Matematikk i BIOS 1100

Arne B. Sletsjøe
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Dette kompendiet dekker matematikk-delen av emnet BIOS 1100 ved Universitetet i Oslo. Kompendiet har tre deler, første del tar for seg funksjonsbegrepet og tallfølger. Mange prosesser i naturen, og deres dynamikk, kan modelleres ved tallfølger og vi er spesielt interessert i å studere grense-egenskapene til følgene når vi lar prosessene pågå over tid.

Studiet av naturlige prosesser, modellert ved tallfølger, bringer oss over i kompendiets del 2, som omhandler dynamiske prosesser i en variabel, dvs. at det kun er en størrelse, isolert fra omverdenen, som er i fokus. Slike prosesser kan i mange tilfeller modelleres ved differenslikninger, som er blant de mest anvendbare verktøyene for denne type rekursjoner.

I del 3 utvider vi vår horisont og introduserer dynamiske systemer hvor det inngår flere størrelser som påvirker hverandre gjensidig. Dette leder oss naturlig til å ta i bruk vektorer og matriser, noe som viser seg å være effektive hjelpemidler til å studere utviklingen av denne type dynamiske systemer.

Innhold

1 Funksjoner, tallfølger

1.1 Funksjonsbegrepet

En **funksjon** er en regel som til et reelt tall tilordner et annet reelt tall etter en bestemt oppskrift. Denne oppskriften kan være veldig presist formulert, eller den kan være gitt mer vagt. Oppskriften kan i store trekk være formulert på en eller flere av følgende fire måter:

- Verbal beskrivelse
- Numerisk beskrivelse, tabellform
- Visuelt ved en graf
- Analytisk ved en formel

Noen funksjoner kan beskrives på alle fire måter, mens andre mangler beskrivelse på noen av de fire.

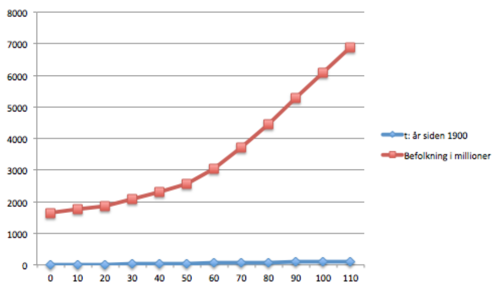
Eksempel 1. *Arealet av en sirkel som funksjon av radius i sirkelen, analytisk gitt ved $A(r) = \pi r^2$. Den verbale versjonen er at arealet av en sirkel vokser proporsjonalt med kvadratet av radius, og hvor vi kaller forholdet for π.*

$$\frac{A(r)}{r^2} = \pi$$

Det har som regel liten hensikt å beskrive denne funksjonen med en graf eller tabell.

Eksempel 2. *Verbal beskrivelse: La $P(t)$ være verdens befolkning ved tidspunktet t.*

t: år siden 1900	Befolkning i millioner
0	1650
10	1750
20	1860
30	2070
40	2300
50	2560
60	3040
70	3710
80	4450
90	5280
100	6080
110	6870



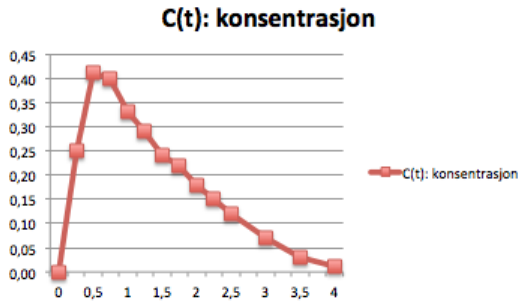
Figurene over viser utdrag av funksjonen i tabellform, og en graf hvor vi har trukket rette linjer mellom datapunktene. Det viser seg at funksjonen kan approksimeres relativt godt ved

$$P(t) \approx f(t) = (1.43653 \times 10^9) \cdot (1.01395)^t$$

Dette er et eksempel på bruk av alle fire måtene å beskrive funksjoner.

Eksempel 3. *Verbal beskrivelse: La $C(t)$ være konsentrasjonen av alkohol i blodet ved tiden t ved et inntak av alkohol ved tiden $t = 0$.*

t: timer	C(t): konsentrasjon
0	0,00
0,25	0,25
0,5	0,41
0,75	0,40
1	0,33
1,25	0,29
1,5	0,24
1,75	0,22
2	0,18
2,25	0,15
2,5	0,12
2,75	
3	0,07
3,25	
3,5	0,03
3,75	
4	0,01



Figurene over viser utdrag av funksjonen i tabellform, og en graf hvor vi har trukket rette linjer mellom datapunktene. Her er det naturlig å hoppe over den analytiske beskrivelsen, siden det er vanskelig å peke på noen funksjon som har akkurat den gitte grafen.

Noen begreper knyttet til funksjoner:

- **Voksende**: En funksjon f er voksende dersom $f(x_1) \leq f(x_2)$ når $x_1 < x_2$. Funksjonen $P(t)$ i Eksempel 2 er voksende.
- **Avtagende:** Motsatt av voksende. Funksjonen $C(t)$ i Eksempel 3 er avtagende fra $t = 0.5$ og oppover.
- **Periodisk:** En funksjon som gjentar seg i det uendelige, $f(t+P) = f(t)$ for alle t. Tallet P kalles perioden til funksjonen. Typiske eksempler er de trigonometriske funksjonene $\cos t$ og $\sin t$. Disse har begge periode 2π, dvs. $\cos(x+2\pi) = \cos x$.
- **Symmetri:** Funksjoner der hvor grafen oppviser noen form for symmetri. F.eks. vil funksjoner som oppfyller $f(-x) = f(x)$ være symmetriske om y-aksen, mens funksjoner som oppfyller $f(-x) = -f(x)$ vil være symmetriske om origo. Grafen til en funksjon som er symmetrisk om y-aksen vil ha to deler som er speiling av hverandre, på hver sin side av y-aksen.
- **Argument/definisjonsområde:** Det vi putter inn i funksjonen.
- **Ekstremalpunkter:** Punkter der funksjonen enten har mindre verdi eller har større verdi enn alle nærliggende punkter. Begrepet omfatter både maksimums- og minimums-punkter. Funksjonen $C(t)$ i Eksempel 3 har et maksimumspunkt for $t = 0.5$, med maksimumsverdi $C(0.5) = 0.41$.
- **Kontinuerlige funksjoner:** Funksjoner hvor grafen er sammenhengende. De fleste vanlige funksjoner som vi kommer bort i er kontinuerlige. Dette skyldes at veldig mange av naturens prosesser er kontinuerlige.

Det finnes mange forskjellige funksjoner. Her er en oversikt over noen vanlige, med beskrivelser og bruksområder.

Polynomer:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-i} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

hvor n er et helt tall og $a_0, a_1, \ldots, a_n$ er reelle tall som kalles polynomets koeffisienter. Polynomer utgjør de viktigste byggestenene for mer generelle funksjoner. Deres viktigste egenskap er at de lar seg beregne; polynomer reflekterer kun de vanlige regneartene. F.eks. kan vi regne ut verdien $f(2)$ for funksjonen $f(x) = 2x^3 - x - 5$ ved å sette inn

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 2 - 5 = 16 - 2 - 5 = 9$$

Rasjonale funksjoner:

Rasjonale funksjoner er brøker av polynomer laget på sammen måte som man lager rasjonale tall fra de hele tall. Et eksempel på en rasjonal funksjon er

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x - 3}$$

Rasjonale funksjoner er i prinsippet like beregnbare som polynomer, siden det eneste ekstra som introduseres er divisjon. Vi kan regne ut verdien i et vilkårlig punkt;

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{(\frac{1}{2})^2 + 1}{2\frac{1}{2} - 3} = \frac{\frac{5}{4}}{-2} = -\frac{5}{8}$$

Eksponensialfunksjoner:

Eksponensialfunksjoner er funksjoner av typen $f(x) = a^x$ for et reelt **grunntall** a. Den mest perfekte eksponensialfunksjonen har grunntall $e = 2,718281828459045\ldots$. Eksponensialfunksjoner er grunnpilaren i alle vekstmodeller. For en populasjon med konstant vekst vil antallet individer være gitt ved en eksponensialfunksjon. Vi har

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

der P_0 er størrelsen på populasjonen ved tiden $t = 0$, og k er en konstant som bestemmes av vekstraten til populasjonen.

Trigonometriske funksjoner:

Trigonometriske funksjoner er funksjoner med opphav i cosinus og sinus, dvs. forholdstallene mellom kateter og hypotenus i en rettvinklet trekant, som funksjon av en vinkel. Trigonometriske funksjoner er periodiske og de er velegnet til å beskrive bølger, svingninger eller andre periodiske størrelser.

Rotfunksjoner:

Rotfunksjoner er funksjoner av typen $f(x) = \sqrt{x}$, eller kombinsjoner av slike med f.eks. polynomer. Funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$ tilordner til et positivt reelt tall x et annet positivt reelt tall $\sqrt{x}$ som er slik at $\sqrt{x}^2 = x$. Tilsvarende uttrykker $\sqrt[n]{x}$, eller også skrevet $x^{\frac{1}{n}}$ et tall som ganget med seg selv n ganger gir oss x tilbake.

1.2 Tallfølger

Definisjon 1. *En* ***tallfølge*** $\{a_n\}$ *er en funksjon som til et hvert naturlig tall (indeksen n) tilordner et reelt tall* a_n*. Alternativt kan vi skrive tallfølgen som en rekke av tall, ordnet etter indeksen:*

$$a_1, a_2, a_3 \ldots.$$

Eksempel 4. *Et eksempel på en tallfølge er*

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Et annet eksempel er

$$7, 4, 2, 5, 3, 3, 9, 2, 5, 23, 289, 14, \ldots$$

I det første tilfellet er det lett å tenke seg hva det neste (og neste deretter) leddet i følgen er, mens i det andre tilfellet er det ingen åpenbar systematikk.

Hvis vi har gitt en tallfølge eller en funksjon som beskriver et naturlig forløp, er det interessant å se hva som skjer med systemet i det lange løp. I det lange løp betyr for en tallfølge $\{x_n\}$ at vi forsøker å finne hvordan følgen oppfører seg for store n, det vi si når $n \to \infty$.

