

Theoretische Informatik: Blatt 1

Abgabe bis 25. September 2015

Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe 1

- (a) Für jede Länge 1 bis m schauen wir die Anzahl Möglichkeiten an, ein Teilwort zu bilden.
 Bei Länge 1 können wir m Teilwörter bilden, die je bei den Positionen 1 bis m beginnen.
 Bei Länge 2 können wir $m - 1$ Teilwörter bilden, die je bei den Positionen 1 bis $m - 1$ beginnen.
 \vdots
 Bei Länge $m - 1$ können wir zwei Teilwörter bilden, die je bei den Positionen 1 und 2 beginnen.
 Bei Länge m können wir ein Teilwort bilden, das bei Position 1 beginnt.
 Es gibt also höchstens

$$1 + 2 + \dots + m = \sum_{i=1}^m i$$

verschiedene Teilwörter, falls keine von ihnen gleich sind.

- (b) Fallunterscheidung:

- $n = 1$: 0 Wörter
- $n = 2$: 0 Wörter
- $n = 3$: $3!$ verschiedene Wörter
- $n > 3$:
 Es gibt insgesamt 3^n viele verschiedene Wörter.
 Es gibt genau 3 Wörter $\{a^n, b^n, c^n\}$ die genau einen Buchstaben enthalten.
 Es gibt $3 \cdot 2^n$ viele Wörter, die genau zwei verschiedene Zeichen enthalten.
 Die übrigen $3^n - 3 - 3 \cdot 2^n$ Wörter sind die gesuchten, verschiedenen, in denen jeder Buchstabe $\{a, b, c\}$ einmal vorkommt.

Aufgabe 2

- (a) Richtig.
 Zunächst gilt $(\{a, b\}^*)^2 = \{a, b\}^*$, da jedes Element in $\{a, b\}^*$, mit jedem beliebigen anderen Wort der Menge konkateniert, in der Menge enthalten ist.
 rest morgen
- (b) Falsch. Zu zeigen: $(\{a\}^*\{b\}^*)^* \neq (\{a, b\}^2)^*$
 Beweis: Wir zeigen, dass a in $(\{a\}^*\{b\}^*)^*$ ist, aber nicht in $(\{a, b\}^2)^2$.

$$\begin{aligned} a &= a\lambda \in \{a\}^*\lambda \subseteq \{a\}^*\{b\}^* \\ \Rightarrow a &\in \{a\}^*\{b\}^* \end{aligned}$$

Beweis für $\lambda \in \{a\}^*\{b\}^*$ analog.

$$\begin{aligned} \Rightarrow a &= a\lambda \in \{\{a\}^*\{b\}^*\}\{\{a\}^*\{b\}^*\} = \{\{a\}^*\{b\}^*\}^2 \subseteq \{\{a\}^*\{b\}^*\}^* \\ \Rightarrow a &\in \{\{a\}^*\{b\}^*\}^* \end{aligned}$$

Zu zeigen: $a \notin (\{a, b\}^2)^* = \{aa, ab, bb, ba\}^* = L^*$

Begründung: Das Wort a hat Länge 1. Jedes Element in L hat Länge 2. Durch Konkatenation mit beliebiger Potenz liegen in L^* Wörter mit Länge > 2 und λ mit Länge 0. Aber kein Wort mit Länge 1.

(c) Richtig.

$$\begin{aligned}
 L_2 \cdot (L_2 - L_1) &= \{xy \mid x \in L_2 \wedge y \in L_2 - L_1\} && \text{(Def. Konkatenation)} \\
 &= \{xy \mid x \in L_2 \wedge y \in L_2 \wedge y \notin L_1\} && \text{(Def. Subtraktion)} \\
 &= \{xy \mid (x \in L_2 \wedge y \in L_2) \wedge (x \in L_2 \wedge y \notin L_1)\} && (A = A \wedge A) \\
 &= \{xy \mid x \in L_2 \wedge y \in L_2\} - \{xy \mid x \in L_2 \wedge y \in L_1\} && \text{(Def. Subtraktion)} \\
 &= (L_2)^2 - L_2 \cdot L_1 && \text{(Def. Konkatenation)}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Behauptung: $L = \{ab\}^*$

