Группы и алгебры Ли II

Лекция 9

Неприводимые представления $\mathfrak{sl}_2$, напоминание

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $V_n = \langle v^0, v^1, \ldots, v^n \rangle$. Определим действие $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ на V_n по формулам*

$$\begin{gathered} fv^k = (k+1)v^{k+1}, k < n, fv^n = 0 \\ hv^k = (n-2k)v^k, \\ ev^k = (n-k+1)v^{k-1}, k > 0, ev^0 = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

Тогда V_n - неприводимое. Мы будем называть его представлением старшего веса n. Любое неприводимое конечномерное представление $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ изоморфно представлению старшего веса.

Предложение. *Пусть V - тавтологическое представление $\mathfrak{sl}_2$. Тогда $S^n(V) \cong V_n$ как неприводимые представления $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (в обозначениях лекции).*

Весовое разложение представлений $\mathfrak{sl}_3$

Изучение конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{sl}_3$ будет похоже на деятельность в случае $\mathfrak{sl}_2$, но добавятся ровно те концепции, которые потребуются нам в изучении конечномерных представлений произвольной полупростой алгебры Ли.

Первое, что мы сделали, когда начали изучать конечномерные представления $\mathfrak{sl}_2$, это выяснили, что всякое такое представление V можно разложить в прямую сумму весовых подпространств: $V = \bigoplus V_\lambda$, где $\forall v \in V_\lambda$ $h.v = \lambda v$. Здесь мы поступим так же, вспомнив, что аналогом элемента h выступает двумерная картановская подалгебра $\mathfrak{h}$. Все элементы $h \in \mathfrak{h}$ диагонализуемы и коммутируют, так что диагонализуемы одновременно. Поэтому верна такая

Лемма 1. *Любое конечномерное представление V алгебры $\mathfrak{sl}_3$ имеет весовое разложение:*

$$V = \bigoplus V[\lambda], \tag{2}$$

где $\forall h \in \mathfrak{h}$ и $\forall v \in V[\lambda]$ $h.v = \lambda(h)v$, то есть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Вообще-то это те же рассуждения, которые привели нас к корневому разложению самой алгебры Ли, на которой она сама действует присоединенно:

$$\mathfrak{sl}_3 = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha \tag{3}$$

Таким образом, веса в присоединенном представлении - это корни. Мы уже знаем, что $R = \{e_i - e_j | i \neq j\}$, $\mathfrak{g}_{e_i - e_j} = \mathbb{C}E_{ij}$.

Вспомним еще, что $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} : h_1 + h_2 + h_3 = 0 \right\}$,

и если рассматривать линейные функиционалы $e_i \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} = h_i$, то $\mathbb{C}(e_1 + e_2 + e_3) = Ann(\mathfrak{h})$, а значит

$$\mathfrak{h}^* = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 / \mathbb{C}(e_1 + e_2 + e_3) \tag{4}$$

Пространство над $\mathbb{R}$, двойственное к алгебре Картана над $\mathbb{R}$, можно изобразить как плоскость с треугольной решеткой с базисом $\{e_1, e_2\}$. Эта решетка называется решеткой весов $\mathfrak{sl}_3$ и будет обозначаться P. Тогда, например, весовое разложение присоединенного представления мы изобразим так:

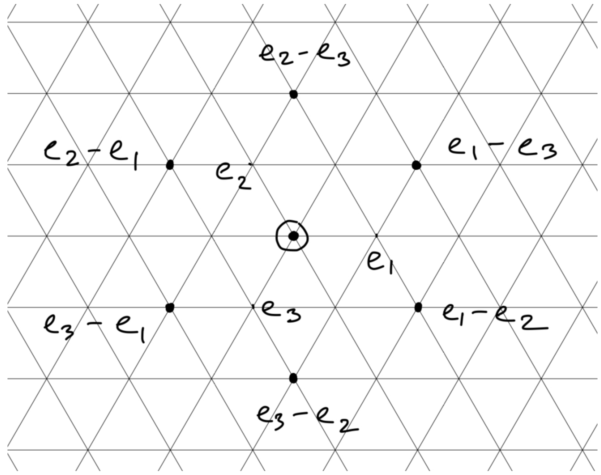

Рис. 1: Весовые пространства присоединенного представления

Нам также пригодится решетка с базисом $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$, которую мы назовем решеткой корней и обозначим Q.

Еще мы помним, что $ad(\mathfrak{g}_\alpha) : \mathfrak{g}_\beta \to \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Аналогичное конечно верно и в случае произвольного конечномерного представления.