Som et første eksempel kan vi se på følgen

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots$$

Siden leddene blir mindre og mindre og vi kan få de så små vi bare vil ved å velge stor nok nevner i brøken, er det rimlig å si at følgen går mot 0. Vi skriver dette som

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

En følge som nærmer seg en grense på denne måten sies å være **konvergent**. Det motsatte av konvergens er **divergens**. Det er mange måter for en følge å være divergent. Her er tre forskjellige eksempler på divergente følger:

$$\begin{aligned}
&2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots \\
&1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, \ldots \\
&3, -4, 7, 2, 1, 0, -3, 7, -3, 5, 4, 0, \ldots
\end{aligned}$$

Den første følgen divergerer fordi leddene bare vokser og vokser uten noen øvre grense (primtallene), den andre følgen har en viss systematikk, men fordi den hopper mellom to verdier er den ikke konvergent. Den har imidlertid konvergente **delfølger**. Den siste følgen er jo bare rotete.

Definisjon 2. *En følge* $\{x_n\}$ *sies å ha* ***grenseverdien*** *(eller bare* ***grense****) L og vi skriver*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \quad \textit{eller} \quad x_n \to L \textit{ når } n \to \infty$$

dersom differansen mellom x_n *og L blir så liten vi bare vil bare n er stor nok. Dersom en grenseverdi eksisterer sier vi at følgen* ***konvergerer*** *(eller er* ***konvergent****). I motsatt fall sier vi at følgen* ***divergerer*** *(eller er* ***divergent****).*

I det ene tilfellet av divergens, der følgen bare vokser og vokser, bruker vi notasjonen

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

For eksempel vil vi ha

$$\lim_{n\to\infty} n^p = \infty$$

for alle $p > 0$. For negative eksponenter har vi konvergens;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

Grenseverdier oppfyller de fleste vanlige regnereglene, slik som at grenseverdien av en sum er summen av grenseverdiene, grenseverdien av et produkt er produktet av grenseverdiene, osv.

Eksempel 5. *Vi skal regne ut*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-2}{2n^2+8n+12}$$

Vi deler teller og nevner med høyeste potens av n, i dette tilfellet 2;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-2}{2n^2+8n+12} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{2+\frac{8}{n}+\frac{12}{n^2}}$$

Deretter bruker vi regnereglene for grenseverdier;

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-2}{2n^2+8n+12} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{2+\frac{8}{n}+\frac{12}{n^2}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{12}{n^2}} \\
&= \frac{1+0-0}{2+0+0} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Denne definisjonen sier at dersom en følge konvergerer mot en grenseverdi L, så vil avstanden mellom L og leddene i følgen bli så liten vi bare vil bare vi går langt nok ut i følgen.

Eksempel 6. *Følgen*

$$0.3, 0.33, 0.333, \ldots$$

konvergerer mot $\frac{1}{3}$, mens følgene

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

og

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

begge divergerer, den første fordi den vokser over alle grenser, mens den andre alternerer mellom to ulike verdier.

Følgen

$$0.3, 0.33, 0.333, \dots$$

som vi kan skrive

$$a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{3}{10^n}$$

avviker fra grenseverdien $\frac{1}{3}$ med mindre enn $\frac{1}{10^m}$ fra ledd nummer $m+1$ og utover.

Til nå har vi sett på grenseverdier for tallfølger. Vi kan med små modifikasjoner bytte ut tallfølger med funksjoner.

Definisjon 3. *La f være en funksjon definert på et intervall $\langle a, \infty \rangle$. Da betyr*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = L$$

at verdien av $f(t)$ kan komme så nær L vi bare vil, bare t er stor nok.

Tilsvarende som for tallfølgene har vi også for funksjoner følgende to resultat:

$$\lim_{t \to \infty} t^p = \infty$$

for alle $p > 0$. For negative eksponenter har vi konvergens;

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t^p} = 0$$

Dette kan vi bruke til å regne ut mer sammensatte grenseverdier.

Eksempel 7. *Vi skal regne ut*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{8t}{1+4t^2}$$

Vi deler med høyeste potens av t og får

$$\lim_{t \to \infty} \frac{8t}{1+4t^2} = \lim_{t \to \infty} \frac{\frac{8}{t}}{\frac{1}{t^2}+4} = \frac{0}{4} = 0$$

Eksempel 8. *En modell for bakterievekst er gitt som en funksjon av konsentrasjonen av f.eks. glykose i omgivelsene. Modellen er gitt ved*

$$R(N) = \frac{SN}{c+N}$$

der N er konsentrasjonen av glykose, R er reproduksjonsraten til bakterien og S og c er positive konstanter. I dette eksemplet vil vi ha

$$\lim_{N \to \infty} R(N) = \lim_{N \to \infty} \frac{SN}{c+N} = \lim_{N \to \infty} \frac{S}{\frac{c}{N}+1} = S$$

Et par andre grenseverdier det kan være nyttig å huske på, er eksponensialfunksjonene, med henholdsvis positiv og negativ eksponent.

Teorem 1. *Vi har*

$$\lim_{t\to\infty} e^t = \infty$$
$$\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$$

Den siste formuleringen er ekvivalent med

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$$

Eksempel 9. *I en biologisk modell er størrelsen P gitt som en funksjon av tiden ved*

$$P(t) = \frac{64}{1+31e^{-0,7944t}}$$

Den initiale verdien av modellen er

$$P(0) = \frac{64}{1+31e^{-0,7944\cdot 0}} = \frac{64}{1+31e^{0}} = 2$$

og den stabile verdien i det lange løp er

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{64}{1+31e^{-0,7944t}} = \frac{64}{1+0} = 64$$

Et eksempel på anvendelse av grenseverdier er begrepet fart. Fart er noen som måles på et bestemt tidspunkt, men som ikke kan beregnes uten at vi vet hva som foregikk rett før og rett etter tidspunktet. Vi beregner fart på et tidspunkt ved å måle gjennomsnittsfarten over et lite tidsrom som inneholder det gitte tidspunktet. Denne størrelsen betrakter vi som en funksjon, f.eks. på bredden av det lille intervallet. Så lar vi denne størrelsen gå mot 0, og grenseverdien vil være farten.

Vi har hittil sett på grenseverdier når argumentet går mot ∞. I eksemplet over avvek vi fra dette ved at vi lot argumentet gå mot 0. Vi kan formalisere dette.

Definisjon 4. *La $f(x)$ være en funksjon som er veldefinert i nærheten av et punkt $x = a$. Da skriver vi*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \textit{eller} \quad f(x) \to L \text{ når } x \to a$$

når vi mener at funksjonsverdien $f(x)$ kan komme så nær L vi bare vil, bare x er nær nok a.

Eksempel 10. *Vi skal regne ut verdien av*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$$

Det er nærliggende å bare sette inn $x = 1$, men det gir $\frac{0}{0}$ som ikke sier oss noen ting. Imidlertid kan vi faktorisere nevneren; $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Dermed kan vi forkorte bort leddet $x - 1$ og vi sitter igjen med

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Grenseverdier som involverer ∞ er opphavet til et begrep; **asymptoter**. Det finnes minst to typer asymptoter. Dersom $f(x)$ er en funksjon som oppfyller $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ eller $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, så sier vi at $y = L$ er en **horisontal** asymptote. Dersom $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, sier vi at $x = a$ er en **vertikal** asymptote.

Eksempel 11. *Funksjonen*

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

har en vertikal asymptote for $x = 1$ *siden* $f(x) \to \infty$ *når* $x \to 1$.

Eksempel 12. *Funksjonen*

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

har en horisontal asymptote for $y = 2$ *siden* $f(x) \to 2$ *når* $x \to \infty$.

I en matematisk modell for en prosess i naturen svarer horisontale asymptoter til stabile verdier i det lange løp. Vertikale asymptoter vil veldig sjelden dukke opp i naturen, så for oss vil de kun ha teoretisk interesse.

Til sist i dette avsnittet tar vi med den formelle definisjonen av en kontinuerlig funksjon.

Definisjon 5. *En funksjon* $f(x)$ *er* ***kontinuerlig*** *i et punkt* $x = a$ *dersom*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

De fleste prosesser i naturen er kontinuerlige, i den forstand at ting ikke skjer i sprang, men heller endrer seg gradvis. Definisjonen av kontinuitet for funksjoner reflekterer akkurat denne egenskapen.

1.3 Aritmetiske, alternerende og geometriske følger

En følge slik som $1,2,3,4,\ldots$ der $a_{n+1} = a_n + b$ for et fast tall b (i dette tilfellet er $b = 1$) kalles en **aritmetisk følge**, mens en følge der leddene veksler mellom positive og negative tall kalles en **alternerende følge**.

Et viktig resultat sier at en voksende, oppad begrenset følge, eventuelt en avtagende, nedad begrenset følge, alltid vil konvergere. Følger som konsekvent vokser eller konsekvent avtar kaller vi med en fellesbetegnelse for **monotone** følger.

Teorem 2. *La* $\{a_n\}$ *være en monoton følge av reelle tall, dvs. enten rent voksende eller rent avtagende. Da vil følgen konvergere mot en grense, hvis og bare hvis følgen er begrenset.*

Bevis. Vi antar at $\{a_n\}$ er voksende og oppad begrenset. Den såkalte *minste-øvre-grense*-egenskapen til de reelle tall sier at blant alle øvre grenser for følgen, så finnes det en minste, som vi kaller c. For et hvert valg av et lite tall $\varepsilon > 0$ må det finnes en N slik at $c - \varepsilon < a_n < c$ for alle $n > N$. Dette skyldes at følgen vokser og at c er den minste øvre grensen. Dette er ekvivalent med at $c - a_n < \varepsilon$ for alle $n > N$, mao c er grensen for følgen. Et tilsvarende argument kan brukes når følgen avtar. $\square$

Eksempel 13. *Følgen*

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}, \ldots$$

er oppad begrenset (alle leddene er mindre enn 2) og strengt voksende. Det betyr at følgen konvergerer.

