MAT02036 - Amostragem 2

Aula 16 - Amostragem por Conglomerados - Estimação de Proporções

Markus Stein

Departamento de Estatística, IME/UFRGS

2022/2

Housekeeping

- Aproveitem o momento presencial para tirar dúvidas
- Se estivéssemos no ensino remoto ou à distância
  - vocês poderiam estar somente ouvindo, sem interação
  - ou assistindo vídeos e material em outro momento
- Depois das aulas, rever material da aula passada
  - fazer exercícios
  - se preparar para a próxima aula

Aula passada 📀

Intervalos de Confiança na AC1S

- Para a **média** (para M e m suficientemente grandes (❓), então segue pelo TCL $IC_{AC1S}(\overline{Y};1-\alpha)=\left[\overline{y}_{AC1S}\mp z_{\alpha/2}\sqrt{\widehat{Var}_{AC1S}\left(\overline{y}_{AC1S}\right)}\right]$, em que $\widehat{Var}_{AC1S}\left(\overline{y}_{AC1S}\right)=\frac{s^2_{ec}}{m}$.

- Para o total: $IC_{AC1S}(T;1-\alpha)=\left[\widehat{T}_{AC1S}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\widehat{Var}_{AC1S}\left(\widehat{T}_{AC1S}\right)}\right]$

- Para a proporção: $IC_{AC1S}(P;1-\alpha)=\left[\widehat{P}_{AC1S}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\widehat{Var}_{AC1S}\left(\widehat{P}_{AC1S}\right)}\right]$

Aula passada

Tamanho de amostra na AC1S

- **Determinar** o **número de conglomerados** m que serão sorteados para fazer parte da amostra.

- **Erro relativo** e_r

AASc de conglomerados $CV = \frac{Var_{ec_T}}{\overline{\overline{Y}}_c}$,

$$m = \frac{z^2_{\alpha/2}\, CV^{\,2}}{e_r^2}.$$

AASs de conglomerados $CV = \frac{S^2_{ec}}{\overline{\overline{Y}}_c}$,

$$m = \frac{M\, z^2_{\alpha/2}\, CV^{\,2}}{z_{\alpha/2}\, CV^{\,2} + (M-1)\, e_r^2}.$$

Aula passada

Tamanho de amostra na AC1S

- **Erro absoluto** $e = e_r \left|\overline{Y}\right|$

Para média e proporção:

Na **AASc**, $m = \frac{z^2_{\alpha/2}\ Var_{ec_T}}{\overline{N} e^2}$; Na **AASs**, $m = \frac{M\ z^2_{\alpha/2}\ S^2_{ec}}{z^2_{\alpha/2}\ S^2_{ec} + \overline{N}(M-1)\ e^2}$.

Para o total:

Na **AASc**, $m = \frac{M^2 z^2_{\alpha/2}\ Var_{ec_T}}{e^2}$; Na **AASs**, $m = \frac{M^3\ z^2_{\alpha/2}\ S^2_{ec}}{M^2 z^2_{\alpha/2}\ S^2_{ec} + (M-1)\ e^2}$.

Uso de EPA $(deff)$ para cálculo de tamanho de amostra

$$m \approx \frac{n_{AASc} \times EPA_{AC1S}}{\overline{N}} (❓).$$

Estimação de Proporções

Estimação de Proporções

Parâmetro

- Assumimos a variável indicadora

$$y_{ij} = I\left[(i,j) \in A\right] = \begin{cases} 1, & \text{se a unidade } j \text{ do conglorerado } i \text{ possui o atributo, } A \subset U; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- O total populacional, representa o **número de unidades populacionais** com o **atributo** de interesse A,

$$T = \sum_{i \in C} T_i = N_A.$$

- A média populacional, representa a **propoção de unidades elementares** com o atributo A,

$$\overline{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i \in C} T_i = \frac{T}{M\overline{N}} = \frac{\overline{Y}_C}{\overline{N}} = \frac{N_A}{N} = P$$

- A variância populacional,…

Estimação de Proporções

Estimador natural

- O **estimador natural** HT é dado por

$$\widehat{P}^{HT} = \frac{\overline{y}_C}{\overline{N}},$$

em que $\overline{y}_C = \frac{\sum_{i \in a} T_i}{m}$.

- $\widehat{P}^{HT}$ é **não viciado** para P❓❓❓

- Esse estimador pode resultar em uma **proporção estimada** $\widehat{P}^{HT} > 1$ (❓).

- Veremos adiante que $\overline{N} = \frac{\sum i \in C N_i}{M}$ pode ser estimado por $\overline{n} = \frac{\sum i \in a N_i}{m}$.

Estimação de Proporções

Variância do estimador natural

A variância de $\widehat{P}^{HT}$ na **AC1S** é dada por:

- **COM** reposição,

$$Var_{AC1S_c}\left(\widehat{P}^{HT}\right) = \frac{1}{\overline{N}^2}\frac{Var_{ec_T}}{m} = \frac{1}{\overline{N}^2}\left(1 - \frac{1}{M}\right)\frac{S_{ec}^2}{m};$$

- **SEM** reposição,

$$Var_{AC1S_s}\left(\widehat{P}^{HT}\right) = \frac{1}{\overline{N}^2}\left(\frac{M-m}{M-1}\right)\frac{Var_{ec_T}^2}{m} = \frac{1}{\overline{N}^2}\left(1 - \frac{m}{M}\right)\frac{S_{ec}^2}{m}.$$

- Lembrando, que $Var_{ec_T} = \frac{\sum_{i \in C}\left(T_i - \overline{Y}_C\right)^2}{M} = \frac{M-1}{M}S_{ec}^2$.

