Группы и алгебры Ли II

Лекция 13. Характеры представлений

Формула Вейля для характеров

Вспомним определение характера представления V.

Определение.

$$ch(V) = \sum_{\lambda \in P(V)} \dim V[\lambda] e^{\lambda} \tag{1}$$

Характеры конечномерных представлений, как мы знаем, живут в полиномиальной алгебре $\mathbb{C}[P]$.

Замечание. $\mathbb{C}[P]$ - *это групповая алгебра решетки весов* P.

В дальнейшем нас будут интересовать характеры модулей Верма, которые не лежат в $\mathbb{C}[P]$, но лежат в $\widehat{\mathbb{C}[P]} = \{f = \sum_{\lambda \in P} c_\lambda e^\lambda | suppf \subset \bigcup_{i \in I}(\lambda_i - Q_+), |I| < \infty\} \supset \mathbb{C}[P]$, где $suppf = \{\lambda \in P | c_\lambda \neq 0\}$.

Лемма 1.

$$ch(M_\mu) = \frac{e^\mu}{\prod_{\alpha \in R_+}(1 - e^{-\alpha})} = e^\mu \prod_{\alpha \in R_+}(1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \ldots) \tag{2}$$

Доказательство. По теореме PBW базис в M_μ - это $\{\prod_{\alpha \in R_+} f_\alpha^{l_\alpha} v_\mu | l_\alpha \in \mathbb{Z}_+\}$, где на множестве $\{f_\alpha | \alpha \in R_+\}$ мы выбрали какой-то порядок.

Найдем вес вектора $\prod_{\alpha \in R_+} f_\alpha^{l_\alpha} v_\mu$.

$$h.\prod_{\alpha \in R_+} f_\alpha^{l_\alpha} v_\mu = \sum_{\alpha \in R_+} -l_\alpha \langle h, \alpha \rangle \prod_{\alpha \in R_+} f_\alpha^{l_\alpha} v_\mu + \prod_{\alpha \in R_+} f_\alpha^{l_\alpha} h.v_\mu = \langle \mu - \sum_{\alpha \in R_+} l_\alpha \alpha, h \rangle \prod_{\alpha \in R_+} f_\alpha^{l_\alpha} v_\mu$$

Поэтому, чтобы найти размерность весового подпространства с весом $\mu - \lambda$, нужно посчитать число наборов $\{l_\alpha | \alpha \in R_+\}$ таких, что $\sum_{\alpha \in R_+} l_\alpha \alpha = \lambda$. Но с другой стороны, таким же способом мы находим коэффициент при $e^{-\lambda}$ в произведении $\prod_{\alpha \in R_+}(1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \ldots)$. □

Лемма 2. *Пусть*

$$0 \xrightarrow{\phi_0} V_1 \xrightarrow{\phi_1} \ldots \xrightarrow{\phi_{n-1}} V_n \xrightarrow{\phi_n} 0 \tag{3}$$

точная последовательность $\mathfrak{g}$*-модулей. Тогда*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i ch(V_i) = 0 \tag{4}$$

Доказательство. Каждая из стрелок является морфизмом, значит переводит весовые подпространства веса λ в весовые подпространства веса λ. Значит для каждого λ имеется точная последовательность

$$0 \xrightarrow{\phi_0} V_1[\lambda] \xrightarrow{\phi_1} \ldots \xrightarrow{\phi_{n-1}} V_n[\lambda] \xrightarrow{\phi_n} 0 \tag{5}$$

$\dim V_i[\lambda] = \dim Im\phi_i + \dim Ker\phi_i$. Но $Im\phi_i = Ker\phi_{i+1}$, откуда $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim(V_i[\lambda]) = 0$. Таким образом, коэффициент при каждом e^λ в $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i ch(V_i) = 0$ равен 0. □

Теорема 1. *(Формула Вейля) Пусть L_μ неприводимое конечномерное представление старшего веса. Тогда*

$$ch(L_\mu) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w.\mu}}{\prod_{\alpha \in R_+} (1 - e^{-\alpha})} = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\mu+\rho)}}{\prod_{\alpha \in R_+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})} \tag{6}$$

Доказательство. Воспользуемся БГГ-резольвентой и применим предыдущую лемму:

$$ch(L_\mu) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} ch(M_{w.\mu}).$$

По первой лемме получаем требуемое. Чтобы привести выражение ко второму виду, заметим, что $\prod_{\alpha \in R_+} (1 - e^{-\alpha}) = \prod_{\alpha \in R_+} e^{-\alpha/2}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = e^{-\rho} \prod_{\alpha \in R_+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})$, а $e^{w.\mu} = e^{-\rho} e^{w(\mu+\rho)}$. $\square$

Замечание. *Если характеры модулей Верма лежали в $\widehat{\mathbb{C}[P]}$, то характеры L_μ как мы знаем лежит в $\mathbb{C}[P]$, откуда следует, что в формуле Вейля знаменатель делит числитель.*

Следствие.

$$\prod_{\alpha \in R_+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\rho)} \tag{7}$$

Доказательство. Применим формулу Вейля для $\mu = 0$. $\square$

Размерности неприводимых представлений

Мы хотим найти размерности конечномерных неприводимых представлений. Для этого вспомним, что элементы $\mathbb{C}[P]$ можно мыслить как функции на торе $T = \mathfrak{h}/2\pi i Q^\vee$ с учетом $e^\lambda(h) = e^{\langle \lambda, h \rangle}$. Тогда

$$\dim L_\mu = ch(L_\mu)(0) \tag{8}$$

Заметим однако, что $\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\mu+\rho)}(0) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} = 0$. Это слегка усложняет задачу нахождения $ch(L_\mu)(0)$, но мы это сейчас исправим.

