Группы и алгебры Ли II

Лекция 7

Абстрактные системы корней

Вспомним, что мы узнали про структуру полупростых алгебр Ли.

Теорема 1. *(Основная теорема структурной теории полупростых алгебр Ли)*

1. $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(h_\alpha)$, $\mathfrak{h}^* = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(R)$.
2. *Каждое корневое подпространство одномерно.*
3. *Для любых двух корней $\alpha, \beta \in R$ число $\beta(h_\alpha) = 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ целое.*
4. *Ограничение формы Киллинга на $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(h_\alpha)$ положительно определено.*
5. *Отражение корня ортогонально другому корню снова корень:*
$$\forall \alpha, \beta \in R, s_\beta(\alpha) = \alpha - 2\beta\frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} \in R$$
6. *Корни, коллинеарные α есть $\pm\alpha$.*
7. *Для корней $\alpha, \beta \neq -\alpha$ подпространство*
$$V = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\alpha + k\beta}$$
неприводимое $(\mathfrak{sl}_2)_\beta$ подпредставление.
8. *Если для корней α и β $\alpha + \beta$ снова корень, то $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.*

Эта теорема мотивирует нас определить систему корней как самостоятельный объект.

Определение. *Приведенная система корней это конечное подмножество $R \subset E/\{0\}$, где E - евклидово пространство (вещественное векторное пространство с положительно определенной билинейной формой), такое что:*

1. $E = Span(R)$,
2. *для любых двух α, $\beta \in R$*
$$n_{\alpha\beta} = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}; \tag{1}$$
3. *Определим отражение $s_\alpha : E \to E$ по формуле*
$$s_\alpha(v) = v - \frac{2(\alpha, v)}{(\alpha, \alpha)}\alpha. \tag{2}$$
Тогда для любых двух α, $\beta \in R$ $s_\alpha(\beta) \in R$;

4. Если $\alpha \in R$ и $c\alpha \in R$, то $c = \pm 1$.

Замечание. *Как уже говорилось, пункты 2 и 3 имеют простой геометрический смысл: $n_{\alpha\beta}$ - это удвоенное отношение проекции α на вектор β к длине β, а s_α - это отражение относительно гиперплоскости, перпендикулярной α.*

Ключевой способ изучения систем корней - это изучение их симметрий.

Определение. *Пусть $R_1 \subset E/\{0\}$, $R_2 \subset E/\{0\}$ - системы корней. Тогда $\phi : R_1 \to R_2$ - изоморфизм систем корней, если ϕ - изоморфизм векторных пространств, $\phi(R_1) = R_2$ и $n_{\phi(\alpha)\phi(\beta)} = n_{\alpha\beta}$.*

Рассмотрим систему корней R. Нас будет интересовать специальная подгруппа автоморфизмов R, называемая группой Вейля.

Определение. *Группа Вейля W системы корней R это подгруппа $GL(E)$, порожденная всеми отражениями s_α.*

Лемма 1. *$W \subset O(E)$ и R инвариантно относительно действия W.*

Доказательство. Всякое отражение - это ортогональное преобразование, которое сохраняет R. □

Следствие. *W конечна.*

Лемма 2. *Для любого $w \in W$*

$$s_{w(\alpha)} = w s_\alpha w^{-1} \tag{3}$$

Доказательство. Отражение относительно плоскости, перпендикулярной $w(\alpha)$, после замены координат $w^{-1} : E \to E$ станет отражением относительно плоскости, перпендикулярной α. □

Классификация систем корней ранга 2

На прошлой лекции мы установили, что с точностью до изоморфизма имеется 4 системы корней ранга 2: $A_1 \cup A_1$, A_2, B_2, G_2.

