UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

MAT02219 - Probabilidade e Estatística - 2024/2

Plano Aula 13 e 14

(cont... Variáveis Aleatórias)

Variáveis aleatórias contínuas (capítulo 7, Livro Bussab e Morettin)

Definição *v.a.* **contínua**: quando o espaço amostral associado a uma *v.a.* puder assumir valores reais, $\Omega_X \subseteq \mathbb{R}$, ou infinito, denominamos v.a. contínua.

Exemplo 1: X: duração de vida de um tipo de lâmpada, $X \in (0, \infty)$.

Exemplo 2: X: PIB do Brasil, $X \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3: Y (consumo) e X (renda), ...

- Geralmente os espaços amostrais, Ω, de experimentos envolvendo observação de v.a. contínuas coincidem com o espaço da própria v.a., Ω_X.
  - No **exemplo 1**: $\Omega = \Omega_X = (0, \infty)$
  - No **exemplo 2**: $\Omega = \Omega_X = \mathbb{R}$
- Como representar a distribuição de probabilidade de uma v.a. contínua?

1. Função Densidade de Probabilidade (f.d.p)

Definição **função densidade de probabilidade**: a função $f : \Omega_X \to [0, 1]$ não negativa, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (-\infty, \infty)$, e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$, é denominada função densidade de probabilidade.

- Probabilidades estão associadas a áreas para v.a. contínuas.
  - A probabilidade de uma v.a. contínua X assumir um particular valor é igual a zero, $P(X = x) = 0$ para todos $X \in \Omega_X$.

2. Esperança e Variância (seção 7.2, Livro Bussab e Morettin)

- Valor esperado, ou média - $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$;
- Variância - $V(X) = E\left\{[x - E(X)]^2\right\} = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2\; f(x)\, dx$;
- Proprieadades: ... .

3. Função de Distribuição (Acumulada) de Probabilidade (seção 7.3, Livro Bussab e Morettin)

Definição **função de distribuição**: a função $F : \Omega_X \to [0, 1]$ tal que $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$ é denominada funçao de distribuição (acumulada).

- Propriedades: $lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ e $lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$;
  - $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$;
  - $F(x)$ existe para todos os números reais, diferente da f.d.p..

Principais Modelos para V.A. Contínuas (seção 7.4, Livro Bussab e Morettin)

- Modelos?
  - Distribuição Uniforme, distribuição Exponencial e distribuição Normal. Na área 3 veremos a distribuição t, distribuição *qui quadrado* e a distribuição F.
- **Modelo Normal** ou Distribuição de Gauss:
  - é uma das mais importantes distribuições de probabilidade em Estatística;
  - Como calcular probabilidades? Modelo **normal padrão**, usando **valores tabelados**;
  - **Padronização**: se $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$, então $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim Normal(0, 1)$.

(... cont.) Exemplo 2: Se assumirmos $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$. Então conhecemos $f(x)$, $F(x) =?$, $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$, ...

- Como verificar se modelos se ajustam ("encaixam") a dados reais?
  - histograma, gráfico de probabilidade, *box-plot*, ...
  - testes de aderência (não paramétricos), Kolmogorov-Smirnov, Shapiro-Wilks, ... (não veremos na disciplina).

Ler slides e ver vídeos da semana 7.

Fazer lista de exercícios 2-2.

Fazer o Quiz da semana 7 - VALE NOTA!!!

Exemplo: (*slides 2-2, página 30*) Seja a v.a.

X : tempo de duração de motores produzidos por uma fábrica de carros.

- Do enunciado sabemos $E(X) = 150.000km$, $V(X) = 5.000^2 km$ e $X \sim Normal$;
  - assim $X \sim Normal(\mu = 150000, \sigma = 50000)$.

No `R` os comandos `dnorm(x, media, desvio)`, `pnorm(x, media, desvio)`, `qnorm(x, media, desvio)` e `rnorm(n, media, desvio)` são utilizados para calcular a função densidade, função de distribuição, quantis e gerar números aleatórios segundo uma distribuição normal.

a. $P(140000 \leq X \leq 160000) = F(160000) - F(140000)$ ou

$$P(140000 \leq X \leq 160000) = P(\frac{140000 - 150000}{5000} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{160000 - 150000}{5000}) = P\left(-2 \leq Z \leq 2\right) = \Phi(2) - \Phi(-2).$$

```
media <- 150000          # media de X
desvio <- 5000           # desvio padrao de X
pnorm(160000, media, desvio) - pnorm(140000, media, desvio)
```

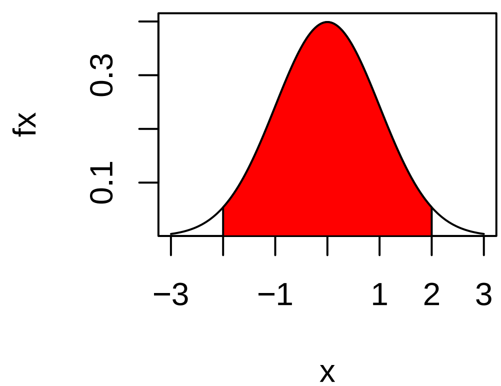
```
## [1] 0.9544997
```

ou, usando `pnorm()` sem especificar `media` e `desvio` temos a normal padrão,

```
pnorm(2) - pnorm(-2)
```

```
## [1] 0.9544997
```

E em forma de gráfico

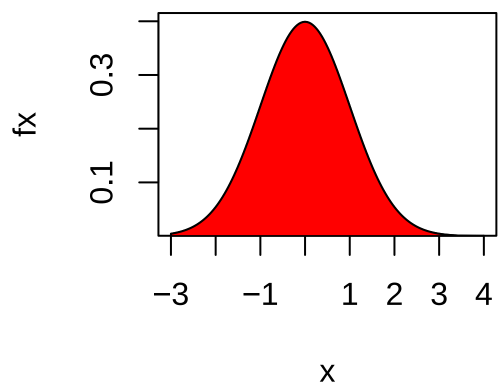


b. $P(X \leq 170000) = P(Z \leq 4)$?

```
media <- 150000          # media de X
desvio <- 5000           # desvio padrao de X
pnorm(170000, media, desvio)
```

```
## [1] 0.9999683
```

E em forma de gráfico da normal padrão

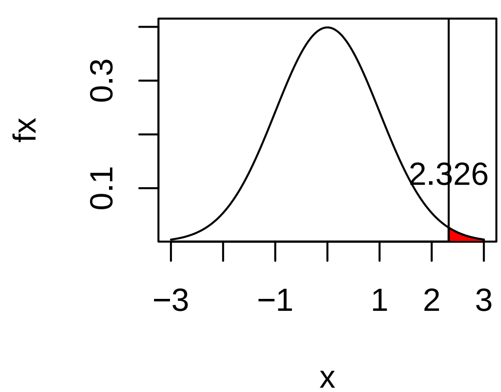


c. $P(X \leq ???) = 0,01?$ ou $F(???) = 0,01?$
Usando a fun;'ao `qnorm(p, media, desvio)` diretamente

```
qnorm(1-0.01, media, desvio)
```

```
## [1] 161631.7
```

E em forma de gráfico da normal padrão



Assim, $X = z * \sigma + \mu = 2.326 * 5000 + 150000 = 161630.$

*(para a distribuição Uniforme, **dunif()**, **punif()**, **qunif()** e **runif()**, e para Exponencial, **dexp()**, **pexp()**, **qexp()** e **rexp()**.)*