

Группы и алгебры Ли II

Представления полупростых алгебр Ли

1. (по баллу за каждое) Разложите на неприводимые следующие представления \mathfrak{sl}_3 : $V_{1,0} \otimes V_{1,1}$, $V_{1,0} \otimes V_{1,2}$, $V_{1,0} \otimes V_{3,1}$.

Замечание. На последних лекциях мы обозначили бы эти представления как $L_{e_1} \otimes L_{e_1 - e_3}$, $L_{e_1} \otimes L_{e_1 - 2e_3}$, $L_{e_1} \otimes L_{3e_1 - e_3}$.

2. Рассмотрим отображение (здесь $V = V_{1,0}$, $V^* = V_{0,1}$ - фундаментальные представления \mathfrak{sl}_3)

$$\iota : \text{Sym}^a V \otimes \text{Sym}^b V^* \rightarrow \text{Sym}^{a-1} V \otimes \text{Sym}^{b-1} V^*,$$

заданное на разложимых тензорах по формуле

$$v_1 \dots v_a \otimes v_1^* \dots v_b^* \mapsto \sum \langle v_i^*, v_j \rangle v_1 \dots \hat{v}_i \dots v_a \otimes v_1^* \dots \hat{v}_j^* \dots v_b^*.$$

- (a) (1) Докажите, что это морфизм представлений (сплетающий оператор) \mathfrak{sl}_3 .
 - (b) (1) Докажите, что его ядро - это неприводимое представление $V_{a,b}$.
3. (2) Докажите, что неприводимые конечномерные представления \mathfrak{sl}_n нумеруются диаграммами Юнга $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq 0\}$.
 4. (2) Пусть $1 \leq k \leq n$, V - тавтологическое представление \mathfrak{sl}_n . Докажите, что $\bigwedge^k V$ неприводимое и соответствует диаграмме $\underbrace{\{1, \dots, 1\}}_k, 0, \dots, 0$.
 5. (1) Найдите размерность неприводимого представления \mathfrak{sl}_4 , соответствующего диаграмме $\{5, 4, 1\}$.
 6. Рассмотрим фундаментальное представление $V_{1,0} = L_{e_1}$ алгебры Ли \mathfrak{sl}_3 .
 - (a) (2) Найдите в модуле Верма M_{e_1} сингулярные векторы. Докажите, что они сингулярные.
 - (b) (2) Опишите все морфизмы модулей Верма в БГГ-резольвенте представления L_{e_1} (для этого сначала постройте вложения модулей Верма).
 7. Рассмотрим алгебру Ли \mathfrak{g}_2 (это алгебра Ли с системой корней G_2).
 - (a) (1) Выберите поляризацию и соответствующий ей набор простых корней.
 - (b) (2) Найдите фундаментальные веса решетки весов.
 - (c) (2) Сколько у \mathfrak{g}_2 фундаментальных представлений? Найдите весовое разложение каждого из них.
 - (d) (3) Найдите в модуле Верма M_0 сингулярные векторы. Докажите, что они сингулярные.
 - (e) (3) Опишите все морфизмы модулей Верма в БГГ-резольвенте представления L_0 (для этого сначала постройте вложения модулей Верма).