

## Plano Aula 11 e 12

### Variáveis Aleatórias (V.A.)

- (... *continuação de probabilidade* ...)
- Geralmente denotadas por  $X, Y, Z, \dots$ 
  - $X$  letra **maiúscula** denota a v.a. *versus*  $x$  letra **minúscula** que denota um particular valor que a v.a. pode assumir;
  - discretas  $\times$  contínuas.

Definição **variável aleatória (v.a.)**: denominamos variável aleatória a função (ou regra) que transforma um espaço amostral qualquer,  $\Omega$ , em um espaço amostral numérico,  $\Omega_X$ ,  $X : \Omega \rightarrow \Omega_X$ , que será um subconjunto dos números reais.

**Exemplo 1:**  $X$ : duração de vida de um tipo de lâmpada,  $X \in (0, \infty)$ .

**Exemplo 2:**  $X$ : PIB do Brasil,  $X \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 3:**  $X$ : número de avaliações positivas em uma pesquisa de avaliação do governo.  $X \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

**Exemplo 4:**  $Y$  (consumo) e  $X$  (renda), ...

### Variáveis aleatórias discretas (capítulo 6, Livro Bussab e Morettin)

Definição **v.a. discreta**: quando o espaço amostral associado a uma *v.a.* assumir somente valores inteiros, finitos ou infinitos,  $\Omega_X \subseteq \mathbb{Z}$ , denominamos v.a. discreta.

(... **cont.**) **Exemplo 3:**  $E$ : observar o número de avaliação positivas, assumindo igual probabilidade de avaliação positiva (P) ou não (N) (... lançar uma moeda honesta 3 vezes...). Assim,  $X : \Omega = \{(PPP), (PPN), (PNP), \dots (NNN)\} \rightarrow \Omega_X = \{0, 1, 2, 3\}$ .

- Como representar distribuições de probabilidade? Por funções, visualmente por tabelas e gráficos, medidas resumo, ...

#### 1. Função (Massa) de Probabilidade (f.m.p)

Definição **função de probabilidade**: A função  $p : \Omega_X \rightarrow [0, 1]$ , dada por  $p(x) = P(X = x)$ , tal que  $p(x) \geq 0$ , para todo  $x \in \Omega_X$ , e  $\sum_{x \in \Omega_X} p(x) = 1$ , é denominada função (massa) de probabilidade.

#### 2. Valor Médio (ou Esperança da Variável) e variância (seção 6.3, Livro Bussab e Morettin)

- Valor esperado/médio, esperança matemática ou simplesmente média -  $E(X) = \sum_{x \in \Omega_X} x \times p(x)$ ;
- Variância -  $V(X) = E\{[x - E(X)]^2\} = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{x \in \Omega_X} [x - E(X)]^2 \times p(x)$ ;
- Propriedades, (seção 6.4, Livro Bussab e Morettin)
  - $E(aX + b) = aE(X) + b$  (porque?);
  - $V(aX + b) = a^2V(X)$  (?).

#### 3. Função de Distribuição (Acumulada) de Probabilidade (seção 6.5, Livro Bussab e Morettin)

Definição **função de distribuição**: a função  $F : \Omega_X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} P(X = y) = \sum_{y \leq x} p(y)$  é denominada função de distribuição (acumulada).

- Propriedades:  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ .

- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ ;
- $F(x)$  existe para todos números reais, diferente da f.m.p..

### Principais Modelos para V.A. Discretas (seção 6.6, Livro Bussab e Morettin)

- Porque usar modelos de distribuição de probabilidades? Facilitam nos cálculos quando os problemas se encaixam em modelos (paramétricos);
  - **Parâmetros:** quando um modelo “encaixa” em nosso problema, basta identificar os parâmetros;
  - saberemos as funções de probabilidade e de distribuição, a esperança, variância, ..., mais rapidamente.
  - **modelo = família de distribuições**, diferentes valores para os parâmetros retornam distribuições diferentes na mesma família.
- Modelo Uniforme discreto, Modelo *Bernoulli* e *binomial*, modelo *hipergeométrico* e modelo *Poisson*.

(... cont.) **Exemplo 3:**  $X \sim \text{Binomial}(n, \pi)$ . Então  $p(x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$ ,  $F(x) = ?$ ,  $E(X) = n \times \pi$  e  $V(X) = n \times \pi \times (1 - \pi)$ .

---

Ler slides e ver vídeos da semana 6.

Fazer lista de exercícios 2-1.

Fazer o Quiz da semana 6 - VALE NOTA!!!

---

Exemplo: (slides 2-1, página 30) Se a variável aleatória

$X$  : número de peças perfeitas (P) em uma amostra de  $n = 3$  peças, com probabilidade de sucesso  $p = 0,6$ .

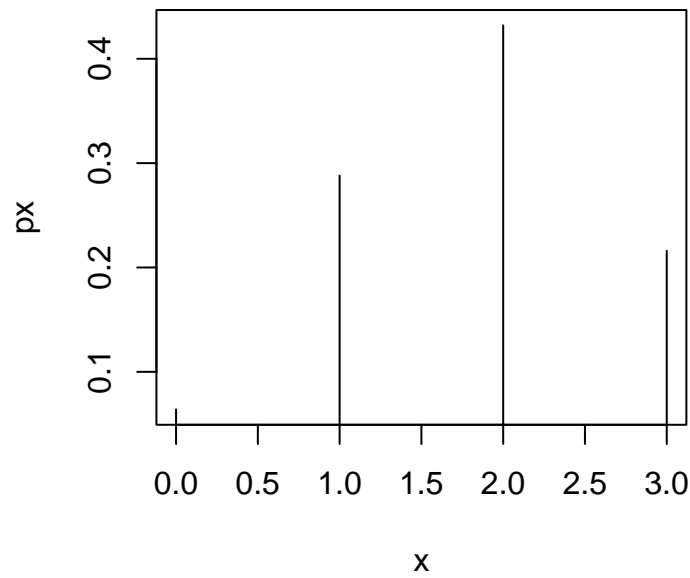
No R os comandos `dbinom()`, `pbinom()` e `rbinom()` são utilizados para calcular a função de probabilidade, função de distribuição e gerar números aleatórios segundo uma distribuição binomial.

```
n <- 3           # num. de ensaios Bernoulli
x <- 0:n         # possíveis valores de X
p <- 0.6         # probabilidade de sucesso
px <- dbinom(x, n, p) # funcao de probabilidade de X
px
```

```
## [1] 0.064 0.288 0.432 0.216
```

E em forma de gráfico

```
plot(x, px, type = "h") # grafico da distribuicao de probabilidade
```



(para a distribuição *Hypergeométrica*, *dhyper()*, *phyper()* e *rhyper()*, e para *Poisson*, *dpois()*, *ppois()* e *rpois()*)