Theoretische Informatik: Blatt 7

Abgabe bis 9. Oktober 2015
Assistent: Sacha Krug, CHN D 42

Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe 19

Aufgabe 20

(a) $e(n) = 2^n$

Wir konstruieren eine 2-Band Turingmaschine M. M bekommt als Eingabe das Wort 0^n auf Band 0. Zu Beginn schreibt M eine 0 auf *Band 1*. Solange der Lesekopf des Eingabebandes nicht \$ liest:

1. Gehe auf *Band 1* nach links bis ¢.
2. Gehe auf *Band 2* nach links bis ¢
3. Lies Zeichen auf *Band 1*. Schreibe für jede gelesene 0 auf *Band 1* 00 auf *Band 2*. Für ein ␣ schreibe ein ␣.
4. Gehe auf Beiden Bändern nach links und kopiere Inhalt von *Band 2* auf *Band 1* einschließlich bis Zeichen ␣.
5. Rücke mit Lesekopf nach rechts.

Das Ergebnis steht dann auf *Band 2* bis zum ersten ␣.

Auf diese Art generieren wir 2^n 0en. Für n 0en der Eingabe lesen wir pro Schritt 2^i Nullen. Das schreiben geschieht jeweils in $\mathcal{O}(1)$.

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2 \in \mathcal{O}(2^n)$$

Folglich ist $e(n)$ zeitkonstruierbar.

(b) $f(n) = fib_n$

Wir konstruieren eine 3-Band Turingmaschine M, wobei *Band 0* das Eingabeband und *Bänder 1–3* die Arbeitsbänder sind. M bekommt als Eingabe das Wort $w = 0^n$ auf *Band 0*. Wir unterscheiden mehrere Eingaben w.

Fall 1: $w = \lambda$
In diesem Fall ist $n = 0$. M schreibt 0 auf Band 1 und akzeptiert.

Fall 2: $w = 0$
In diesem Fall ist $n = 1$. M schreibt 1 auf Band 1 und akzeptiert.

Fall 3: $|w| = n, n \geq 2$ Der Lesekopf auf Band 0 liegt auf der dritten 0.

1. M schreibt λ auf *Band 1* und 0 auf *Band 2*.
2. M löscht *Band 3* und schreibt zuerst alle 0en von *Band 1* und dann alle 0en von *Band 2* auf *Band 3*.
3. Der Lesekopf für *Band 0* geht nach rechts. Liest er dort \$ ist auf *Band 3* das Ergebnis und M hält. Ansonsten kopiert M den Inhalt von *Band 2* auf *Band 1* und den von *Band 3* auf *Band 2*. Dann wird zu Schritt 2. gesprungen.

ANALyse fehlt noch.

Aufgabe 21

Wir wissen: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und f und g sind beide platzkonstruierbar.

$\Rightarrow$ Es gibt 1-Band-Turingmaschinen F und G, so dass $\begin{array}{l} \text{Space}_F(n_1) \leq f(n_1) \\ \text{Space}_G(n_2) \leq g(n_2) \end{array} \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

und für jede Eingabe $\begin{array}{l} 0^{n_1} \text{ generiert } F \text{ das Wort } 0^{f(n_1)} \\ 0^{n_2} \text{ generiert } G \text{ das Wort } 0^{g(n_2)} \end{array}$ auf ihrem Arbeitsband und hält in Zustand q_{accept}.

Wir konstruieren eine 5-Band-Turingmaschine H. H bekommt als Inpt 0^n auf sein Eingabeband. H kopiert die Eingabe auf *Band 2* und auf *Band 4* und simuliert F, dann G. Dabei sind *Band 2, 3* das Eingabe- und Arbeitsband von F und *Band 4, 5* Eingabe- und Arbeitsband von G.
Auf *Band 3* steht nun $0^{f(n)}$ und auf *Band 5* steht $0^{g(n)}$. H geht nach an den Anfang von *Band 3* und geht für jede gelesene 0 eins nach rechts und hängt den gesamten Inhalt von *Band 5* an *Band 1* an. Hat H alle 0en auf *Band 3* gelesen steht auf *Band 1* nun $0^{f(n) \cdot g(n)}$. H akzeptiert.
Die längte Konfiguration über alle Bänder und Schritte hat H am Ende, wenn das Ergebnis steht. Damit ist

$$\text{Space}_H = f(n) \cdot g(n) =: h(n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \textit{(nach Def. 6.2)}$$

und H hält immer in q_{accept}.
Nach *Lemma 6.1* gibt es eine äquivalente 1-Band-Turingmaschine H' mit $\text{Space}_{H'} \leq \text{Space}_H \leq h(n)$. Folglich ist $h(n)$ platzkonstruierbar.