Theoretische Informatik: Blatt 4

Abgabe bis 16. Oktober 2015
Assistent: Sascha Krug, CHN D 42

Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe 10

(a) $L = \{0^{\binom{2n}{n}} \mid n \in \mathbb{N}\}$
Wir machen einen Widerspruchsbeweis. *Annahme:* L ist regulär.
Wir betrachten die Wörter

$$0^{\binom{2\cdot 1}{1}+1}, 0^{\binom{2\cdot 2}{2}+1}, \dots$$

Das erste Wort in $L_{0^{\binom{2m}{m}+1}} = \{y \mid 0^{\binom{2m}{m}+1} y \in L\}$ ist $0^{\binom{2(m+1)}{m+1} - (\binom{2m}{m}+1)}$
Nach *Satz 3.1* ist die Kolmogorov-Komplexität $K(y) \leq 1 + c$.
Es gibt unendlich viele Wörter $0^{\binom{2(m+1)}{m+1} - (\binom{2m}{m}+1)}$, da der Term mit m wächst, aber nur endlich viele Programme mit Länge $\leq 1 + c$.
Also haben wir einen Widerspruch $\Rightarrow$ die Annahme war falsch $\Rightarrow$ L ist nicht regulär.

(b) Wir machen einen Widerspruchsbeweis. *Annahme:* L ist regulär. $\Rightarrow$ Es gibt einen EA $A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_o, F)$ mit $L(A) = L$. Sei $m = |Q|$
Betrachten wir die Wörter

$$\lambda, b, b^2, \cdots, b^m$$

Das sind mehr Wörter, als A Zustände hat. $\Rightarrow \exists i, j \;\; j \neq i$, sodass $\hat{d}(q_0, b^i) = \hat{d}(q_0, b^j)$
Also gilt nach *Lemma 3.3*

$$b^i z \in L \leftrightarrow b^j z \in L \quad \forall z \in \{0,1\}^*$$

Sei $z = a^{2i}$, dann gilt $b^i z = b^i a^{2i} \in L$ aber für $i \neq j$, $\; b^j a^{2i} \notin L$
Also haben wir einen Widerspruch $\Rightarrow$ die Annahme war falsch $\Rightarrow$ L ist nicht regulär.

Aufgabe 11

(a) Wir machen einen Widerspruchsbeweis. *Annahme:* L ist regulär. Dann gilt das *Pumping-Lemma* für L.
Wir betrachten nun das Wort

$$w = 0^{n_0} 1^{n_0}$$

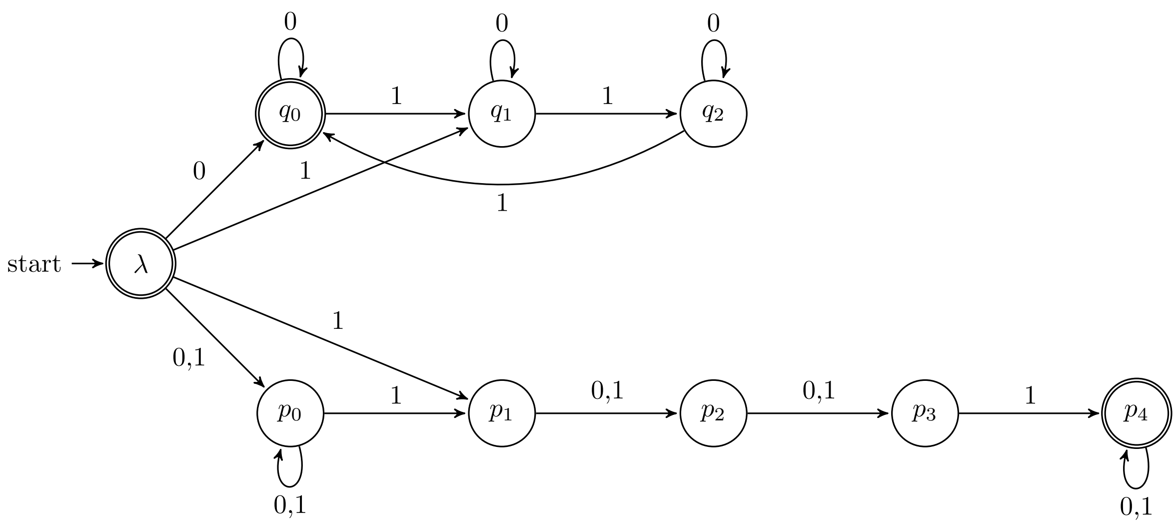
Offensichtlich gilt $|w| \leq n_0$.
Daher gilt für die Zerlegung $w = yxz$ nach (i) und (ii), dass $y = 0^l$, $x = 0^m$, $l + m \leq n_0$.
Weil $w = yxz = 0^{n_0} 1^{n_0} \notin L$ müssen nach (iii) auch alle $w \in \{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \notin L$ sein. Wenn wir nun das Wort

$$w = yx^2 z = 0^l 0^{2m} z$$

betrachten, dann hat sich die Anzahl der Nullen erhöht, die Anzahl der Einsen ist jedoch gleich geblieben.
Dadurch ist jedoch nach Definition $w \in L$.
Es gibt ein Widerspruch $\Rightarrow$ Die Annahme war falsch $\Rightarrow$ L ist nicht regulär.

Aufgabe 12

(a) Ein NEA für die Sprache $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid |x|_1 \bmod 3 = 0$ oder x enthält ein Teilwort $1y1$ für $y \in \{0,1\}^2\}$ sieht so aus:



Die Idee des Entwurfs ist, dass der NEA aus zwei Teil-Automaten besteht, die je folgende Bedingungen prüfen:

$$|x|_1 \bmod 3 = 0 \tag{1}$$

$$x \text{ enthält ein Teilwort } 1y1 \text{ für } y \in \{0,1\}^2\} \tag{2}$$

Der Automat, der Bedingung (1) überprüft, ist durch die Zustände $\{q_0, q_1, q_2\}$ gegeben und derjenge, der (2) überprüft, durch die Zustände $\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

Im Startzustand λ kann sich der NEA nun entscheiden, ob er Bedingung (1) oder (2) überprüft.

(b) Die Übertragungsfunktion δ' des äquivalenten deterministischen Automaten lautet wie folgt:

δ'	a	b
$p' = \{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$
$q' = \{p, q\}$	$\{p, q, r\}$	$\{p, r\}$
$r' = \{p, r\}$	$\{p, q, s\}$	$\{p\}$
$s' = \{p, s\}$	$\{p, s\}$	$\{p, r\}$
$t' = \{p, q, r\}$	$\{p, r, s\}$	$\{p, r\}$
$v' = \{p, q, s\}$	$\{p, r, s\}$	$\{p, r, s\}$
$u' = \{p, r, s\}$	$\{p, s\}$	$\{p, s\}$

Daraus folgt der deterministische Automat: