MAT02036 - Amostragem 2

Aula 18 - Amostragem por Conglomerados - Avaliação Parcial 2

Markus Stein

Departamento de Estatística, IME/UFRGS

2022/2

Housekeeping

- Aproveitem o momento presencial para tirar dúvidas
- Se estivéssemos no ensino remoto ou à distância
  - vocês poderiam estar somente ouvindo, sem interação
  - ou assistindo vídeos e material em outro momento
- Depois das aulas, rever material da aula passada
  - fazer exercícios
  - se preparar para a próxima aula

Aula passada

Exercícios e Lab

Utilizaremos o banco de dados `Lucy` (com informações ao nível individual) para: a. calcular os parâmetros e selecionar amostras b. calcular o coeficiente de correlação intraclasse c. estimação e tamanho da amostra, IC

Parâmetros

Arquivo `parametros e sorteio na AC1.R`

Estimação, tamanho amostra e IC

Arquivo `estimacao e tamanho de amostra AC1.R`

CCI

Arquivos `exemplo_pg31_apostila.R` e `exemplo_pg35_apostila.R`

Avaliação Parcial 2

Avaliação Parcial 2

Instruções

- Responda individualmente os itens na caixa de texto, ou anexe um arquivo .pdf com:
    - Desenvolvimento e expressões (e códigos, se forem utilizados)
    - Resposta e interpretação.

Obs. 1: Na caixa de texto é possível colar figuras com desenvolvimentos, expressões (e códigos).

Obs. 2: O documento .pdf com desenvolvimento e expressões (códigos, se for o caso), pode ser único para todas as questões, nesse caso indicar na caixa de texto das questões.

Boa avaliação!

Avaliação Parcial 2

Questão 1

Considere uma população com $N = 8$ indivíduos, onde

$$\mathrm{Y} = (9, 10, 11, 17, 20, 31, 32, 30).$$

a. Seja a divisão A desta população:

$$U_A = (C_1, C_2) = ((9, 10, 11, 17), (20, 31, 32, 30)) .$$

Calcule o coeficiente de correlação intraclasse e o interprete. Qual é o menor valor que o coeficiente pode assumir nesse caso?

b. Considere agora a divisão B:

$$U_B = (C_1, C_2) = ((10, 20, 30, 11), (32, 9, 17, 31)) .$$

Calcule o coeficiente de correlação intraclasse. Compare os resultados das duas divisões.

c. Na divisão A você recomendaria utilizar um plano **AC1S** ou **AAS**? E na divisão B? Justifique.

Avaliação Parcial 2

Questão 2

Uma empresa de táxis deseja estudar a situação dos pneus dos veículos da sua frota, que é composta por 175 táxis. Para tanto, uma amostra de 10 táxis foi selecionada com reposição e, para cada um, se avaliou o número de pneus (dentre os 4 pneus em uso) que estavam fora de condições de segurança. Os resultados obtidos foram:

$$1, 2, 2, 1, 3, 0, 0, 1, 4, 2$$

a. Estime a proporção de pneus da frota fora de condições pontualmente e por IC 95%.

b. Usando esses resultados como um estudo piloto, qual seria o número de táxis necessário para obter uma estimativa da proporção de pneus fora das condições, com um erro absoluto de $2,5\%$ e 95% de confiança? Considera **AC1s** com reposição.

Avaliação Parcial 2

Questão 3

Considere o banco de dados `agpop` do pacote `SDaA` do `R`. Após instalar o pacote, ao executar os comandos abaixo o banco de dados será carregado e poderá ser utilizado. Considere que os dados se referem a população de distritos dos EUA.

```
library(SDaA)
data(agpop)
```

Responda:
a. Usando o seu cartão UFRGS como semente aleatória (`set.seed(XXXXXXXX)`, onde `XXXXXXXX` é o número do seu cartão), sorteie uma **AC1S** de 15 estados (variável `state`) sem reposição.

b. A partir da amostra sorteada, obtenha e apresente a estimativa pontual e por IC 95% da média da variável `largef92`. Interprete os resultados.

c. Produza dois gráficos que descrevam a variável `largef92`: um na população, outro na **AC1S** sem reposição sorteada. Comente sobre as diferenças encontradas.

