otimes w \mapsto \langle u, w \rangle v + \langle v, w \rangle u$. Его ядро состоит из одномерных весовых подпространств $W[e_i + e_j - e_k]$, $k \neq i, j$ и двумерных весовых подпространств $W[e_i]$. Ядро морфизма $\ker i$ является подпредставлением.

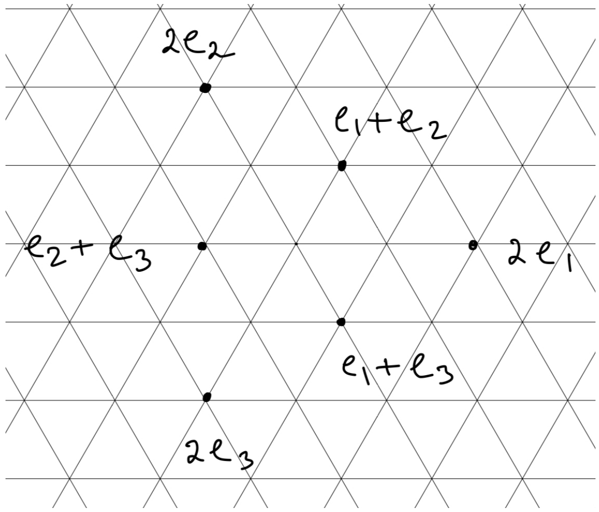

Рис. 4: Sym^2V

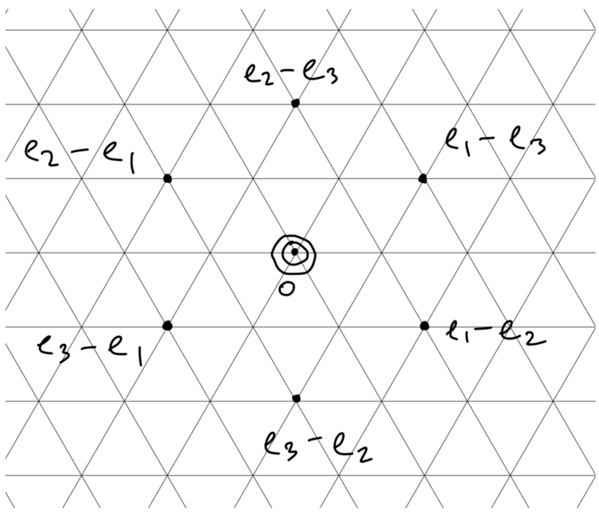

Рис. 5: $V \otimes V^*$

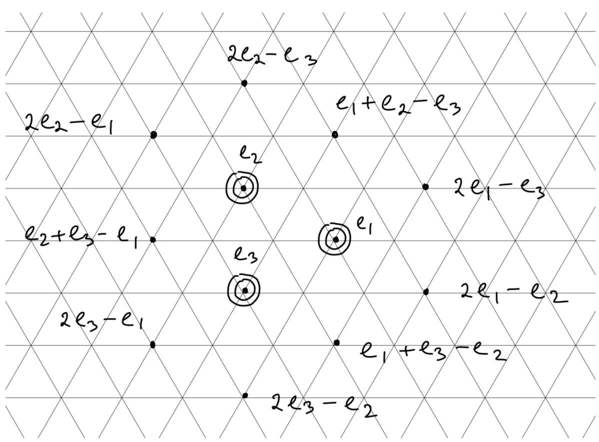

Рис. 6: $Sym^2V \otimes V^*$

Описание неприводимых представлений

Нам осталось разобраться с двумя вопросами - классификацией неприводимых представлений и кратностью вхождения в них весовых подпространств.

Теорема 2. *Для всякой пары целых неотрицательных a, b существует единственное неприводимое конечномерное представление $V_{a,b}$ со старшим весом $ae_1 - be_3$.*

Доказательство. Существование $V_{a,b}$ следует из того, что представление $Sym^aV \otimes Sym^bV^*$ содержит старший вектор веса $ae_1 - be_3$. Докажем единственность $V_{a,b}$. Предположим, нашлось два представления со старшим весом μ, скажем, V и W со старшими векторами $v \in V[\mu]$ и $w \in W[\mu]$. Рассмотрим прямую сумму представлений $V \oplus W$. Вектор $(v, w) \in V \oplus W$ - старший с весом μ. Рассмотрим неприводимое подпредставление $U \subset V \oplus W$, порожденное старшим вектором (v, w). Теперь рассмотрим проекции $\pi_V : U \to V$ и $\pi_W : U \to W$. Это морфизмы неприводимых представлений, значит по лемме Шура $U \cong V$ и $U \cong W$, так что $V \cong W$. $\square$

