

Группы и алгебры Ли II

Контрольная работа

1. Пусть V - тавтологическое представление алгебры Ли \mathfrak{sl}_3 , W - присоединенное.
 - (a) (1 балл) Проверьте, что V и V^* - неизоморфные фундаментальные представления.
 - (b) (2 балла) Разложите в сумму неприводимых представление $V^* \otimes W$.
2. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{so}(5)$.
 - (a) (1 балл) Какая у нее система корней? (Мы считали ее на семинаре). Выберите поляризацию и найдите соответствующие ей простые корни. Напишите матрицу Картана.
 - (b) (1 балл) Напишите соотношения Серра в $\mathfrak{so}(5)$. Выразите все корневые элементы через ее генераторы.
 - (c) (2 балла) Найдите фундаментальные веса решетки весов.
 - (d) (2 балла) Сколько фундаментальных представлений у $\mathfrak{so}(5)$? Найдите весовое разложение каждого из них.
3. Рассмотрим представление $V_{0,1}$ алгебры Ли \mathfrak{sl}_3 .
 - (a) (2 балла) Найдите веса сингулярных векторов в модуле Верма с тем же старшим весом, что у $V_{0,1}$.
 - (b) (3 балла) Найдите сингулярные вектора. Опишите все морфизмы модулей Верма в БГГ-резольвенте представления $V_{0,1}$.
4. (2 балла) Найдите размерность неприводимого представления $V_{13,12}$ алгебры Ли \mathfrak{sl}_3 .
5. (2 балла) Пусть $rk \mathfrak{g} = r$. Докажите, что $\langle \rho, \alpha_i^\vee \rangle = 1$ для всех $i = 1, \dots, r$.

Указание. Разбейте ρ на $\frac{1}{2}\alpha_i$ и все остальное. Посмотрите, как простое отражение действует на два этих слагаемых по отдельности.

Вклад контрольной в итоговую оценку по 10-балльной шкале равен $0.25 \cdot$ сумму баллов.