

# **Theoretische Informatik: Blatt 7**

Abgabe bis 9. Oktober 2015  
Assistent: Sacha Krug, CHN D 42

**Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig**

## Aufgabe 19

## Aufgabe 20

(a)  $e(n) = 2^n$

Wir konstruieren eine 2-Band Turingmaschine  $M$ .  $M$  bekommt als Eingabe das Wort  $0^n$  auf Band 0. Zu Beginn schreibt  $M$  eine 0 auf *Band 1*. Solange der Lesekopf des Eingabebandes nicht  $\$$  liest:

1. Gehe auf *Band 1* nach links bis  $\dagger$ .
2. Gehe auf *Band 2* nach links bis  $\dagger$
3. Lies Zeichen auf *Band 1*. Schreibe für jede gelesene 0 auf *Band 1* 00 auf *Band 2*. Für ein  $\sqcup$  schreibe ein  $\sqcup$ .
4. Gehe auf Beiden Bändern nach links und kopiere Inhalt von *Band 2* auf *Band 1* einschließlich bis Zeichen  $\sqcup$ .
5. Rücke mit Lesekopf nach rechts.

Das Ergebnis steht dann auf *Band 2* bis zum ersten  $\sqcup$ .

Auf diese Art generieren wir  $2^n$  0en. Für  $n$  0en der Eingabe lesen wir pro Schritt  $2^i$  Nullen. Das schreiben geschieht jeweils in  $\mathcal{O}(1)$ .

$$\sum_{i=1}^n 2^i = 2^{n+1} - 2 \in \mathcal{O}(2^n)$$

Folglich ist  $e(n)$  zeitkonstruierbar.

(b)  $f(n) = \text{fib}_n$

Wir konstruieren ein 3-Band Turingmaschine  $M$ .  $M$  bekommt als Eingabe das Wort  $0^n$  auf Band 0. Wir unterscheiden mehrere Eingaben  $w$ .

Fall 1  $w = \lambda$

In diesem Fall ist  $n = 0$ .  $M$  schreibt 0 auf Band 1 und hält.

Fall 2  $w = 0$

In diesem Fall ist  $n = 1$ .  $M$  schreibt 1 auf Band 1 und hält.

Fall 3  $|w| = n, n \geq 2$  Der Lesekopf auf Band 0 liegt auf der dritten 0.

1.  $M$  schreibt  $\lambda$  auf *Band 1* und 0 auf *Band 2*.
2.  $M$  löscht *Band 3* und schreibt zuerst alle 0en von *Band 1* und dann alle 0en von *Band 2* auf *Band 3*.
3. Der Lesekopf für *Band 0* geht nach rechts. Liest er dort  $\$$  ist auf *Band 3* das Ergebnis und  $M$  hält. Ansonsten kopiert  $M$  den Inhalt von *Band 2* auf *Band 1* und den von *Band 3* auf *Band 2*. Dann wird zu Schritt 2. gesprungen.

ANALyse fehlt noch.

## Aufgabe 21

Wir wissen:  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  und  $f$  und  $g$  sind beide platzkonstruierbar.

$\Rightarrow$  Es gibt 1-Band-Turingmaschinen  $F$  und  $G$ , so dass 
$$\begin{array}{l} \text{Space}_F(n_1) \leq f(n_1) \\ \text{Space}_G(n_2) \leq g(n_2) \end{array} \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$$

und für jede Eingabe  $0^{n_1}$  generiert  $F$  das Wort  $0^{f(n_1)}$  auf ihrem Arbeitsband und hält in Zustand  $q_{accept}$ .  
 $0^{n_2}$  generiert  $G$  das Wort  $0^{g(n_2)}$   
 Sei nun  $H$  eine 1-Band-Turingmaschine mit Eingabe mit Arbeitsalphabet  $\Gamma_F \times \Gamma_G \cup \Gamma_F \cup \Gamma_G$  und Eingabe  $0^n$ .

$H$  simuliert nun die Arbeit von  $F$  auf folgende Weise:

Ist der Lesekopf des Arbeitsbandes auf dem Symbol  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  simuliert  $M$   $F$  so als würde  $F$   $\alpha$  lesen. Schreibt  $F$  ein neues Zeichen  $\alpha'$ , schreibt  $H$   $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta \end{pmatrix}$  auf das Band.

Sobald  $F$  gehalten hat, fährt  $H$  mit Eingabe- und Arbeitsbandkopf nach links auf  $\dagger$ .

Anschließend simuliert  $H$ ,  $G$  auf gleiche Art wie  $F$ .

Für  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  wird  $\beta$  gelesen, und für  $\beta'$  wird an der gleichen Stelle  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta' \end{pmatrix}$  geschrieben.

$H$  wandelt nun die das Band von der Form

$$\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}^*, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \sqcup \end{pmatrix} \right\}^* \right\}$$

Schrittweise um in  $0^l$ , wie folgt:

1. Ist Zeichen der Form  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ersetze durch 0 und ersetze erstes  $\sqcup$  durch eine 0.
2. Ist Zeichen der Form  $\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{0} \end{pmatrix}$  oder  $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqcup \end{pmatrix}$  ersetze mit 0.

Wiederhole Schritte bis Kopf von links nach rechts zeichen  $\sqcup$  liest. Dann akzeptiere.

Es steht nun genau  $f(n) + g(n) := h(n)$  auf dem Band und der benutzte Platz während der Berechnung der Simulation der beiden Turingmaschinen ist  $\text{Space}_H = \max\{f(n), g(n)\}$  und nach dem Schreiben des Ergebnisses  $\text{Space}_H = f(n) + g(n) = h(n)$ .

$\Rightarrow H$  ist platzkonstruierbar.