

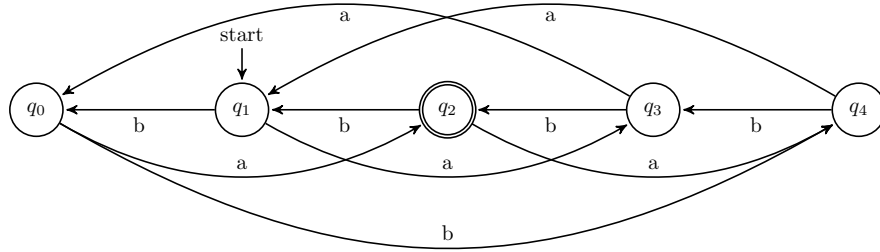
# **Theoretische Informatik: Blatt 3**

Abgabe bis 9. Oktober 2015  
Assistent: Sascha Krug, CHN D 42

**Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig**

## Aufgabe 7

- (a) Der nachstehende endliche Automat akzeptiert nur Wörter der Sprache  $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid (2 \cdot |w|_a - |w|_b + 1) \bmod 5 = 2\}$ .



Der Automat funktioniert, weil wir für jedes  $a$  das wir einlesen 2 Zustände modulo 5 vorwärts und für jedes  $b$  einen Zustand mod 5 rückwärts gehen. Aus diesem Grund ist  $q_2$  auch ein akzeptierter Zustand, denn er spiegelt die Rechnung wieder.

Die Klassen seiner Zustände sind:

$$\text{Kl}[q_0] = \{w \in \{a, b\}^* \mid (2 \cdot |w|_a - |w|_b + 1) \bmod 5 = 0\}$$

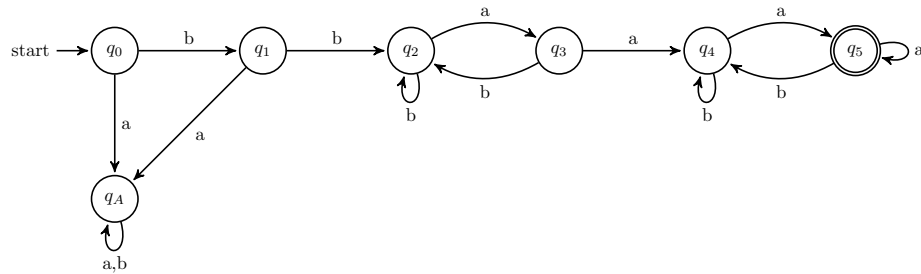
$$\text{Kl}[q_1] = \{w \in \{a, b\}^* \mid (2 \cdot |w|_a - |w|_b + 1) \bmod 5 = 1\}$$

$$\text{Kl}[q_2] = \{w \in \{a, b\}^* \mid (2 \cdot |w|_a - |w|_b + 1) \bmod 5 = 2\}$$

$$\text{Kl}[q_3] = \{w \in \{a, b\}^* \mid (2 \cdot |w|_a - |w|_b + 1) \bmod 5 = 3\}$$

$$\text{Kl}[q_4] = \{w \in \{a, b\}^* \mid (2 \cdot |w|_a - |w|_b + 1) \bmod 5 = 4\}$$

- (b) Folgender endlicher Automat akzeptiert nur Wörter der Sprache  $L_2 = \{bbxa \mid x \in \{a, b\}^* \text{ und } x \text{ enthält das Teilwort } aa\}$ .



Der Automat funktioniert selbsterklärend.  $q_A$  ist der Abfallknoten, gelangt der Automat einmal in diesen Zustand, wird das Wort nicht mehr akzeptiert werden.

