Группы и алгебры Ли II

Системы корней

1. (2) Пусть $\phi : R_1 \xrightarrow{\sim} R_2$ - изоморфизм неприводимых систем корней. Докажите, что ϕ - это композиция изометрии и гомотетии с центром в 0.

2. (a) (1) Найдите и опишите группу Вейля систем корней: A_2, D_2, B_2, G_2;
   (b) (1) Найдите самый длинный элемент группы Вейля w_0 в каждом из случаев.
   (c) (1) Какие у этих систем корней полные группы симметрий (группы автоморфизмов)?

3. (3) Постройте системы корней A_3, D_3, B_3, C_3;

4. (3) Пусть $w = s_{i_1} \dots s_{i_l} \in W$. Пусть $\beta_k = s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$. Докажите, что если $\beta_k = \pm\beta_j$ для некоторого $j < k$, то $w = s_{i_1} \dots \hat{s}_{i_j} \dots \hat{s}_{i_k} \dots s_{i_l}$, а значит исходное разложение w не было приведенным.

5. (2) Пусть $w_0 \in W$ - самый длинный элемент группы Вейля W. Покажите, что в этом случае $\forall w \in W \; l(ww_0) = l(w_0 w) = l(w_0) - l(w)$.

6. (3) Докажите, что в группе Вейля $W(R)$ выполнены соотношения Коксетера:
$$s_i^2 = 1, \quad (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1,$$
   где $\varphi = \pi - \frac{\pi}{m_{ij}}$ - угол между корнями α_i и α_j.

7. (3) Пусть R - неприводимая система корней в евклидовом пространстве E. Докажите, что E - неприводимое представление группы $W(R)$.

8. Рассмотрим произвольную решетку L в евклидовом пространстве E, то есть свободную абелеву группу в E с числом порождающих, равным $\dim E$. Тогда двойственная решетка L^* - это свободная абелева группа в E, порожденная элементами $\lambda \in E$ такими, что для всякого $\alpha \in L$ $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{Z}$. Пусть G - матрица Грама порождающих L, G^* - матрица Грама порождающих L^*. Пусть дополнительно G целочисленная.
   (a) (2) Докажите, что $\det G^* = \frac{1}{\det G}$
   (b) (2) Докажите, что $L = L^*$ тогда и только тогда, когда $\det G = \pm 1$. Это свойство решетки называется самодуальность.
   (c) (1) Докажите, что решетка корней E_8 самодуальна. (Более того, эта решетка - единственная среди решеток корней, обладающая таким свойством). Как тогда связаны фундаментальное и присоединенное представления алгебры Ли E_8?