

Theoretische Informatik: Blatt 7

Abgabe bis 13. November 2015
Assistent: Sacha Krug, CHN D 42

Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe 19

Aufgabe 20

(a) $e(n) = 2^n$

Wir konstruieren eine 2-Band Turingmaschine M , wobei *Band 0* das Eingabeband und *Bänder 1–2* die Arbeitsbänder sind. M bekommt als Eingabe das Wort 0^n auf *Band 0*. Zu Beginn schreibt M eine 0 auf *Band 1*. Solange der Lesekopf des Eingabebandes nicht $\$$ liest:

1. Gehe auf *Band 1* nach links bis \dagger .
2. Gehe auf *Band 2* nach links bis \dagger
3. Lies Zeichen auf *Band 1*. Schreibe für jede gelesene 0 auf *Band 1* 00 auf *Band 2*. Für ein \sqcup schreibe ein \sqcup .
4. Gehe auf beiden Bändern nach links und kopiere Inhalt von *Band 2* auf *Band 1* einschließlich bis Zeichen \sqcup .
5. Rücke mit Lesekopf nach rechts.

Das Ergebnis steht dann auf *Band 2* bis zum ersten \sqcup .

Auf diese Art generieren wir 2^n Nullen. Für n Nullen der Eingabe lesen wir pro Schritt 2^i Nullen. Das Schreiben geschieht jeweils in $\mathcal{O}(1)$.

$$\sum_{i=1}^n 2^i = 2^{n+1} - 2 \in \mathcal{O}(2^n)$$

Folglich ist $e(n)$ zeitkonstruierbar.

(b) $f(n) = \text{fib}_n$

Wir konstruieren eine 3-Band Turingmaschine M , wobei *Band 0* das Eingabeband und *Bänder 1–3* die Arbeitsbänder sind. M bekommt als Eingabe das Wort $w = 0^n$ auf *Band 0*. Wir unterscheiden drei Eingaben w .

Fall 1: $w = \lambda$.

In diesem Fall ist $n = 0$. M schreibt $0^{\text{fib}_0} = \lambda$ auf

Fall 2: $w = 0$.

In diesem Fall ist $n = 1$. M schreibt $0^{\text{fib}_1} = 0$ auf *Band 1* und hält.

Fall 3: $|w| = n, n \geq 2$. Der Lesekopf auf *Band 0* liegt auf der zweiten 0 und M liest auf *Band 0* von links nach rechts. Für die erste gelesene 0 schreibt M eine 0 auf *Band 2*. Für jede weitere gelesene 0 führt M Schritte 1.–3. aus, bis $\$$ gelesen wird. Dann ist auf *Band 1* das Ergebnis 0^{fib_n} (und auf *Band 2* $0^{\text{fib}_{n-1}}$ und auf *Band 3* $0^{\text{fib}_{n-2}}$).

1. M überschreibt *Band 3* mit dem Inhalt von *Band 2* ($\text{fib}_{i-2} \leftarrow \text{fib}_{i-1}$).
2. M überschreibt *Band 2* mit dem Inhalt von *Band 1* ($\text{fib}_{i-1} \leftarrow \text{fib}_i$).
3. M schreibt den Inhalt von *Band 3* in *Band 1* (konkateniert also die Nullen auf *Band 1* mit den Nullen von *Band 3*) ($\text{fib}_i \leftarrow \text{fib}_{i-1} + \text{fib}_{i-2}$).

In den Fällen 1 und 2 ist die Laufzeit konstant, also ist $f(n) \in \mathcal{O}(1)$. Im Fall 3 schreiben wir bei der i -ten Ausführung, $i \leq n - 2$ (weil wir auf der zweiten 0 starten), fib_{i-2} Nullen auf *Band 3*, fib_{i-1}

Nullen auf *Band 2* und fib_{i-2} Nullen auf *Band 1*, also pro Schritt $2fib_{i-2} + fib_{i-1} \leq 3fib_{i-1}$ Nullen. Insgesamt ergibt das also

$$\begin{aligned}
 3 \sum_{i=2}^n fib_{i-1} &= 3 \sum_{i=1}^{n-1} fib_i && \text{(Indexverschiebung)} \\
 &= 3 \sum_{i=0}^{n-2} fib_i && (fib_0 = 0) \\
 &= 3(fib_n - 1). && \left(\sum_{i=0}^n fib_i = fib_{n+2} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

$3(fib_n - 1) = 3fib_n - 1 \in \mathcal{O}(fib_n)$. Damit ist $f(n)$ zeitkonstruierbar.

Aufgabe 21

Wir wissen: $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und f und g sind beide platzkonstruierbar.

\Rightarrow Es gibt 1-Band-Turingmaschinen F und G , so dass

$$\begin{aligned}
 \text{Space}_F(n_1) &\leq s_1(n_1) \\
 \text{Space}_G(n_2) &\leq s_2(n_2)
 \end{aligned}
 \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$$

und für jede Eingabe 0^{n_1} generiert F das Wort $0^{s_1(n_1)}$ auf ihrem Arbeitsband und hält in Zustand q_{accept} .
 0^{n_2} generiert G das Wort $0^{s_2(n_2)}$

Sei nun H eine 1-Band-Turingmaschine mit Eingabe mit Arbeitsalphabet $\Gamma_F \times \Gamma_G \cup \Gamma_F \cup \Gamma_G$ und Eingabe 0^n .

H simuliert nun die Arbeit von F auf folgende Weise:

Ist der Lesekopf des Arbeitsbandes auf dem Symbol $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, simuliert H F so als würde F α lesen. Schreibt F ein neues Zeichen α' , schreibt H $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta \end{pmatrix}$ auf das Band.

Sobald F gehalten hat, fährt H mit Eingabe- und Arbeitsbandkopf nach links auf \dagger .

Anschließend simuliert H , G auf gleiche Art wie F .

Für $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ wird β gelesen, und für β' wird an der gleichen Stelle $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta' \end{pmatrix}$ geschrieben.

H wandelt nun die das Band von der Form

$$\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schrittweise um in 0^l , wie folgt:

1. Ist Zeichen der Form $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ersetze durch 0 und ersetze erstes \dagger durch eine 0 .
2. Ist Zeichen der Form $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ \dagger \end{pmatrix}$ ersetze mit 0 .

Wiederhole Schritte bis von links zeichen \dagger gelesen wird. Dann akzeptiere.

Es steht nun genau $s_1(n) + s_2(n) =: s_3(n)$ auf dem Band und der benutzte Platze $\text{Space}_H = \max s_1(n), s_2(n) \leq s_1(n) + s_2(n) = s_3(n)$.

$\Rightarrow H$ ist platzkonstruierbar.