Группы и алгебры Ли II

Лекция 12. Представления полупростых алгебр Ли

Классификация конечномерных неприводимых представлений

С прошлой лекции мы помним, что всякое представление старшего веса μ это фактор модуля Верма M_μ/W для некоторого $W \subset M_\mu$.

Лемма 1. *Представление M_μ/W неприводимо тогда и только тогда, когда W максимальное собственное подпредставление (то есть подпредставление, которое не содержится ни в каком другом собственном подпредставлении)*

Доказательство. В самом деле, допустим, M_μ/W неприводимо, а W не является максимальным собственным подпредставлением. Тогда существует такое собственное подпредставление W', что $W \subset W' \subset M_\mu$, а значит $W'/W \subset M_\mu/W$, что противоречит неприводимости. В другую сторону, допустим, W - максимальный собственный подмодуль, а M_μ/W приводимо. Тогда найдется подпредставление в факторе: $V \subset M_\mu/W$. Рассмотрим подпространство $V + W$ в M_λ, где V рассматривается как множество представителей в M_μ. Оно является и подпредставлением, поскольку $\mathfrak{g}.(V+W) \subset V+W$. Но $W \subset V+W$, значит W не было максимальным. □

Теорема 1. *Для любого $\mu \in \mathfrak{h}^*$ существует единственное (с точностью до изоморфизма) неприводимое представление старшего веса μ. Будем обозначать его L_μ.*

Доказательство. Всякое собственное подпредставление $W \subset M_\mu$ допускает весовое разложение $W = \bigoplus W[\lambda]$, $W[\lambda] = W \cap M_\mu[\lambda]$, причем $W[\mu] = 0$, иначе $W = M_\mu$. Пусть W_μ - сумма всех собственных подпредставлений. Поскольку $W_\mu[\mu] = 0$, оно все еще собственное, а поскольку содержит все собственные подпредставления, то оно максимально. Тогда $L_\mu = M_\mu/W_\mu$ неприводимое, причем единственность следует из единственности максимального собственного подпредставления (которая следует из максимальности). □

Следствие. *Для всякого неприводимого конечномерного представления V существует $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ такой, что $V \cong L_\lambda$.*

Доказательство. Всякое неприводимое конечномерное представление является представлением старшего веса, а значит является фактором модуля Верма M_λ (по теореме с прошлой лекции) по максимальному собственному подмодулю (по лемме 1). □

Определение. *Вес μ называется доминантным интегральным, если $\langle \mu, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_+$ для всех $\alpha \in R_+$. Множество всех доминантных интегральных весов назовем P_+*

Лемма 2. $P_+ = P \cap \overline{C}_+$

Доказательство. Сразу следует из определения. □

Теорема 2. *Неприводимое представление старшего веса L_μ конечномерно тогда и только тогда, когда $\mu \in P_+$.*

Доказательство. Сперва докажем, что если L_μ конечномерно, то $\mu \in P_+$. Для этого рассмотрим L_μ как представление $(\mathfrak{sl}_2)_i$, образованной $\{e_{\alpha_i}, h_{\alpha_i}, f_{\alpha_i}\}$. Тогда $e_{\alpha_i}.v_\mu = 0$, $h_{\alpha_i}.v_\mu = \langle\alpha_i, \mu\rangle v_\mu$. Тогда из конечномерности L_μ как представления $(\mathfrak{sl}_2)_i$ следует, что $\langle\alpha_i, \mu\rangle \in \mathbb{Z}_+$. Повторяя рассуждения для всех простых корней, получаем требуемое.

Теперь докажем, что если $\mu \in P_+$, то L_μ конечномерно. Пусть $n_i = \langle\alpha_i^\vee, \mu\rangle$. Рассмотрим $v_{s_i.\mu} = f_i^{n_i+1}.v_\mu$, где $s_i.\mu = \mu - (n_i+1)\alpha_i$. Заметим, что тут мы по-новому определяем действие группы Вейля: мы рассмариваем не вес $\mu - n_i\alpha_i$, симметричный старшему относительно стенки L_{α_i}, а следующий после него в соответствующем $(\mathfrak{sl}_2)_i$-подмодуле Верма.

Заметим теперь, что все $v_{s_i.\mu}$ - сингулярные, то есть для любых j $e_j.v_{s_i.\mu} = 0$. В самом деле, если $i \neq j$, то $[e_j, f_i] = 0$ и $e_j.v_\mu = 0$. А $e_i.v_{s_i.\mu} = 0$ следует из теории представлений $(\mathfrak{sl}_2)_i$: $(\mathfrak{sl}_2)_i$-подмодуль Верма имеет старший вес n_i.