Solução

Avaliação Parcial 2

Questão 1 - solução

Do enunciado temos:

- $N = 8$ unidades elementares na população,
- $M = 2$ conglomerados.

```
## exercicio 1
## dados do problema
Y <- c(9,10,11,17,20,31,32,30)     # vetor pop. de valores Y
CA <- c(1,1,1,1,2,2,2,2)           # indices cluster A
CB <- c(2,1,1,2,1,2,2,1)           # indices cluster B
```

a) O coeficiente de correlação intraclasse é dada pelo coeficiente de correlação linear de Pearson dos dos possíveis pares dentro dos conglomerados (Y_1', Y_2'), $\rho = \frac{Cov(Y_1', Y_2')}{\sqrt{Var(Y_1')Var(Y_2')}}$.

- Y_1' significa possíveis valores da primeira posição do par
- Y_2' significa possíveis valores da segunda posição do par.

Avaliação Parcial 2

Questão 1 - solução

Adaptando o código da `Aula 14`:

```
library(gtools)

## divisao A
Ni <- mean(table(CA))                    # tamanho de cada conglomerado,
## cria os pares
YlinhaCA1 = permutations( length( Y[CA == 1]), 2, Y[CA == 1] ,set=F)
YlinhaCA2 = permutations( length( Y[CA == 2]), 2, Y[CA == 2] ,set=F)
YlinhaCA = rbind( YlinhaCA1, YlinhaCA2)    # pares de toda a pop.
rhoCA = cor( YlinhaCA[,1], YlinhaCA[,2])  # coef. corr. intraclasse
rhoCA
```

```
## [1] 0.7406312
```

O coeficiente de correlação intraclasse (CCI) para a divisão A é aproximadamente $1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2$. O valor mínimo para o CCI é $-\frac{1}{\overline{N}-1} = -0.333$, o que indica grande ineficiência da $AC1S$ usando a conglomeração A em relação a **AASc**. ρ_{int} está próximo de 1.

Avaliação Parcial 2

Questão 1 - solução

b) Para a divisão B temos

```
## divisao B
Ni <- mean(table(CB))                   # tamanho de cada conglomerado,
## cria os pares
YlinhaCB1 = permutations( length( Y[CB == 1]), 2, Y[CB == 1] ,set=F)
YlinhaCB2 = permutations( length( Y[CB == 2]), 2, Y[CB == 2] ,set=F)
YlinhaCB = rbind( YlinhaCB1, YlinhaCB2)    # pares de toda a pop.
rhoCB = cor( YlinhaCB[,1], YlinhaCB[,2])   # coef. corr. intraclasse
rhoCB
```

```
## [1] -0.2534517
```

O coeficiente de correlação intraclasse (CCI) para a divisão B é aproximadamente -0.2534517, o que indica uma grande eficiência da $AC1S$ usando a conglomeração A em relação a **AAS**, pois ρ_{int} está próximo do mínimo -0.333.

c) Não recomendaria na conglomeração A e recomendaria na B. Percebemos

Avaliação Parcial 2

Questão 2 - solução

Do enunciado temos:

- $N = \overline{N} \times M = 4 \times 175 = 700$ pneus (UE) na população
- $M = 175$ táxis (UPA) conglomerados
- $m = 10$ táxis foram selecionadosa com reposição
- T_i: no. de pneus (dentre os 4 em uso) fora de condições de segurança

Variável observada y_{ij}: indicadora do pneu j do táxi i estar em condições de segurança. Temos que $T_i = \sum_{j \in s_i} y_{ij}$

```
## exercicio 2
## dados do problema
M <- 175          # no. conglomerados pop.
Ni <- rep(4, 175) # tamanho conglomerados
N <- mean(Ni) * M       # tamanho pop
Ti_amostra <- c(1, 2, 2, 1, 3, 0, 0, 1, 4, 2)  # totais obtidos
m <- length(Ti_amostra)     # no. conglomerados amostra
Ni_amostra <- Ni[1:m]       # tamanho dos cong.
n <- mean(Ni_amostra) * m   # tamanho amostra
```