Die Klassen seiner Zustände sind:

$$\text{Kl}[q_0] = \{\lambda\}$$

$$\text{Kl}[q_1] = \{b\}$$

$$\text{Kl}[q_2] = \{bbx \mid x \in \{b, ab\}^*\}$$

$$\text{Kl}[q_3] = \{bbxa \mid x \in \{b, ab\}^*\}$$

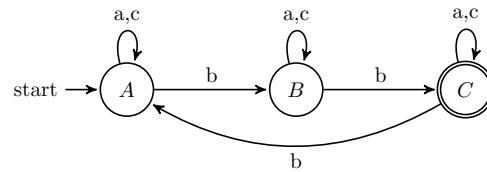
$$\text{Kl}[q_4] = \{xayb \mid x \in \text{Kl}[q_3], y \in \{a, b\}^*\} \cup \{xa \mid x \in \text{Kl}[q_3]\}$$

$$\text{Kl}[q_5] = \{xa^i \mid x \in \text{Kl}[q_4], i \in \mathbb{N}\} = \{bbxa \mid x \in \{a, b\}^* \text{ und } x \text{ enthält das Teilwort } aa\}$$

$$\text{Kl}[q_A] = \{yax \mid y \in \{\lambda, b\}, x \in \{a, b\}^*\}$$

## Aufgabe 8

(a) Der folgende endliche Automat akzeptiert nur Wörter  $w$ , für die  $|w|_b \bmod 3 = 2$  gilt:



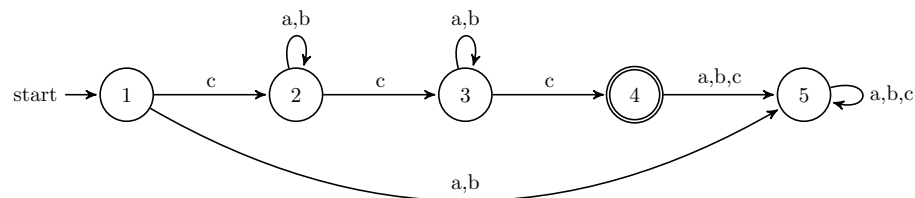
Es ist klar, dass  $a$  und  $c$  die Anzahl von  $|w|_b$  nicht ändern und daher zu keiner Zustandsänderung führen. Wird ein  $b$  eingelesen "zählen" wir eine Zustand modulo 3 weiter. Für die Klassen gilt also:

$$\text{Kl}[A] = \{w \mid |w|_b \bmod 3 = 0\}$$

$$\text{Kl}[B] = \{w \mid |w|_b \bmod 3 = 1\}$$

$$\text{Kl}[C] = \{w \mid |w|_b \bmod 3 = 2\}$$

Der endliche Automat, der Wörter der Form  $w = cxcyc$  für  $x, y \in \{a, b\}^*$  akzeptiert, sieht folgendermaßen aus:



Dieser Automat funktioniert selbsterklärend. Es werden am Anfang, am Ende und zwischendrin genau ein  $c$  verlangt. Alle Wörter, die diese Bedingung nicht erfüllen, landen in  $\text{Kl}[5]$ .

Die Klassen sind:

$$\text{Kl}[1] = \{\lambda\}$$

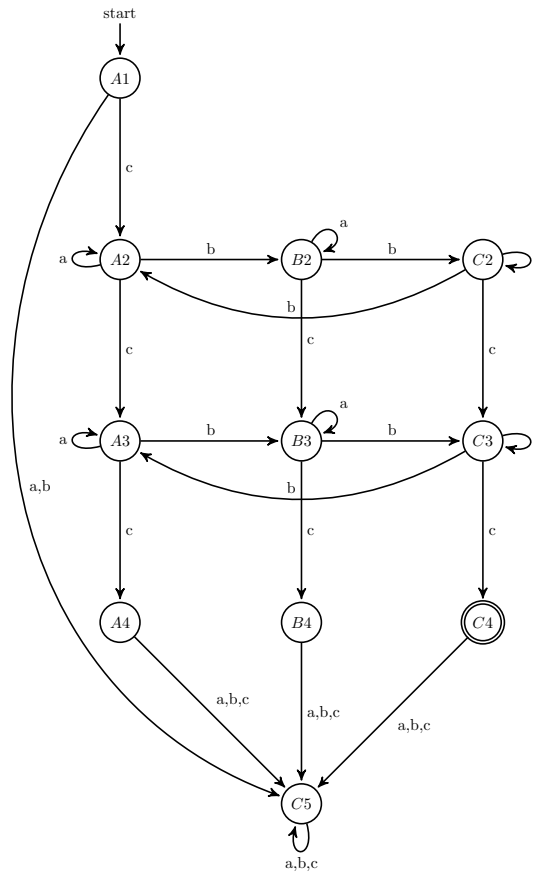
$$\text{Kl}[2] = \{cx \mid x \in \{a, b\}^*\}$$

