Группы и алгебры Ли II

Лекция 8

Приведенное разложение

На прошлой лекции мы выяснили следующее:

1. Группа Вейля W действует транзитивно на множестве наборов простых корней;
2. Любой корень можно получить из простого действием W:
$$W(\Pi) = R;$$
3. Группа Вейля W порождена простыми отражениями.

Это значит, что любой набор простых корней однозначно задает систему корней.

Определение. *Пусть $w \in W$. Тогда длиной $l(w)$ элемента w назовем число плоскостей L_α таких, что C_+ и $w(C_+)$ лежат по разные стороны от L_α.*

Пример. *В обозначениях системы корней A_3 $l(s_1) = 1$, $l(s_1 s_2) = 2$.*

Теорема 1. *Пусть $w = s_{i_1} \dots s_{i_l}$ - приведенное разложение, то есть l минимально. Тогда $l = l(w)$.*

Доказательство. Обратим доказательство последней леммы предыдущей лекции. Тогда мы имели $C = s_{\beta_l} \dots s_{\beta_1}(C_+)$ и выяснили, что $s_{\beta_l} \dots s_{\beta_1} = s_{i_1} \dots s_{i_l}$, где $\beta_j = s_{i_1} \dots s_{i_{j-1}}(\alpha_{i_j})$. Но мы помним, что L_{β_j} - стенка камер C_j и C_{j-1}, содержащихся в последовательности
$$C_+ = C_0 \to C_1 \to \dots \to C_l = C$$
Таким образом, взяв β_j, определенные по формулам выше, мы имеем оценку $l(w) \leq l$. Из приведенности следует $l(w) = l$. $\square$

Упражнение. *Доказать последнее утверждение.*

Следствие. *Действие группы Вейля на множестве камер Вейля свободное.*

Доказательство. Если $w(C_+) = C_+$, то $l(w) = 0$, значит $w = 1$. $\square$

Классификация систем корней

Определение. *Приведенная система корней R называется приводимой, если $R = R_1 \sqcup R_2$, $R_1 \perp R_2$. Если система корней R не является приводимой, то мы называем ее неприводимой.*

Лемма 1. *Если R приводима и $R = R_1 \sqcup R_2$, то $\Pi = \Pi_1 \sqcup \Pi_2$. Обратно, если $\Pi = \Pi_1 \sqcup \Pi_2$, $\Pi_1 \perp \Pi_2$, то $R = R_1 \sqcup R_2$.*

Доказательство. Первое очевидно, второе следует из того, что простые отражения, соответствующие Π_1, и простые отражения, соответствующие Π_2, коммутируют. $\square$

Определение. *Матрица Картана A системы корней R - это матрица с элементами $a_{ij} = n_{\alpha_i\alpha_j} = \frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$*

Лемма 2. *Сформулируем свойства матрицы Картана.*

1. *Матрица Картана приводимой системы корней имеет блочно диагональный вид с блоками, соответствующими неприводимым подсистемам корней;*

2. $a_{ii} = 2$*;*

3. $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$*;*

4. $a_{ij}a_{ji} = 4\cos^2(\varphi)$*, где φ - угол между простыми корнями α_i и α_j. Если $\varphi \neq \pi/2$, то*

$$\frac{|\alpha_i|^2}{|\alpha_j|^2} = \frac{a_{ji}}{a_{ij}}$$

Матрицу Картана удобно кодировать диаграммами Дынкина по следующему алгоритму.

1. Каждому простому корню мы сопоставляем вершину диаграммы.

2. В зависимости от угла мы соединяем вершины некоторым количеством ребер:
   - $\varphi = \pi/2$ - 0 ребер;
   - $\varphi = 2\pi/3$ - 1 ребро;
   - $\varphi = 3\pi/4$ - 2 ребра;
   - $\varphi = 5\pi/6$ - 3 ребра;

3. Если $|\alpha_i| > |\alpha_j|$, то ориентируем все ребра в направлении от вершины, соответствующей длинному корню, к вершине, соответствующей короткому.

Заметим, что диаграммы Дынкина, соответствующие приводимым системам корней, несвязны и распадаются на диаграммы Дынкина, соответствующие неприводимым системам корней, которые связны. Поэтому наша задача - классифицировать связные диаграммы Дынкина.