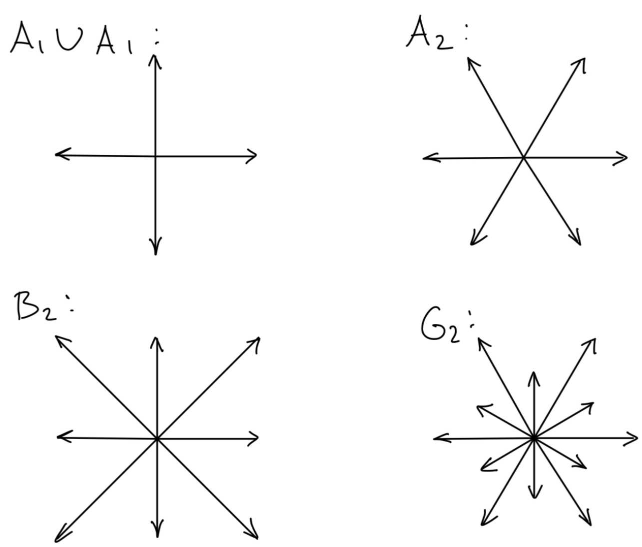

Рис. 1: Системы корней ранга 2

Лемма 3. *Пусть α, $\beta \in R$. Тогда если $(\alpha, \beta) < 0$, то $\alpha + \beta \in R$.*

Доказательство. Ограничимся на плоскость, содержащую α и β. Тогда ее пересечение с R - система корней ранга 2. Для систем корней ранга два утверждение проверяется непосредственно. □

Поляризация. Простые корни

Пусть $t \in E$ - регулярный элемент, то есть для всякого корня $\alpha \in R$ $(t, \alpha) \neq 0$. Тогда система корней R разбивается на два непересекающихся множества положительных и отрицательных корней:

$$\begin{gathered} R = R_+ \sqcup R_-, \\ R_+ = \{\alpha \in R | (\alpha, t) > 0\}, \quad R_- = \{\alpha \in R | (\alpha, t) < 0\} \end{gathered} \tag{4}$$

Определение. *Корень $\alpha \in R_+$ называется простым, если он не представим в виде суммы двух положительных корней. Множество простых корней будем обозначать* Π.

Лемма 4. *Всякий положительный корень представим в виде суммы простых корней.*

Доказательство. Допустим α не простой (иначе мы уже победили). Тогда $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ для некоторых положительных α_1 и α_2, да таких, что $(\alpha_1, t) < (\alpha, t)$ и $(\alpha_2, t) < (\alpha, t)$. Если α_1 и α_2 не простые, продолжим разбивать на положительные корни. Этот процесс неизбежно закончится, поскольку скалярных произведений (β, t), $\beta \in R_+$ конечное число. □

Замечание. *Неявно этим же рассуждением мы проверили, что* Π *непусто.*

Лемма 5. *Если α, $\beta \in \Pi$, то* $(\alpha, \beta) \leq 0$

Доказательство. Предположим, $(\alpha, \beta) > 0$. Тогда $(-\alpha, \beta) < 0$. Это значит, что $\beta' = \beta - \alpha \in R$ по лемме 3. Если $\beta' \in R_+$, то $\beta = \beta' + \alpha$, а значит не простой. Если $\beta' \in R_-$, то $\alpha = \beta - \beta'$, а значит не простой. Таким образом, $(\alpha, \beta) \leq 0$. □

Теорема 2. *Пусть выбрана поляризация $R = R_+ \sqcup R_-$, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ - множество соответствующих ей простых корней. Тогда Π - базис в E.*

Доказательство. Мы знаем, что $E = Span(R)$, а по лемме 4 $R \subset Span(\Pi)$. Это значит, что $E = Span(\Pi)$.

Предположим, что простые корни линейно зависимы:

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \alpha_i = 0.$$

Это же равенство перепишем в другом виде:

$$\sum_{i \in I} c_i \alpha_i = \sum_{j \in J} d_j \alpha_j,$$

где $I = \{i | c_i > 0\}$, $J = \{j | c_j < 0\}$, $d_j = -c_j > 0$. Если I или J пустое, это бы значило, что какая-то сумма положительных корней с положительными коэффициентами равна 0, что невозможно. Значит I и J оба не пусты. Умножим последнее равенство на $\sum_{i \in I} c_i \alpha_i$. Тогда левая его часть будет положительна, а правая - неположительна. □

Следствие. *Всякий корень α представим в виде суммы простых корней с целыми коэффициентами. Если $\alpha \in R_+$, то коэффициенты положительные, если $\alpha \in R_-$, то коэффициенты отрицательные.*

Камеры Вейля

Наша сверхзадача - классифицировать приведенные системы корней с точностью до изоморфизма. Жизнь была бы сильно проще, если бы простые корни $\Pi(t)$, получаемые по разным поляризациям, были в каком-нибудь смысле эквивалентны и определяли всю систему корней R.