$$\text{Kl}[3] = \{cxcy \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$$

$$\text{Kl}[4] = \{cxcyc \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$$

$$\text{Kl}[5] = \{xy \mid x \in \{a, b\}, y \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{xy \mid x \in \text{Kl}[4], y \in \{a, b, c\}^+\}$$

Die beiden endlichen Automaten können nach der Methode des modularen Entwurfs (Konstruktion eines Produktautomaten) zu folgendem EA kombiniert werden. (Da im resultierenden EA die Zustände B1 und C1 nie erreicht werden können, löschen wir diese. Zusätzlich können die Zustände A5, B5 und C5 in einen kombiniert werden. So bleibt der EA übersichtlich.)



(b) asdf

## Aufgabe 9

(a)  $L_1 = \{0^m 1^n 0^{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

Annahme: Sei  $L_1$  regulär. Dann gibt es einen endlichen Automaten  $A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$ , sodass  $L(A) = L_1$ . Dieser hat  $|Q_0|$  Zustände. Nach dem *Pumping-Lemma* lässt sich ein  $w$  mit  $|w| = n_0$  in  $w = xyz$  zerlegen und

(i)  $|yx| \leq n_0$

(ii)  $|x| \geq 1$

(iii)  $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$  oder  $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \cup L = \emptyset$

Jedes Wort  $w$  der Länge  $|w| \geq n_0$  muss also eine Zerlegung besitzen, die (i), (ii), (iii) erfüllt.

Sei  $W = 1^{n_0} 0^{n_0}$ , also  $|w| = 2 \cdot n \geq n_0$

(i)  $\Rightarrow y = 1^l, x = 1^m$  mit  $l, m \in \mathbb{N}$

(iii)  $\Rightarrow$  Da  $w = 1^{n_0} 0^{n_0} \in L$ , ist  $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} = \{1^l (1^m)^k 0^{n_0}\} \subseteq L$

Aber: für  $k = 0$  ist  $w = yz = 1^{n_0-m} 0^{n_0} \notin L$

Wir haben einen Widerspruch, daher war die Annahme, dass  $L$  regulär ist, falsch.

(b) Wir machen einen Widerspruchsbeweis. Annahme:  $L$  ist regulär.

Dann gilt das *Pumping-Lemma* auch für  $L$ .

Betrachten wir das Wort  $0^{n_0^2+n_0}$ , dann ist offensichtlich  $|w| \geq n_0$

Für alle Zerlegungen  $w = yxz$  gilt

$$y = 0^l, x = 0^m, z = 0^{n_0^2+n_0-l-m} \quad \text{mit} \quad |xy| \leq n_0 \quad \text{und} \quad |x| \geq 1$$

Weil  $w = yxz = 0^{n_0^2+n_0} \in L$ , muss  $yx^kz \in L$  erfüllt sein.

Es gilt aber:

$$yx^2z = 0^l 0^{2m} 0^{n_0^2+n_0-l-m} = 0^{n_0^2+n_0+m} \notin L \quad ,$$

weil

$$n_0^2 + n_0 \leq n_0^2 + n_0 + m \leq n_0^2 + 3n_0 + 2 = (n_0 + 1)(n_0 + 2)$$

$$n_0^2 + n_0 + m \quad \text{hat also nicht die Form} \quad n(n+1)$$

Wir haben nun ein Widerspruch, womit die Annahme, dass  $L$  eine reguläre Sprache ist, verworfen wird.