Лемма 2. *Пусть $V = \bigoplus V[\lambda]$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ - представление $\mathfrak{sl}_3$. Тогда $\mathfrak{g}_\alpha : V[\lambda] \to V[\lambda + \alpha]$.*

Доказательство. Для произвольного $h \in \mathfrak{h}$, $e \in \mathfrak{g}_\alpha$ $h(e.v) = e(h.v) + [h, e].v = \lambda(h)e.v + \alpha(h)e.v = (\lambda + \alpha)(h)e.v$. □

Как мы помним, все представления полупростых алгебр Ли вполне приводимы, поэтому наша задача как и в случае $\mathfrak{sl}_2$ сводится к изучению неприводимых представлений. Первое важное знание про них мы получим из предыдущей леммы.

Следствие. *Пусть $V = \bigoplus V[\lambda]$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ - неприводимое представление $\mathfrak{sl}_3$. Тогда все его веса отличаются друг от друга на линейные комбинации корней с целыми коэффициентами.*

Доказательство. Допустим, это не так, и нашлись V_λ и V_μ такие, что λ и μ не удовлетворяют условию. Тогда выберем $v \in V_\lambda$ и $w \in V_\mu$ и подействуем на них алгеброй. Мы получим две непересекающихся прямых суммы весовых подпространств, замкнутых относительно действия алгебры, а значит V не было неприводимым. □

Старший вектор

Как и в случае $\mathfrak{sl}_2$, наша следующая задача - найти старший вектор неприводимого представления. Весовые подпространства представлений $\mathfrak{sl}_2$ нумеровались целыми числами, на которых был очевидный порядок, и мы могли сказать, что e действует нулем на вектор с наибольшим весом. Как поступить в случае $\mathfrak{sl}_3$, когда на множестве весов нет очевидного порядка? Этот порядок позволит задать уже знаменитый регулярный вектор $t \in \mathfrak{h}^*$, который задавал нам поляризацию системы корней R.

Выберем $t \in C_+$, то есть так, что $R_+ = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_1 - e_3\}$.

Определение. *Старшим весом представления V мы назовем такой вес $\mu \in \mathfrak{h}^*$, что $(Re\mu, t)$ максимально среди всех остальных весов. Тогда все вектора $v \in V[\mu]$ называются старшими векторами.*

Пример.

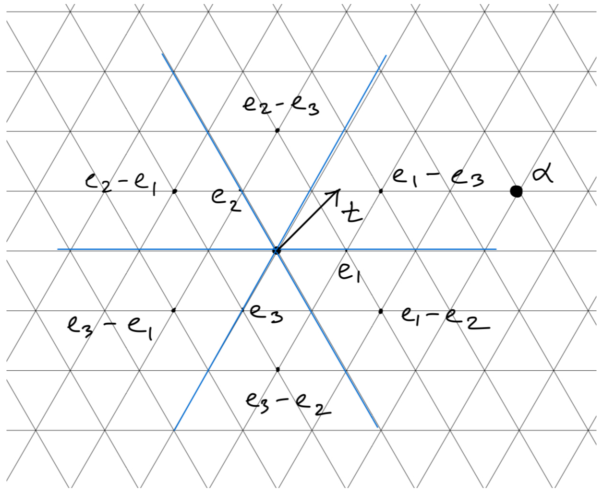

Рис. 2: α - старший вес относительно $t \in C_+$

Лемма 3. *Пусть $t \in C_+$, $v \in V[\mu]$ - старший вектор. Тогда $E_{12}.v = E_{23}.v = E_{13}.v = 0$.*

Доказательство. $E_{ij}.v \in V[\mu + e_i - e_j]$. Но $(Re(\mu + e_i - e_j), t) > (Re(\mu), t)$ при $i < j$. □

Теорема 2. *Пусть V - неприводимое представление $\mathfrak{sl}_3$, $v \in V$ - старший вектор. Тогда последовательно применяя к v операторы E_{21}, E_{32}, E_{31} мы породим все V.*

Доказательство. Рассмотрим подпространство $W \subset V$, порожденное образами v под действием E_{21}, E_{32}, E_{31}. Поскольку $E_{31} = [E_{21}, E_{32}]$, W порождена образами v под действием E_{21}, E_{32}. Достаточно доказать, что W замкнуто относительно действия E_{12} и E_{23} ($E_{13} = [E_{12}, E_{23}]$, так что замкнутость относительно E_{13} последует автоматически).

