

Theoretische Informatik: Selbststudium - Blatt 1

Abgabe bis 23. Oktober 2015
Assistent: Sascha Krug, CHN D 42

Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe S1

- (a) Vermutung: $L(G_1) = \{avawa \mid v \in \{b\}^+, w \in \{ab\}^*\}$

Beweis: Die Grammatik beginnt im Startsymbol S , für das es nur eine Ableitungsregel gibt: $S \rightarrow aXaYa$. Da das Wort $aXaYa$ immer noch die Nichtterminale X und Y enthält, müssen wir weiter ableiten. Es gibt in P_1 keine Ableitungsregel $QaR \rightarrow_{G_1} S$ für beliebige $Q, R, S \in (\Sigma_N \cup \Sigma_T)^*$, womit jedes Wort in der von der Grammatik erzeugten Sprache die Form $avawa$ aufweisen muss, für noch zu bestimmende v und u .

Im Folgenden beweisen wir, dass $v \in \{b\}^+$ und $w \in \{ab\}^*$.

1. $v \in \{b\}^+$: Wir haben $aXaYa$ gegeben. Die Ableitungsregeln, die X betreffen, sind $\{X \rightarrow bX, X \rightarrow b\}$. Wir zeigen mit Induktion, dass man mit X und den beiden Ableitungsregeln für X ausschliesslich die Wörter $v \in \{b\}^+ = \{b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ generieren kann. Sei n die Anzahl angewandter Ableitungsregeln.

- (i) *Induktionsanfang:*

Sei $n = 1$. Man kann mit einer Ableitung aus X entweder das Wort bX oder b herleiten (nicht aber λ).

- (ii) *Induktionsschritt:*

$n \rightarrow n + 1$: Es gibt zwei Fälle:

Das Wort endet auf X : Man kann wieder bX oder b herleiten.

Das Wort endet auf b : Das Wort kann nicht mehr weiter abgeleitet werden und man erhält nach dem n -ten Ableitungsschritt das Wort b^n .

2. $w \in \{ab\}^*$: Wir haben $aXaYa$ gegeben. Die Ableitungsregeln, die Y betreffen, sind $\{Y \rightarrow abY, Y \rightarrow ab, Y \rightarrow \lambda\}$. Mit Induktion kann man analog zu 1. beweisen, dass man mit Y und den drei Ableitungsregeln für Y ausschliesslich die Wörter $w \in \{ab\}^* = \{(ab)^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ generieren kann. Der einzige Unterschied ist, dass man durch die dritte Ableitungsregel $Y \rightarrow \lambda$ auch das leere Wort herleiten kann.

- (b) Man beginnt in S . Für S gibt es nur eine Ableitungsregel $S \rightarrow 0X0$. Wir gehen also von $0X0$ aus. Für X gibt es nun die drei Ableitungsregeln $\{X \rightarrow AX, X \rightarrow BX, X \rightarrow Y\}$. Nun können wir beliebig viele A oder B vor das X schreiben, bevor wir X durch Y ersetzen.

Damit erhalten wir das Wort $0WY0$ für $W \in \{A, B\}^*$.

Jetzt können wir sukzessive die Ableitungsregeln $\{AY \rightarrow Y0, BY \rightarrow Y1\}$ anwenden, bis keine A oder B mehr im Wort enthalten sind.

Dann können wir noch einmal die letzte Ableitungsregel $\{0Y \rightarrow 0\}$ anwenden.

So entsteht das Wort $0w0$ für $w \in \{0, 1\}^*$, denn die Anwendung von $\{AY \rightarrow Y0, BY \rightarrow Y1\}$ bewirkt schlussendlich, dass jedes A durch eine 0 und jedes B durch eine 1 ersetzt wird und $\{0Y \rightarrow 0\}$ löscht das Y am Ende.

Eine äquivalente reguläre Grammatik ist $G'_2 = (\{S, X\}, \{0, 1\}, P'_2, S)$ mit

$$P'_2 = \{S \rightarrow 0X0, X \rightarrow \lambda, X \rightarrow 0, X \rightarrow 1, X \rightarrow X0, X \rightarrow X1\}.$$

Der Entwurf ist praktisch selbsterklärend. Wir starten in S , gehen über zu $0X0$ und können dann wählen, ob wir X zu λ , 0 oder 1 ableiten oder 0 bzw. 1 schreiben und danach weiter Buchstaben aus $\{\lambda, 0, 1\}$ hinzufügen wollen oder nicht (indem wir Regel $X \rightarrow X0$ oder $X \rightarrow X1$ anwenden). Damit generiert die Grammatik G'_2 auch die Wörter $0w0$ für $w \in \{0, 1\}^*$.

Aufgabe S2

(a)

(b)

Aufgabe S3

(a)

(b)