UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
MAT02214 - ESTATÍSTICA GERAL 1
ÁREA 3

FORMULÁRIO

(cont.) Variáveis aleatórias

- Se X é **variável aleatória (v.a.) contínua**, então o valor esperado (média) e a variância de X, são, respectivamente:

$$\mu = \mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx = \mathrm{E}[X^2] - \mu^2,$$

  em que $f(x)$ é a **função densidade de probabilidade** (fdp) de X e $\mathrm{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$.

  ★ Se X **assumir apenas valores em um intervalo** $S_X \subset \mathbb{R}$, as expressões acima tornam-se $\mathrm{E}[X] = \int_{S_X} x f(x) dx$, $\mathrm{Var}[X] = \int_{S_X} (x-\mu)^2 f(x) dx$ e $\mathrm{E}[X^2] = \int_{S_X} x^2 f(x) dx$.

- Seja X uma variável aleatória, então $F(x) = \Pr(X \leq x)$ é a **função de distribuição acumulada** (fda) de X.

  ★ $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(u) du$, se X é v.a. contínua.

Distribuições de probabilidade

Na Tabela 1 considere:

- Para as distribuições Normal e t-Student, π representa o valor $3,14\ldots$.
- Para as distribuições Qui-quadrado e t-Student, $\Gamma(u) = \int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-x} dx$.

Tabela 1: Distribuição de probabilidade, média e variância.

Variáveis aleatórias contínuas			
Uniforme(α, β)	$\frac{1}{\beta - \alpha}, \alpha \leq x \leq \beta.$	$\frac{\alpha + \beta}{2}$	$\frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \lambda > 0.$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normal(μ, σ^2)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0.$	μ	σ^2
Normal$(0, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty.$	0	1
$\mathrm{Qui-quadrado}(\nu)$	$\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\frac{\nu}{x}-1} e^{\frac{x}{2}}, x \geq 0, \nu > 0.$	ν	2ν
$t-$Student(ν)	$\frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, -\infty < x < \infty, \nu > 0.$	0 $(\nu > 1)$	$\frac{\nu}{\nu-2}$ $(\nu > 2)$

Vetores Aleatórios

- Se X e Y são duas **v.a. discretas**, então as **funções massa de probabilidade marginas** são dadas por

$$p(x) = \sum_y p(x, y) \text{ e } p(y) = \sum_x p(x, y).$$

  em que $p(x, y) = P([X = x] \cap [Y = y])$ é a **função massa de probabilidade conjunta** do vetor aleatório discreto (X, Y).

- Se X e Y são duas **v.a. contínuas**, então as **funções densidade de probabilidade marginas** são dadas por

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \text{ e } f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

  em que $f(x,y)$, para $P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy.$, é a **função densidade de probabilidade conjunta** do vetor aleatório contínuo (X,Y).

- A **covariância** entre X e Y é dada por

$$Cov(X,Y) = E\left[(X - EX)(Y - EY)\right],$$

  ou

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E(X)E(Y),$$

  se $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$ e $Var(Y)$ existem e são finitas.

- A **correlação** entre X e Y é dado por

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}},$$

  se $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$ e $Var(Y)$ existem e são finitas.

- A **esperança condicional** de Y dado $X = x$ é definida por

  ★ $E(Y|X=x) = \sum_y y \times P\left(Y = y \middle| X = x\right)$, se X e Y são v.a. discretas,

  em que $P\left(Y = y \middle| X = x\right) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}$ é a **função massa de probabilidade condicional** de $Y = y$ dado $X = x$, para $p(x) = P(X = x) > 0$

  ou

  ★ $E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X}\left(y \middle| x\right)$ se X e Y são v.a. contínuas.

  em que $f_{Y|X}\left(y \middle| x\right) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ é a **função densidade de probabilidade condicional** de $Y = y$ dado $X = x$, para $f(x) > 0$.

- A **variância condicional** de Y dado que $X = x$ é dada por

$$Var(Y|X=x) = E\left\{[Y - E(Y|x)]^2 \mid X = x\right\} = E\left(Y^2 \middle| X = x\right) - [E(Y|X=x)]^2.$$