



## Plano Aula 25 e 26

(cont... Variáveis Aleatórias)

### Vetores aleatórios (capítulo 8, Livro Bussab e Morettin)

Estudamos agora o comportamento de mais de uma variável aleatória,  $X, Y, Z, \dots$

#### 1. O caso de duas variáveis $X$ e $Y$ discretas

**Definição vetor aleatório discreto:** denotamos  $(X, Y)$  um vetor aleatório discreto, em que  $X$  e  $Y$  são v.a. discretas definidas no mesmo espaço amostral  $S$  de um experimento aleatório  $E$ , assumindo particulares pares de valores  $(x, y)$ .

**Exemplo 1:** Em uma pesquisa de opinião com *toda uma população*, estamos interessados na opinião quanto ao desempenho do atual governo, nas categorias péssimo, ruim, regular, bom e ótimo ( $Y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ), em relação ao fato de o(a) respondente não ter cursado escola pública ou ter cursado ( $X \in \{0, 1\}$ ). Ou quanto aos anos de estudo ( $Z \in \{1, 2, \dots\}$ ).

\* Será que a opinião quanto ao desempenho do atual governo ( $Y$ ) é o mesmo para os que não estudaram em escola pública ou estudaram ( $X$ )? E em relação a escolaridade ( $Z$ )?

\* A relação entre  $X$  e  $Y$  tende a ser direta ou indireta (inversa)? E entre  $Z$  e  $Y$ ?

a. Distribuição conjunta (seção 8.1, Livro Bussab e Morettin)

**Definição Função massa de probabilidade conjunta:** Seja  $(X, Y)$  um vetor aleatório discreto, a f.m.p. conjunta  $p(x, y)$  é definida para cada par  $(x, y)$  por

$$p(x, y) = P([X = x] \cap [Y = y]).$$

- *propriedades:* (1)  $0 \leq p(x, y) \leq 1$ ; (2)  $\sum_x \sum_y p(x, y) = 1$ .

b. Distribuições Marginais (seção 8.2, Livro Bussab e Morettin)

**Definição Funções massa de probabilidade marginais:** Seja  $(X, Y)$  um vetor aleatório discreto, as f.m.p. marginais de  $X$  e  $Y$  são dadas respectivamente por

$$p(x) = \sum_y p(x, y) \text{ e } p(y) = \sum_x p(x, y).$$

- $p(x)$  e  $p(y)$  seguem as mesmas propriedades de uma f.m.p.

#### 2. O caso de duas variáveis $X$ e $Y$ contínuas (seção 8.5, Livro Bussab e Morettin)

**Definição vetor aleatório contínuo:** denotamos  $(X, Y)$  um vetor aleatório contínuo, onde  $X$  e  $Y$  são v.a. contínuas definidas no mesmo espaço amostral  $S$  de um experimento aleatório  $E$ , assumindo particulares pares de valores  $\{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ .

**Exemplo 2:** Após a adoção do atendimento em uma rede de lanchonetes, os administradores estão interessados em estudar a relação entre a proporção de tempo em que o caixa está ocupado ao longo do dia ( $W$ ) com a proporção de tempo em que o terminal de autoatendimento está em uso ( $Z$ ).

\* A proporção de tempo em que o terminal de autoatendimento está em uso ( $W$ ) pode estar relacionada com a proporção de tempo que o caixa está atendendo ( $Z$ )?

\* A relação entre  $Z$  e  $W$  tende a ser direta ou indireta (inversa)? Linear?



a. Distribuição conjunta (pág. 225, seção 8.5, Livro Bussab e Morettin)

Definição **Função densidade de probabilidade conjunta**: Seja  $(X, Y)$  um vetor aleatório contínuo, denominamos  $f(x, y)$  a f.d.p. conjunta de  $X$  e  $Y$  se

$$P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy.$$

- *propriedades*: (1)  $f(x, y) > 0$ ; (2)  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$ .

b. Distribuições marginais (pág. 227, seção 8.5, Livro Bussab e Morettin)

Definição **Funções densidade de probabilidade marginais**: Seja  $(X, Y)$  um vetor aleatório contínuo, as f.d.p. marginais de  $X$  e  $Y$  são dadas respectivamente por

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \text{ e } f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

- $f(x)$  e  $f(y)$  seguem as mesmas propriedades de uma f.d.p.