Осуществим сначала первое желание. Пусть L_α - это гиперплоскость, ортогональная корню $\alpha \in R$. Поляризация определяется с помощью вектора $t \in E$, который не ортогонален ни одному корню из R, то есть

$$t \in E / \bigcup_{\alpha \in R} L_\alpha \tag{5}$$

Определение. *Камеры Вейля - это связные компоненты* $(E/\bigcup_{\alpha\in R} L_\alpha)$.

Пусть C - камера Вейля.

Лемма 6. *Верно следующее:*

1. $\overline{C}$ *это выпуклый конус;*

2. $\partial\overline{C}$ *это объединение граней коразмерности 1, каждая из которых лежит в одной из гиперплоскостей* L_α *и является выпуклым конусом в ней. Такие гиперплоскости мы будем называть стенками* C.

Доказательство. Первая часть сразу следует из того, что $\overline{C}$ задается системой нестрогих неравенств в количестве $\#R/2$ штук (независимых из них - $rk(R)$). Вторая следует из того, что каждая грань $\overline{C}$ задается одним равенством и $\#R/2-1$ независимыми нестрогими неравенствами. □

Пример. *Рассмотрим* $R = A_2$ *(все примеры этого раздела будут для случая* A_2*). Камеры Вейля в этом случае задаются системой неравенств (если она имеет решение)*

$$\begin{cases}(t,\alpha_1)\lesseqgtr 0,\\(t,\alpha_2)\lesseqgtr 0,\\(t,\alpha_1+\alpha_2)\lesseqgtr 0\end{cases}\tag{6}$$

Лемма 7. *Между множеством поляризаций и множеством камер Вейля можно установить взаимно-однозначное соответствие.*

Доказательство.

1. $\phi:\{\text{камеры Вейля}\}\to\{\text{поляризации}\}$
Рассмотрим камеру Вейля C. Каждый ее элемент $t\in C$ вследствие выпуклости определяет одну и ту же поляризацию
$$R_+(C)=\{\alpha\in R|(\alpha,t)>0\quad\forall t\in C\}.$$

2. $\varphi:\{\text{поляризации}\}\to\{\text{камеры Вейля}\}$
Пусть имеется поляризация $R=R_+\sqcup R_-$. Построим по ней камеру Вейля
$$C_+=\{v\in E|(v,\alpha)>0\quad\forall\alpha\in R_+\}=\{v\in E|(v,\alpha)>0\quad\forall\alpha\in\Pi\}$$
Это множество непусто, поскольку содержит определяющий поляризацию регулярный вектор, а значит является камерой Вейля.

Во-первых, $\varphi\circ\phi=id$ на множестве камер Вейля, поскольку $C\subseteq C_+$, а значит $C_+=C$. Во-вторых, $\phi\circ\varphi=id$ на множестве поляризаций, поскольку $R_+\subseteq R_+(C_+)$, а значит $R_+(C_+)=R_+$. □

Пример.

$$C_+=\begin{cases}(t,\alpha_1)>0,\\(t,\alpha_2)>0,\\(t,\alpha_1+\alpha_2)>0\end{cases}\tag{7}$$

Теорема 3. *Группа Вейля* W *действует на множестве камер Вейля транзитивно.*

Доказательство. Рассмотрим две камеры Вейля C и C'. Существует последовательность камер Вейля
$$C=C_0\to C_1\to\ldots\to C_l=C',$$
такая, что камеры C_i и C_{i+1} смежные, то есть имеют общую гипергрань $L_{\beta_{i+1}}$. Но это значит, что $C_{i+1}=s_{\beta_{i+1}}(C_i)$. Таким образом, $C'=s_{\beta_l}s_{\beta_{l-1}}\ldots s_{\beta_1}(C)$. □