Avaliação Parcial 2

Questão 2 - solução

```r
## a)
PchapeuHT <- (M/m) * sum(Ti_amostra) / N  # estimador HT
PchapeuR <- sum(Ti_amostra) / n           # estimador R
```

a) Para estimar pontualmente a proporção de pneus da frota fora de condições, temos dois possíveis estimadores. Aqui conhecemos o tamanho da população N então ambos os estimadores são possíveis. Além disso, lembre que ambos os estimadores são iguais no caso de $N_i = \overline{N}$, temos

$$\widehat{P}_{AC1S}^{HT} = \frac{\widehat{T}_{AC1S/HT}}{N} = \frac{M}{N}\frac{1}{m}\sum_{i \in a} T_i = \frac{\frac{175}{10}16}{700} = 0.4$$

ou

$$\widehat{P}_{AC1S}^{R} = \frac{\widehat{T}_{AC1S}^{R}}{N} = \frac{1}{n}\sum_{i \in a} T_i = \frac{\frac{700}{40}16}{700} = 0.4.$$

Estimamos que a **proporção de pneus fora das condições** de segurança é

Avaliação Parcial 2

Questão 2 - solução

Um intervalo de confiança para $\widehat{P}$ é dados por

$$IC_{AC1S}(P;1-\alpha) = \left[\widehat{P}_{AC1S} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\widehat{Var}_{AC1S}\left(\widehat{P}_{AC1S}\right)}\right]$$

Assim, temos o erro absoluto, $e = z_{0,05} * \sqrt{\widehat{Var}_{AC1S}\left(\widehat{P}_{AC1S}\right)}$

- O estimador não viciado da variância de $\widehat{P}^{HT}$ na **AC1S** é dada por:
    - **COM** reposição, $\widehat{V}ar_{AC1S_c}\left(\widehat{P}^{HT}\right) = \frac{1}{\overline{N}^2}\left(1-\frac{1}{M}\right)\frac{s^2_{ec}}{m} \approx \frac{1}{\overline{N}^2}\frac{s^2_{ec}}{m}$
    - **SEM** reposição, $\widehat{V}ar_{AC1S_s}\left(\widehat{P}^{HT}\right) = \frac{1}{\overline{N}^2}\left(1-\frac{m}{M}\right)\frac{s^2_{ec}}{m}$.

    em que $s^2_{ec} = \frac{\sum_{i\in a}\left(T_i-\overline{y}_C\right)^2}{m-1}$.

Avaliação Parcial 2

Questão 2 - solução

```
## IC para a proporcao
pbarraC <- sum(Ti_amostra) / m
s2_ec <- 1/(m-1) * sum((Ti_amostra - pbarraC)^2)     # estimativa var
var_PchapeuHT <- (1 / mean(Ni)^2) * (1 - 1/M) * s2_ec / m   # estimat
eHT <- -qnorm(0.025) * sqrt(var_PchapeuHT)  # erro (absoluto) de est
ICHT <- PchapeuHT + c(-1, 1) * eHT      # intervalo de confianca para
ICHT
```

```
## [1] 0.2045644 0.5954356
```

Então, temos que $IC(P_{AC1S}^{HT}; 0,95) = [0.2045644; 0.5954356]$. Ou seja, o intervalo de 0.2045644 a 0.5954356 deve conter a proporção de pneus em conformidade com as especificações de segurança de toda a frota de táxis da empresa, com 95% de confiança.

Avaliação Parcial 2

Questão 2 - solução EXTRA

```
## IC para a proporcao - de razao
nbarra <- mean(Ni_amostra)    # estimativa do tamanho da amostra (nu
var_PchapeuR <- (1 / (m * nbarra^2)) * sum((Ti_amostra - PchapeuR * N
eR <- -qnorm(0.025) * sqrt(var_PchapeuR)  # erro (absoluto) de estima
ICR <- PchapeuR + c(-1, 1) * eR            # intervalo de confianca p
ICR
```

```
## [1] 0.2040036 0.5959964
```

Avaliação Parcial 2

Questão 2 - solução

b) Usando os resultados como um estudo piloto, queremos calcular o número mínimo de táxis necessário para obter uma estimativa da proporção de pneus fora das condições com erro relativo de $2,5\%$ e 95% de confiança, considerando **AC1S**