En spesiell type følge er de såkalte **geometriske følgene**. Dette er følger av typen

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$$

for to reelle tall a og r. Følgende resultat gir den viktigste egenskapen til de geometriske følgene for positive verdier av r;

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < r < 1 \\ 1 & \text{for } r = 1 \\ \infty & \text{for } r > 1 \end{cases}$$

Definisjon 6. *En tallfølge $\{s_n\}$ gitt ved en følge av summer*

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n$$

der a og r er reelle tall, kalles en ***geometrisk rekke****.*

Man kan vise at tallene s_n i definisjonen over kan skrives som

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = a \cdot \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Teorem 3. *For $-1 < r < 1$ vil summen av en (uendelig) geometrisk rekke, dvs. tallfølgen $\{s_n\}$ der*

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n$$

være gitt ved

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1 - r}$$

Eksempel 14. *Vi har*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

1.4 Oppgave-eksempel med løsning

Eksempel 15. *Fiske etter Stillehavsflyndre kan modelleres ved likningen*

$$B(t) = \frac{8 \times 10^7}{1 + 3e^{-0.71t}}$$

hvor $B(t)$ er den totale biomassen av bestanden (i kilogram) ved tiden t. Beregn

$$\lim_{t\to\infty} B(t)$$

Løsning.

1. **Metodevalg:**

Vi trenger to formler for grenseverdier. Den ene gir oss grenseverdien for et brøk-uttrykk:

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{\lim_{t\to a}f(t)}{\lim_{t\to a}g(t)}$$

og den andre gir oss grenseverdien for en eksponentialfunksjon:

$$\lim_{t\to a}e^{-at}=0$$

2. **Regning:** Ved å bruke formelene over får vi

$$\lim_{t\to\infty}B(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{8\times10^7}{1+3e^{-0.71t}}=\frac{8\times10^7}{1+3\lim_{t\to\infty}e^{-0.71t}}=\frac{8\times10^7}{1}=8\times10^7$$

1.5 Oppgaver

Oppgave 1.1. *Regn ut følgende grenseverdier*

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2}{n^4+4n^3}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^8}{n^8}$$

d)

$$\lim_{n\to0}\frac{n^8}{n^8}$$

e)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^{n-1}+1}$$

Oppgave 1.2. *Beregn følgende geometriske rekker*

a)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots$$

b)

$$4-\frac{4}{3}+\frac{4}{9}-\dots$$

c)

$$1+\frac{2}{3}a+\frac{4}{9}a^2+\dots$$

d)

$$1-k+k^2-\dots$$

e)

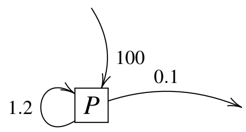
$$2+\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\dots$$

2 Dynamiske systemer modellert ved differenslikninger

2.1 Rekursive modeller

Matematisk modellering er et effektivt verktøy til å beskrive og å forstå prosesser i naturen. Som et illustrerende eksempel kan vi se på en dyrepopulasjon og dens utvikling over tid. Vi lar P betegne størrelsen på populasjonen. Siden populasjonen endrer seg over tid, indekserer vi størrelsen og lar P_n betegne antall individer i år n. Hvis vi antar at populasjonen har en fast utvikling fra år til år kan vi alltid beregne størrelsen på populasjonen neste år, på bakgrunn av vår kjennskap til størrelsen i år.

Vi kan illustrere modellen ved et **boksdiagram**



Dette diagrammet skal vi tolke som at størrelsen P for hvert step multipliseres med 1.2, mister 0.1 ganger sin størrelse og tilføres 100. Skrevet på analytisk form ser dette ut som

$$P_{n+1} = 1.2 \cdot P_n - 0.1 \cdot P_n + 100 = 1.1 \cdot P_n + 100$$

Til å være en komplett beskrivelse av en matematisk modell mangler vi nå kun å angi startverdien P_0. Dersom vi kjenner denne kan vi regne oss fram til en hver P_n for vilkårlig n. Hvis vi i eksemplet over setter $P_0 = 1000$ får vi

$$P_1 = 1.1 \cdot P_0 + 100 = 1.1 \cdot 1000 + 100 = 1200$$

og

$$P_2 = 1.1 \cdot P_1 + 100 = 1.1 \cdot 1200 + 100 = 1420$$

osv. Dermed har vi faktisk 3 ulike måter å beskrive modellen, ved et boksdiagram, ved en formel eller ved en tallfølge

$$1000, 1200, 1420, 1762, \ldots$$

Vi skal gå litt nærmere inn på alle de tre metodene, og vi begynner med tallfølger.

Enkelte tallfølger har en svært regelmessig utvikling. Et enkelt eksempel er følgen

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

der neste ledd hele tiden er 1 større enn det foregående. Hvis vi kaller det generelle leddet i denne følgen x_n, så ser vi at vi har

$$x_{n+1} = x_n + 1$$

Vi kaller dette for en **rekursjonsformel**. Det er mange følger som har denne samme **rekursive** egenskapen, f.eks. vil følgen

$$4, 5, 6, 7, \ldots$$

ha den samme egenskapen. For å skille mellom de to følgene kan vi fortelle hva det første leddet er. I det første tilfellet er det første leddet 1, mens det i den andre følgen er 4. Generelt kaller vi en slik opplysning for en **initialbetingelse** eller en **initialverdi**. Hvis vi skal bestemme følgen entydig må oppgi både rekursjonsformelen og initialbetingelsen. Merk at for mer avanserte rekursjonsformler, f.eks. for Fibonacci-rekursjonen, må vi oppgi to eller flere initialverdier.

2.2 Differenslikninger

I mange tilfeller har vi den motsatte problemstillingen av det vi akkurat har sett på. I stedet for å ha gitt en tallfølge og så finne rekursjonen og initialverdien, så har vi i utgangspunktet en rekursjonslikning og en initialverdi. Ved litt regning kan vi da skrive opp hele tallfølgen.

Eksempel 1. *Gitt rekursjonen*

$$x_{n+1} = 2x_n - 1, \quad x_0 = 1$$

Utregning gir oss følgen

$$1, 1, 1, 1, \dots$$

som kalles en konstantfølge.

Problem: kan vi finne en kompakt formel for det generelle leddet i følgen? I eksemplet vil denne formelen være

$$x_n = 1 \quad \text{for} \quad \text{alle}\ n \geq 0$$

Dette kan vi se at stemmer ved å sette inn i formelen over

$$x_n = 1 \ \text{gir}\ x_{n+1} = 2x_n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Vi kan komplisere problemet ved å se på følger av typen

$$x_{n+1} = k \cdot x_n \quad x_0 = a_0$$

I denne følgen vil første leddet, x_0, være lik a_0, mens de neste leddene i følgen alltid vil være k ganger det forgående. Vi kan beskrive følgen ved den kompakte formelen

$$x_n = a_0 \cdot k^n \quad n \geq 0$$

Eksempel 2. *Hvis første ledd i følgen er $x_0 = 1$ og $k = 1 + r$, der $r = 0.01$, så vil*

$$x_n = 1000 \cdot (1.01)^n$$

og leddene øker hele tiden med 1%.

Definisjon 1. *En **differenslikning** (for en følge) er en likning som angir hvordan hvert ledd i en følge (fra et visst ledd av) kan beregnes ved hjelp av de foregående leddene i følgen. Hvis man trenger de k foregående leddene (der $k \in \mathbb{N}$) for å definere neste tall, kalles den en k-te ordens differenslikning. De k første leddene danner likningens initialverdier. Dersom alle leddene som inngår i følgen kun opptrer i førstepotens i likningen, sier vi at differenslikningen er **lineær**.*

Eksempel 3. *Likningen*

$$x_{n+1} = 5x_n, \ x_0 = 2$$

er en første ordens lineær differenslikning, og følgen

$$\{x_n\} = \{2, 10, 50, \dots, 2 \cdot 5^n, \dots\}$$

er den eneste løsningen til denne likningen.

Eksempel 4. *Likningen*

$$x_{n+1} = 3x_n^2 - n + 1, \ \ n \geq 0, \quad x_0 = 1$$

er en første ordens differenslikning (selv om den inneholder et x_n^2-ledd), men ikke lineær. Vi har at

$$x_1 = 3 \cdot 1^2 - 0 + 1 = 4, \quad x_2 = 3 \cdot 4^2 - 1 + 1 = 48, \quad x_3 = 3 \cdot 48^2 - 2 + 1 = 6911, \quad \textit{osv.}$$

er en følge som oppfyller likningen.

Opphavet til navnet differenslikning er at likningene uttaler seg om **differansen**

$$x_{n+1} - x_n$$

I en vanlig diskret vekstmodell vil tilveksten i en størrelse, $x_{n+1} - x_n$ være proporsjonal med størrelsen selv. Det gir oss likningen

$$x_{n+1} - x_n = r \cdot x_n$$

eller på alternativ form

$$x_{n+1} = (1 + r) \cdot x_n$$

Vi kan fortsette å gjøre likningene mer komplisert ved å se på rekursjoner av typen

$$x_{n+1} = (1 + r)x_n + b, \quad x_0 = a_0$$

der vi antar at $r \neq 0$. I dette tilfellet vil løsningsformelen se ut som

$$x_n = (a_0 + \frac{b}{r}) \cdot (1 + r)^n - \frac{b}{r}$$

I eksemplet over har vi $r = 1$, $b = -1$ og $a_0 = 1$. Det gir

$$x_n = (1 + \frac{-1}{1}) \cdot 2^n - \frac{-1}{1} = 0 \cdot 2^n + 1 = 1$$

som stemmer overens med det vi fant over.

Definisjon 2. *La $r \neq 0$. Vi sier at*

$$x_n = (a_0 + \frac{b}{r}) \cdot (1 + r)^n - \frac{b}{r}$$

*er løsning av **differenslikningen***

$$x_{n+1} = (1 + r)x_n + b, \quad x_0 = a_0$$

For $r = 0$ har vi at

$$x_n = a_0 + nb$$

*er løsning av **differenslikningen***

$$x_{n+1} = x_n + b, \quad x_0 = a_0$$

Eksempel 5. *Anta at vi har en dyrepopulasjon som ved tiden $t = 0$ består av $x_0 = 1000$ dyr. Vi antar at populasjonen fra ett år til det neste øker med 5%. Hvis vi kaller populasjonen ved år n for x_n har vi likningen*

$$x_{n+1} = 1.05 \cdot x_n$$

Det betyr at etter n år vil populasjonen inneholde

$$x_n = 1000 \cdot (1.05)^n \text{ dyr}$$

F.eks har vi for $n = 10$, $x_{10} \approx 1629$ dyr. Etter hvert vil populasjonen i henhold til modellen vokse over alle grenser. Vi bestemmer oss for å jakte på dyrene i popluasjonen, og hvert år kan vi felle 40 dyr. Det gir oss likningen

$$x_{n+1} = 1.05 \cdot x_n - 40$$

og i henhold til formelen vil bestanden nå følge formelen

$$x_n = (1000 + \frac{-40}{0.05}) \cdot (1.05)^n - \frac{-40}{0.05} = 200 \cdot (1.05)^n + 800$$

mao vil populasjonen fortsatt vokse over alle grenser, dog noe saktere.