Определение. *Введем гомоморфизм $\pi_\nu : \mathbb{C}[P] \to \mathbb{C}[q^{\pm 1}]$ по формуле $e^\lambda \mapsto q^{2(\lambda,\nu)}$. Тогда $\dim_q V = \pi_\rho(ch(V))$.*

Замечание. $\dim_q V = \pi_\rho(ch(V)) = \sum_{\lambda \in P(V)} \dim V[\lambda] q^{2(\lambda,\rho)}$*, откуда* $\dim_{q=1} V = \dim V$*.*

Теорема 2.

$$\dim_q L_\mu = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{q^{(\mu+\rho,\alpha)} - q^{-(\mu+\rho,\alpha)}}{q^{(\rho,\alpha)} - q^{-(\rho,\alpha)}} \tag{9}$$

Доказательство. $\dim_q L_\mu = \pi_\rho\left(\frac{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\mu+\rho)}}{\prod_{\alpha \in R_+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})}\right) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} q^{2(w(\mu+\rho),\rho)}}{\prod_{\alpha \in R_+} (q^{(\alpha,\rho)} - q^{-(\alpha,\rho)})} = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} q^{2(\mu+\rho, w(\rho))}}{\prod_{\alpha \in R_+} (q^{(\alpha,\rho)} - q^{-(\alpha,\rho)})} = \frac{\pi_{\mu+\rho}(\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\rho)})}{\prod_{\alpha \in R_+} (q^{(\alpha,\rho)} - q^{-(\alpha,\rho)})}$, где мы использовали W-инвариантность скалярного произведения. Теперь в числителе используем формулу Вейля: $\prod_{\alpha \in R_+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\rho)}$. Тогда $\pi_{\mu+\rho}(\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\rho)}) = \prod_{\alpha \in R_+} (q^{(\mu+\rho,\alpha)} - q^{-(\mu+\rho,\alpha)})$. Собирая все вместе, получим требуемое. $\square$

Следствие.

$$\dim L_\mu = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{(\mu+\rho,\alpha)}{(\rho,\alpha)} \tag{10}$$

Кратности

Характеры, как и в случае конечных групп, позволяют восстановить разложение представления в прямую сумму неприводимых:

$$V = \bigoplus_{\mu \in P_+} n_\mu V_\mu.$$

Мы уже выяснили, что характер произвольного конечномерного представления лежит в $\mathbb{C}[P]^W$, то есть является W-инвариантом. Оказывается верна и такая

Теорема 3. *Характеры неприводимых конечномерных представлений $ch(L_\mu)$ образуют базис в $\mathbb{C}[P]^W$.*

Доказательство. Сперва заметим, что выражения $o_\mu = \sum_{w \in W} e^{w(\mu)}$, $\mu \in P_+$, являются базисом в $\mathbb{C}[P]^W$. В самом деле, рассмотрим $f = \sum c_\lambda e^\lambda \in \mathbb{C}[P]^W$. Пусть $\lambda' \in suppf$. Тогда найдется единственное $w \in W$ такое, что $w.\lambda' \in P_+$. Но из W-инвариантности тогда следует, что $f = c_{\lambda'} o_{w.\lambda'} + \sum_{\lambda \neq \lambda'} c_\lambda e^\lambda$. Повторяя рассуждения и используя конечность суммы, заключаем, что f раскладывается по элементам o_μ. Линейная независимость o_μ следует из того, что каждая орбита W содержит единственный элемент из P_+.

Таким образом, $ch(L_\mu) = \sum_{\lambda = \mu - Q_{\geq 0}} c_\lambda e^\lambda = o_\mu + \sum_{\lambda = \mu - Q_{>0}} c_\lambda e^\lambda = o_\mu + \sum_{\lambda \in P_+ \cap (\mu - Q_{>0})} c_\lambda o_\lambda$, где мы использовали то, что $\dim L_\mu[\mu] = 1$ и то, что o_μ образуют базис в $\mathbb{C}[P]^W$. Так что мы видим, что матрица перехода от o_μ к $ch(L_\mu)$ верхнетреугольная с единицами на диагонали, значит, обратимая, и $ch(L_\mu)$ в самом деле образуют базис. □

Запишем $ch(V) = \sum_{\lambda \in P(V)} \dim V[\lambda] e^\lambda$ в базисе $ch(L_\mu)$:

$$ch(V) = \sum_{\mu \in P_+} n_\mu ch(L_\mu) \tag{11}$$

Для этого заметим, что $n_{\mu_{max}} = \dim V[\mu_{max}]$, где μ_{max} - старший вес. Вычтем соответствующее слагаемое и применим то же наблюдение к $ch(V) - n_{\mu_{max}} ch(L_{\mu_{max}})$ и $P(V - n_{\mu_{max}} L_{\mu_{max}}) = P(V) \setminus \{\mu_{max}\}$.