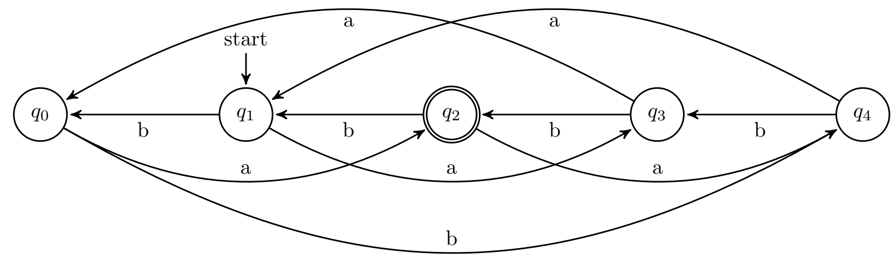
Theoretische Informatik: Blatt 3

Abgabe bis 9. Oktober 2015
Assistent: Sascha Krug, CHN D 42

Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe 7

(a) Der nachstehende endliche Automat akzeptiert nur Wörter der Sprache $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid (2 \cdot |w|_a - |w|_b + 1) \bmod 5 = 2\}$.

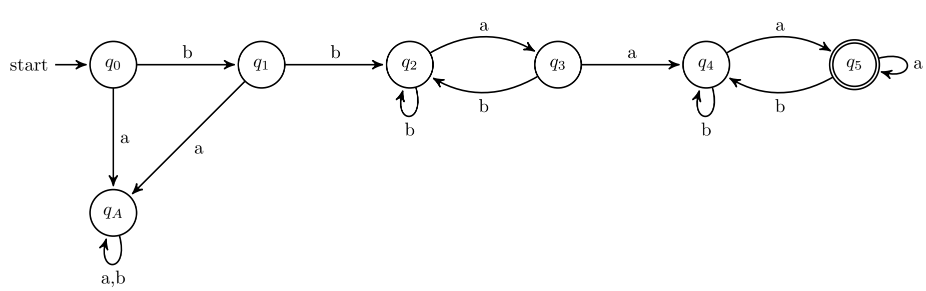


Der Automat funktioniert, weil wir für jedes a das wir einlesen 2 Zustände modulo 5 vorwärts und für jedes b einen Zustand mod 5 rückwärts gehen. Aus diesem Grund ist q_2 auch ein akzeptierter Zustand, denn er spiegelt die Rechnung wieder.

Die Klassen seiner Zustände sind:

$$\mathrm{Kl}[q_0] = \{w \in \{a, b\}^* \mid (2 \cdot |w|_a - |w|_b + 1) \bmod 5 = 0\}$$
$$\mathrm{Kl}[q_1] = \{w \in \{a, b\}^* \mid (2 \cdot |w|_a - |w|_b + 1) \bmod 5 = 1\}$$
$$\mathrm{Kl}[q_2] = \{w \in \{a, b\}^* \mid (2 \cdot |w|_a - |w|_b + 1) \bmod 5 = 2\}$$
$$\mathrm{Kl}[q_3] = \{w \in \{a, b\}^* \mid (2 \cdot |w|_a - |w|_b + 1) \bmod 5 = 3\}$$
$$\mathrm{Kl}[q_4] = \{w \in \{a, b\}^* \mid (2 \cdot |w|_a - |w|_b + 1) \bmod 5 = 4\}$$

(b) Folgender endlicher Automat akzeptiert nur Wörter der Sprache $L_2 = \{bbxa \mid x \in \{a, b\}^* \text{ und } x \text{ enthält das Teilwort } aa\}$.



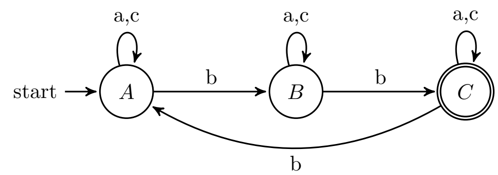
Der Automat funktioniert selbserklärend. q_A ist der Abfallknoten, gelangt der Automat einmal in diesen Zutand, wird das Wort nicht mehr akzeptiert werden.

Die Klassen seiner Zustände sind:

$$\mathrm{Kl}[q_0] = \{\lambda\}$$
$$\mathrm{Kl}[q_1] = \{b\}$$
$$\mathrm{Kl}[q_2] = \{bbx \mid x \in \{b, ab\}^*\}$$
$$\mathrm{Kl}[q_3] = \{bbxa \mid x \in \{b, ab\}^*\}$$
$$\mathrm{Kl}[q_4] = \{xayb \mid x \in \mathrm{Kl}[q_3], y \in \{a, b\}^*\} \cup \{xa \mid x \in \mathrm{Kl}[q_3]\}$$
$$\mathrm{Kl}[q_5] = \{xa^i \mid x \in \mathrm{Kl}[q_4],\ i \in \mathbb{N}\} = \{bbxa \mid x \in \{a, b\}^* \text{ und } x \text{ enthält das Teilwort } aa\}$$
$$\mathrm{Kl}[q_A] = \{yax \mid y \in \{\lambda, b\},\ x \in \{a, b\}^*\}$$