Ideelt sett vil vi at populasjonen skal være stabil på 1000 dyr. Spørsmålet blir da hvor mange dyr vi skal ta ut hvert år. Kall dette antallet b. Matematisk uttrykker vi at populasjonen er stabil ved at

$$x_{n+1} = x_n$$

eller

$$x_{n+1} = 1.05 \cdot x_n - b = x_n$$

eller $b = 0.05 \cdot x_n$. Siden $x_0 = 1000$ får vi $b = 0.05 \cdot 1000 = 50$. Beskatter vi med 50 dyr i året vil altså bestanden forbli på 1000 dyr.

Definisjon 3. *Vi sier at et dynamisk system $\{x_n\}$ er i* ***likevekt*** *(eller* ***er stabilt****), dersom $x_n = x_{n+1}$ for alle store n.*

Eksempel 6. *Den italienske matematikeren Leonardo Pisano (ca. 1170-1250), bedre kjent som Fibonacci, er blitt viden kjent for sin kaninmodell. Han beskrev utviklingen av en kaninpopulasjon som vokser etter følgende enkle prinsipp: Hvert par av kaniner føder et nytt par kaniner hver måned og de begynner med det når de er to måneder gamle.*

La oss anta at vi starter med ett par kaniner (og at vi ser bort fra at kaniner dør etterhvert!). Måneden etter har vi fortsatt bare ett par, men så begynner det å skje ting. Etter to måneder har det første paret fått barn og vi har to par kaniner, måneden etter får de et nytt par kaniner, mens de eldste ungene enda ikke har begynt å få unger slik at vi da har tre par kaniner. Etter tre måneder får også de førstefødte ungene unger og tilveksten blir to par. Til sammen har vi da fem par kaniner.

Vi kan lage en generell beskrivelse av det som skjer. Vi lar x_n være antall kaniner etter n måneder. Da har vi likningen

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad n \geq 0, \tag{1}$$

som vi kan forklare slik: Antall kaniner etter $n+2$ måneder består av samtlige kaniner vi hadde forrige måned (x_{n+1}), i tillegg til at alle kaniner som levde for to måneder siden har fått unger og derfor tilført et tilsvarende antall (x_n) nye kaninpar.

*Starter vi med $x_0 = x_1 = 1$ får vi den såkalte **Fibonacci-følgen***

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,\ldots \tag{2}$$

Hvert ledd i følgen fremkommer altså som summen av de to foregående leddene:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + x_0 = 1+1 = 2, \\ x_3 &= x_2 + x_1 = 2+1 = 3, \\ x_4 &= x_3 + x_2 = 3+2 = 5, \\ x_5 &= x_4 + x_3 = 5+3 = 8, \end{aligned}$$

osv.

*Likningen over er et eksempel på en **andre ordens lineær differenslikning**. Vi kan strengt tatt regne ut alle leddene i følgen (kalt **Fibonacci-tallene**) ved hjelp av likningen, men da må vi starte fra x_0 og x_1 og regne oss oppover. Hvor mange kaniner er det etter 4 år (48 måneder)? Hadde vi hatt formelen for denne følgen, kunne vi bare ha satt inn $n = 48$ istedenfor å regne ut alle de foregående leddene før vi kom til x_{48}. Det er ikke helt enkelt å se for seg hva slags formel som beskriver det n-te leddet i denne følgen, men det viser seg at Fibonacci-følgen er beskrevet av formelen*

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) \tag{3}$$

En matematisk modell

$$x_n = (1+r)\cdot x_n$$

kan gi en god tilnærming til virkeligheten i mange ledd. Men etter hvert vil modellen gi at størrelsen x_n vokser over alle grenser. Det skjer selvfølgelig ikke i naturen. Det betyr at vi må modifisere modellen, slik at vi unngår denne åpenbare feilen.

Vi løser dette problemet ved å postulere at vekstraten r i likningen over ikke er konstant, men avtar proporsjonalt med størrelsen x_n. Det gir oss en likning på formen

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + (r - \beta x_n)x_n \\ &= (1 + (r - \beta x_n))\,x_n \end{aligned}$$

Det vi sier her er at når populasjonen nærmer seg verdien $B = \frac{r}{\beta}$, så vil $x_{n+1} - x_n$ nærme seg mot 0, og størrelsen går mot en likevektstilstand. Vi sier at B er **bæreevnen** til systemet. Vi kan uttrykke likningen ved hjelp av maksimal vekstrate r og systemets bæreevne:

$$x_{n+1} = \left(1 + r\left(1 - \frac{x_n}{B}\right)\right)x_n$$

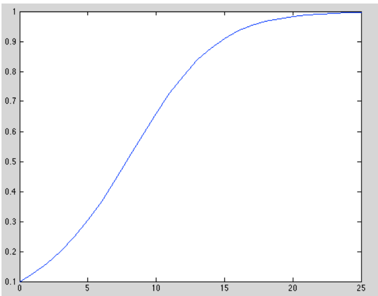
En slik modell kalles en **logistisk vekstmodell**. En alternativ form er

$$x_{n+1} - x_n = \frac{r}{B}\cdot x_n \cdot (B - x_n)$$

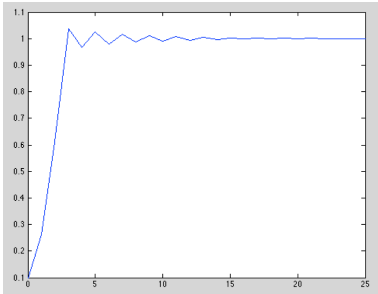
som uttrykker at veksten i størrelsen x_n er proporsjonal med størrelsen x_n, men også avstanden $B - x_n$ opp til systemets bæreevne.

Vi skal se på noen eksempler på forløp av x_n når vi varierer verdien av r. For enkelhets skyld setter vi $B = 1$. Det gir oss likningen

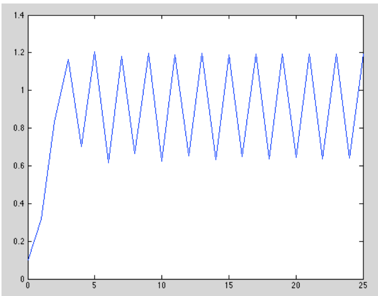
$$x_{n+1} = (1 + r(1 - x_n))\,x_n$$



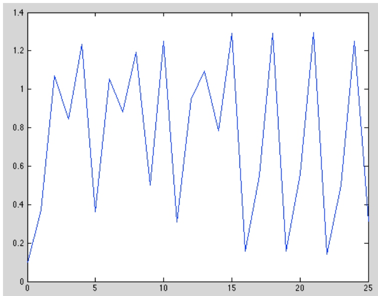
$r = 0.3$



$r = 1.8$



$r = 2.4$



$r = 3.0$

De fire figurene viser forløpet for x_n, $n = 0, \ldots, 25$ for ulike valg av r. Startverdien er hele tiden satt til 0.1. For lave verdier av r har vi et pent S-formet forløp. Når r øker begynner det å dukke opp noen slags svinge-tilstander, mens når r blir enda større går systemet over i en mer kaotisk tilstand.

Eksempel 7. *En pasient får medisin intravenøst på samme tid hver dag. Vi lar C_n betegne konsentrasjonen av medisin i blodet etter injeksjonen på dag n. Før den neste injeksjonen dagen etter er det bare 30% av gårsdagens konsentrasjon igjen. Den daglige dosen øker medisinkonsentrasjonen med 0.2. Den matematiske modellen i dette eksemplet ser ut som*

$$C_{n+1} = 0.3 \cdot C_n + 0.2$$

Dersom vi begynner med $C_0 = 0$, får vi følgende verdier for C_1, C_2, osv.:

$$0.2 \quad 0.26 \quad 0.278 \quad \ldots$$

La oss anta at denne følgen konvergerer, og at $\lim_{n\to\infty} C_n = C$. Det betyr at vi også har $\lim_{n\to\infty} C_{n+1} = C$, og vi får

$$\lim_{n\to\infty} C_{n+1} = 0.3 \cdot \lim_{n\to\infty} C_n + 0.2$$

eller $C = 0.3 \cdot C + 0.2$, som gir $C = \frac{0.2}{0.7} = \frac{2}{7}$. Vi kan gjøre dette på en annen måte også. Fra tidligere vet vi at løsningen til differenslikningen

$$x_{n+1} = (1 + r)x_n + b, \quad x_0 = a_0$$

er gitt ved

$$x_n = (a_0 + \frac{b}{r}) \cdot (1+r)^n - \frac{b}{r}$$

I vårt eksempel er $a_0 = 0$, $b = 0.2$ og $1+r = 0.3$. Det siste gir at $r = -0.7$. Setter vi dette inn i formelen får vi

$$x_n = (0 + \frac{0.2}{-0.7}) \cdot 0.3^n - \frac{0.2}{-0.7} = -\frac{2}{7} \cdot 0.3^n + \frac{2}{7} = \frac{2}{7}(1 - 0.3^n)$$

og siden $\lim_{n\to\infty} 0.3^n = 0$, får vi at

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{7} \lim_{n\to\infty}(1 - 0.3^n) = \frac{2}{7}$$

Vi kan betrakte denne problemstillingen på en annen måte. Vi tar for oss den første dosen med medisin, med verdi 0.2. Neste dag er denne redusert til 30%, dvs. $0.2 \cdot 0.3$. Dagen etter det igjen vil denne dosen være redusert med nye 30%, dvs. $0.2 \cdot 0.3^2$. Slik fortsetter det. Etter n dager vil det være igjen $0.2 \cdot 0.3^n$ av den første dosen. Tilsvarende vil det være igjen $0.2 \cdot 0.3^{n-1}$ av den andre dosen, osv. Summerer vi alle dosene etter den n-te dagen, får vi

$$0.2 \cdot 0.3^n + 0.2 \cdot 0.3^{n-1} + \cdots + 0.2 \cdot 0.3 + 0.2$$

Denne summen kalles en geometrisk rekke, og som vi skal se ganske snart er summen gitt ved

$$0.2 \cdot 0.3^n + 0.2 \cdot 0.3^{n-1} + \cdots + 0.2 \cdot 0.3 + 0.2 = 0.2 \cdot \frac{1 - 0.3^{n+1}}{1 - 0.3} = \frac{2}{7}(1 - 0.3^{n+1})$$

Igjen kan vi la n gå mot ∞. Da vil leddet 0.3^{n+1} bli borte, og vi ender opp med tallet $\frac{2}{7}$.

Vi har tidligere studert den logistiske vekstmodellen, gitt ved differenslikningen

$$x_{n+1} = \left(1 + r\left(1 - \frac{x_n}{B}\right)\right) x_n$$

La oss anta at løsningen av denne likningen konvergerer, og vi setter $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. Siden dette innebærer at x_n vil nærme seg L for store n, vil vi også ha $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$. Tar vi grenseverdien av hele likningen får vi

$$L = \left(1 + r\left(1 - \frac{L}{B}\right)\right) L$$

som betyr at enten så er $L = 0$ eller så kan vi forkorte bort L og få

$$1 = 1 + r\left(1 - \frac{L}{B}\right)$$

Men det betyr at $1 - \frac{L}{B} = 0$, eller $L = B$. Grenseverdien er altså systemets bæreevne. Merk at vi her forutsetter at grensen finnes. Dersom vi har for høye verdier av r, så vil ikke grensen eksistere, og da svikter også dette resonnementet.

2.3 Oppgave-eksempler med løsning

Eksempel 8. *En modell for en populasjon er gitt ved en differenslikning*

$$x_{n+1} = (1+0.08)x_n - 100, \quad x_0 = 1000$$

som illustrerer at vi har en vekstrate på 8%, og samtidig tar vi ut 100 individer hvert år.

a) Regn ut x_1 og x_2.

b) Hva skjer med populasjonen etter hvert som tiden går? Hva hadde skjedd dersom vi satt $x_0 = 1250$?

c) Vi kan modifisere modellen ved å endre antall individer vi tar ut. Vi ønsker å gjøre dette på en bærekraftig måte, dvs. at vi holder populasjonen konstant over tid. Modellen ser da ut som

$$x_{n+1} = (1+0.08)x_n - b$$

hvor b nå er antall individer vi tar ut hvert år. Hvor stor må b være for at antall individer i populasjonen skal stabilisere seg på en fast verdi etter hvert som tiden går, dersom vi opprettholder startverdien på $x_0 = 1000$?

Løsning.

1. **Metodevalg:** Dette er en første ordens differenslikning. For å beregne x_1 og x_2 bruker vi den oppgitte formelen med utgangspunkt i x_0. For å finne ut hva som skjer i det lange løp bruker vi at

$$x_{n+1} = (1+r)x_n + b \quad \text{gir} \quad x_n = (a_0 + \frac{b}{r}) \cdot (1+r)^n - \frac{b}{r}$$

Denne kan vi også bruke til å bestemme b slik at vi får en stabil tilstand. En stabil tilstand er karakterisert ved at

$$x_{n+1} = x_n$$

for store n, som da må bety at $x_{n+1} = (1+r)x_n + b = x_n$, dvs. $rx_n + b = 0$ eller $x_n = \frac{-b}{r}$.

2. **Regning:** Vi har

$$x_1 = (1+0.08)x_0 - 100 = 1.08 \cdot 1000 - 100 = 980$$
$$x_2 = (1+0.08)x_1 - 100 = 1.08 \cdot 980 - 100 \approx 958$$

Innsetting i den aktuelle formelen gir

$$x_n = (1000 + \frac{-100}{0.08}) \cdot (1+0.08)^n - \frac{-100}{0.08} = (-250)1.08^n + 1250$$

Når n øker trekker vi fra mer og mer, dvs. at etter en stund kommer vi til 0, og da vil selvfølgelig ikke populasjonen avta videre. Dersom vi har $x_0 = 1250$, så får vi

$$x_n = (1250 + \frac{-100}{0.08}) \cdot (1.08)^n - \frac{-100}{0.08} = 0 \cdot 1.08^n + 1250 = 1250$$

som betyr at populasjonen ville forbli stabil på 1250 individer. For å finne det bærekraftige uttaket med startverdi $x_0 = 1000$ krever vi $x_{n+1} = x_n$ for alle verdier av n. Det gir

$$x_n = x_{n+1} = (1+0.08)x_n - b \quad \text{eller} \quad 0.08x_n = b$$

Spesielt får vi $b = 0.08 \cdot x_0 = 0.08 \cdot 1000 = 80$.

Eksempel 9. *Diskret logistisk vekst er modellert ved differenslikningen*

$$x_{n+1} = \left(1 + r\left(1 - \frac{x_n}{B}\right)\right) x_n$$

a) Vi antar nå at størrelsen x_n vil stabilisere seg på en verdi når vi lar n vokse. Denne verdien kaller vi en likevektstilstand for modellen. Finn alle mulige likevektstilstander for modellen når vi antar at $r \neq 0$.

b) Sett nå $r = 1$, $B = 2$ og $x_0 = 1$. Regn ut x_1, x_2, x_3.

c) Vi kan skrive opp en generell formel for x_n i dette tilfellet. Den er gitt ved

$$x_n = \frac{2^{(2^n)} - 1}{2^{(2^n - 1)}}$$

Bruk denne formelen til å vise at

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2$$

Løsning.

1. **Metodevalg:** Den matematiske beskrivelsen av en likevektstilstand for denne modellen er betingelsen $x_{n+1} = x_n$. For å beregne grenseverdien til en brøk, deler vi teller og nevner med det dominerende leddet. I mange tilfeller vil det gjøre det enklere å beregne grenseverdien.

2. **Regning:** Setter vi inn $x_{n+1} = x_n$ i likningen får vi

$$x_{n+1} = \left(1 + r\left(1 - \frac{x_n}{B}\right)\right) x_n = x_n$$

som gir

$$r\left(1 - \frac{x_n}{B}\right) = 0$$

Siden $r \neq 0$ gir dette $1 - \frac{x_n}{B} = 0$ eller $x_n = B$. Så likevektstilstanden til systemet er B.

Det dominerende leddet i grenseverdien er $2^{(2^n)}$. Deler vi teller og nevner med dette uttrykket får vi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(2^n)} - 1}{2^{(2^n - 1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{(2^n)}}}{\frac{2^{(2^n - 1)}}{2^{(2^n)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{(2^n)}}}{\frac{1}{2}} = 2$$

Eksempel 10. *En pasient får daglige doser av en medisin. Medisinen brytes ned i kroppen slik at mengden y_n som finnes i kroppen en dag alltid vil være 75% av den mengden som var der dagen før. Hver dag tilføres en mengde medisin av størrelse $c = 10$. Vi måler konsentrasjonen umiddelbart etter at medisinen er inntatt. Det betyr at vi har $y_0 = 10$ og $y_{n+1} = 0.75y_n + 10$.*

a) Etter en tid vil mengden av medisin i kroppen stabilisere seg fra dag til dag. Finn denne mengden ved å sette $y_{n+1} = y_n$.

b) Alternativt kan vi finne svaret på oppgave a) ved å summere den gjenværende del av hvert medisin-inntak. Det gir oss formelen

$$y_n = 10 \cdot 0.75^{n-1} + 10 \cdot 0.75^{n-2} + \cdots + 10 \cdot 0.75^1 + 10 \cdot 0.75^0$$

Dette gir oss en geoemtrisk rekke. Bruk formelen for summen av en geometrisk rekke og la $n \to \infty$ til å finne samme størrelse som du fant i a).

Løsning.

1. **Metodevalg:** Vi trenger formelen for en geometrisk rekke. Vi har

$$S_n = a + a \cdot r + a \cdot r^2 + \cdots + a \cdot r^n = a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Dersom $-1 < r < 1$, så vil

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1 - r}$$

2. **Regning:** Setter vi inn $y_{n+1} = 0.75y_n + 10$ i uttrykket $y_{n+1} = y_n$, får vi $y_n = 0.75y_n + 10$, eller $y_n = \frac{10}{0.25} = 40$. Dersom vi bruker summeformelen finner vi, med $1 - r = 0.25$ og $a = 10$ at

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{10}{0.25} = 40$$

2.4 Oppgaver

Oppgave 2.1. *I denne oppgaven får du oppgitt en differenslikning*

$$x_{n+1} = (1 + r)x_n + b, \quad x_0 = a$$

a) Sett $r = -0.04$, $b = 50$ og $a = 25$ og beregn x_1 og x_2.

b) Sett $r = 0.2$, $b = -200$ og $a = 1000$ og beregn x_1 og x_2.

c) Sett $r = -0.04$, $b = 50$ og bestem a slik at $x_{n+1} = x_n$.

d) Sett $r = 0.2$, $b = -200$ og bestem a slik at $x_{n+1} = x_n$.

e) Sett $r = -0.04$ og $a = 25$. Finn b slik at modellen stabiliserer seg.

f) Sett $r = 0.2$ og $a = 1000$. Finn b slik at modellen stabiliserer seg.

Oppgave 2.2. *a) En vekstmodell er gitt ved*

$$x_{n+1} = 1 + x_n + x_n^2$$

Finn likevektstilstandene for modellen, dersom de eksisterer.

b) Samme som i a), men med differenslikningen

$$x_{n+1} = 0.04 + x_n - x_n^2$$

c) Samme som i a), men med differenslikningen

$$x_{n+1} = -1 + 3x_n - x_n^2$$

d) Samme som i a), men med differenslikningen

$$x_{n+1} = 1 - 2x_n + 2x_n^2$$

Oppgave 2.3. *En modell for en populasjon er gitt ved en differenslikning*

$$x_{n+1} = (1 + 0.05)x_n - 20, \quad x_0 = 200$$

a) Bruk formelen til å regne ut verdien av x_2.

b) Hva skjer med populasjonen etter hvert som tiden går?

c) Vi kan modifisere modellen ved å endre tallet i konstantleddet. Modellen ser da ut som

$$x_{n+1} = (1 + 0.05)x_n - b, \quad x_0 = 200$$

Hva må b være for at modellen skal stabilisere seg, dvs. at $x_{n+1} = x_n$ for store n?