AASc de conglomerados $CV = \frac{Var_{ec_T}}{\bar{\bar{Y}}_c}$,

$$m = \frac{z^2_{\alpha/2}\, CV^2}{e_r^2}.$$

AASs de conglomerados $CV = \frac{S^2_{ec}}{\bar{\bar{Y}}_c}$,

$$m = \frac{M\, z^2_{\alpha/2}\, CV^2}{z_{\alpha/2}\, CV^2 + (M-1)\, e_r^2}.$$

Avaliação Parcial 2

Questão 2 - solução

```r
## m minimo para CV fixado COM r
er <- 0.025
alpha <- 0.05
z_alpha2 <- qnorm(alpha/2)
var_ecT <- (m-1) * s2_ec / m
CVc <- sqrt(var_ecT) / pbarraC
(m_minAC1Sc <- z_alpha2^2 * CVc^
```

```
## [1] 3457.313
```

Na **AASc** $CV = \frac{1.44}{1.6}$, então estimamos que são necessários no mínimo $m = \frac{-1.959964^2\ 0.75^2}{0.025^2} = 3458$ para estimar a proporção de pneus em conformidade nos táxis da frota, com erro relativo máximo de 2,5% e 95% de confiança.

```r
## m minimo para CV fixado SEM r
CVs <- sqrt(s2_ec) / pbarraC
(m_minAC1Ss <- M * z_alpha2^2 *
```

```
## [1] 167.4168
```

Na **AASs** $CV = \frac{1.44}{1.6}$, então estimamos que são necessários no mínimo $m = \frac{M\ z_{\alpha/2}^2\ CV^2}{z_{\alpha/2}\ CV^2 + (M-1)\ e_r^2}$ $= \frac{175\ -1.959964^2\ 0.7905694^2}{-1.959964^2\ 0.7905694^2 + (175-1)\ 0.025^2} = 168$ para estimar a proporção de pneus em conformidade nos táxis da frota, com erro relativo máximo de 2,5% e 95% de confiança.

Avaliação Parcial 2

Questão 3 - solução

```
## exercicio 3
## dados do problema
library(SDaA)
data(agpop)
estados <- unique(agpop$state)  # estados dos EUA
M <- length( estados)             # no. de estados
Ni <- aggregate( largef92 ~ state, agpop, length) # no. de cidades en
Ti <- aggregate( largef92 ~ state, agpop, sum)    # totais de fazenda
N <-  sum(Ni$largef92)            # no. de cidades
```

- Do problema temos:
  - $Y =$ `largef92`: número de fazendas com mais de 1.000 hectares em cada cidade dos EUA;
  - $N = 3078$ fazendas resgistradas no censo;
  - $M = 50$ estados dos EUA.

Nosso interesse é estimar $\overline{Y}$: número médio de fazendas com mais de 1.000 hectares por cidade dos EUA;

Avaliação Parcial 2

Questão 3 - solução

a) Usando o meu no. cartão a amostra sob **AC1Ss** de $m = 15$ estados é

```
## (a) selecao de estados
m <- 15                   # no. conglomerados
set.seed(00119502)   # semesnte aleatoria com meu no. cartao
(estados_amostra <- sample( estados, m ))  # estados selecionados
```

```
##  [1] PA LA NY OR RI SD KY NM OH VA AK TX GA CT VT
## 50 Levels: AK AL AR AZ CA CO CT DE FL GA HI IA ID IL IN KS KY LA MA MD ...
```

b) A partir da amostra, os tamanhos e totais por estado observados

```
## (b) medidas agregadas
(Ni_amostra <- Ni[Ni$state %in% estados_amostra,"largef92"])   # tama
```

```
##  [1]   5   8 159 120  64  33  62  88  36  67   5  66 254  98  14
```

```
(Ti_amostra <- Ti[Ni$state %in% estados_amostra,"largef92"])   # tot
```

Avaliação Parcial 2

Questão 3 - solução

Para estimação pontual de $\overline{Y}$ temos os estimadores (qual escolher?)

$$\overline{y}_{AC1S/HT} = \frac{\widehat{T}_{AC1S/HT}}{N} = \frac{M}{N}\frac{1}{m}\sum_{i \in a} T_i \quad \text{e} \quad \overline{y}^R_{AC1S} = \frac{\widehat{T}^R_{AC1S}}{N} = \frac{1}{n}\sum_{i \in a} T_i$$

```
## estimativa
ybarraAC1S_HT <- (M/m) * sum(Ti_amostra) / N      # estimativa por H
ybarraAC1S_R <- sum(Ti_amostra) / sum(Ni_amostra) # estimativa tipo
```

Assim, com base no censo agropecuário de 1992 dos EUA, estimamos que o número médio de fazendas com mais de 1.000 hectares por cidade seja aproximadamente 55.08 (ou 47.14) fazendas.

