Theoretische Informatik: Selbststudium - Blatt 1

Abgabe bis 23. Oktober 2015
Assistent: Sascha Krug, CHN D 42

Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe S1

(a) Vermutung: $\mathrm{L}(\mathrm{G}_1) = \{avawa \mid v \in \{b\}^+, w \in \{ab\}^*\}$

Beweis: Die Grammatik beginnt im Startsymbol S, für das es nur eine Ableitungsregel gibt: $S \to aXaYa$. Da das Wort $aXaYa$ immer noch die Nichtterminale X und Y enthält, müssen wir weiter ableiten. Es gibt in P_1 keine Ableitungsregel $QaR \to_{G_1} S$ für beliebige $Q, R, S \in (\Sigma_N \cup \Sigma_T)^*$, womit jedes Wort in der von der Grammatik erzeugten Sprache die Form $avawa$ aufweisen muss, für noch zu bestimmende v und u.

Im Folgenden beweisen wir, dass $v \in \{b\}^+$ und $w \in \{ab\}^*$.

1. $v \in \{b\}^+$: Wir haben $aXaYa$ gegeben. Die Ableitungsregeln, die X betreffen, sind $\{X \to bX, X \to b\}$. Wir zeigen mit Induktion, dass man mit X und den beiden Ableitungsregel für X ausschliesslich die Wörter $v \in \{b\}^+ = \{b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ generieren kann. Sei n die Anzahl angewandter Ableitungsregeln.

   (i) *Induktionsanfang:*
   Sei $n = 1$. Man kann mit einer Ableitung aus X entweder das Wort bX oder b herleiten (nicht aber λ).

   (ii) *Induktionsschritt:*
   $n \to n + 1$: Es gibt zwei Fälle:
   Das Wort endet auf X: Man kann wieder bX oder b herleiten.
   Das Wort endet auf b: Das Wort kann nicht mehr weiter abgeleitet werden und man erhält nach dem n-ten Ableitungsschritt das Wort b^n.

2. $w \in \{ab\}^*$: Wir haben $aXaYa$ gegeben. Die Ableitungsregeln, die Y betreffen, sind $\{Y \to abY, Y \to ab, Y \to \lambda\}$. Mit Induktion kann man analog zu 1. beweisen, dass man mit Y und den drei Ableitungsregel für Y ausschliesslich die Wörter $w \in \{ab\}^* = \{(ab)^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ generieren kann. Der einzige Unterschied ist, dass man durch die dritte Ableitungsregel $Y \to \lambda$ auch das leere Wort herleiten kann.

(b) Man beginnt in S. Für S gibt es nur eine Ableitungsregel $S \to 0X0$. Wir gehen also von $0X0$ aus. Für X gibt es nun die drei Ableitungsregeln $\{X \to AX, X \to BX, X \to Y\}$. Nun können wir beliebig viele A oder B vor das X schreiben, bevor wir X durch Y ersetzen.

Damit erhalten wir das Wort $0WY0$ für $W \in \{A, B\}^*$.

Jetzt können wir sukzessive die Ableitungsregeln $\{AY \to Y0, BY \to Y1\}$ anwenden, bis keine A oder B mehr im Wort enthalten sind.

Dann können wir noch einmal die letzte Ableitungsregel $\{0Y \to 0\}$ anwenden.

So entsteht das Wort $0w0$ für $w \in \{0,1\}^*$, denn die Anwendung von $\{AY \to Y0, BY \to Y1\}$ bewirkt schlussendlich, dass jedes A durch eine 0 und jedes B durch eine 1 ersetzt wird und $\{0Y \to 0\}$ löscht das Y am Ende.