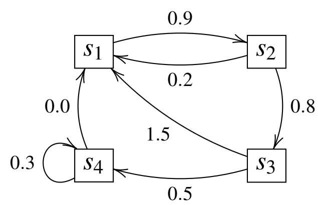
3 Dynamiske systemer modellert ved matriseregning

Mange fenomener innen naturvitenskap kan beskrives med det som i matematisk teori kalles et **dynamisk system**. Felles for alle dynamiske systemer er at vi betrakter et sett av **tilstander** og en regel for hvordan systemet utvikler seg over tid, mao. **dynamikken** i systemet. Vi skiller mellom to typer dynamiske systemer, gjennom hvordan de utvikler seg. **Kontinuerlige systemer** har en fast, kontinuerlig utvikling, f.eks. slik som verdens befolkning, nedbryting av et stoff i kroppen eller radioaktiv utstråling fra et radioaktivt materiale. **Diskrete systemer** utvikler seg skrittvis, f.eks. slik som størrelsen på en populasjon av dyr som stort sett føder barn på en bestemt tid på året. Da måler vi tilstanden, dvs. antall dyr i ulike årsklasser, ved et bestemt tidspunkt på året, og dynamikken forteller oss noe om endringene fra år til år. Det er denne typen dynamisk system vi skal konsentrere oss om.

3.1 Diskrete dynamiske systemer

Vi kan illustrere et dynamisk system med en figur: Størrelsene som inngår i systemet illustrerer vi med bokser, mens dynamikken beskrives med piler mellom boksene. Et tall over pila indikerer hvor stor den beskrevne endringen fra en tilstand til en annen er.

Eksempel 1. *Vi skal se på et system med 4 størrelser, s_1, s_2, s_3, s_4:*



Systemet er tenkt å beskrive en populasjon som vi deler inn i 4 stadier. Størrelsen s_1 kan gi antall individer under 1 år, størrelsen s_2 er antall individer mellom 1 og 2 år, s_3 antall mellom 2 og 3 år, og s_4 er eldre individer. Dynamikken beskriver hva som skjer med antallene ett år fram i tid. Pila fra s_1 til s_2 med tallet 0.9 over beskriver at 90% av alle i den laveste årsklassen overlever til neste år. Tilsvarende for pilene mellom s_2 og s_3, og mellom s_3 og s_4. Siden s_4 favner alle eldre årsklasser har vi en pil fra denne boksen inn i seg selv, hvor tallet forteller hvor stor andel som overlever til neste år.

Pilene fra de tre boksene s_2, s_3 og s_4 til s_1 modellerer reproduksjon. Individene i tilstanden s_2 føder barn og bidrar dermed at antallet i s_1 øker. Reproduksjonsraten er her satt til 0.2. Individene i tilstand s_3 har som vi ser mye høyere reproduksjonsrate, mens "de gamle" i s_4 ikke har noen reproduksjon (0.0). De yngste i tilstand s_1 har heller ikke noen reproduksjon, siden det ikke går noen pil fra s_1 til seg selv.

Ved et bestemt tidspunkt, som vi gjerne beskriver med år $n = 0$, har vi en fordeling av individer på de fire stadiene gitt ved f.eks. $s_1 = 1000$, $s_2 = 700$, $s_3 = 500$, og $s_4 = 200$. Dette setter vi mer hensiktsmessig opp i en **tilstandsvektor** som vi kaller $\mathbf{v}_0$;

$$\mathbf{v}_0 = (1000, 700, 500, 200)$$

Ved å bruke tallene i diagrammet kan vi nå regne ut antallene i år $n = 1$, gitt ved tilstandsvektoren $\mathbf{v}_1$. De 1000 som i utgangspunktet er i $S1$ blir til $0.9 \cdot 1000 = 900$ i $S2$. De 700 i $S2$ blir til $0.2 \cdot 700 = 140$ i $S1$ og $0.8 \cdot 700 = 560$ i $S3$. I $S3$ har vi 500 som i neste step blir til $1.5 \cdot 500 = 750$ i $S1$ og $0.5 \cdot 500 = 250$ i $S4$, mens de siste 250 i $S4$ blir til $0.0 \cdot 200 = 0$ i $S1$ og $0.3 \cdot 200 = 60$ i $S4$. Til sammen gir dette

$$\mathbf{v}_1 = (890, 900, 560, 310)$$

Dette kan vi fortsette med for å finne $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, osv., men det blir etter hvert mye regning. Vi kan forenkle denne prosessen ved å introdusere begrepet **matrise**. En matrise A er en tabell som beskriver det som skjer i det dynamiske systemet. Siden matrisen skal beskrive hva som skjer fra ett år til det neste, kaller vi matrisen i dette tilfellet for en **overgangsmatrise**. (En matrise på akkurat denne formen kalles for øvrig for en **Leslie-matrise**, etter Patrick H. Leslie)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 1.5 & 0.0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Vi kjenner igjen tallene fra diagrammet, men hvorfor står de akkurat på sånn plassert i tabellen? En tabell har **rader** og **søyler**. Tallet som står i 2. rad og 1. søyle er det samme som står over pila i diagrammet fra tilstand s_2 til tilstand s_1. Tilsvarende for de andre tallene. I de tilfellene vi ikke har en pil i diagrammet, setter vi inn en 0 i matrisen.

Før vi går videre skal vi introdusere et annet begrep, **skalarprodukt** eller **prikkprodukt**. Det vi kalte en tilstandsvektor er bare et spesialtilfelle av det generelle begrepet vektor. En **vektor** er et tall-tuppel $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, hvor prikkene og den siste indeksen n indikerer at vi kan ha vektorer av alle mulige lengder. Tallene v_1, v_2, osv. som inngår i vektoren kalles for vektorens **komponenter**. For å regne ut prikkproduktet av vektorer må vektorene ha samme lengde, la oss kalle dem $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ og $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$.

Definisjon 1. *Prikkproduktet av to vektorer $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ og $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ er gitt ved*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \cdot (w_1, w_2, \ldots, w_n) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

Eksempel 2. *Anta at vi har 5 1-kroner, 6 5-kroner og 3 10-kroner. Summen av hvor mange penger vi har er gitt ved et prikkprodukt. Vi lar $\mathbf{v} = (5, 6, 3)$ være antallene i hver valør og $\mathbf{w} = (1, 5, 10)$ verdiene av myntene. Samlet pengesum blir da*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (5, 6, 3) \cdot (1, 5, 10) = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 10 = 65$$

Vi kan bruke prikkproduktet til å regne på utviklingen av tilstandene i det første ekempelet. Vi skal gjøre det ved å definere et produkt melleom en matrise og en vektor. Av rent historiske og også praktiske årsaker, så liker vi i mange tilfeller å skrive vektorer som søyler (og ikke rader). Vi kaller dem da gjerne for **søylevektorer**. Vektoren $\mathbf{v}_0$ skriver vi da som

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Hvis vi skriver vektoren horisontalt, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ kaller vi den for en **radvektor**. Helt generelt kaller vi det å bytte om rader og søyler i en matrise for **transponering**. Den transponerte av en radmatrise er den tilsvarende søylematrisen og omvendt.

Definisjon 2. *La A være en matrise (n rader og n søyler) og* $\mathbf{v}$ *en søylevektor, gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Da er produktet mellom A og $\mathbf{v}$ *gitt ved*

$$A \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots a_{nn}v_n \end{pmatrix}$$

Dvs. at hver rad i produktet er prikkproduktet mellom den tilsvarende raden i matrisen og vektoren.

Vi kan gå tilbake til det første eksempelet og se hvordan vi kan uttrykke dynamikken ved et produkt. Tilstandsvektoren etter $n = 1, 2, \dots$ år er gitt ved å multiplisere forrige tilstandsvektor med matrisen A.

$$\mathbf{v}_1 = A \cdot \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_2 = A \cdot \mathbf{v}_1, \quad \text{osv.}$$

Spesielt får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 = A \cdot \mathbf{v}_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 1.5 & 0.0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1000 + 0.2 \cdot 700 + 1.5 \cdot 500 + 0 \cdot 200 \\ 0.9 \cdot 1000 + 0 \cdot 700 + 0 \cdot 500 + 0 \cdot 200 \\ 0 \cdot 1000 + 0.8 \cdot 700 + 0 \cdot 500 + 0 \cdot 200 \\ 0 \cdot 1000 + 0 \cdot 700 + 0.5 \cdot 500 + 0.3 \cdot 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 890 \\ 900 \\ 560 \\ 310 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

og videre

$$\mathbf{v}_2 = A \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 1.5 & 0.0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 890 \\ 900 \\ 560 \\ 310 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1020 \\ 801 \\ 720 \\ 373 \end{pmatrix}$$

Det siste uttrykket kan vi skrive litt om;

$$\mathbf{v}_2 = A \cdot \mathbf{v}_1 = A \cdot (A \cdot \mathbf{v}_0) = A \cdot A \cdot \mathbf{v}_0 = A^2 \cdot \mathbf{v}_0$$

Det kan se ut som om det kan være nyttig å definere et produkt $A \cdot A = A^2$ av to matriser.

Definisjon 3. *La A og B være to matriser gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Vi definerer matriseproduktet $A \cdot B$ at

$$(A \cdot B)_{p,q} = a_{p1}b_{1q} + a_{p2}b_{2q} + \cdots a_{pn}b_{nq}$$

der $(A \cdot B)_{p,q}$ betyr det tallet som står i p-te rad og q-te søyle i matrisen $A \cdot B$.

Vær oppmerksom på at rekkefølgen av A og B i produktet $A \cdot B$ er helt vesentlig. Det er nemlig slik at generelt så er $A \cdot B \neq B \cdot A$. Vi sier at matriseproduktet ikke er **kommutativt**. Kommutativitet er et annet ord for at *faktorenes orden er likegylidg*. Vi skal ikke bruke så mye krefter på regne ut matrise-produkter, det er mer hensiktsmessig å overlate det til en datamaskin.