Пример. *Пусть $R = A_2$. Заметим сначала, что смежные камеры Вейля отвечают системам неравенств, которые отличаются одним знаком. С другой стороны, смена знака соответствует отражению относительно соответствующего корня.*

$$C = C_+ = \begin{cases} (t, \alpha_1) > 0, \\ (t, \alpha_2) > 0, \\ (t, \alpha_1 + \alpha_2) > 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$C' = \begin{cases} (t, \alpha_1) < 0, \\ (t, \alpha_2) > 0, \\ (t, \alpha_1 + \alpha_2) < 0, \end{cases} \tag{9}$$

Имеем $C = C_0 \to C_1 \to C_2 = C'$, где

$$C_1 = s_{\alpha_1}(C) = \begin{cases} (t, \alpha_1) < 0, \\ (t, \alpha_2) > 0, \\ (t, \alpha_1 + \alpha_2) > 0, \end{cases} \tag{10}$$

$C' = s_{\alpha_1+\alpha_2}(C_1)$, и в итоге $C' = s_{\alpha_1+\alpha_2} s_{\alpha_1}(C)$.

Следствие. *Камера Вейля C имеет $rk(R)$ стенок.*

Следствие. *Пусть $R = R_+ \sqcup R_-$ и $R = R'_+ \sqcup R'_-$ - две поляризации, а Π и Π' - соответствующие простые корни. Тогда найдется $w \in W$ такой, что $\Pi' = w(\Pi)$.*

Доказательство. Обе поляризации и как следствие наборы простых корней соответствуют некоторым камерам Вейля C и C'. По предыдущей теореме найдется $w \in W$ такой, что $C' = w(C)$. □

Осуществим теперь наше второе желание - убедимся, что множество простых корней полностью определяет систему корней.

Зафиксируем поляризацию $R = R_+ \sqcup R_-$ и соответствующие ей простые корни $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$. Обозначим $s_i = s_{\alpha_i}$.

Лемма 8. *Всякая камера Вейля C может быть записана как $C = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l}(C_+)$*

Доказательство. По теореме 3 $C = s_{\beta_l} \dots s_{\beta_1}(C_+)$, где $C_i = s_{\beta_i} \dots s_{\beta_1}(C_+)$, и L_{β_i} - общая грань камер Вейля C_{i-1} и C_i. Будем доказывать индукцией по l. В случае $l = 1$ $\beta_1 = \alpha_{i_1}$, и $C = s_{i_1}(C_+)$. Теперь пусть $C = s_{\beta_{l+1}} s_{\beta_l} \dots s_{\beta_1}(C_+) = s_{\beta_{l+1}}(C_l)$. По предположению индукции $C_l = s_{i_1} \dots s_{i_l}(C_+) = w(C_+)$, значит $\beta_{l+1} = s_{i_1} \dots s_{i_l}(\alpha_{i_{l+1}}) = w(\alpha_{i_{l+1}})$. Но тогда $C = s_{w(\alpha_{i_{l+1}})}(C_l) = w s_{\alpha_{l+1}} w^{-1} w(C_+) = s_{i_1} \dots s_{i_l} s_{i_{l+1}}(C_+)$. □

Пример. $C' = s_{\alpha_1+\alpha_2} s_{\alpha_1}(C_+) = s_{s_1(\alpha_2)} s_1(C_+) = s_1 s_2 s_1 s_1(C_+) = s_1 s_2(C_+)$.

Теорема 4. *Верно следующее.*

1. *$W(\Pi) = R$,*

2. *Группа Вейля W порождена простыми отражениями s_i, $i \in \{1, \dots, r\}$*

Доказательство. Для любого $\alpha \in R$ L_α - это стенка какой-то камеры Вейля C. По предыдущей лемме $C = w(C_+)$, где $w = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l}$, значит $\alpha = \pm w(\alpha_j)$ и $s_\alpha = w s_j w^{-1}$. □