UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

MAT02215 - Estatística Geral 2 - 2024/2

Plano Aula 09 e 10

Markus Stein

(. . . continuação) Intervalos de Confiança

Já vimos até aqui

- IC para uma média populacional μ
  - supondo σ^2 conhecido (ou $n > 30$),
  - supondo σ^2 desconhecido (e $n < 30$) e

- IC para diferença de médias $\mu_1 - \mu_2$.

Intervalo de confiança para a Variância

- Suponha que agora queremos estimar uma variância populacional σ^2.
- Exemplo: Estimar a variabilidade dos retornos de certa aplicação financeira.
  - Qual o estimador pontual "natural" para o problema? E como calcular um IC para σ^2?

(. . . continuação) Estimação de σ^2

- Se desconhecemos a variância populacional, podemos estimá-la usando o estimador $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ (porquê?)
- Nesse caso S^2 é uma variável aleatória (v.a.). (Sabemos qual a distribuição amostral de S^2?)

Distribuição (de probabilidade) $Qui - Quadrado$ **(Bussab e Morettin - pág. 358)**

Teorema (**Distribuição Qui-Quadrado, nossa versão**): Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$ e $S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/(n-1)$, então podemos escrever uma quantidade Q tal que (dadas algumas outras suposições que omitimos aqui)

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}.$$

em que $\chi^2_{(n-1)}$ denota a distribuição de probabilidade Qui-Quadrado com $n-1$ graus de liberdade (g.l.).

- A distribuição χ^2 possui **valores tabelados**, assim como a distribuição **normal padrão** e a t. A diferença é que Q só assume valores positivos.
- Como usar a distribuição de Q para construir um IC para σ^2? **Quais as suposições necessárias**? **Como interpretar os resultados**?

Intervalo para uma proporção (populacional)

- Suponha que agora queremos estimar uma proporção populacional π.
- Exemplo: Estimar a proporção de pessoas infectadas por um certo vírus numa população.
  - Qual o estimador pontual "natural" para o problema? E como calcular um IC para π?

- **Quais as suposições necessárias**? **Como interpretar os resultados**?

Usando o teorema central do limite

- $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim Normal(0,1)$ se $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$, para σ^2 conhecido, ou
- $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim Normal(0,1)$ se o tamanho amostral for grande, $n >> 30$.

No caso da proporção amostral X não será normal

Para uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ da v.a. $X \sim Bernoulli(\pi)$ temos que $\sum_{i=1}^n X_i \sim Binomial(n, \pi)$. Das propriedades da distribuição binomial sabemos que $E(\sum_{i=1}^n X_i) = n\pi$ e $V(\sum_{i=1}^n X_i) = n\pi(1-\pi)$.

Assim, para um tamanho de amostra suficientemente grande ($n >> 30$)

$$Z = \frac{(\sum_{i=1}^n X_i) - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} \sim Normal(0,1)$$

ou ainda usando $p = \sum_{i=1}^n X_i/n$

$$Z = \frac{(\sum_{i=1}^n X_i/n) - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \sim Normal(0,1)$$

- Porém desconhecemos π no erro padrão $EP(p) = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$!
  - então, ao invés de usar π, usamos seu estimador, a proporção amostral p, e temos $ep(p) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Dimensionamento de amostra

Chamamos de erro de estimação a metade da amplitude do intervalo,

- no caso de IC para μ com σ^2 conhecido, $E = z_{\alpha/2} \times \sigma/\sqrt{n}$,
- no caso de IC para μ com σ^2 desconhecido e n pequeno, $E = t_{(n-1);\alpha/2} \times s/\sqrt{n}$,
- e no caso de IC para π, $E = z_{\alpha/2} * \sqrt{p(1-p)/n}$.

Como calcular o tamanho mínimo de uma amostra para uma confiança $1-\alpha$ especificada e um erro máximo E também fixado?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

MAT02215 - Estatística Geral 2 - 2024/2

Ler slides das aulas 9 e 10

Fazer exercícios continuação da lista 1-3

Fazer avaliação parcial da área 1 (PROVA 1) - vale nota!!!

Rever para a prova 1

- Introdução e definições; amostagem.
- Estimação pontual; parâmetros e estimadores; erro padrão.
- Distribuições amostrais; TCL.
- Propriedades dos estimadores; viés, eficiência e consistência; EQM.
- Intervalos de confiança: para uma e duas médias, uma variância e uma proporção.
- Interpretação e suposições para intervalors de confiança.
- Erro de estimação e tamanho de amostra.