Eine äquivalente reguläre Grammatik ist $G_2' = (\{S, X\}, \{0, 1\}, P_2', S)$ mit

$$P_2' = \{S \to 0X0, X \to \lambda, X \to 0, X \to 1, X \to X0, X \to X1\}.$$

Der Entwurf ist praktisch selbsterklärend. Wir starten in S, gehen über zu $0X0$ und können dann wählen, ob wir X zu λ, 0 oder 1 ableiten oder 0 bzw. 1 schreiben und danach weiter Buchstaben aus $\{\lambda, 0, 1\}$ hinzufügen wollen oder nicht (indem wir Regel $X \to X0$ oder $X \to X1$ anwenden). Damit generiert die Grammatik G_2' auch die Wörter $0w0$ für $w \in \{0,1\}^*$.

Aufgabe S2

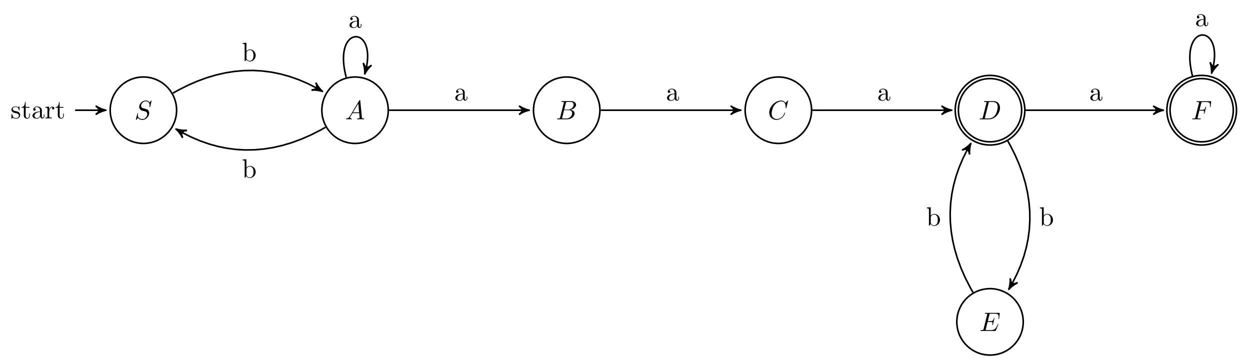
Die Sprache, die von G erzeugt wird, ist

$$\{vwaaaxy \mid v = b^{2k+1} \text{ für } k \in \mathbb{N}_0, \quad w, y \in \{a\}^*, \quad x \in \{bb\}^*\}.$$

Eine äquivalente reguläre Grammatik ist also $G' = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{a, b\}, P', S)$ mit

$$P' = \{S \to bA, A \to bS, A \to aA, A \to aB, B \to aC, C \to aD,$$
$$D \to bE, E \to bD, D \to \lambda, D \to aF, F \to aF, F \to \lambda\}.$$

Der NEA, der die Sprache $L(G)$ erzeugt, ist damit:

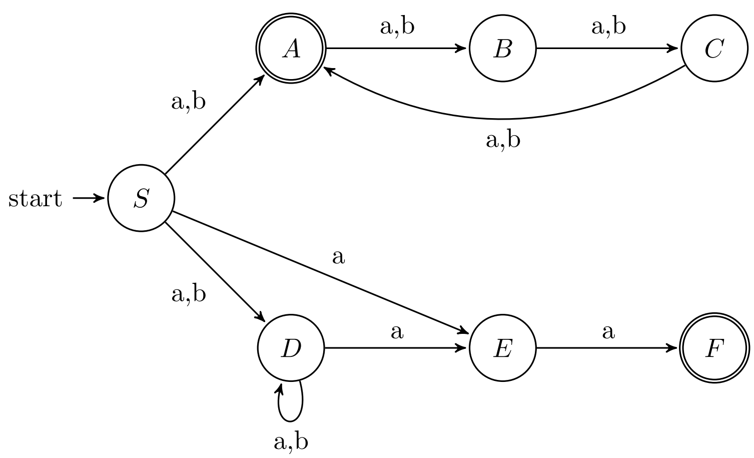


Aufgabe S3

(a) Eine reguläre Grammatik für die Sprache L_1 ist $G_1 = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{a, b\}, P_1, S)$ mit

$$P_1 = \{S \to aA, S \to bA, A \to aB, A \to bB, B \to aC, B \to bC, C \to aA, C \to bA, B \to \lambda,$$
$$S \to aD, S \to bD, S \to aE, D \to aD, D \to bD, D \to aE, E \to aF, F \to \lambda\}.$$

