Theoretische Informatik: Blatt 1

Abgabe bis 18. September 2015

Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe 1

(a) Insgesamt gibt es 3^n verschiedene Wörter der Länge n.
Zunächst ziehen wir die drei verschieden Wörter a, b, c der Länge 1 ab.
Anschließend ziehen wir Wörter

Für jede Länge $1 \mathinner{..} m$ schauen wir die Anzahl Möglichkeiten an, ein Teilwort zu bilden.
Bei Länge 1 können wir an jeder der m Positionen anfangen und ein Teilwort der Länge 1 nehmen
Bei Länge 2 können wir das letzte Teilwort mit Anfang bei $m - 1$ entnehmen, da es Länge 2 hat

Bei Länge i lassen sich Teilwörter an den Stellen $\{1, 2, ..., m - i + 1\}$ mit Länge i nehmen.
Es gibt also höchstens

$$\sum_{i=1}^{m} m - i + 1 = \sum_{i=1}^{m} k \tag{1}$$

verschiedene Teilwörter, falls keine von ihnen gleich sind.

(b) Fallunterschiedung:

- $n = 1$: 0 Wörter
- $n = 2$: 0 Wörter
- $n = 3$: 3! verschiedene Wörter
- $n >= 3$:
  Es gibt insgesamt 3^n viele verschiedene Wörter.
  Es gibt genau 3 Wörter $\{a^n, b^n, c^n\}$ die genau einen Buchstaben enthalten.
  Es gibt $3 * 2^n$ viele Wörter, die genau zwei verschiedene Zeichen enthalten.
  Die übrigbleibenden $3^n - 3 - 3 \cdot 2^n$ Wörter sind die gesuchten, verschiedenen, in denen jeder Buchstabe $\{a, b, c\}$ einmal vorkommt

Aufgabe 2

(a)

$$\begin{aligned} L_2 \cdot (L_2 - L_1) &= \{xy | x \in L_2 \land y \in L_2 - L_1\} && (2)\\ &= \{xy | x \in L_2 \land y \in L_2 \land y \notin L_1\} && (3)\\ &= \{xy | (x \in L_2 \land y \in L_2) \land (x \in L_2 \land y \notin L_1)\} && (4)\\ &= \{xy | x \in L_2 \land y \in L_2\} - \{xy | x \in L_2 \land y \in L_1\} && (5)\\ &= (L_2)^2 - L_2 \cdot L_1 && (6) \end{aligned}$$

(b) z.Z $(\{a\}^*\{b\}^*)^* \neq (\{a, b\}^2)^*$
Beweis: wir Zeigen, dass a in $(\{a\}^*\{b\}^*)^*$ ist, aber nicht in $(\{a, b\})^2$

$$\begin{aligned} & a = a\lambda \in \{a\}^*\lambda \subseteq \{a\}^*\{b\}^* \\ \Rightarrow\quad & a \in \{a\}^*\{b\}^* \end{aligned}$$

Beweis für $\lambda \in \{a\}^*\{b\}^*$ analog.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & a = a\lambda \in \{\{a\}^*\{b\}^*\}\{\{a\}^*\{b\}^*\} = \{\{a\}^*\{b\}^*\}^2 \subseteq \{\{a\}^*\{b\}^*\}^* \\ \Rightarrow\quad & a \in \{\{a\}^*\{b\}^*\}^* \end{aligned}$$

z.Z. $a \notin (\{a, b\})^2 = \{aa, ab, bb, ba\}^* = L^*$
Begründung: Das Wort a hat Länge 1. Jedes Element in L hat Länge 2. Durch Konkatenation mit beliebiger Potenz liegen in L^* Wörter mit Länge > 2 und λ mit Länge 0. Aber kein Wort mit Länge 1.
. $\square$

(c)