Theoretische Informatik: Blatt 1

Abgabe bis 25. September 2015

Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe 1

(a) Für jede Länge 1 bis m schauen wir die Anzahl Möglichkeiten an, ein Teilwort zu bilden.
Bei Länge 1 können wir m Teilwörter bilden, die je bei den Positionen 1 bis m beginnen.
Bei Länge 2 können wir $m-1$ Teilwörter bilden, die je bei den Positionen 1 bis $m-1$ beginnen.

$$\vdots$$

Bei Länge $m-1$ können wir zwei Teilwörter bilden, die je bei den Positionen 1 und 2 beginnen.
Bei Länge m können wir ein Teilwort bilden, das bei Position 1 beginnt.
Es gibt also höchstens

$$1+2+\cdots+m=\sum_{i=1}^{m} i$$

verschiedene Teilwörter, falls keine von ihnen gleich sind.

(b) Fallunterschiedung:

- $n=1$: 0 Wörter
- $n=2$: 0 Wörter
- $n=3$: 3! verschiedene Wörter
- $n>3$:
  Es gibt insgesamt 3^n viele verschiedene Wörter.
  Es gibt genau 3 Wörter $\{a^n, b^n, c^n\}$ die genau einen Buchstaben enthalten.
  Es gibt $3 \cdot 2^n$ viele Wörter, die genau zwei verschiedene Zeichen enthalten.
  Die übrigbleibenden $3^n-3-3{\cdot}2^n$ Wörter sind die gesuchten, verschiedenen, in denen jeder Buchstabe $\{a, b, c\}$ einmal vorkommt.

Aufgabe 2

(a) Richtig.
Zunächst gilt $(\{a, b\}^*)^2 = \{a, b\}^*$, da jedes Element in $\{a, b\}^*$, mit sich selbst konkateniert (was in einer unendlichen Menge möglich ist), in der Menge $(\{a, b\}^*)^2$ enthalten ist und für ein $x^2 \in (\{a, b\}^*)^2$ gilt, dass $x \in \{a, b\}^*$, also auch wieder $x^2 \in \{a, b\}^*$ (weil $\{a, b\}^*$ unendlich ist).
" $\supseteq$ " : $(\{a\}^*\{b\}^*)^* \overset{\text{def}}{=} (\{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}\{b^j \mid j \in \mathbb{N}\})^*$. Setzt man einmal $i=1$ und $j=0$ und einmal $i=0$ und $j=1$ folgt daraus: $(\{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}\{b^j \mid j \in \mathbb{N}\})^* \supseteq (\{a\}\{\lambda\} \cup \{\lambda\}\{b\})^* = \{a, b\}^*$
" $\subseteq$ " :

(b) Falsch.
Zu zeigen: $(\{a\}^*\{b\}^*)^* \neq (\{a, b\}^2)^*$
Beweis: Wir zeigen, dass a in $(\{a\}^*\{b\}^*)^*$ ist, aber nicht in $(\{a, b\})^2$.

$$\begin{aligned} & a = a\lambda \in \{a\}^*\lambda \subseteq \{a\}^*\{b\}^* \\ \Rightarrow\quad & a \in \{a\}^*\{b\}^* \end{aligned}$$

Beweis für $\lambda \in \{a\}^*\{b\}^*$ analog.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & a = a\lambda \in \{\{a\}^*\{b\}^*\}\{\{a\}^*\{b\}^*\} = \{\{a\}^*\{b\}^*\}^2 \subseteq \{\{a\}^*\{b\}^*\}^* \\ \Rightarrow\quad & a \in \{\{a\}^*\{b\}^*\}^* \end{aligned}$$

Zu zeigen: $a \notin (\{a, b\})^2 = \{aa, ab, bb, ba\}^* = L^*$
Begründung: Das Wort a hat Länge 1. Jedes Element in L hat Länge 2. Durch Konkatenation mit beliebiger Potenz liegen in L^* Wörter mit Länge > 2 und λ mit Länge 0. Aber kein Wort mit Länge 1.

