

## Plano Aula 13 e 14

(cont... Variáveis Aleatórias)

### Variáveis aleatórias contínuas (capítulo 7, Livro Bussab e Morettin)

Definição **v.a. contínua**: quando o espaço amostral associado a uma *v.a.* puder assumir valores reais,  $\Omega_X \subseteq \mathbb{R}$ , ou infinito, denominamos *v.a. contínua*.

**Exemplo 1:**  $X$ : duração de vida de um tipo de lâmpada,  $X \in (0, \infty)$ .

**Exemplo 2:**  $X$ : PIB do Brasil,  $X \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 3:**  $Y$  (consumo) e  $X$  (renda), ...

- Geralmente os espaços amostrais,  $\Omega$ , de experimentos envolvendo observação de *v.a. contínuas* coincidem com o espaço da própria *v.a.*,  $\Omega_X$ .
  - No **exemplo 1**:  $\Omega = \Omega_X = (0, \infty)$
  - No **exemplo 2**:  $\Omega = \Omega_X = \mathbb{R}$
- Como representar a distribuição de probabilidade de uma *v.a. contínua*?

#### 1. Função Densidade de Probabilidade (f.d.p)

Definição **função densidade de probabilidade**: a função  $f : \Omega_X \rightarrow [0, 1]$  não negativa,  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in (-\infty, \infty)$ , e  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ , é denominada função densidade de probabilidade.

- Probabilidades estão associadas à áreas para *v.a. contínuas*.
  - A probabilidade de uma *v.a. contínua* assumir um particular valor é igual a zero,  $P(X = x) = 0$  para todos  $X \in \Omega_X$ .

#### 2. Esperança e Variância (seção 7.2, Livro Bussab e Morettin)

- Valor esperado, ou média -  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ ;
- Variância -  $V(X) = E\{[x - E(X)]^2\} = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$ ;
- Propriedades: ...

#### 3. Função de Distribuição (Acumulada) de Probabilidade (seção 7.3, Livro Bussab e Morettin)

Definição **função de distribuição**: a função  $F : \Omega_X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$  é denominada função de distribuição (acumulada).

- Propriedades:  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ;
  - $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ ;
  - $F(x)$  existe para todos os números reais, diferente da f.d.p..

## Principais Modelos para V.A. Contínuas (seção 7.4, Livro Bussab e Morettin)

- Modelos?
  - Distribuição Uniforme, distribuição Exponencial e distribuição Normal. Na área 3 veremos a distribuição  $t$ , distribuição *qui quadrado* e a distribuição  $F$ .
- **Modelo Normal** ou Distribuição de Gauss:
  - é uma das mais importantes distribuições de probabilidade em Estatística;
  - Como calcular probabilidades? Modelo **normal padrão**, usando **valores tabelados**;
  - **Padronização**: se  $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$ , então  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim Normal(0, 1)$ .

(... cont.) **Exemplo 2**: Se assumirmos  $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$ . Então conhecemos  $f(x)$ ,  $F(x) = ?$ ,  $E(X) = \mu$  e  $V(X) = \sigma^2$ , ... .

- Como verificar se modelos se ajustam (“encaixam”) a dados reais?
  - histograma, gráfico de probabilidade, *box-plot*, ...
  - testes de aderência (não paramétricos), Kolmogorov-Smirnov, Shapiro-Wilks, ... (não veremos na disciplina).

---

Ler slides e ver vídeos da semana 7.

Fazer lista de exercícios 2-2.

Fazer o Quiz da semana 7 - VALE NOTA!!!

---

Exemplo: (*slides 2-2, página 30*) Seja a v.a.

$X$  : tempo de duração de motores produzidos por uma fábrica de carros.

- Do enunciado sabemos  $E(X) = 150.000km$ ,  $V(X) = 5.000^2km$  e  $X \sim Normal$ ;
  - assim  $X \sim Normal(\mu = 150000, \sigma = 50000)$ .

No R os comandos `dnorm(x, media, desvio)`, `pnorm(x, media, desvio)`, `qnorm(x, media, desvio)` e `rnorm(n, media, desvio)` são utilizados para calcular a função densidade, função de distribuição, quantis e gerar números aleatórios segundo uma distribuição normal.

a.  $P(140000 \leq X \leq 160000) = F(160000) - F(140000)$  ou

$$P(140000 \leq X \leq 160000) = P\left(\frac{140000 - 150000}{5000} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{160000 - 150000}{5000}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2).$$

```
media <- 150000      # media de X
desvio <- 5000       # desvio padrao de X
pnorm(160000, media, desvio) - pnorm(140000, media, desvio)
```

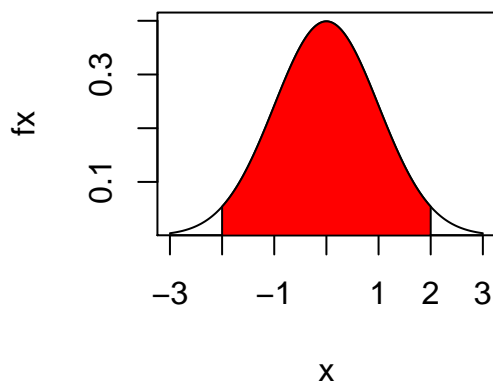
```
## [1] 0.9544997
```

ou, usando `pnorm()` sem especificar `media` e `desvio` temos a normal padrão,

```
pnorm(2) - pnorm(-2)
```

```
## [1] 0.9544997
```

E em forma de gráfico

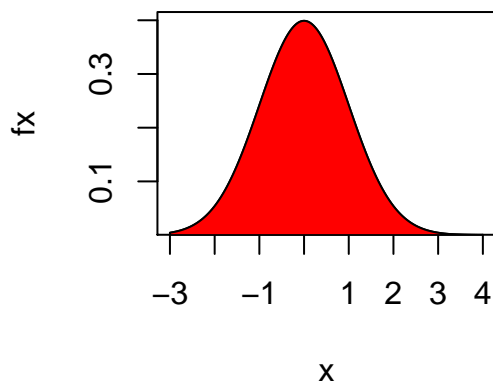


b.  $P(X \leq 170000) = P(Z \leq 4)$  ?

```
media <- 150000      # media de X
desvio <- 5000       # desvio padrao de X
pnorm(170000, media, desvio)
```

```
## [1] 0.9999683
```

E em forma de gráfico da normal padrão



(para a distribuição Uniforme, `dunif()`, `punif()`, `qunif()` e `runif()`, e para Exponencial, `dexp()`, `pexp()`, `qexp()` e `rexp()`.)

c.  $P(X \leq ???) = 0,01$ ? ou  $F(???) = 0,01$ ?

```
qnorm(1-0.01, media, desvio)
```

```
## [1] 161631.7
```

E em forma de gráfico da normal padrão