Пусть $w \in W$ получается из v применением m раз генератора E_{21} и l раз генератора E_{32} в каком-то порядке. Тогда $w \in V[\mu + \alpha]$, $\alpha = m(e_2 - e_1) + l(e_3 - e_2)$. Доказательство будем вести индукцией по высоте α (для краткости будем говорить по высоте w). По определению $E_{12}.v = E_{23}.v = 0$. Теперь пусть w таков, что высота w равна n. Тогда возможны два случая: $w = E_{21}.u$, $w = E_{32}.u$, где в обоих случаях высота u равна $n - 1$.

$$E_{12}(E_{21}.u) = E_{21}(E_{12}.u) + [E_{12}, E_{21}].u$$

Первое слагаемое лежит в W по предположению индукции, а второе потому, что $[E_{12}, E_{21}]$ лежит в $\mathfrak{h}$, а значит действует на u диагонально.

$$E_{23}(E_{21}.u) = E_{21}(E_{23}.u)$$

Первое (и единственное слагаемое, $[E_{23}, E_{21}] = 0$) лежит в W по предположению индукции. Аналогичная проверка проводится для $w = E_{32}.u$. □

Следствие. *Подпространство $V[\mu]$ одномерно, а $V[\mu + m(e_2 - e_1)]$ и $V[\mu + l(e_3 - e_2)]$ не более чем одномерны.*

Замечание. *Веса неприводимого представления расположены в 1/3-плоскости с вершиной в μ.*

Следствие. *Пусть V представление $\mathfrak{sl}_3$, v-старший вектор. Тогда подпредставление W, порожденное образами v под действием E_{21}, E_{32}, E_{31} неприводимо.*

Доказательство. Пусть μ - вес v. Тогда если $W = W' \oplus W''$ (мы знаем, что представления полупростых алгебр Ли вполне приводимы), то $W[\mu] = W'[\mu] \oplus W''[\mu]$, поскольку действие $\mathfrak{h}$ и проекции на W' и W'' коммутируют. Но из сказанного выше следует, что $W[\mu]$ одномерно, значит или $W'[\mu]$, или $W''[\mu]$ нулевое. Это значит что нулевым будет W' или W''. □

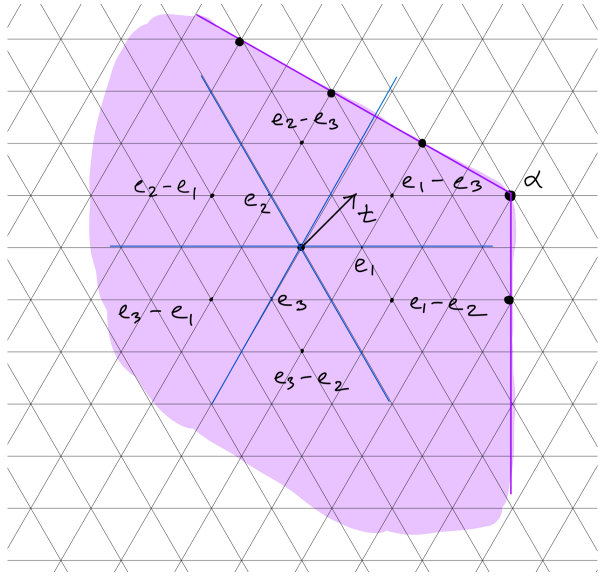

Рис. 3: 1/3 плоскости

Из этого следствия в частности следует, что старший вес неприводимого представления единственный. В самом деле, если имеется еще один старший вес μ', то рассмотрим $w \in V[\mu']$ и подпредставление W, порожденное образами w под действием E_{21}, E_{32}, E_{31}. По следствию W неприводимо, но оно не совпадает с V, так что $W = 0$.

Весовые подпространства неприводимого представления

Посмотрим внимательно на подпространства, соответствующие граничным весам:

$$V' = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} V[\mu + k(e_2 - e_1)], \quad V'' = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} V[\mu + k(e_3 - e_2)] \tag{5}$$

Они граничные в том смысле, что $E_{23}.V' = E_{13}.V' = 0$, $E_{12}.V'' = E_{13}.V'' = 0$. V' замкнута относительно $\mathfrak{sl}_2$-тройки $\{E_{12}, H_{12}, E_{21}\}$, где $H_{12} = h_{e_1-e_2} = [E_{12}, E_{21}]$. Более того, это представление старшего веса $\mu(H_{12}) = (e_1 - e_2, \mu)$. Оно конечномерно только если $(e_1 - e_2, \mu) \in \mathbb{Z}_+$. Аналогичное рассуждение для V'' приводит к условию $(e_2 - e_3, \mu) \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому конечномерность представления V гарантирует нам, что старший вес лежит на решетке весов.