Теорема 3. *Пусть $b \leq a$. Тогда имеется такое разбиение:*

$$Sym^aV \otimes Sym^bV^* = \bigoplus_{i=0}^{b} V_{a-i,b-i} \tag{3}$$

Замечание. *Сравним это с результатом для представлений $\mathfrak{sl}_2$:*

$$V_a \otimes V_b = \bigoplus_{i=0}^{b} V_{a-b+2i} \tag{4}$$

Доказательство. Сначала заметим, что все веса $Sym^aV \otimes Sym^bV^*$ лежат внутри шестиугольника, соответствующего весовой диаграмме представления $V_{a,b}$, так что набор весов у $Sym^aV \otimes Sym^bV^*$ и $\bigoplus_{i=0}^{b} V_{a-i,b-i}$ одинаковый. Весовая диаграмма устроена следующим образом: она состоит из b шестиугольников H_i, $i = 0, \ldots b-1$, с вершинами в точках $(a-i)e_1 - (b-i)e_3$, которые сменяются треугольниками T_j, $j = 1, \ldots, [(a-b)/3]$ с вершинами в точках $(a - b - 3j)$.

Размерность весовых подпространств в $Sym^aV \otimes Sym^bV^*$, соответствующих точкам на шестиугольнике H_i, равна $\frac{(i+1)(i+2)}{2}$, а размерность весовых подпространств, соответствующих точкам на треугольнике T_j, равна $\frac{(b+1)(b+2)}{2}$.

Пусть $\mu = (a-i)e_1 - (b-i)e_3$. Заметим, что отображение $E_{21}^m : [\mu] \to V[\mu + m(e_2 - e_1)]$ инъективно, если вес $\mu + m(e_2 - e_1)$ еще принадлежит весовой диаграмме, поскольку иначе существует вектор $v \in V[\mu]$ такой, что $E_{21}^m.v = 0$, что невозможно из-за веса v. Но $dim(V[\mu]) = dim(V[\mu + m(e_2 - e_1)])$, поэтому отображение $E_{21}^m : V[\mu] \to V[\mu + m(e_2 - e_1)]$ - изоморфизм. Как следствие, любой вектор $w \in V[\mu + m(e_2 - e_1)]$ имеет вид $w = E_{21}^m.v$ для некоторого $v \in V[\mu]$, а значит $E_{12}.w \neq 0$. Таким образом, в весовое разложение $Sym^aV \otimes Sym^bV^*$ не могут входить никакие веса, кроме уже обозначенных. Нам остается проверить, что все обозначенные там есть.

Проверим, что каждое весовое подпространство $V[(a-i)e_1 - (b-i)e_3]$ содержит старший вектор. Зададим общий вид вектора веса $(a-i)e_1 - (b-i)e_3$: $v = \sum_{(i_1,i_2,i_3)} c_{(i_1,i_2,i_3)} v_1^{(a-i)} v^{(i_1,i_2,i_3)} \otimes v^{*(b-i)} v^{*(i_1,i_2,i_3)}$, где $v^{(i_1,i_2,i_3)} = v_1^{i_1} v_2^{i_2} v_3^{i_3}$, $i_1 + i_2 + i_3 = i$. Найдем коэффициенты $c_{(i_1,i_2,i_3)}$, при которых он будет старшим, то есть $E_{12}.v = E_{23}.v = 0$. Воспользуемся знанием о том, что

$$\begin{gathered} E_{12}.v_2 = v_1 \\ E_{12}.v_1^* = -v_2^* \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} E_{12}.v_1^{(a-i)} v^{(i_1,i_2,i_3)} \otimes v^{*(b-i)} v^{*(i_1,i_2,i_3)} = \\ i_2 v_1^{(a-i)} v^{(i_1+1,i_2-1,i_3)} \otimes v^{*(b-i)} v^{*(i_1,i_2,i_3)} - i_1 v_1^{(a-i)} v^{(i_1,i_2,i_3)} \otimes v^{*(b-i)} v^{*(i_1-1,i_2+1,i_3)} \end{gathered} \tag{6}$$

Поэтому чтобы v был старшим, необходимо и достаточно, чтобы $i_2 c_{(i_1,i_2,i_3)} = (i_1+1) c_{(i_1+1,i_2-1,i_3)}$ и $i_3 c_{i_1,i_2,i_3} = (i_2+1) c_{(i_1,i_2+1,i_3-1)}$. Отсюда видно, что $i_1! i_2! i_3! c_{(i_1,i_2,i_3)}$ не зависит от i_1, i_2, i_3, так что $c_{(i_1,i_2,i_3)} = c / i_1! i_2! i_3!$ для произвольного c. Таким образом, для каждого веса $(a-i)e_1 - (b-i)e_3$ мы нашли старший вектор, а значит и неприводимое подпредставление $V_{a-i,b-i} \subset Sym^aV \otimes Sym^bV^*$. $\square$