Um den Entwurf zu begründen ist es einfacher, über den äquivalenten NEA zu argumentieren, der sich leicht von den Regeln ablesen lässt:

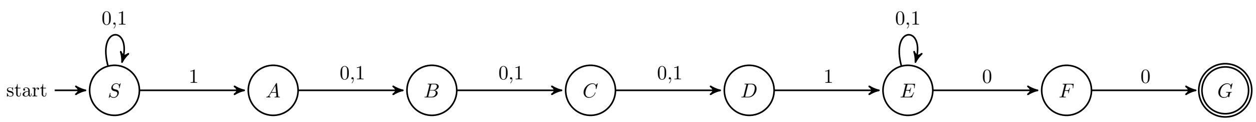


Der NEA wählt zuerst im Startknoten S, ob er die Bedingung $(|x|_a + |x|_b) \bmod 3 = 1$ überprüfen will (Knoten A, B, C) oder die Bedingung x endet mit aa (Knoten D, E, F). Dadurch wird L_1 nichtdeterministisch erzeugt und weil der NEA äquivalent zur Grammatik G_1 ist, ist $L_1 = L(G_1)$.

(b) Eine reguläre Grammatik für die Sprache L_2 ist $G_2 = (\{S, A, B, C, D, E, F, G\}, \{0, 1\}, P_2, S)$ mit

$$\begin{aligned} P_2 = \{ & S \to 0S, S \to 1S, S \to 1A, A \to 0B, A \to 1B, B \to 0C, B \to 1C, C \to 0D, \\ & C \to 1D, D \to 1E, E \to 0E, E \to 1E, E \to 0F, F \to 0G, G \to \lambda\}. \end{aligned}$$

Wir begründen den Entwurf wieder über den äquivalenten NEA:



Es ist klar, dass der NEA und die Grammatik G_2 äquivalent sind und dass der NEA L_2 erzeugt. Also ist $L_2 = L(G_2)$.

(c) Eine allgemeine Grammatik für die Sprache L_3 ist $G_3 = (\{S, A, X, Y, Z\}, \{0, 1, 2\}, P_3, S)$ mit

$$\begin{aligned} P_3 = \{ & S \to XYZ, Z \to A2Z, 2A \to A2, YA \to A1Y, 1A \to A1, XA \to 0X, \\ & Z \to \lambda, Y \to \lambda, X \to \lambda\}. \end{aligned}$$

Die Idee ist, dass, wenn vor dem Z eine 2 eingefügt wird, immer auch eine 1 vor dem Y und eine 0 vor dem X eingefügt wird. Dafür sorgt ein temporäres A, dass von hinten nach vorn durchgeschoben wird. Die letzten drei Regeln in P_3 sind dann dafür da, X, Y und Z aus dem Wort zu entfernen und das Wort $0^0 1^0 2^0 = \lambda$ zu ermöglichen.

Die Ableitung des Wortes 000111222 ist damit:

$$\begin{aligned} S & \Rightarrow_{G_3} XYZ \Rightarrow_{G_3} XYA2Z \Rightarrow_{G_3} XA1Y2Z \\ & \Rightarrow_{G_3} 0X1Y2Z \Rightarrow_{G_3} 0X1Y2A2Z \Rightarrow_{G_3} 0X1YA22Z \Rightarrow_{G_3} 0X1A1Y22Z \Rightarrow_{G_3} 0XA11Y22Z \\ & \Rightarrow_{G_3} 00X11Y22Z \Rightarrow_{G_3} 00X11Y22A2Z \Rightarrow_{G_3}^2 00X11YA222Z \Rightarrow_{G_3} 00X11A1Y222Z \Rightarrow_{G_3}^2 00XA111Y222Z \\ & \Rightarrow_{G_3} 000X111Y222Z \Rightarrow_{G_3} 000111222 \end{aligned}$$