Eksempel 3. *Vi kan se på potenser A^k for ulike verdier av k og A gitt i det første eksempelet. I dette tilfellet har vi fått hjelp av en datamaskin, og vi finner (med to riktige desimaler) at*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0.18 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.18 & 1.35 & 0 \\ 0.72 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.15 & 0.09 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 0.23 & 1.01 & 1.93 & 0 \\ 1.16 & 0.23 & 0.85 & 0 \\ 0.45 & 1.03 & 0.11 & 0 \\ 0.18 & 0.31 & 0.71 & 0 \end{pmatrix}$$

Potensen A^{10} gir overgangsmatrisen for en 10-års-periode. Vi kan bruke denne på aldersfordelingen $\mathbf{v}_0$ vi opprinnelig hadde. Det gir

$$\mathbf{v}_{10} = A^{10} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1901 \\ 1741 \\ 1231 \\ 757 \end{pmatrix}$$

Som vi ser har det totale antallet individer økt, fra 2400 til 5630, og fordelingen mellom aldersgruppene har endret seg. Hvis vi regner ut hva som skjer etter enda ett år, så kommer vi til å se konturene av noe interessant.

$$\mathbf{v}_{11} = A^{11} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2194 \\ 1710 \\ 1393 \\ 842 \end{pmatrix}$$

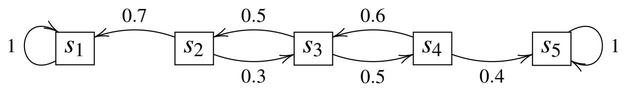
Tallene fortsetter å øke, fra totalt 5630 etter 10 år, til 6139 etter 11 år, dvs. en økning på 9%. Dersom vi gjør den samme beregningen mellom A^{100} og A^{101}, finner vi en økning på 8,4%. Forskjellen i økningen er ikke så stor, og dersom vi ser på enda høyere potenser av A, vil vi se at økningen stabiliserer seg på 8,4%. Men vi finner ettert hvert en enda dypere sammenheng. Antallet individer i hver aldersgruppe øker også med 8,4%. Hvis vi hadde gjort det samme med A^{1000} og A^{1001}, så ville vi ha fått tilnærmet samme resultat. Det betyr at vi har funnet en tilstandsvektor $\mathbf{v}$ som oppfyller

$$A \cdot \mathbf{v} = 1,084 \cdot \mathbf{v}$$

(For ordens skyld, så har vi at $\mathbf{v}_{100} = (2943, 2443, 1802, 1149)$ i hele 1000.) En slik vektor **v** med egenskapen $A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ for et reelt tall λ kalles en **egenvektor** for matrisen A, og tallet $\lambda = 1,084$ er den tilhørende **egenverdien**.

Vi skal se på et eksempel til.

Eksempel 4. *I dette eksemplet lar vi det dynamiske systemet være beskrevet av følgende figur:*



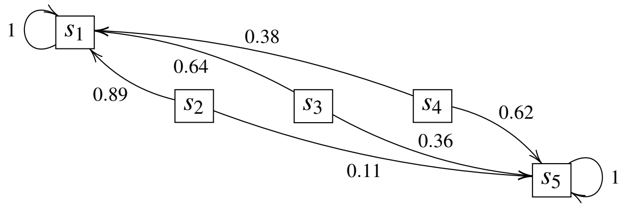
Den tilhørende overgangsmatrisen blir

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Denne overgangsmatrisen har en spesiell egenskap, nemlig at summen av tallene i hver kolonne er 1, i tillegg til at ingen av tallene i matrisen er negative. En slik matrise kalles en ***stokastisk matrise****. Ser vi på modellen så gjenkjenner vi dette ved at summen av "ut-verdiene" er 1 i alle boksene. Mao ingen ting kommer til eller fjernes fra systemet. Vi kan tenke på tallene i matrisen som sannsynligheter for at man beveger seg mellom de ulike stadiene. Det er grunnen til at vi i dette tilfellet har kalt overgangsmatrisen for P, P for probability. Vi kan bruke en datamaskin til å regne ut høye potenser av P, og da ser vi noe interessant:*

$$P^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0.89 & 0.64 & 0.38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.11 & 0.36 & 0.62 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Alt i midten av matrisen blir 0. Vi kan illustrere P^{100} med en figur:



Her har vi gjort det motsatte av det vi startet med å gjøre. Med utgangspunkt i en overgangsmatrise har vi laget en figur som gir oss nøyaktig samme informasjon. Hvis vi starter med en tilstandsvektor

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

så vil vi etter 100 skritt ende med

$$\mathbf{v}_{100} = P^{100} \cdot \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0.89 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.11 \end{pmatrix}$$

Dette kan vi tolke som at dersom vi starter i boks 2, så vil vi i 89% av tilfellene ende opp i boks 1 etter 100 step, og resten i boks 5. Vi ender aldri opp i de tre midterste boksene.

Dette eksempelet viser at det er en 1-1 sammenheng mellom figurene med bokser og piler og den tilsvarende overgangsmatrisen.

$$\mathbf{v}_{n+1} = P \cdot \mathbf{v}_n, \quad n \geq 0$$

Dersom vi skriver ut dette i detalj får vi en tredje måte å beskrive systemet. Vi skal bruke eksempel 1 som illustrasjon av denne skrivemåten. Vi bruker her notasjonen $\mathbf{v}_{n,i}$ for i-te koordinat i vektoren $\mathbf{v}_n$. Uttrykket $\mathbf{v}_{n+1} = P \cdot \mathbf{v}_n$ kan vi nå skrive som

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{n+1,1} \\ \mathbf{v}_{n+1,2} \\ \mathbf{v}_{n+1,3} \\ \mathbf{v}_{n+1,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 1.5 & 0.0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{n,1} \\ \mathbf{v}_{n,2} \\ \mathbf{v}_{n,3} \\ \mathbf{v}_{n,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2\mathbf{v}_{n,2} + 1.5\mathbf{v}_{n,3} \\ 0.9\mathbf{v}_{n,1} \\ 0.8\mathbf{v}_{n,2} \\ 0.5\mathbf{v}_{n,3} + 0.3\mathbf{v}_{n,4} \end{pmatrix}$$

som gir oss likningsettet

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{n+1,1} &= 0.2\mathbf{v}_{n,2} + 1.5\mathbf{v}_{n,3} \\ \mathbf{v}_{n+1,2} &= 0.9\mathbf{v}_{n,1} \\ \mathbf{v}_{n+1,3} &= 0.8\mathbf{v}_{n,2} \\ \mathbf{v}_{n+1,4} &= 0.5\mathbf{v}_{n,3} + 0.3\mathbf{v}_{n,4} \end{aligned}$$

Dermed har vi tre ulike måter å presentere modellen. Alle måtene gir oss samme informasjon. Hvilken vi velger avhenger av om vi skal illustrere modellen eller om vi skal regne på den.

3.2 Teori-oppsummering

Definisjon 4. *En $n \times m$-**matrise** A er en tabell med n rader og m søyler.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

*En **radvektor** kan vi oppfatte som en $1 \times m$-matrise, og en **søylevektor** som en $n \times 1$-matrise.*

Vi kan legge sammen to matriser av samme størrelse.

Definisjon 5. *La A og B være to $n \times m$-matriser, $A = (a_{ij})$ og $B = (b_{ij})$. Da er summen av dem gitt ved $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, som igjen er en $n \times m$-matrise. Vi kan også gange en matrise med et reelt tall c. Det gjør vi ved å gange alle elementene i matrisen med det samme tallet, $c \cdot (a_{ij}) = (ca_{ij})$.*

Vi kan multiplisere sammen matriser under forutsetning av at størrelsene passer sammen.

Definisjon 6. *La A være en $n \times p$-matrise og B en $p \times m$-matrise, $A = (a_{ij})$ og $B = (b_{ij})$. Da er produktet av dem gitt ved $A \cdot B = (c_{ij})$ hvor*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

og produktet er en $n \times m$-matrise.

Med disse definisjonene kan vi betrakte prikkproduktet som matriseproduktet mellom en $1 \times p$-matrise (radvektor) og en $p \times 1$-matrise (søylevektor).

$$(v_1, v_2, \dots, v_p) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix} = (v_1 w_1 + \cdots + v_p w_p)$$

Svaret blir en 1×1-matrise, men det er for alle praktiske formål det samme som et tall.

Definisjon 7. *Den **transponerte** til en matrise A, skrevet A^T, finner vi ved å bytte om rader og søyler, dvs*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad gir \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Den transponerte til en $n \times m$-matrise er en $m \times n$-matrise,

Definisjon 8. *Den inverse matrisen til en $n \times n$-matrise A er en $n \times n$-matrise A^{-1} slik at*

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

*Matrisen med 1-ere på **diagonalen** og 0-er ellers kalles **identitetsmatrisen**. Den har egenskapen at dersom man multipliserer med den så endrer den ingenting, akkurat som tallet 1.*

Eksempel 5. *For en 2×2-matrise*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

har vi at den inverse matrisen

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

under forutsetning av at $ad - bc \neq 0$. Hvis $ad - bc = 0$ har ikke matrisen noen invers.

Definisjon 9. *Gitt en kvadratisk $n \times n$-matrise A. En vektor $\mathbf{v} \neq 0$ kalles en **egenvektor** for A dersom*

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$$

*for et reelt tall λ. Tallet λ kalles for den tilhørende **egenverdien**.*

En $n \times n$-matrise kan ha inntil n egenverdier.

3.3 Oppgave-eksempel med løsning

Eksempel 6. *I en populasjon forekommer to forskjellige genvarianter A og B. Som et resultat av mutasjoner vil det skje endringer i antallet av de to genvariantene, gitt ved den dynamiske modellen*

$$\mathbf{y}_{t+1} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}_t$$

a) Anta at på tidspunktet t så vil fordelingen mellom de to genvariantene være

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_{t,A} \\ \mathbf{y}_{t,B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Hva vil fordelingen være ved tiden $t+1$?

b) Overgangen fra tilstanden ved tiden t til tilstanden ved tiden $t+2$ kan beskrives ved matrisemultiplikasjon med

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix}^2$$

Regn ut dette produktet.

c) En likevektstilstand for denne modellen kan vi finne ved å sette $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{y}_t$. Bruk uttrykket for den dynamiske modellen til å finne en slik likevektstilstand

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

og der $u + v = 1000$.

Løsning.

1. **Metodevalg:** Vi skal multiplisere sammen matriser, eventuelt matriser og søylevektorer. De aktuelle formelene skrevet ut for 2×2-matriser er

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix}$$

Og for to matriser:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

2. **Regning:** Vi får

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \cdot 600 + 0 \cdot 400 \\ 0.1 \cdot 600 + 1 \cdot 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 540 \\ 460 \end{pmatrix}$$

Videre har vi

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.9 \cdot 0.9 + 0 \cdot 0.1 & 0.9 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0.1 \cdot 0.9 + 1 \cdot 0.1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.81 & 0 \\ 0.19 & 1 \end{pmatrix}$$

En ekvivalent formulering av matriseproduktet

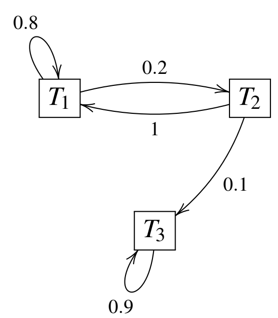
$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

er som likningssytemet

$$\begin{aligned} u &= 0.9u \\ v &= 0.1u + v \end{aligned}$$

og samtidig $u + v = 1000$. Dette gir at $u = 0$ og $v = 1000$.

