



Plano Aula 15 e 16

Variáveis Aleatórias (V.A.)

- (... *continuação de probabilidade* ...)
- Geralmente denotadas por X, Y, Z, \dots
 - X letra **maiúscula** denota a v.a. *versus* x letra **minúscula** que denota um particular valor que a v.a. pode assumir;
 - discretas \times contínuas.

Definição **variável aleatória (v.a.)**: denominamos variável aleatória a função (ou regra) que transforma um espaço amostral qualquer, Ω , em um espaço amostral numérico, Ω_X , $X : \Omega \rightarrow \Omega_X$, que será um subconjunto dos números reais.

Exemplo 1: X : duração de vida de um tipo de lâmpada, $X \in (0, \infty)$.

Exemplo 2: X : PIB do Brasil, $X \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3: X : número de avaliações positivas em uma pesquisa de avaliação do governo. $X \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Exemplo 4: Y (consumo) e X (renda), ...

Variáveis aleatórias discretas (capítulo 6, Livro Bussab e Morettin)

Definição **v.a. discreta**: quando o espaço amostral associado a uma *v.a.* assumir somente valores inteiros, finitos ou infinitos, $\Omega_X \subseteq \mathbb{Z}$, denominamos v.a. discreta.

(... **cont.**) **Exemplo 3:** E : observar o número de avaliação positivas, assumindo igual probabilidade de avaliação positiva (P) ou não (N) (... lançar uma moeda honesta 3 vezes...). Assim, $X : \Omega = \{(PPP), (PPN), (PNP), \dots (NNN)\} \rightarrow \Omega_X = \{0, 1, 2, 3\}$.

- Como representar distribuições de probabilidade? Por funções, visualmente por tabelas e gráficos, medidas resumo, ...

1. Função (Massa) de Probabilidade (f.m.p)

Definição **função de probabilidade**: A função $p : \Omega_X \rightarrow [0, 1]$, dada por $p(x) = P(X = x)$, tal que $p(x) \geq 0$, para todo $x \in \Omega_X$, e $\sum_{x \in \Omega_X} p(x) = 1$, é denominada função (massa) de probabilidade.

2. Valor Médio (ou Esperança da Variável) e variância (seção 6.3, Livro Bussab e Morettin)

- Valor esperado/médio, esperança matemática ou simplesmente média - $E(X) = \sum_{x \in \Omega_X} x \times p(x)$;
- Variância - $V(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{x \in \Omega_X} [x - E(X)]^2 \times p(x)$;
- Propriedades, (seção 6.4, Livro Bussab e Morettin)
 - $E(aX + b) = aE(X) + b$ (porque?);
 - $V(aX + b) = a^2V(X)$ (?).

3. Função de Distribuição (Acumulada) de Probabilidade (seção 6.5, Livro Bussab e Morettin)

Definição **função de distribuição**: a função $F : \Omega_X \rightarrow [0, 1]$ tal que $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} P(X = y) = \sum_{y \leq x} p(y)$ é denominada função de distribuição (acumulada).

- Propriedades: $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.



- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$;
- $F(x)$ existe para todos números reais, diferente da f.m.p..

Principais Modelos para V.A. Discretas (seção 6.6, Livro Bussab e Morettin)

- Porque usar modelos de distribuição de probabilidades? Facilitam nos cálculos quando os problemas se encaixam em modelos (paramétricos);
 - **Parâmetros:** quando um modelo “encaixa” em nosso problema, basta identificar os parâmetros;
 - saberemos as funções de probabilidade e de distribuição, a esperança, variância, ..., mais rapidamente.
 - **modelo = família de distribuições**, diferentes valores para os parâmetros retornam distribuições diferentes na mesma família.
- Modelo Uniforme discreto, Modelo *Bernoulli* e *binomial*, modelo *hipergeométrico* e modelo *Poisson*.

(... cont.) **Exemplo 3:** $X \sim \text{Binomial}(n, \pi)$. Então $p(x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$, $F(x) = ?$, $E(X) = n \times \pi$ e $V(X) = n \times \pi \times (1 - \pi)$.

Ler slides e ver vídeos da semana 9.

Fazer lista de exercícios 2-3.

Exemplo: (slides 2-1, página 30) Se a variável aleatória

X : número de peças perfeitas (P) em uma amostra de $n = 3$ peças, com probabilidade de sucesso $p = 0,6$.

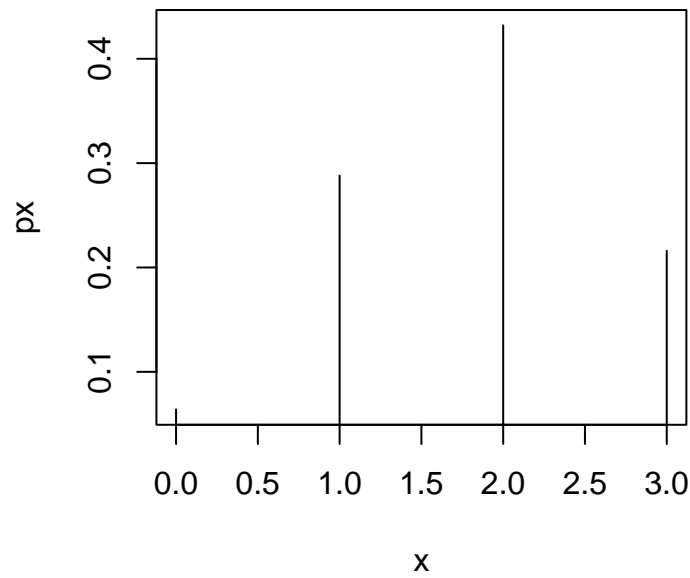
No R os comandos `dbinom()`, `pbinom()` e `rbinom()` são utilizados para calcular a função de probabilidade, função de distribuição e gerar números aleatórios segundo uma distribuição binomial.

```
n <- 3           # num. de ensaios Bernoulli
x <- 0:n         # possíveis valores de X
p <- 0.6         # probabilidade de sucesso
px <- dbinom(x, n, p) # funcao de probabilidade de X
px
```

```
## [1] 0.064 0.288 0.432 0.216
```

E em forma de gráfico

```
plot(x, px, type = "h")           # grafico da distribuicao de probabilidade
```



(para a distribuição *Hypergeométrica*, *dhyper()*, *phyper()* e *rhyper()*, e para *Poisson*, *dpois()*, *ppois()* e *rpois()*)