Avaliação Parcial 2

Questão 3 - solução

Para o IC 95% da média da variável ... sabemos que

$$IC_{AC1S}(\overline{Y}; 1-\alpha) = \left[\overline{y}_{AC1S} \mp z_{\alpha/2}\sqrt{\widehat{Var}_{AC1S}\left(\overline{y}_{AC1S}\right)}\right]$$

- **SEM reposição**,

$$\widehat{V}ar_{AC1S}\left(\overline{y}_{AC1S/HT}\right) = \frac{M^2}{N^2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right)\widehat{S}^2_{ec} = \frac{1}{\overline{N}^2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right)\widehat{S}^2_{ec}$$

- **COM reposição**,

$$\widehat{V}ar_{AC1S}\left(\overline{y}_{AC1S/HT}\right) = \frac{M^2}{N^2}\frac{\widehat{S}^2_{ec}}{m} = \frac{1}{\overline{N}^2}\frac{\widehat{S}^2_{ec}}{m}$$

Avaliação Parcial 2

Questão 3 - solução

```
## IC
alpha <- 0.05
z_alpha2 <- qnorm(alpha/2)
varybarraAC1S_HT <- (1/mean(Ni$largef92)^2) * (1/m - 1/M) * s2_ec
erroIC <- z_alpha2 * sqrt(varybarraAC1S_HT) # estimativa por HT
ICHT3 <- ybarraAC1S_HT + c(1,-1) * erroIC
```

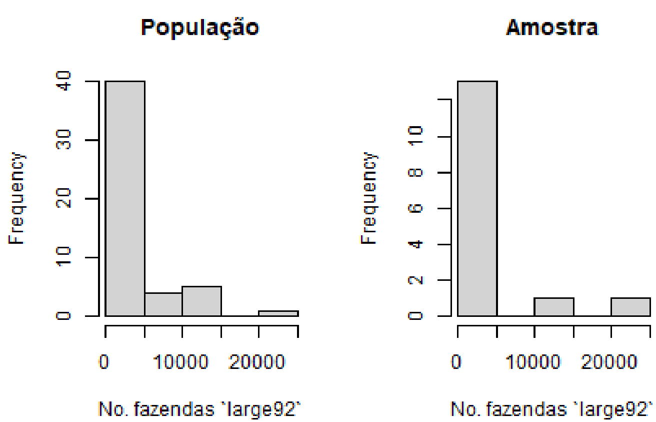
Então, temos que $IC(\overline{Y}; 0,95) = [55.0757706; 55.0931703]$. Ou seja, o intervalo de 55.0757706 a 55.0931703 deve conter a média de fazendas com mais de 1.000 hectares por cidade nos EUA em 1992, com 95% de confiança.

Avaliação Parcial 2

Questão 3 - solução

c) Os histogramas abaixo ilustram a distribuição do número de fazendas `largef92` na população e na **AC1S** sorteada.

```
par(mfrow=c(1,2))
hist(Ti$largef92, main="Populaçã
hist(Ti_amostra, main="Amostra",
```



Comentários...
Assimetria...
heterogeneidade de conglomorados?
Gráficos semelhantes?
Variação esperada?
Porquê?

Para casa 🏠

- Ler o capítulo 3 da apostila da Profa. Vanessa.
- Ler o capítulo 8 do livro 'Amostragem: Teoria e Prática Usando R'.

Próxima aula 📊

- Acompanhar o material no moodle.
- Amostragem Sistemática
  - Introdução.

Muito obrigado!

Fonte: imagem do livro *Combined Survey Sampling Inference: Weighing of Basu's Elephants*.

Referências

- Amostragem: Teoria e Prática Usando o R
- **Elementos de Amostragem**, Bolfarine e Bussab.
- Cochran(1977)

Resumo da notação