Теперь рассмотрим подпредставление $M_i \subset M_\mu$, порожденное $v_{s_i.\mu}$. Оно не содержит старший вес, так что является собственным. Значит, $\sum M_i$ собственное. Рассмотрим $\tilde{L}_\mu = M_\mu / \sum M_i$.

Предложение. *$\tilde{L}_\mu$ конечномерно.*

Представление L_μ - фактор по максимальному собственному подмодулю, значит является фактором $\tilde{L}_\mu$, а потому тоже конечномерно. □

Подводя итог, мы имеем

Следствие. *Для каждого $\mu \in P_+$ представление L_μ неприводимо, такие представления попарно неизоморфны и всякое неприводимое конечномерное представление изомофорно одному из них.*

БГГ-резольвента

В доказательстве последней теоремы мы ввели подпредставления $M_i \subset M_\mu$, порожденные сингулярными векторами $v_{s_i.\mu}$.

Лемма 3. *Пусть $v \in M_\mu[\lambda]$ сингулярный, то есть такой, что $\mathfrak{n}_+.v = 0$. Тогда подпредставление M', порожденное v, изоморфно модулю Верма M_λ.*

Представление M' является представлением старшего веса λ, а значит по теореме с прошлой лекции имеется сюръективный морфизм $U\mathfrak{n}_- \to M'$. Значит, нам достаточно проверить, что этот морфизм инъективен. Предположим, нашелся $u \in U\mathfrak{n}_-$ такой, что $uv = 0$. Но мы знаем, что существует $u' \in U\mathfrak{n}_-$ такой, что $u'.v_\mu = v$. Таким образом, $uu'.v_\mu = 0$. $M_\mu \cong U\mathfrak{n}_-$, поэтому это значит, что $uu' = 0$, чего в $U\mathfrak{n}_-$ не бывает

Теорема 3. *В предыдущих условиях*

1. *$M_i \cong M_{s_i.\mu}$, где $M_{s_i.\mu}$ - модуль Верма со старшим вектором $v_{s_i.\mu} = f_i^{n_i+1}.v_\mu$, $n_i = \langle\alpha_i^\vee, \mu\rangle$.*
2. *$L_\mu = M_\mu / \sum M_i$*

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из предыдущей леммы.

Рассмотрим $\tilde{L}_\mu = M_\mu / \sum M_i$. Это представление вполне приводимо, то есть $\tilde{L}_\mu = \bigoplus_{\lambda = \mu - \sum n_i\alpha_i} n_\lambda L_\lambda$. Поскольку $\dim \tilde{L}_\mu[\mu] = \dim L_\mu[\mu]$, $\tilde{L}_\mu = L_\mu \oplus \bigoplus_{\lambda \neq \mu} n_\lambda L_\lambda$. То есть старший вектор $\tilde{L}_\mu$ лежит в L_μ, а значит $\tilde{L}_\mu \subset L_\mu$, значит $\tilde{L}_\mu = L_\mu$. □

Нам хочется научиться считать размерности весовых подпространств в L_μ. Размерности весовых подпространств в M_μ и M_i мы можем посчитать по теореме PBW. Однако есть проблема: $\sum M_i$ - не прямая сумма, поскольку эти подмодули пересекаются. Мы имеем следующую точную последовательность:

$$\bigoplus M_{s_i.\mu} \to M_\mu \to L_\mu \to 0, \tag{1}$$

которая не является короткой точной, потому что первая стрелка не является инъективным морфизмом (опять же потому, что M_i пересекаются). Однако можно написать длинную точную последовательность, в которой эти модули участвуют. Для этого определим новое действие группы Вейля по формуле $w.\lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$, где $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R_+} \alpha$.