Estimação de Proporções

Estimador da variância do estimador natural

- O estimador não viciado da variância de $\widehat{P}^{HT}$ na **AC1S** é dada por:
    - **COM** reposição, $\widehat{V}ar_{AC1S_c}\left(\widehat{P}^{HT}\right) = \frac{1}{\overline{N}^2}\left(1 - \frac{1}{M}\right)\frac{s^2_{ec}}{m} \approx \frac{1}{\overline{N}^2}\frac{s^2_{ec}}{m}$ (❓);
    - **SEM** reposição, $\widehat{V}ar_{AC1S_s}\left(\widehat{P}^{HT}\right) = \frac{1}{\overline{N}^2}\left(1 - \frac{m}{M}\right)\frac{s^2_{ec}}{m}$,

em que $s^2_{ec} = \frac{\sum_{i \in a}\left(T_i - \overline{y}_C\right)^2}{m-1}$.

- Lembrando que o estimador $s^2_{ec} = \widehat{S}^2_{ec} = \widehat{V}ar_{ec_T}$ é não-viciado para:
    - Var_{ec_T} se a seleção dos conglomerados for COM reposição;
    - e de S^2_{ec} se a seleção for SEM reposição.

Estimação de Proporções

Estimador de Razão

- Se estimamos $\overline{N}$ por $\overline{n}$ então o estimador do tipo razão é dado por

$$\widehat{P}^R = \frac{\sum_{i \in a} T_i}{\sum_{i \in a} N_i} = \frac{\overline{y}_C}{\overline{n}},$$

- É fácil ver que este estimador sempre produz estimativas menores ou guais a 1. (❓)

Variância do estimador de razão

A variância de $\widehat{P}^R$ na **AC1S** é dada por:

- **COM** reposição, $Var_{AC1S_c}\left(\widehat{P}^R\right) = \frac{1}{m\overline{N}^2} \frac{\sum_{i \in C} (T_i - P \times N_i)^2}{M-1}$;

- **SEM** reposição, $Var_{AC1S_s}\left(\widehat{P}^R\right) = \frac{\left(1 - \frac{m}{M}\right)}{m\overline{N}^2} \frac{\sum_{i \in C} (T_i - P \times N_i)^2}{M-1}$.

Estimação de Proporções

Estimador de Razão

Estimador da variância do estimador de razão

O **estimador não viciado da variância** de $\widehat{P}^R$ na **AC1S** é dada por:

- **COM** reposição, $\widehat{Var}_{AC1S_c}\left(\widehat{P}^R\right) = \frac{1}{m\bar{n}^2}\frac{\sum_{i\in a}\left(T_i - \widehat{P}^R \times N_i\right)^2}{m-1}$;
- **SEM** reposição, $\widehat{Var}_{AC1S_s}\left(\widehat{P}^R\right) = \frac{\left(1-\frac{m}{M}\right)}{m\bar{n}^2}\frac{\sum_{i\in a}\left(T_i - \widehat{P}^R \times N_i\right)^2}{m-1}$.

Rao (2000) menciona que, se os T_i's forem altamente correlacionados com os N_i's, então $\widehat{P}^R$ terá menor variância que $\widehat{P}^{HT}$.

Estimação de Proporções

Exemplo (Apostila pg. 27)

Uma população universitária foi avaliada quanto à posse de bicicleta. Os conglomerados foram os campi da universidade. Os dados da população estão abaixo:

Campus (i)	**No. pessoas com bicicleta** (T_i)	**Número total de pessoas** (N_i)
1	2226	2950
2	1512	1726
3	315	948
Total	4053	5624

Estimação de Proporções

Exemplo (Apostila pg. 28)

Considere os dados da população universitária, construa o IC 95% para a proporção.

Estimação de Proporções

Exemplo (Apostila pg. 36)

Em uma certa região, deseja-se fazer uma **AC1S** de fazendas criadores de gado. Em média, as fazendas têm 50 animais. O interesse é estimar a prevalência de uma doença, isto é, a proporção de animais doentes. Numa região vizinha, um estudo mostrou que 10% dos animais estavam doentes e $r_{int} = 0,1225$. Quantas fazendas devem pertencer à amostra, considerando que se deseja uma margem de erro de 1% para mais ou para menos e 95% de confiança?

Para casa 🏠

- Fazer a lista 2 de exercícios.
- Continuar exercícios.
- Rever os slides.

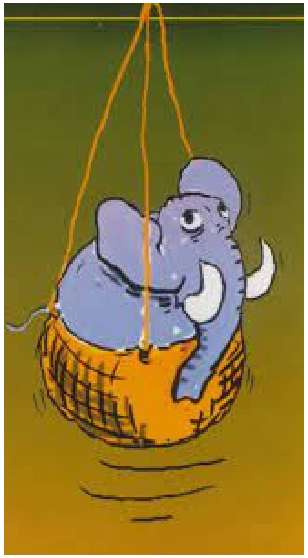
Próxima aula 📊

- Acompanhar o material no moodle.

Amostragem por Conglomerados

- Exercícios.
- Laboratório de

Muito obrigado!



Fonte: imagem do livro *Combined Survey Sampling Inference: Weighing of Basu's Elephants*.

Referências

- Amostragem: Teoria e Prática Usando o R
- **Elementos de Amostragem**, Bolfarine e Bussab.
- Cochran(1977)

Resumo da notação