### 3. Variáveis aleatórias independentes

Sabemos que dois conjuntos  $A$  e  $B$ , definidos no mesmo espaço amostral  $S$  de um experimento aleatório  $E$ , são independentes se e somente se  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ . Para v.a. temos

Definição **Variáveis aleatórias independentes**: Duas v.a. são independentes se para cada par de valores  $x$  e  $y$ , temos

$$p(x, y) = p(x) \times p(y), \text{ se } (X, Y) \text{ é um vetor aleatório discreto,}$$

ou

$$f(x, y) = f(x) \times f(y), \text{ se } (X, Y) \text{ é um vetor aleatório contínuo.}$$

### 4. Covariância e correlação (seção 8.4, Livro Bussab e Morettin)

- **Funções de variáveis aleatórias** (seção 8.3, Livro Bussab e Morettin)
  - Se temos interesse na v.a.  $Z = X + Y$ , como calcular  $E(Z) = E(X + Y)$  e  $Var(Z) = Var(X + Y)$ ?
  - ou  $W = XY$ , qual a  $E(W) = E(XY)$  e  $Var(XY)$ ?
- Como medir a dependência entre  $X$  e  $Y$ ?

#### Covariância

Definição **covariância**: Sejam  $X$  e  $Y$  duas v.a., se  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $V(X)$  e  $V(Y)$  existem e são finitas, então a covariância entre  $X$  e  $Y$  é dada por

$$Cov(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$$

, ou alternativamente

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E(X)E(Y).$$

- *Proposições*:
  - $-\infty \leq Cov(X, Y) \leq \infty$ ;
  - $Cov(X, X) = E[(X - EX)(X - EX)] = E[(X - EX)^2] = Var(X)$ ;
  - $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$ , para  $a$  e  $b$  constantes;
  - $Cov(X, a) = 0$ ;
  - $Cov(X + Y) = Cov(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$ ;
  - se  $X$  e  $Y$  são *independentes*,  $Cov(X, Y) = 0$  pois  $E(XY) = E(X)E(Y)$ ;



- também se  $X$  e  $Y$  são *independentes*,  $Var(X + Y) = Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y)$ ;
- $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$ , para  $Z$  outra v.a..

**ATENÇÃO!!!** Se  $Cov(X, Y) = 0$  não significa que  $X$  e  $Y$  são independentes, dizemos que  $X$  e  $Y$  são não correlacionados.

### Correlação

Definição **correlação**: Sejam  $X$  e  $Y$  duas v.a., se  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $V(X)$  e  $V(Y)$  existem e são finitas, então o coeficiente de correlação entre  $X$  e  $Y$  é dado por

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

- *Proposições*:
  - O coeficiente de correlação é *adimensional*  $-1 \leq Cov(X, Y) \leq 1$ ;
  - se  $X$  e  $Y$  são *independentes*  $\rho(X, Y) = 0$ , pois  $Cov(X, Y) = 0$ ;
  - se  $Y = aX + b$ , para  $a$  e  $b$  constantes e  $a \neq 0$ , dizemos que existe correlação perfeita entre  $X$  e  $Y$ , então teremos  $\rho(X, Y) = -1$  ou  $\rho(X, Y) = 1$ .
- *Observações*:
  - $\rho(X, Y)$  indica o grau de linearidade da relação entre  $X$  e  $Y$ . Um  $\rho(X, Y)$  próximo de 1 ou -1 indica um forte grau de linearidade;
  - $\rho(X, Y) > 0$  indica uma dependência linear direta (positiva), tendência de aumento de uma v.a. à medida que a outra aumenta também;  $\rho(X, Y) < 0$  indica uma dependência linear inversa (negativa), tendência de decréscimo de uma v.a. à medida que a outra aumenta;
  - $\rho(X, Y) \approx 0$  não indica necessariamente ausência de dependência entre  $X$  e  $Y$ , mas se essa relação existir não deve ser linear.

---

Ler apostila “Notas de Aula MAT02214 - Estatística Geral I” capítulo 5 seção 1.  
Continuar lista de exercícios 2-4.

---