- Zu zeigen: L ist eine Sprache: $L \subseteq \Sigma^*$

Beweis:

$$\Sigma = \{a, b\} \Rightarrow \Sigma^* = \{a, b\}^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{a, b\}^i = \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ i \text{ gerade}}} \{a, b\}^i \cup \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ i \text{ ungerade}}} \{a, b\}^i \Rightarrow \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ i \text{ gerade}}} \{a, b\}^i \subseteq \Sigma^*$$

- Zu zeigen bleibt: $L \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}, i \text{ gerade}} \{a, b\}^i$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{i \in \mathbb{N}, i \text{ gerade}} \{a, b\}^i &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{a, b\}^{2k} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\{a, b\}^2)^k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{aa, ab, ba, bb\}^k \\
 \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{ab\}^k &\subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{aa, ab, ba, bb\}^k \Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{ab\}^k \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}, i \text{ gerade}} \{a, b\}^i
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L \subseteq \Sigma^*$$

- Zu zeigen: $L^i = L \quad \forall i \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$
Für alle $i \geq 1$

$$L^i = \{x \mid x = v_1 \cdot v_2 \cdots v_i \wedge v_j \in L \quad \forall j\} \quad (1)$$

$$\Rightarrow L^i = \{x \mid x = (ab)^{k_1} \cdot (ab)^{k_2} \cdots (ab)^{k_i}\} \quad (2)$$

$$\Rightarrow L^i = \{x \mid x = (ab)^{(k_1+k_2+\cdots+k_i)} = (ab)^{k'}\} = \{ab\}^* = L \quad (3)$$

gilt, da L nur ein Zeichen ab enthält, $k' = k_1 + k_2 + \cdots + k_i$ und k' beliebig in \mathbb{N} sein kann.

- Zu zeigen: $L \neq \{\lambda\}^*$

$$\text{Beweis: } \{\lambda\}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda^i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots\} = \{\lambda, \lambda, \lambda, \dots\} = \{\lambda\}$$

$$L = \{ab\}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{(ab)^i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{\lambda, ab, abab, ababab, \dots\}$$

Damit ist $L \neq \{\lambda\}^*$ (da z.B. $ab \in L$, aber $ab \notin \{\lambda\}$)

- Zu zeigen: $L \neq \{a\}^*$

$$\text{Beweis: } \{a\}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}, \text{ enthält insbesondere keine Wörter, die den Buchstaben } b \text{ enthalten.}$$

In $L = \{ab\}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{(ab)^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gibt es allerdings Wörter, die b enthalten, womit $L = \{ab\}^* \neq \{a\}^*$ gelten muss.

- Zu zeigen: $L \neq \{b\}^*$

Beweis: Analog zu $L \neq \{a\}^*$.

- Zu zeigen: $L \neq \{a, b\}^*$

Beweis: $\{a, b\}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda, a, b, aa, ba, ab, bb, \dots\}$, insbesondere gilt $a, b \in \{a, b\}^*$.

Dagegen ist $L = \{ab\}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{(ab)^i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{\lambda, ab, abab, ababab, \dots\}$, womit gilt $a, b \notin \{ab\}^*$.

Daraus folgt, dass $L \neq \{a, b\}^*$ gelten muss.

- (b) Behauptung: Es gibt keine nichtleere endliche Sprache $L \neq \lambda$ über dem Alphabet $\{a, b\}$, die die Bedingung $L^2 = L$ erfüllt.

Beweis: Sei L eine nichtleere endliche Sprache $L \neq \lambda$. Dann $\exists l \in L : l = \max L$. Das Wort ll muss in L^2 enthalten sein (und ist sogar das längste Wort in L^2). Sei $|l| = k \Rightarrow |ll| = 2k$. Da $k \neq 0$, ist das längste Wort in L^2 doppelt so lang wie das längste Wort in L , womit $L^2 \neq L$ ist.