Лемма 4. *Такое действие - это то же действие, которое было задано в доказательстве теоремы 2*

Доказательство. Достаточно проверить, что $s_i.\lambda = \lambda - (\langle \alpha_i^\vee, \lambda\rangle + 1)\alpha_i$ $\square$

Теорема 4. *(Резольвента Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда) Пусть $\lambda \in P_+$. Тогда*

$$0 \to M_{w_0.\mu} \to \ldots \to \bigoplus_{w\in W, l(w)=k} M_{w.\mu} \to \ldots \to \bigoplus_{i=1,\ldots,r} M_{s_i.\mu} \to M_\mu \to L_\mu \to 0 \tag{2}$$

Пример. *Рассмотрим $\mathfrak{sl}_2$. Тогда $\mathfrak{h}^* \cong \mathbb{C}$ с изоморфизмом, заданным формулой $\lambda \mapsto \langle h, \lambda\rangle$. Тогда $\alpha \mapsto 2$. Решетка весов определяется соотношением $\frac{2(\alpha,\lambda)}{(\alpha,\alpha)} = 1/2\alpha\lambda = \lambda \in \mathbb{Z}$. Это соответствует нашему знанию о том, что неприводимые конечномерные представления нумеруются неотрицательными целыми числами.*

Заметим, что $\rho = 1/2\alpha = 1$. Тогда $s.\lambda = s(\lambda+1) - 1 = -(\lambda+1) - 1 = -\lambda - 2$, и в случае $\mu \in \mathbb{Z}_+$ БГГ-резольвента имеет вид

$$0 \to M_{-\mu-2} \to M_\mu \to L_\mu \to 0, \tag{3}$$

и $L_\mu = M_\mu / M_{-\mu-2}$.

Пример. *Рассмотрим $\mathfrak{sl}_3$. В этом случае БГГ-резольвента имеет вид*

$$0 \to M_{s_1s_2s_1.\mu} \xrightarrow{\phi_2} M_{s_1s_2.\mu} \oplus M_{s_2s_1.\mu} \xrightarrow{\phi_3} M_{s_1.\mu} \oplus M_{s_2.\mu} \xrightarrow{\phi_4} M_\mu \xrightarrow{\phi_5} L_\mu \to 0 \tag{4}$$

Для тривиального представления вложения соответствующих модулей Верма в M_0 показаны на рисунке. Сингулярные вектора имеют вид

$$v_1 = v_{s_1.0} = f_1.v_0$$

$$v_2 = v_{s_2.0} = f_2 v_0$$

$$v_3 = v_{s_1s_2.0} = f_1^2 f_2 v_0$$

$$v_4 = v_{s_2s_1.0} = f_2^2 f_1 v_0$$

$$v_5 = v_{s_1s_2s_1.0} = f_1 f_2^2 f_1 v_0 = f_2 f_1^2 f_2 v_0$$

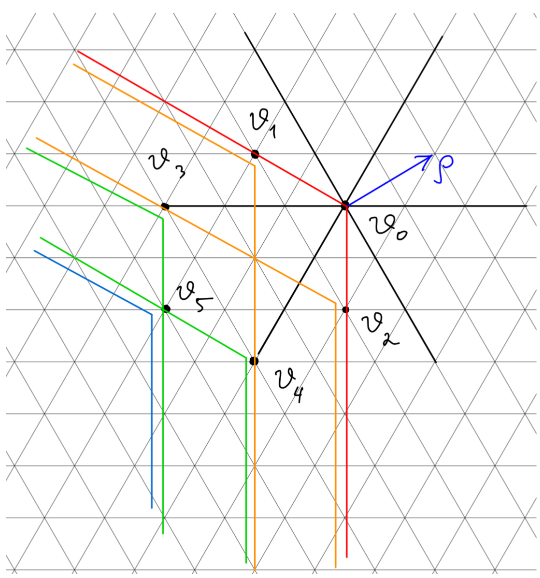

Рис. 1: Подмодули M_0, участвующие в БГГ резольвенте тривиального представления $\mathfrak{sl}_3$

Морфизмы устроены так: $\phi_2 : v_5 \mapsto (v_5, -v_5)$, $\phi_3 : (v_3, v_4) \mapsto (v_3 + v_4, -v_3 - v_4)$, $\phi_4 : (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$.

Единственное, что остается понять и что не очевидно из картинки, это как вложен модуль Верма, порожденный v_3*, в модуль Верма, порожденный* v_1*, и как вложен модуль Верма, порожденный* v_4*, в модуль Верма, порожденный* v_2*. Это можно сделать с помощью соотношений Серра:* $[f_1, [f_1, f_2]] = 0$ *и* $[f_2, [f_2, f_1]] = 0$*. Тогда* $v_3 = f_1^2 f_2 v_0 = (2f_1 f_2 - f_2 f_1) f_1 v_0 = (2f_1 f_2 - f_2 f_1) v_1$, $v_4 = f_2^2 f_1 v_0 = (2f_2 f_1 - f_1 f_2) f_2 v_0 = (2f_2 f_1 - f_1 f_2) v_2$.