Теорема 2. *Пусть приведенная система корней R приводима. Тогда ее диаграмма Дынкина изоморфна одной из следующих диаграмм.*

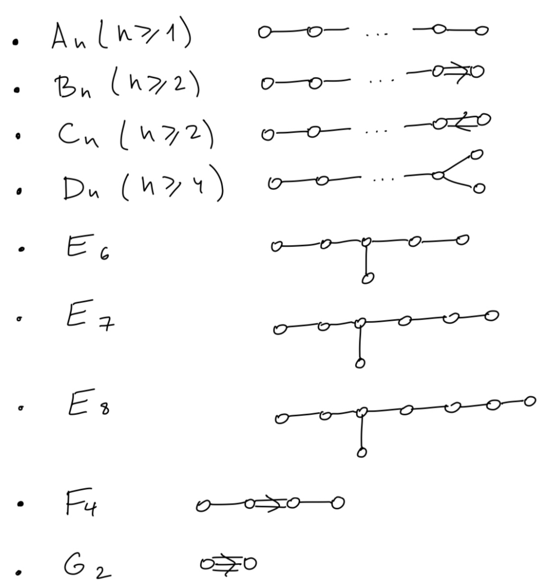

Рис. 1: Системы корней

Доказательство. Мы проведем классификацию в symply-laced случае, то есть, когда все ребра одинарные, чтобы понять дух доказательства. Пусть I - множество вершин диаграммы Дынкина D. В symply-laced случае длины всех корней одинаковы. В самом деле, рассмотрим корни α_i и α_j и ограничимся на плоскость, проходящую через них. Пересечение этой плоскости с R дает нам систему корней ранга 2, а поскольку угол между α_i и α_j равен $\pi/2$ или $2\pi/3$, с учетом классификации имеем $|\alpha_i| = |\alpha_2|$. Выберем нормировку так, чтобы $|\alpha_i|^2 = 2$, тогда $(\alpha_i, \alpha_i) = 2$, $(\alpha_i, \alpha_j) = -1$ или 0. Это все значит, что $a_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$, а значит A положительно определена.

Теперь по шагам будем прояснять устройство D.

1. D не имеет циклов. В самом деле, допустим, имеется цикл J. Причем можно считать, что вершины цикла соединены только с соседними вершинами (иначе мы найдем цикл меньше и будем продолжать процедуру до тех пор, пока это условие не будет выполнено). Тогда $v = \sum_{j \in J} \alpha_j$ таков, что $(v, v) = 0$.

2. Каждая вершина D соединена не более чем с тремя соседними. В самом деле, предположим, имеется поддиаграмма как на рисунке. Тогда $v = 2\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ таков, что $(v, v) = 0$.

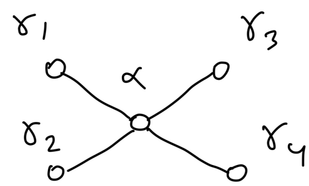

Рис. 2: Системы корней

3. D содержит не более одной вершины валентности 3. В самом деле, пусть имеется две вершины валентности 3. Тогда имеется такая поддиаграмма. Рассмотрим корень $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

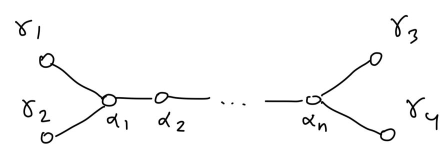

Рис. 3: Системы корней

   Корни $(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_4)$ линейно независимы, значит их матрица Картана (которая в simply-laced случае совпадает с матрицей Грама) должна быть положительно определена. Но она совпадает с матрицей Картана из предыдущего пункта.

Итого, мы получили, что диаграмма Дынкина может иметь только такой вид. Рассмотрим корни $\beta = \sum_{i=1}^{k-1} i\beta_i$, $\gamma = \sum_{i=1}^{l-1} i\gamma_i$, $\delta = \sum_{i=1}^{m-1} i\delta_i$. Они ортогональны, а корни $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ линейно независимы. Длина проекции вектора на подпространство меньше чем длина вектора, так что

$$(\alpha, \frac{\beta}{|\beta|})^2 + (\alpha, \frac{\gamma}{|\gamma|})^2 + (\alpha, \frac{\delta}{|\delta|})^2 < |\alpha|^2$$

$(\beta, \beta) = k(k-1)$ (проверьте!), $(\alpha, \beta) = -k+1$, так что последнее неравенство перепишется в виде

$$\frac{k-1}{k} + \frac{l-1}{l} + \frac{m-1}{m} < 2$$

или

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} > 1$$

Без ограничения общности пусть $k \leq l \leq m$. Тогда $k < 3$.