Eksempel 7. *En modell for en populasjonen består av tre tilstander. Dynamikken i modellen er gitt som i illustrasjonen.*



Still opp den tilhørende overgangsmatrisen. Kan du tenke deg til hva som skjer i modellen i det lange løp? Vis at dersom utgangspunktet er en tilstandsvektor

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så vil populasjonen dø ut. Vis også at dersom utgangspunktet er

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så vil populasjonen holde seg konstant. Faktisk er det slik at dersom vi starter med tilstandsvektoren

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

der a og b ikke begge er 0, så vil vi i det lange løp ende opp med en tilstandsvektor gitt ved

$$\mathbf{v}_\infty = \frac{a+b}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Løsning.

1. **Metodevalg:** Vi oversetter en boks-illustrasjon av et dynamisk system til en matrise M ved følgende oppskrift: Siden systemet har 3 tilstander, vil overgangsmatrisen være en 3×3-matrise. På plass (i, j), dvs. i-te rad og j-te søyle, setter vi inn tallet som står ved pila som går fra tilstand j til tilstand i. Vi regner ut tilstandsvektorer med utgangspunkt i $\mathbf{v}_0$ ved å multiplisere med M;

$$\mathbf{v}_1 = M \cdot \mathbf{v}_0$$

osv. Dersom vi har en tilstandsvektor $\mathbf{v}$ med en stabil fordeling, dvs. at

$$\mathbf{v}_{n+1} = M \cdot \mathbf{v}_n = \lambda \mathbf{v}_n$$

for et reelt tall λ, så kan vi si noe om utviklingen av systemet. Dersom $|\lambda| < 1$, så vil $\mathbf{v}_n \to 0$ i dette tilfellet. Dersom $\lambda = 1$ vil tilstanden holde seg konstant.

2. **Regning:** Vi bruker oppskriften over og finner at

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Vi regner ut

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

Det betyr at vi har en stabil fordeling med $\lambda = 0.9$, som betyr at populasjonen vil dø ut. Det neste eksempelet på en $\mathbf{v}_0$ gir oss

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som betyr at i dette tilfellet vil populasjonen holde seg konstant. I det siste eksemplet får vi

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8a+b \\ 0.2a \\ 0.1b+0.9c \end{pmatrix}$$

I dette tilfellet ser vi at summen av de to første komponentene er konstant lik $a+b$ og hvis vi skal ha

$$0.8a+b = a \quad \text{og} \quad 0.2a = b$$

så må vi ha $a = 5b$. Dersom summen skal være konstant betyr det at $(a,b) = \frac{a+b}{6}(5,1)$. Setter vi dette inn i utregningen får vi

$$M\begin{pmatrix} \frac{5(a+b)}{6} \\ \frac{a+b}{6} \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5(a+b)}{6} \\ \frac{a+b}{6} \\ \frac{a+b}{60} + 0.9c \end{pmatrix}$$

og den tredje koordinaten vil ha utviklingen

$$c, \quad \frac{a+b}{60}+0.9c, \quad \frac{a+b}{60}+0.9\frac{a+b}{60}+0.9^2c, \quad \frac{a+b}{60}+0.9\frac{a+b}{60}+0.9^2\frac{a+b}{60}+0.9^3c, \quad \dots$$

Bruker vi formelen for summen av en geometrisk rekke med første ledd $\frac{a+b}{60}$ og faktor 0.9 får vi at etter hvert så vil den siste komponenten nærme seg mot

$$\lim_{n\to\infty} 0.9^n c + \frac{\frac{a+b}{60}}{1-0.9} = 0 + \frac{\frac{a+b}{60}}{\frac{1}{10}} = \frac{a+b}{6}$$

3.4 Oppgaver

Oppgave 3.1. *Utfør regneoperasjonene:*

a) $(1,3,0,-1)+(3,1,0,0)$

b) $(2,0,-1,2,1,0,-1)+(-2,0,1,-2,-1,0,1)$

c) $5\cdot(2,1,-1)$

d) $3\cdot(1,1)+2\cdot(3,-1)$

Oppgave 3.2. *Utfør regneoperasjonene:*

a)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$-2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3.3. *Utfør regneoperasjonene:*

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 54 \\ -\frac{1}{17} \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3.4. *Utfør regneoperasjonene:*

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

f)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3.5. *En dynamisk modell er gitt ved*

$$\mathbf{x}_{n+1} = M \cdot \mathbf{x}_n$$

der M er en 2×2-matrise gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

og $\mathbf{x}_i$ er en 2-søylevektor.

a) Gitt en tilstandsfordeling

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Hva blir $\mathbf{x}_{n+1}$?

b) Regn ut M^2.

c) *En likevektstilstand for denne modellen kan vi finne ved å sette* $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{y}_t$. *Bruk uttrykket for den dynamiske modellen til å finne en slik likevektstilstand* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ *slik at*

$$\mathbf{u} = M \cdot \mathbf{u}$$

og der $u_1 + u_2 = 300$.

Oppgave 3.6. *En populasjon av øyenstikkere holder til i to dammer. Hver dag flytter 20% av øyenstikkerne i dam A seg til dam B, mens 30% av de i dam B flytter seg til dam A. Resten blir værende, og ingen forsvinner eller kommer til. Hvis vi lar* a_t *betegne antall øyenstikkere i dam A på dag* t *og* b_t *tilsvarende i dam B, så vil systemet kunne beskrives ved modellen*

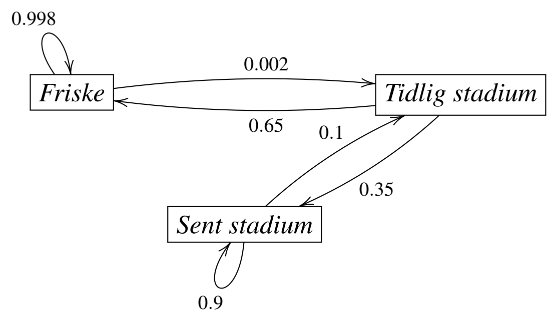
$$\begin{pmatrix} a_{t+1} \\ b_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$$

Regn ut (for hånd) M^2 *og* M^3. *Hvis vi starter med*

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

hva blir da $\mathbf{v}_1$ *og* $\mathbf{v}_2$*? P: (betyr at dette skal løses ved å programmere) Vi er interessert i å finne ut hva som skjer med fordelingen mellom de to dammene i det lange løp. Vil forløpet være avhengig av den opprinnelige tilstandsvektoren?*

Oppgave 3.7. *Vi studerer en populasjon av kvinner og deres risiko for å utvikle bryst-kreft. Vi deler populasjonen i tre grupper (tilstander), friske, pasienter i tidlig stadium og pasienter i sent stadium. Hvert år vil 0.2% av de friske kvinnene utvikle tidlig-stadium kreft. Resten forblir friske. Av pasientene i et tidlig stadium vil 65% blir friskmeldt i løpet av året, mens resten utvikler sykdommen til et sent stadium. Av kvinnene i den sene stadiet vil 10% ved hjelp av behandling bli brakt tilbake til en tidlig stadium tilstand, mens 90% forblir i det sene stadiet. Ingen går direkte fra et sent stadium av sykdommen til å bli frisk på et år. Modellen kan vi illustrere på denne måten*



Still opp den tilhørende overgangsmatrisen. P: Hva skjer i det lange løp? Hvor stor andel vil etter hvert være i de ulike stadiene? Vil det være avhengig av hva som er utgangspunktet?

Oppgave 3.8. *Vi skal se på en modell for aldersfordeling hos ferskvannsfisken gulabbor. Vi tenker oss at i en populasjon er det ingen av individene som blir mer enn 4 år. Kun 5% av 1-åringene overlever til de blir 2 år, 20% overlever fra 2 til 3 år og 75% fra 3 til 4. De to eldste klassene produserer nye fisker, henholdsvis 100 og 150 i året pr. individ. Vi kan formulere modellen slik, der $n_{k,t}$ indikerer antall individer i aldersgruppe k ved tiden t.*

$$\begin{aligned} n_{1,t+1} &= 100n_{3,t} + 150n_{4,t} \\ n_{2,t+1} &= 0.05n_{1,t} \\ n_{3,t+1} &= 0.2n_{2,t} \\ n_{4,t+1} &= 0.75n_{3,t} \end{aligned}$$

Skriv opp overgangsmatrisen P og tegn en figur som illustrerer modellen. Regn ut P^2. Dersom vi setter

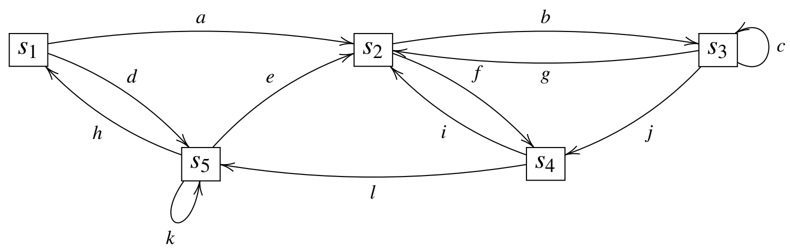
$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 10000 \\ 1000 \\ 500 \\ 300 \end{pmatrix}$$

hva blir da $\mathbf{v}_1$? P: Finn ut hvordan aldersfordelingen blir i det lange løp.

Oppgave 3.9. *En medisinsk preparat inntas gjennom munnen og absorberes til blodbanen via magesekken. La s_t være mengden av preparatet i magen ved tiden t, og b_t den mengden som er absorbert i blodet. For hvert tidsintervall er 50% av preparatet absorbert fra magesekken til blodbanen, og 80% av preparatet i blodbanen er metabolisert.*

Still opp en modell, inkludert figur, overgangsmatrise og likningssett. P: Analyser tidsforløpet av modellen.

Oppgave 3.10. *Et dynamisk system kan illustreres på følgende måte:*



Overgangsmatrisen er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & h \\ a & 0 & g & i & e \\ 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & f & j & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & l & k \end{pmatrix}$$

Kan du lage en illustrasjon som har den transponerte A^T av A som sin overgangsmatrise?