(c) Richtig.

$$\begin{aligned}
L_2 \cdot (L_2 - L_1) &= \{xy|x \in L_2 \wedge y \in L_2 - L_1\} && \text{(Def. Konkatenation)}\\
&= \{xy|x \in L_2 \wedge y \in L_2 \wedge y \notin L_1\} && \text{(Def. Subtraktion)}\\
&= \{xy|(x \in L_2 \wedge y \in L_2) \wedge (x \in L_2 \wedge y \notin L_1)\} && (A = A \wedge A)\\
&= \{xy|x \in L_2 \wedge y \in L_2\} - \{xy|x \in L_2 \wedge y \in L_1\} && \text{(Def. Subtraktion)}\\
&= (L_2)^2 - L_2 \cdot L_1 && \text{(Def. Konkatenation)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Behauptung: $L = \{ab\}^*$

- Zu zeigen: L ist eine Sprache: $L \subseteq \Sigma^*$
  Beweis:

  $$\Sigma = \{a,b\} \Rightarrow \Sigma^* = \{a,b\}^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{a,b\}^i = \bigcup_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ \text{i gerade}}} \{a,b\}^i \cup \bigcup_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ \text{i ungerade}}} \{a,b\}^i \Rightarrow \bigcup_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ \text{i gerade}}} \{a,b\}^i \subseteq \Sigma^*$$

  - Zu zeigen bleibt: $L \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N},\ \text{i gerade}} \{a,b\}^i$
    Beweis:

    $$\bigcup_{i\in\mathbb{N},\ \text{i gerade}} \{a,b\}^i = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{a,b\}^{2k} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\{a,b\}^2)^k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{aa,ab,ba,bb\}^k$$
    $$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{ab\}^k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{aa,ab,ba,bb\}^k \Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{ab\}^k \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N},\ \text{i gerade}} \{a,b\}^i$$

  $\Rightarrow L \subseteq \Sigma^*$

- Zu zeigen: $L^i = L \quad \forall i \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$
  Für alle $i \geq 1$

  $$L^i = \{x \,|\, x = v_1 \cdot v_2 \cdots v_i \wedge v_j \in L\ \forall j\} \tag{1}$$
  $$\Rightarrow L^i = \{x \,|\, x = (ab)^{k_1} \cdot (ab)^{k_2} \cdots (ab)^{k_i}\} \tag{2}$$
  $$\Rightarrow L^i = \{x \,|\, x = (ab)^{(k_1+k_2+\cdots+k_i)} = (ab)^{k'}\} = \{ab\}^* = L \tag{3}$$

  gilt, da L nur ein Zeichen ab enthält, $k' = k_1 + k_2 + \cdots + k_i$ und k' beliebig in $\mathbb{N}$ sein kann.

- Zu zeigen: $L \neq \{\lambda\}^*$
  Beweis: $\{\lambda\}^* \overset{\text{def}}{=} \{\lambda^i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \cdots\} = \{\lambda, \lambda, \lambda, \cdots\} = \{\lambda\}$
  $L = \{ab\}^* \overset{\text{def}}{=} \{(ab)^i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{\lambda, ab, abab, ababab, \cdots\}$
  Damit ist $L \neq \{\lambda\}^*$ (da z.B. $ab \in L$, aber $ab \notin \{\lambda\}$)

- Zu zeigen: $L \neq \{a\}^*$
  Beweis: $\{a\}^* \overset{\text{def}}{=} \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$, enthält insbesondere keine Wörter, die den Buchstaben b enthalten.
  In $L = \{ab\}^* \overset{\text{def}}{=} \{(ab)^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gibt es allerdings Wörter, die b enthalten, womit $L = \{ab\}^* \neq \{a\}^*$ gelten muss.

- Zu zeigen: $L \neq \{b\}^*$
  Beweis: Analog zu $L \neq \{a\}^*$.

- Zu zeigen: $L \neq \{a,b\}^*$
  Beweis: $\{a,b\}^* \overset{\text{def}}{=} \{\lambda, a, b, aa, ba, ab, bb, \cdots\}$, insbesondere gilt $a, b \in \{a,b\}^*$.
  Dagegen ist $L = \{ab\}^* \overset{\text{def}}{=} \{(ab)^i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{\lambda, ab, abab, ababab, \cdots\}$, womit gilt $a, b \notin \{ab\}^*$.
  Daraus folgt, dass $L \neq \{a,b\}^*$ gelten muss.

(b) Behauptung: Es gibt keine nichtleere endliche Sprache $L \neq \lambda$ über dem Alphabet $\{a,b\}$, die die Bedingung $L^2 = L$ erfüllt.
Beweis: Sei L eine nichtleere endliche Sprache $L \neq \lambda$. Dann $\exists l \in L : l = \max L$. Das Wort ll muss in L^2 enthalten sein (und ist sogar das längste Wort in L^2). Sei $|l| = k \Rightarrow |ll| = 2k$. Da $k \neq 0$, ist das längste Wort in L^2 doppelt so lang wie das längste Wort in L, womit $L^2 \neq L$ ist.