Plano Aula 15 e 16

Variáveis Aleatórias (V.A.)

- (*... continuação de probabilidade...*)
- Geralmente denotadas por X, Y, Z, ...
  - X letra **maiúscula** denota a v.a. *versus* x letra **minúscula** que denota um particular valor que a v.a. pode assumir;
  - discretas × contínuas.

Definição **variável aleatória (v.a.)**: denominamos variável aleatória a função (ou regra) que transforma um espaço amostral qualquer, Ω, em um espaço amostral numérico, Ω_X, $X : \Omega \to \Omega_X$, que será um subconjunto dos números reais.

Exemplo 1: X: duração de vida de um tipo de lâmpada, $X \in (0, \infty)$.

Exemplo 2: X: PIB do Brasil, $X \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3: X: número de avaliações positivas em uma pesquisa de avaliação do governo. $X \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Exemplo 4: Y (consumo) e X (renda), ...

Variáveis aleatórias discretas (capítulo 6, Livro Bussab e Morettin)

Definição *v.a.* **discreta**: quando o espaço amostral associado a uma *v.a.* assumir somente valores inteiros, finitos ou infinitos, $\Omega_X \subseteq \mathbb{Z}$, denominamos v.a. discreta.

(... cont.) Exemplo 3: E: observar o número de avaliaçõe positivas, assumindo igual probabilidade de avaliação positiva (P) ou não (N) (... lançar uma moeda honesta 3 vezes...). Assim, $X : \Omega = \{(PPP), (PPN), (PNP), \ldots (NNN)\} \to \Omega_X = \{0, 1, 2, 3\}$.

- Como representar distribuições de probabilidade? Por funções, visualmente por tabelas e gráficos, medidas resumo, ...

1. Função (Massa) de Probabilidade (f.m.p)

Definição **função de probabilidade**: A função $p : \Omega_X \to [0, 1]$, dada por $p(x) = P(X = x)$, tal que $p(x) \geq 0$, para todo $x \in \Omega_X$, e $\sum_{x \in \Omega_X} p(x) = 1$, é denominada função (massa) de probabilidade.

2. Valor Médio (ou Esperança da Variável) e variância (seção 6.3, Livro Bussab e Morettin)

- Valor esperado/médio, esperança matemática ou simplesmente média - $E(X) = \sum_{\forall x \in \Omega_X} x \times p(x)$;
- Variância - $V(X) = E\left\{[X - E(X)]^2\right\} = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{\forall x \in \Omega_X} [x - E(X)]^2 \times p(x)$;
- Proprieadades, (*seção 6.4, Livro Bussab e Morettin*)
  - $E(aX + b) = aE(X) + b$ (*porque?*);
  - $V(aX + b) = a^2 V(X)$ (*?*).

3. Função de Distribuição (Acumulada) de Probabilidade (seção 6.5, Livro Bussab e Morettin)

Definição **função de distribuição**: a função $F : \Omega_X \to [0, 1]$ tal que $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\forall y \leq x} P(x = y) = \sum_{\forall y \leq x} p(y)$ é denominada funçao de distribuição (acumulada).

- Propriedades: $lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ e $lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

  - $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$;
  - $F(x)$ existe para todos números reais, diferente da f.m.p..

Principais Modelos para V.A. Discretas (seção 6.6, Livro Bussab e Morettin)

- Porque usar modelos de distribuição de probabilidades? Facilitam nos cálculos quando os problemas se encaixam em modelos (paramétricos);
  - **Parâmetros**: quando um modelo "encaixa" em nosso problema, basta identificar os parâmetros;
  - saberemos as funções de probabilidade e de distribuição, a esperança, variância, ..., mais rapidamente.
  - **modelo** = **família de distribuições**, diferentes valores para os parâmetros retornam distribuições diferentes na mesma família.
- Modelo Uniforme discreto, Modelo *Bernoulli* e *binomial*, modelo *hipergeométrico* e modelo *Poisson*.

(... cont.) Exemplo 3: $X \sim Binomial(n, \pi)$. Então $p(x) = \binom{n}{\pi}\pi^x(1-\pi)^{n-x}$, $F(x) =?$, $E(X) = n \times \pi$ e $V(X) = n \times \pi \times (1-\pi)$.

Ler slides e ver vídeos da semana 9.

Fazer lista de exercícios 2-3.

Exemplo: (*slides 2-1, página 30*) Se a variável aleatória

X : número de peças perfeitas (P) em uma amostra de $n = 3$ peças, com probabilidade de sucesso $p = 0,6$.

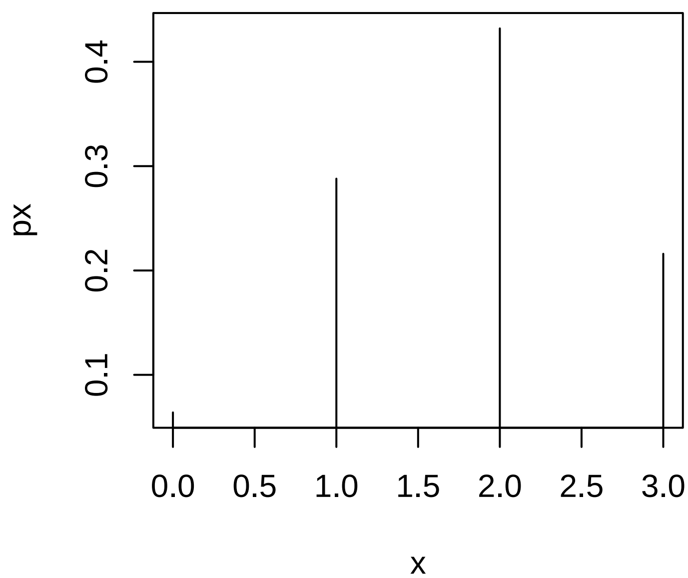
No `R` os comandos `dbinom()`, `pbinom()` e `rbinom()` são utilizados para calcular a função de probabilidade, função de distribuição e gerar números aleatórios segundo uma distribuição binomial.

```
n <- 3                  # num. de ensaios Bernoulli
x <- 0:n                # possíveis valores de X
p <- 0.6                # probabilidade de sucesso
px <- dbinom(x, n, p)   # funcao de probabilidade de X
px
```

```
## [1] 0.064 0.288 0.432 0.216
```

E em forma de gráfico

```
plot(x, px, type = "h")            # grafico da distribuicao de probabilidade
```



(*para a distribuição Hypergeométrica,* `dhyper()`, `phyper()` *e* `rhyper()`, *e para Poisson,* `dpois()`, `ppois()` *e* `rpois()`)