Aufgabe 8

(a) Der folgende endliche Automat akzeptiert nur Wörter w, für die $|w|_b \bmod 3 = 2$ gilt:



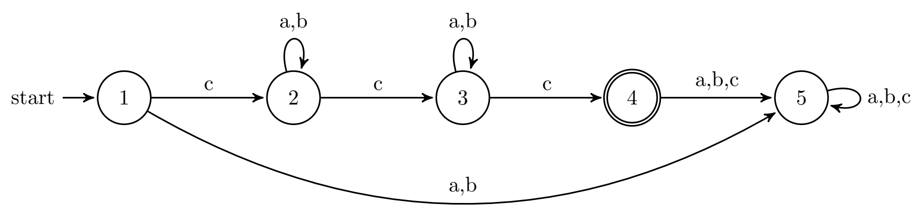
Es ist klar, dass a und c die Anzahl von $|w|_b$ nicht ändern und daher zu keiner Zustandsänderung führen. Wird ein b eingelesen "zählen" wir eine Zustand modulo 3 weiter. Für die Klassen gilt also:

Kl[A] $= \{w \mid |w|_b \bmod 3 = 0\}$

Kl[B] $= \{w \mid |w|_b \bmod 3 = 1\}$

Kl[C] $= \{w \mid |w|_b \bmod 3 = 2\}$

Der endliche Automat, der Wörter der Form $w = cxcyc$ für $x, y \in \{a, b\}^*$ akzeptiert, sieht folgendermassen aus:



Dieser Automat funktioinert selbsterklärend. Es werden am Anfang, am Ende und zwischendrin genau ein c verlangt. Alle Wörter, die diese Bedingung nicht erfüllen, landen in Kl[5].

Die Klassen sind:

Kl[1] $= \{\lambda\}$

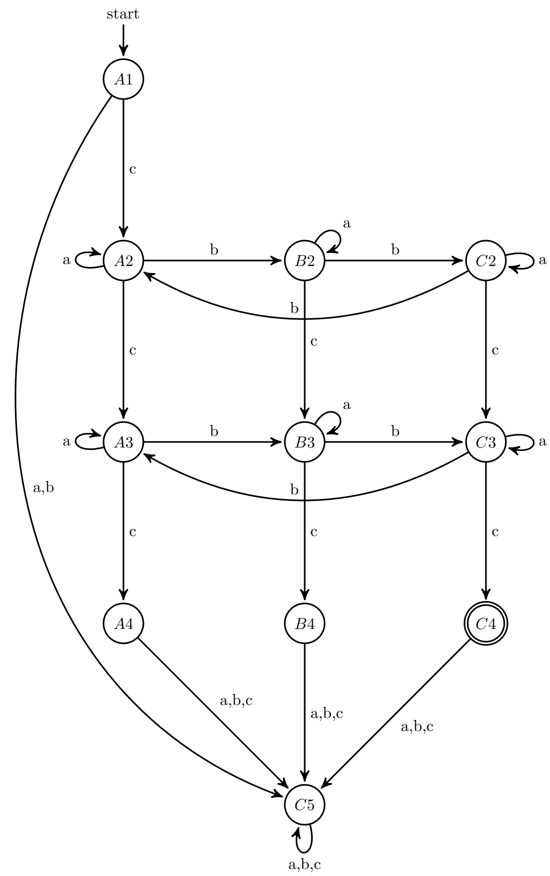
Kl[2] $= \{cx \mid x \in \{a, b\}^*\}$

Kl[3] $= \{cxcy \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$

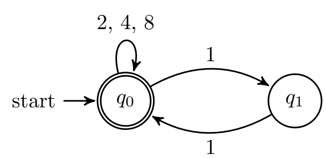
Kl[4] $= \{cxcyc \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$

Kl[5] $= \{xy \mid x \in \{a, b\}, y \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{xy \mid x \in \text{Kl}[4], y \in \{a, b, c\}^+\}$

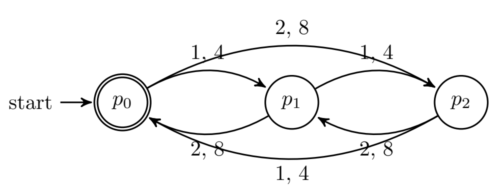
Die beiden endlichen Automaten können nach der Methode des modularen Entwurfs (Konstruktion eines Produktautomaten) zu folgendem EA kombiniert werden. (Da im resultierenden EA die Zustände B1 und C1 nie erreicht werden können, löschen wir diese. Zusätzlich können die Zustände A5, B5 und C5 in einen kombiniert werden. So bleibt der EA übersichtlich.)



(b) Wir verwenden wieder einen Produktautomaten. Automat P akzeptiert Wörter, deren Quersumme durch 2 teilbar ist. Die Ziffern werden aufsummmiert und p_i spiegelt die Summe mod 2 wieder.



Analog dazu funktioniert der Automat der Die Quersumme auf teilbarkeit durch 3 prüft



Klassen, die die Eigenschaften der Zahl w widerspiegeln:
$qs(w) := Quersumme\ von\ w$

$$\mathrm{Kl}[q_\lambda] = \{\lambda\}$$

$$\mathrm{Kl}[q_{i,j}] = \{w \in \Sigma \mid qs(w) \mod 2 = i\ ,\ qs(w) \mod 3 = j\}$$

$\Rightarrow$ Der EA ist folgendermassen definiert:

$Q = \{q_\lambda\} \cup \{q_{i_j} \mid i \in \{0,1\}\ ,\ j \in \{0,1,2\}\}$

$F = \{q_{0,j} \mid j \in \{0,1,2\}\} \cup \{q_{i_0} \mid i \in \{0,1\}\} \cup \{q_\lambda\}$

$q_{init} = q_\lambda$

$\Sigma = \{1,2,4,8\}$

$\delta =$ Siehe definition weiter unten

Definition p_λ und $p_{i,j}$:

$\delta(p_\lambda, 1) = p_{1,1}$

$\delta(p_\lambda, 2) = p_{0,2}$

$\delta(p_\lambda, 4) = p_{0,1}$

$\delta(p_\lambda, 8) = p_{0,2}$

$\delta(p_{i,j}, x) = p_{m,n}$

mit: $m = (i + x) \mod 2$

und $n = (j + x) \mod 3$

Bei der Berechnung von m und n wird x als Dezimalziffer interpretiert.

Informelle Begründung der Korrektheit:
Nur die moduli bezüglich 2 und 3 sind für den Zustand bedeutend. Darum werden 2 * 3 Zustände für {0,1} × {0,1,2} benötigt. Diese sind $q_{i,j}$ mit $i \in \{0,1\}$ und $i \in \{0,1\}$ Die Übergänge erklären sich in der Beschreibung der δ -Funktion.

Aufgabe 9

(a) $L_1 = \{0^m 1^n 0^{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
Annahme: Sei L_1 regulär. Dann gibt es einen endlichen Automaten $A = (Q,\ \Sigma,\ \delta_A,\ q_0,\ F)$, sodass $L(A) = L$. Dieser hat $|Q_0|$ Zustände. Nach dem *Pumping-Lemma* lässt sich ein w mit $|w| = n_0$ in $w = xyz$ zerlegen und

(i) $|yx| \leq n_0$

(ii) $|x| \geq 1$

(iii) $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L \quad$ oder $\quad \{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \cup L = \emptyset$

Jedes Wort w der Länge $|w| \geq n_0$ muss also eine Zerlegung besitzen, die (i), (ii), (iii) erfüllt.
Sei $W = 1^{n_0} 0^{n_0}$, also $|w| = 2 * n \geq n_0$

$$\text{(i)} \Rightarrow y = 1^l,\ x = 1^m \quad \text{mit } l,\, m \in \mathbb{N}$$
$$\text{(iii)} \Rightarrow \text{Da } w = 1^{n_0} 0^{n_0} \in L,\ \text{ist } \{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} = \{1^l\, (1^m)^k\, 0^{n_0}\} \subseteq L$$

Aber: für $k = 0$ ist $w = yz = 1^{n_0 - m} 0^{n_0} \notin L$
Wir haben einen Widerspruch, daher war die Annahme, dass L regulär ist, falsch.

(b) Wir machen einen Widerspruchsbeweis. Annahme: L ist regulär.
Dann gilt das *Pumping-Lemma* auch für L.
Betrachten wir das Wort $0^{{n_0}^2 + n_0}$, dann ist offensichtlich $|w| \geq n_0$
Für alle Zerlegungen $w = yxz$ gilt

$$y = 0^l,\ x = 0^m,\ z = 0^{{n_0}^2 + n_0 - l - m} \quad \text{mit} \quad |xy| \leq n_0 \quad \text{und} \quad |x| \geq 1$$

Weil $w = yxz = 0^{{n_0}^2+n_0} \in L$, muss $yx^kz \in L$ erfüllt sein.

Es gilt aber:

$$yx^2z = 0^l0^{2m}0^{{n_0}^2+n_0-l-m} = 0^{{n_0}^2+n_0+m} \notin L \quad ,$$

weil

$$n_0{}^2 + n_0 \leq n_0{}^2 + n_0 + m \leq n_0{}^2 + 3n_0 + 2 = (n_0+1)(n_0+2)$$

$$n_0{}^2 + n_0 + m \quad \text{hat also nicht die Form} \quad n(n+1)$$

Wir haben nun ein Widerspruch, womit die Annahme, dass L eine reguläre Sprache ist, verworfen wird.