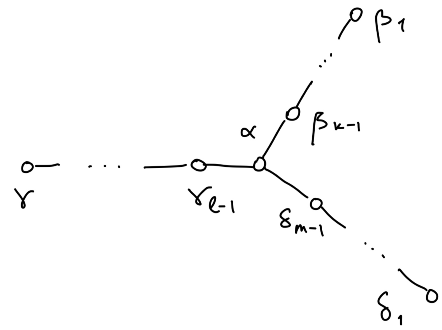

Рис. 4: Системы корней

- Если $k = 1$, то l, m любые, так что система корней A_n.
- Если $k = 2$, то $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$. Если $l = 2$, то m любое, и мы получили систему корней D_n. Если $l = 3$, то $m = 3, 4, 5$ и мы получили системы корней E_6, E_7 или E_8.

□

Классификация полупростых алгебр Ли

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ - полупростая алгебра Ли с системой корней $R \subset \mathfrak{h}^*$. Пусть выбрана поляризация $R = R_+ \sqcup R_-$ и соответствующий ей набор простых корней $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$.*

1. *Подпространства $\mathfrak{n}_\pm = \bigoplus_{\alpha \in R_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ являются подалгебрами в $\mathfrak{g}$,*
2. *Выберем $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ и $f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ так что $(e_i, f_i) = \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)}$, а $h_i = h_{\alpha_i}$ (тогда $\{e_i, h_i, f_i\}$ - это $\mathfrak{sl}_2$-тройка). Элементы e_i порождают $\mathfrak{n}_+$, f_i порождают $\mathfrak{n}_-$;*
3. *Пусть a_{ij} - матрица Картана системы корней R. Тогда выполнены соотношения Серра:*

$$[h_i, h_j] = 0, \tag{1a}$$

$$[h_i, e_j] = a_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j, \tag{1b}$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \tag{1c}$$

$$(ade_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0, \tag{1d}$$

$$(adf_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0. \tag{1e}$$

Замечание. *Поскольку h_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$ образуют базис в $\mathfrak{h}$, $\{e_i, h_i, f_i\}$, $i \in \{1, \ldots, r\}$ порождают $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. 1. Сразу следует из $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

2. Сперва докажем

   Лемма 3. *Пусть $\alpha \in R_+$ и не простой, тогда найдется положительный β и простой α_i такие, что $\alpha = \beta + \alpha_i$.*

   Доказательство. Среди простых корней найдется такой α_i, что $(\alpha_i, \alpha) > 0$, иначе $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ линейно независимы. Тогда $(\alpha, -\alpha_i) < 0$, значит $\beta = \alpha - \alpha_i$ положительный корень. □

   Докажем утверждение для $\mathfrak{n}_+$ индукцией по высоте корня.

   Определение. *Пусть $\alpha = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$, где $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, если α положительный или $n_i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, если α отрицательный. Тогда высота α $ht(\alpha) = \sum_{i=1}^r |n_i|$.*

Очевидно $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ порождены e_i. Теперь пусть α непростой положительный корень веса l. Тогда по лемме найдется положительный корень β веса $l-1$, такой что $\alpha = \beta + \alpha_i$. По предположению индукции $\mathfrak{g}_\beta$ порождена $\{e_j\}$. Но $\mathfrak{g}_\alpha = [\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{\alpha_i}] = [\mathfrak{g}_\beta, e_i]$, значит и $\mathfrak{g}_\alpha$ порождена $\{e_j\}$.

3. Первые 3 соотношения - это определения $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$: $[h_i, e_j] = \alpha_j(h_{\alpha_i})e_j = \frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}e_j = a_{ij}e_j$. Четвертое следует из того, что $[e_i, f_j] \in \mathfrak{g}_{\alpha_i - \alpha_j} = 0$ при $i \neq j$. Чтобы доказать шестое, рассмотрим $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{-\alpha_j + k\alpha_i}$ как неприводимое представление $\mathfrak{sl}_2$, образованной e_i, h_i, f_i. Его старший вектор - f_j, так как $e_i.f_j = 0$, а старший вес $-a_{ij}$. Значит $e_i^{-a_{ij}+1}.f_j = 0$. Пятое доказывается аналогично.

$\square$

Теорема 4. *1. Пусть $\mathfrak{g}(R)$ - алгебра Ли с генераторами e_i, h_i, f_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$ и соотношениями Серра. Тогда $\mathfrak{g}(R)$ канонически изоморфна конечномерной полупростой алгебре Ли с системой корней R.*

2. Существует биекция между классами изоморфизма приведенных систем корней и классами изоморфизма конечномерных комплексных полупростых алгебр Ли. Полупростая алгебра Ли проста если и только если ее система корней неприводима.

Следствие. *Классы изоморфизма конечномерных простых алгебр Ли нумеруются неприводимыми системами корней.*