Theoretische Informatik: Blatt 5

Abgabe bis 30. Oktober 2015
Assistent: Sascha Krug, CHN D 42

Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe 13

(a) Seien die Zimmer mit 1, 2, 3, ... durchnummeriert und das Tupel (i, j) beschreibe den j-ten Gast aus dem i-ten Bus ($i \in \{1, 2, 3\},\ j \in \mathbb{N}_0$). Zuerst zieht jeder Gast im Hotel mit Zimmernummer k in Zimmernummer $6k$. $(0, j)$ beschreibe die bereits bestehenden Gäste. Nun weisen wir den Gästen aus den Bussen folgendermassen ihre Zimmer zu:

- Dem Gast $(1, j)$ weisen wir Zimmer $6j + 1$ (ungerade) zu.
- Dem Gast $(2, j)$ weisen wir für $k \in \mathbb{N}_0$ Zimmer $\begin{cases} 6j+2, & \text{für } j = 2k \\ 6j+3, & \text{für } j = 2k+1 \end{cases}$ zu.
- Dem Gast $(3, j)$ weisen wir Zimmer $6j + 4$ zu.

Damit wiederholt sich das Muster $(1, j)$, $(2, j)$, $(2, j)$, $(3, j)$, leer, $(0, j)$ für aufsteigende Zimmernummern. Gäste aus Bus 1 sind in ungeraden Zimmernummern, Gäste aus Bus 2 immer paarweise nebeneinander und Gäste aus Bus 3 werden auch untergebracht.

(b) Zuerst weisen wir den Bussen eine Reihenfolge zu, je nach dem, wann sie angekommen sind. Der erste Bus, der ankommt, bekommt Nummer 1, usw. Wir beschreiben wieder den j-ten Gast aus Bus i mit dem Tupel (i, j), mit $i \in \{1, 2, 3\},\ j \in \mathbb{N}$. Dann weisen wir dem Gast (i, j) die Zimmernummer p^j zu, wobei p die i-te Primzahl ist (nach Grösse geordnet). So hat jeder Gast eindeutig ein Zimmer, weil jede gegebene Primzahl und ihre Potenzen teilerfremd zu jeder anderen Primzahl und ihren Potenzen ist (für positive Exponenten) und weil es abzählbar unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 14

Die Matrix für $L_{1,diag}$ sieht wie folgt aus:

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	$\cdots$
M_1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
M_2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	$\cdots$
M_3	1	1	1	1	1	1	1	1	0	$\cdots$
M_4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
M_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Wenn wir die Diagonalelemente nehmen, bekommen wir $L_{1,diag} = \{w \in (\Sigma_{\text{bool}})^* \mid (w = w_1$ und M_1 akzeptiert $w_1)$ oder $(w = w_i$ für ein $i \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ und M_i akzeptiert w_i nicht$)\}$. Nach Satz 5.5 ist $L_{1,diag} \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$.

Ein analoger Beweis ist für $L_{1,diag}$ nicht möglich, weil die Sprache nur Auskunft über M_{i^2} gibt. Also wissen wir z.B. nicht, ob M_2 das Wort $w = w_i$ akzeptiert oder nicht.

Aufgabe 15

(a)

(b)