UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

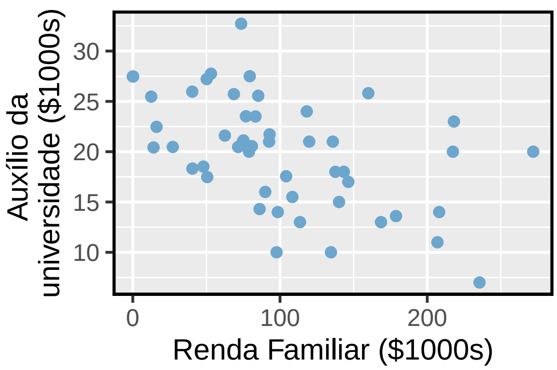
MAT02219 - Probabilidade e Estatística - 2020/2

Plano Aula 27 e 28

Análise de Correlação e Regressão

Agora, nosso interesse será analisar o relacionamento entre **duas variáveis numéricas** de interesse.

- **Exemplo 1**: O valor do auxílio estudantil oferecido por uma universidade pode estar relacionado com a renda familiar dos estudantes?



Associação entre Variáveis Quantitativas (Bussab e Morettin - seção 4.5)

Para duas variáveis quantitativas também podemos estar interessados em verificar se existe associação (relação) entre elas.

Gráfico de Dispersão

- **... cont. exemplo 1**:

Como resumir a informação do gráfico acima em um só número?

Coeficiente de correlação (linear) (de Pearson)

Relembrando sobre covariância em probabilidade:
Definição (**covariância**): Sejam X e Y duas v.a. então $Cov(X,Y) = E\{[X - E(X)]\,[Y - E(Y)]\}$.

Definição (**covariância amostral**): Dados n pares de valores observados $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ (de duas v.a. X e Y), chamaremos de covariância amostral antre X e Y a expressão

$$cov(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n}$$

.

Assim, "padronizamos" a covariância para obtemos o coeficiente $corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{s_x \cdot s_y}$, $-1 \leq corr(X,Y) \geq 1$.

Definição (**coeficiente de correlação**): Dados n pares de valores observados $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ (de duas v.a. X e Y), chamaremos de covariância amostral antre X e Y a expressão

$$corr(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})}{s_x} \cdot \frac{(y_i - \overline{y})}{s_y}.$$

Como usar os valores de cada observação para testar se existe correlação (associação)?

Teste para o Coeficiente de Correlação (Bussab e Morettin - seção 14.5)

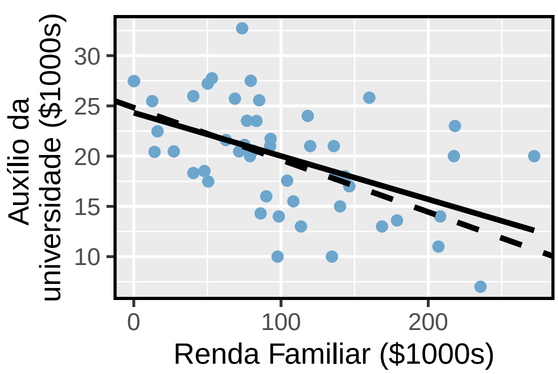
- Hipóteses?
- Quais as suposições necessárias???

Análise de Regressão

Agora, nosso interesse será em estimar uma relação **linear** entre **duas variáveis numéricas** de interesse.

Regressão Linear Simples (Bussab e Morettin - capítulo 16)

- **cont. Exemplo 1**: O valor do auxílio estudantil oferecido por uma universidade pode estar relacionado com a renda familiar dos estudantes?



Estimação dos parâmetros (Bussab e Morettin - seção 16.2)

Relembrando sobre esperança condicional em probabilidade...

Modelo populacional

sejam X e Y duas v.a. queremos estimar a esperança condicional de Y em função de (dado que) $X = x$,

$$E(Y|X = x) = \alpha + \beta \cdot x,$$

ou seja, queremos estimar os parâmetros α e β.

- Para uma amostra de tamanho n podemos escrever que cada observação (x_i, y_i), para $i = 1, \ldots, n$, segue o modelo
$$y_i = \alpha + \beta \cdot x_i + e_i.$$
- chamamos e_i de erro amostral e assumimos que:

- $E(e_i) = 0$,
- $Var(e_i) = \sigma^2$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$,
- $Cov(e_i, e_j) = 0$ para $i \neq j$.

- Assim $E(y_i) = \alpha + \beta \cdot x_i$, $Var(y_i) = \sigma^2$ e $Cov(y_i, y_j) = 0$.
  - o parâmetro σ^2 também precisa ser estimado.

Método dos Mínimos Quadrados (Ordinários)

Para estimar α e β podemos pensar em minimizar os erros e_i, ou

$$SQ(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (\alpha + \beta \cdot x_i)]^2$$

- Derivando $SQ(\alpha, \beta)$ em relação a α e β, igualando a zero e resolvendo o sistema de equações temos
  - $\widehat{\alpha} =$??? e $\widehat{\beta} =$???.
- Reta estimada (modelo ajustado): $\widehat{y}_i = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} \cdot x_i$
  - Interpretação de $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$;
  - **Prever**, para um dado valor $X = x$, quanto esperamos observar o valor de Y?

Coeficiente de determinação R^2 (Bussab e Morettin - seção 16.3)

Intervalos de Confiança e Testes de hipóteses (Bussab e Morettin - seção 16.4)

Para α, β e σ^2. (suposições???)

Se adicionalmente assumimos $e_i \sim Normal$, então $y_i \sim Normal(\alpha + \beta \cdot x, \sigma^2)$.

- Também $\widehat{\alpha} \sim Normal$ e $\widehat{\beta} \sim Normal$.

Previsão e predição (Bussab e Morettin - seção 16.4.4)

- para o valor esperado $E(Y_i|x_i) = y_i$;
- para uma futura (nova) observação y_f.

Correlação espúria

Causalidade e correlação

Ler slides e ver vídeos da semana 14.

Fazer lista de exercícios 3-4.

Fazer o Quiz da semana 14 - VALE NOTA!!!