Взглянем на V' еще раз. Это неприводимое конечномерное представление $\mathfrak{sl}_2$, значит его веса симметричны относительно 0. Это значит, что множество точек, соответствующих весам V', на решетке весов симметрично относительно прямой $\{\lambda \in \mathfrak{h}^*|(\lambda, e_1 - e_2) = 0\} = L_{e_1-e_2}$.

Пусть теперь μ' - вес, симметричный относительно этой прямой. Он младший относительно представления $\mathfrak{sl}_2$-тройки $\{E_{12}, H_{12}, E_{21}\}$, то есть для $v' \in V[\mu']$ $E_{21}.v' = 0$. Но еще $E_{13}.v' = 0$ и $E_{23}.v' = 0$. Это значит, что если теперь в качестве простых корней мы возьмем $e_1 - e_3$ и $e_2 - e_1$, v' будет старшим вектором.

Замечание. *Это согласуется с тем, что μ' лежит в камере Вейля $s_{e_1-e_2}(C_+)$, симметричной C_+ относительно стенки $L_{e_1-e_2}$, то есть вектор v' является старшим относительно t' из камеры Вейля $s_{e_1-e_2}(C_+)$. Простые корни для этой поляризации - это $e_1 - e_3$ и $e_2 - e_1$.*

Повторяя рассуждения для новой поляризации, получаем, что набор весов $\{\mu' + k(e_3 - e_1)|k \in \mathbb{Z}_+\}$ симметричен относительно прямой $L_{e_1-e_3}$. Повторяя рассуждения для каждой следующей камеры Вейля, мы выясняем, что все веса представления заключены в шестиугольнике, вершины которого получаются из μ отражениями относительно стенок камер Вейля $L_{e_i-e_j}$.

Нам осталось понять, какие из весов внутри шестиугольника присутствуют в весовом разложении. По теореме 2 в него могут входить только веса, конгруэнтные μ, то есть такие λ, что $\lambda - \mu$ лежит на решетке корней. На самом деле каждый такой вес входит в разложение с ненулевой кратностью: возьмем любой вес β на одном из ребер шестиугольника, выберем $w \in V[\beta]$

и подействуем на него E_{ij} (выберем E_{ij} так, чтобы вес $\beta + e_i - e_j$ был внутри шестиугольника). Мы получим неприводимое представление $\mathfrak{sl}_2$-тройки $\{E_{ij}, H_{ij}, E_{ji}\}$, веса которого расположены симметрично относительно прямой $L_{e_i - e_j}$. Это значит, что все слагаемые прямой суммы $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} V[\beta + k(e_i - e_j)]$ ненулевые.

Подведем итог.

Теорема 3. *Пусть V - неприводимое конечномерное представление $\mathfrak{sl}_3$. Тогда для некоторого μ, лежащего на решетке весов, множество весов представления V - это такие $\lambda \in P$, что они конгруэнтны μ и лежат внутри шестиугольника с вершинами, полученными отражениями относительно прямых $L_{e_i - e_j}$.*

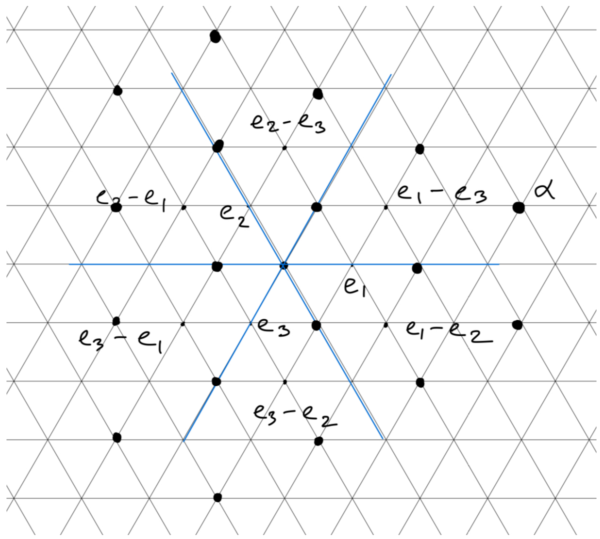

Рис. 4: набор весов неприводимого представления со страшим весом α

Пример.