Theoretische Informatik: Blatt 1

Abgabe bis 18. September 2015

Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe 1

(a) Insgesamt gibt es 3^n verschiedene Wörter der Länge n.
Zunächst ziehen wir die drei verschieden Wörter a, b, c der Länge 1 ab.
Anschließend ziehen wir Wörter

Für jede Länge $1 \mathinner{..} m$ schauen wir die Anzahl Möglichkeiten an, ein Teilwort zu bilden.
Bei Länge 1 können wir an jeder der m Positionen anfangen und ein Teilwort der Länge 1 nehmen
Bei Länge 2 können wir das letzte Teilwort mit Anfang bei $m-1$ entnehmen, da es Länge 2 hat

Bei Länge i lassen sich Teilwörter an den Stellen {1, 2, ..., $m-i+1$} mit Länge i nehmen.
Es gibt also höchstens

$$\sum_{i=1}^{m} m-i+1 = \sum_{i=1}^{m} k \tag{1}$$

verschiedene Teilwörter, falls keine von ihnen gleich sind.

(b) Fallunterschiedung:

- $n = 1$: 0 Wörter
- $n = 2$: 0 Wörter
- $n = 3$: 3! verschiedene Wörter
- $n >= 3$:
  Es gibt insgesamt 3^n viele verschiedene Wörter.
  Es gibt genau 3 Wörter $\{a^n, b^n, c^n\}$ die genau einen Buchstaben enthalten.
  Es gibt $3 * 2^n$ viele Wörter, die genau zwei verschiedene Zeichen enthalten.
  Die übrigbleibenden $3^n - 3 - 3 \cdot 2^n$ Wörter sind die gesuchten, verschiedenen, in denen jeder Buchstabe $\{a, b, c\}$ einmal vorkommt

Aufgabe 2

(a)

$$\begin{aligned}
L_2 \cdot (L_2 - L_1) &= \{xy | x \in L_2 \wedge y \in L_2 - L_1\} && (2)\\
&= \{xy | x \in L_2 \wedge y \in L_2 \wedge y \notin L_1\} && (3)\\
&= \{xy | (x \in L_2 \wedge y \in L_2) \wedge (x \in L_2 \wedge y \notin L_1)\} && (4)\\
&= \{xy | x \in L_2 \wedge y \in L_2\} - \{xy | x \in L_2 \wedge y \in L_1\} && (5)\\
&= (L_2)^2 - L_2 \cdot L_1 && (6)
\end{aligned}$$

(b) z.Z $(\{a\}^*\{b\}^*)^* \neq (\{a, b\}^2)^*$
Beweis: wir Zeigen, dass a in $(\{a\}^*\{b\}^*)^*$ ist, aber nicht in $(\{a, b\})^2$

$$\begin{aligned}
& a = a\lambda \in \{a\}^*\lambda \subseteq \{a\}^*\{b\}^* \\
\Rightarrow \quad & a \in \{a\}^*\{b\}^*
\end{aligned}$$

Beweis für $\lambda \in \{a\}^*\{b\}^*$ analog.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & a = a\lambda \in \{\{a\}^*\{b\}^*\}\{\{a\}^*\{b\}^*\} = \{\{a\}^*\{b\}^*\}^2 \subseteq \{\{a\}^*\{b\}^*\}^* \\
\Rightarrow \quad & a \in \{\{a\}^*\{b\}^*\}^*
\end{aligned}$$

z.Z. $a \notin (\{a,\, b\})^2 = \{aa,\, ab,\, bb,\, ba\}^* = L^*$
Begründung: Das Wort a hat Länge 1. Jedes Element in L hat Länge 2. Durch Konkatenation mit beliebiger Potenz liegen in L^* Wörter mit Länge > 2 und λ mit Länge 0. Aber kein Wort mit Länge 1.
. $\square$

(c)

Aufgabe 3

(a) Behauptung: $L = \{ab\}^*$

- Zu zeigen: L ist eine Sprache: $L \subseteq \Sigma^*$
  Beweis: $\Sigma = \{a, b\} \Rightarrow \Sigma^* = \{a, b\}^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{a, b\}^i = (\bigcup_{i\in\mathbb{N},\text{ i gerade}} \{a, b\}^i) \cup (\bigcup_{i\in\mathbb{N},\text{ i ungerade}} \{a, b\}^i) \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N},\text{ i gerade}} \{a, b\}^i \subseteq \Sigma^*$
  - Zu zeigen: $L \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N},\text{ i gerade}} \{a, b\}^i$
    Beweis: $\bigcup_{i\in\mathbb{N},\text{ i gerade}} \{a, b\}^i = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{a, b\}^{2k} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\{a, b\}^2)^k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{aa, ab, ba, bb\}^k$
    $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{a, b\}^k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{aa, ab, ba, bb\}^k \Rightarrow$
- Zu zeigen: $L \neq \{\lambda\}^*$
  Beweis: $\{\lambda\}^* \overset{\text{def}}{=} \{\lambda^i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \cdots\} = \{\lambda, \lambda, \lambda, \cdots\} = \{\lambda\}$
  $L = \{ab\}^* \overset{\text{def}}{=} \{(ab)^i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{\lambda, ab, abab, ababab, \cdots\}$
  Damit ist $L \neq \{\lambda\}^*$ (da z.B. $ab \in L$, aber $ab \notin \{\lambda\}$)
- Zu zeigen: $L \neq \{a\}^*$
  Beweis: $\{a\}^* \overset{\text{def}}{=} \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$, enthält insbesondere keine Wörter, die den Buchstaben b enthalten.
  In $L = \{ab\}^* \overset{\text{def}}{=} \{(ab)^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gibt es allerdings Wörter, die b enthalten, womit $L = \{ab\}^* \neq \{a\}^*$ gelten muss.
- Zu zeigen: $L \neq \{b\}^*$
  Beweis: Analog zu $L \neq \{a\}^*$.
- Zu zeigen: $L \neq \{a, b\}^*$
  Beweis: $\{a, b\}^* \overset{\text{def}}{=} \{\lambda, a, b, aa, ba, ab, bb, \cdots\}$, insbesondere gilt $a, b \in \{a, b\}^*$.
  Dagegen ist $L = \{ab\}^* \overset{\text{def}}{=} \{(ab)^i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{\lambda, ab, abab, ababab, \cdots\}$, womit gilt $a, b \notin \{ab\}^*$.
  Daraus folgt, dass $L \neq \{a, b\}^*$ gelten muss.

(b) Behauptung: Es gibt keine nichtleere endliche Sprache $L \neq \lambda$ über dem Alphabet $\{a, b\}$, die die Bedingung $L^2 = L$ erfüllt.
Beweis: Sei L eine nichtleere endliche Sprache $L \neq \lambda$. Dann $\exists l \in L : l = \max L$. Das Wort ll muss in L^2 enthalten sein (und ist sogar das längste Wort in L^2). Sei $|l| = k \Rightarrow |ll| = 2k$. Da $k \neq 0$, ist das längste Wort in L^2 doppelt so lang wie das längste Wort in L, womit $L^2 \neq L$ ist.