Theoretische Informatik: Blatt 7

Abgabe bis 9. Oktober 2015
Assistent: Sacha Krug, CHN D 42

Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe 19

Aufgabe 20

(a) $e(n) = 2^n$

Wir konstruieren eine 2-Band Turingmaschine M. M bekommt als Eingabe das Wort 0^n auf Band 0. Zu Beginn schreibt M eine 0 auf *Band 1*. Solange der Lesekopf des Eingabebandes nicht \$ liest:

1. Gehe auf *Band 1* nach links bis ¢.
2. Gehe auf *Band 2* nach links bis ¢
3. Lies Zeichen auf *Band 1*. Schreibe für jede gelesene 0 auf *Band 1* 00 auf *Band 2*. Für ein ␣ schreibe ein ␣.
4. Gehe auf Beiden Bändern nach links und kopiere Inhalt von *Band 2* auf *Band 1* einschließlich bis Zeichen ␣.
5. Rücke mit Lesekopf nach rechts.

Das Ergebnis steht dann auf *Band 2* bis zum ersten ␣.

Auf diese Art generieren wir 2^n 0en. Für n 0en der Eingabe lesen wir pro Schritt 2^i Nullen. Das schreiben geschieht jeweils in $\mathcal{O}(1)$.

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2 \in \mathcal{O}(2^n)$$

Folglich ist $e(n)$ zeitkonstruierbar.

(b) $f(n) = fib_n$

Wir konstruieren ein 3-Band Turingmaschine M. M bekommt als Eingabe das Wort 0^n auf Band 0. Wir unterscheiden mehrere Eingaben w.

Fall 1 $w = \lambda$

In diesem Fall ist $n = 0$. M schreibt 0 auf Band 1 und hält.

Fall 2 $w = 0$

In diesem Fall ist $n = 1$. M schreibt 1 auf Band 1 und hält.

Fall 3 $|w| = n, n \geq 2$ Der Lesekopf auf Band 0 liegt auf der dritten 0.

1. M schreibt λ auf *Band 1* und 0 auf *Band 2*.
2. M löscht *Band 3* und schreibt zuerst alle 0en von *Band 1* und dann alle 0en von *Band 2* auf *Band 3*.
3. Der Lesekopf für *Band 0* geht nach rechts. Liest er dort \$ ist auf *Band 3* das Ergebnis und M hält. Ansonsten kopiert M den Inhalt von *Band 2* auf *Band 1* und den von *Band 3* auf *Band 2*. Dann wird zu Schritt 2. gesprungen.

ANALyse fehlt noch.

Aufgabe 21

Wir wissen: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und f und g sind beide platzkonstruierbar.

$\Rightarrow$ Es gibt 1-Band-Turingmaschinen F und G, so dass $\begin{array}{l} \text{Space}_F(n_1) \leq f(n_1) \\ \text{Space}_G(n_2) \leq g(n_2) \end{array} \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

und für jede Eingabe $\begin{array}{l} 0^{n_1} \text{ generiert } F \text{ das Wort } 0^{f(n_1)} \\ 0^{n_2} \text{ generiert } G \text{ das Wort } 0^{g(n_2)} \end{array}$ auf ihrem Arbeitsband und hält in Zustand q_{accept}.
Sei nun H eine 1-Band-Turingmaschine mit Eingabe mit Arbeitsalphabet $\Gamma_F \times \Gamma_G \cup \Gamma_F \cup \Gamma_G$ und Eingabe 0^n.
H simuliert nun die Arbeit von F auf folgende Weise:
Ist der Lesekopf des Arbeitsbandes auf dem Symbol $\binom{\alpha}{\beta}$ simuliert M F so als würde F α lesen. Schreibt F ein neues Zeichen α', schreibt H $\binom{\alpha'}{\beta}$ auf das Band.
Sobald F gehalten hat, fährt H mit Eingabe- und Arbeitsbandkopf nach links auf ¢.
Anschließend simuliert H, G auf gleiche Art wie F.
Für $\binom{\alpha}{\beta}$ wird β gelesen, und für β' wird an der gleichen Stelle $\binom{\alpha}{\beta'}$ geschrieben.
H wandelt nun die das Band von der Form

$$¢ \binom{0}{0}\binom{0}{0}\cdots\binom{0}{0}\left\{\left\{\binom{\sqcup}{0}\right\}^*, \left\{\binom{0}{\sqcup}\right\}^*\right\}$$

Schrittweise (ab ¢ nach rechts) um in ¢ 0^i, $i \in \mathbb{N}$, wie folgt:

1. Ist Zeichen der Form $\binom{0}{0}$, ersetze durch 0 und ersetze erstes $\sqcup$ durch eine 0.

2. Ist Zeichen der Form $\binom{\sqcup}{0}$ oder $\binom{0}{\sqcup}$ ersetze mit 0.

Wiederhole Schritte bis Kopf Zeichen $\sqcup$ liest. Dann akzeptiere.
Es steht nun genau $f(n) \cdot g(n) := h(n)$, ('$\cdot$' ist Konkatenation) auf dem Band und der benutzte Platz während der Berechnung der Simulation der beiden Turingmaschinen ist $\text{Space}_H = \max\{|f(n)|, |g(n)|\}$ und nach dem Schreiben des Ergebnisses $\text{Space}_H = |f(n)| + |g(n)| = |h(n)|$.
$\Rightarrow$ H ist platzkonstruierbar.