Theoretische Informatik: Blatt 7

Abgabe bis 13. November 2015
Assistent: Sacha Krug, CHN D 42

Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe 19

Aufgabe 20

(a) $e(n) = 2^n$

Wir konstruieren eine 2-Band Turingmaschine M, wobei *Band 0* das Eingabeband und *Bänder 1–2* die Arbeitsbänder sind. M bekommt als Eingabe das Wort 0^n auf *Band 0*. Zu Beginn schreibt M eine 0 auf *Band 1*. Solange der Lesekopf des Eingabebandes nicht \$ liest:

1. Gehe auf *Band 1* nach links bis ¢.
2. Gehe auf *Band 2* nach links bis ¢
3. Lies Zeichen auf *Band 1*. Schreibe für jede gelesene 0 auf *Band 1* 00 auf *Band 2*. Für ein ␣ schreibe ein ␣.
4. Gehe auf beiden Bändern nach links und kopiere Inhalt von *Band 2* auf *Band 1* einschließlich bis Zeichen ␣.
5. Rücke mit Lesekopf nach rechts.

Das Ergebnis steht dann auf *Band 2* bis zum ersten ␣.

Auf diese Art generieren wir 2^n Nullen. Für n Nullen der Eingabe lesen wir pro Schritt 2^i Nullen. Das Schreiben geschieht jeweils in $\mathcal{O}(1)$.

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2 \in \mathcal{O}(2^n)$$

Folglich ist $e(n)$ zeitkonstruierbar.

(b) $f(n) = fib_n$

Wir konstruieren eine 3-Band Turingmaschine M, wobei *Band 0* das Eingabeband und *Bänder 1–3* die Arbeitsbänder sind. M bekommt als Eingabe das Wort $w = 0^n$ auf *Band 0*. Wir unterscheiden drei Eingaben w.

Fall 1: $w = \lambda$.
In diesem Fall ist $n = 0$. M schreibt $0^{fib_0} = \lambda$ auf

Fall 2: $w = 0$.
In diesem Fall ist $n = 1$. M schreibt $0^{fib_1} = 0$ auf *Band 1* und hält.

Fall 3: $|w| = n, n \geq 2$. Der Lesekopf auf *Band 0* liegt auf der zweiten 0 und M liest auf *Band 0* von links nach rechts. Für die erste gelesene 0 schreibt M eine 0 auf *Band 2*. Für jede weitere gelesene 0 führt M Schritte 1.–3. aus, bis \$ gelesen wird. Dann ist auf *Band 1* das Ergebnis 0^{fib_n} (und auf *Band 2* $0^{fib_{n-1}}$ und auf *Band 3* $0^{fib_{n-2}}$).

1. M überschreibt *Band 3* mit dem Inhalt von *Band 2* ($fib_{i-2} \leftarrow fib_{i-1}$).
2. M überschreibt *Band 2* mit dem Inhalt von *Band 1* ($fib_{i-1} \leftarrow fib_i$).
3. M schreibt den Inhalt von *Band 3* in *Band 1* (konkateniert also die Nullen auf *Band 1* mit den Nullen von *Band 3*) ($fib_i \leftarrow fib_{i-1} + fib_{i-2}$).

In den Fällen 1 und 2 ist die Laufzeit konstant, also ist $f(n) \in \mathcal{O}(1)$. Im Fall 3 schreiben wir bei der $i - ten$ Ausführung, $i \leq n - 2$ (weil wir auf der zweiten 0 starten), fib_{i-2} Nullen auf *Band 3*, fib_{i-1}

Nullen auf *Band 2* und fib_{i-2} Nullen auf *Band 1*, also pro Schritt $2fib_{i-2} + fib_{i-1} \leq 3fib_{i-1}$ Nullen. Insgesamt ergibt das also

$$\begin{aligned}
3\sum_{i=2}^{n} fib_{i-1} &= 3\sum_{i=1}^{n-1} fib_i && \text{(Indexverschiebung)} \\
&= 3\sum_{i=0}^{n-1} fib_i && (fib_0 = 0) \\
&= 3(fib_{n+1} - 1). && (\sum_{i=0}^{n} fib_i = fib_{n+2} - 1) \\
&= 3(fib_n + fib_{n-1} - 1) && \text{(Definition } fib_n) \\
&\leq 3(2fib_n - 1)
\end{aligned}$$

$3(2fib_n - 1) = 6fib_n - 2 \in \mathcal{O}(fib_n)$. Damit ist $f(n)$ zeitkonstruierbar.

Aufgabe 21

Wir wissen: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und f und g sind beide platzkonstruierbar.

$\Rightarrow$ Es gibt 1-Band-Turingmaschinen F und G, so dass $\begin{array}{l}\text{Space}_F(n_1) \leq s_1(n_1) \\ \text{Space}_G(n_2) \leq s_2(n_2)\end{array}$ $\quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

und für jede Eingabe $\begin{array}{l}0^{n_1} \text{ generiert } F \text{ das Wort } 0^{s_1(n_1)} \\ 0^{n_2} \text{ generiert } G \text{ das Wort } 0^{s_2(n_2)}\end{array}$ auf ihrem Arbeitsband und hält in Zustand q_{accept}.

Sei nun H eine 1-Band-Turingmaschine mit Eingabe mit Arbeitsalphabet $\Gamma_F \times \Gamma_G \cup \Gamma_F \cup \Gamma_G$ und Eingabe 0^n.

H simuliert nun die Arbeit von F auf folgende Weise:

Ist der Lesekopf des Arbeitsbandes auf dem Symbol $\binom{\alpha}{\beta}$, simuliert H F so als würde F α lesen. Schreibt F ein neues Zeichen α', schreibt H $\begin{pmatrix}\alpha' \\ \beta\end{pmatrix}$ auf das Band.

Sobald F gehalten hat, fährt H mit Eingabe- und Arbeitsbandkopf nach links auf ¢.

Anschließend simuliert H, G auf gleiche Art wie F.

Für $\binom{\alpha}{\beta}$ wird β gelesen, und für β' wird an der gleichen Stelle $\binom{\alpha}{\beta'}$ geschrieben.

H wandelt nun die das Band von der Form

$$¢\binom{0}{0}\binom{0}{0}\cdots\binom{\sqcup}{0}$$

Schrittweise um in 0^l, wie folgt:

1. Ist Zeichen der Form $\binom{0}{0}$, ersetze durch 0 und ersetze erstes $\sqcup$ durch eine 0.

2. Ist Zeichen der Form $\binom{\sqcup}{0)}$ oder $\binom{0}{\sqcup}$ ersetze mit 0.

Wiederhole Schritte bis von links zeichen $\sqcup$ gelesen wird. Dann akzeptiere.

Es steht nun genau $s_1(n)+s_2(n) =: s_3(n)$ auf dem Band und der benutzte Platze $\text{Space}_H = \max s_1(n), s_2(n) \leq s_1(n) + s_2(n) = s_3(n)$.

$\Rightarrow$ H ist platzkonstruierbar.