Gabarito Lista 4

Prof. Marcio Valk
Disciplina: Inferência B

1. a) Exemplo 2.3 da Apostila

   b) Exemplo 2.5 da Apostila

2. Se a moeda é equilibrada, $X \sim Binomial(1000, 1/2)$. Use um teste de hipóteses para concluir que $p > 1/2$.

3. $X \sim Poisson(15)$. Calcule $P(X \leq 10|\lambda = 15)$. Essa probabilidade é grande?

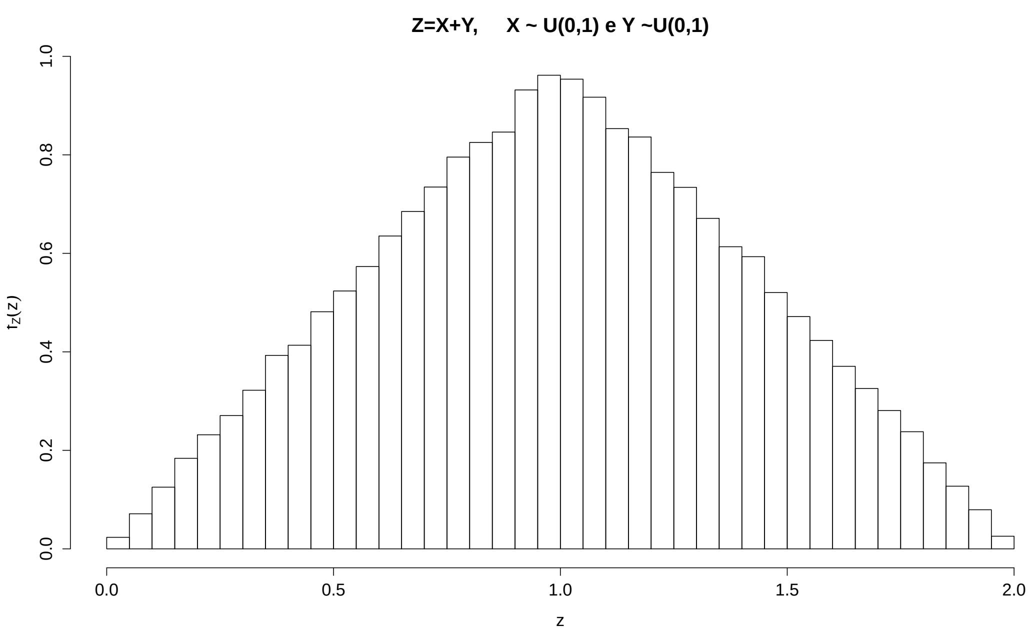
4. a) O tamanho de ϕ_1 pode ser obtido diretamente por

$$\alpha = P(X_1 > 0.95) = 0.05.$$

Para calcular o tmanho de ϕ_2 precisamos encontrar a distribuição de $Z = X_1 + X_2$, sendo que $X_1 \sim U(0,1)$ e $X_2 \sim U(0,1)$. Observe na figura (histograma), que foi gerada com o código

```
# Gerando uniformes
x1=runif(100000,0,1)
x2=runif(100000,0,1)
z=x1+x2
hist(z,freq=F,breaks=60,main=expression("Z =" ~ X[1]+X[2] ~ ",   " ~ X[1] ~ "~U(0,1) " ~ ",
" ~ X[2] ~ "~U(0,1) "), ylab=expression(f[Z](z)))
```

que a distribuição de Z em questão é uma distribuição triangular.



Podemos usar a convolução para obter a densidade de Z. Assim, para $0 \leq z \leq 2$

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= f_{X_1+X_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_Y(z-x)dx \\
&= \int_0^1 f_x(x) f_Y(z-x)dx = \int_0^1 f_Y(z-x)dx \\
&= \begin{cases} \int_0^z f_Y(z-x)dx & \text{se } 0 \le z < 1 \\ \int_{z-1}^1 f_Y(z-x)dx & \text{se } 1 \le z \le 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} z & \text{se } 0 \le z < 1 \\ 2-z & \text{se } 1 \le z < 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Assim, para encontrar C tal que $P(X_1 + X_2 > C) = 0.05$ é razoável/necessário assumir que $1 \le C \le 2$. Logo

$$P(X_1 + X_2 > C] = P(Z > C) = \int_C^1 (2-z)dz = \frac{(2-C)^2}{2}.$$

Segue que $\alpha = 0.05$, C= 1.68.

b)

$$\beta_1(\theta) = P_\theta(X_1 > 0.95) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta \le -0.05 \\ \theta + 0.05 & \text{se } -0.05 < \theta \le 0.95 \\ 1 & \text{se } 0.95 < \theta. \end{cases}$$

Para encontrar a função poder do teste ϕ_2 precisamos calcular a distribuição/densidade de $Z = X_1 + X_2$ em que $X_i \sim U(\theta, \theta + 1)$. Usando o fato que a densidade da soma $X_1 + X_2$ é uma triangular entre 2θ e $2\theta + 2$, podemos escrevê-la como

$$f_Z(z) = \begin{cases} z - 2\theta & \text{se } 2\theta \le z < 2\theta + 1 \\ 2\theta + 2 - z & \text{se } 2\theta + 1 \le z < 2\theta + 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\beta_2(\theta) = P_\theta(X_1 + X_2 > C) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta \le C/2 - 1 \\ (2\theta + 2 - C)^2/2 & \text{se } C/2 - 1 < \theta \le (C-1)/2 \\ 1 - (C - 2\theta)^2/2 & \text{se } (C-1)/2 < \theta \le C/2 \\ 0 & \text{se } C/2 < \theta. \end{cases}$$

Assuma que C=1.68 e faça os gráficos.

c) Observe nos gráfico que em algumas regiões o ϕ_2 tem mais poder que o ϕ_1 e em outras regiões o contrário acontece.

d) Uma opção é rejeitar $H_0 : \theta = 0$ também quando $X_1 > 1$ ou $X_2 > 1$. Nesse caso o tamanho continua o mesmo do ϕ_2 mas você rejeita em mais situações. Então seria mais poderoso que ϕ_2.

5. Resolvemos em aula

6. a) O teste mais poderoso para esse teste alternativo será o de região crítica dada por

$$A^* = \left\{ \mathbf{x}; \frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} \ge k \right\}$$

.

$$\frac{L_1}{L_0} \ge k \Leftrightarrow \sum x_i^2 \ge \log\left[k(\sigma_1^2/\sigma_0^2)^{n/2}\right]\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right)^{-1} = c$$

Assim, o teste MP acima terá região crítica dada por

$$A^* = \left\{ \sum x_i^2 \ge c \right\}$$

.

Como o teste acima vale para qualquer valor de σ_1^2 , ele também será o teste UMP.

b) Observe que

$$\sum \left(\frac{X_i}{3}\right)^2 \sim \chi^2_{(9)}$$

e

$$\alpha = P_{H_0}\left(\sum X_i^2 \geq c\right) = P_{H_0}\left(\sum \left(\frac{X_i}{3}\right)^2 \geq \frac{c}{9}\right)$$

Dessa forma, basta encontrarmos $c/9$ com o comando $qchisq(0.95, 9)$.

$$\frac{c}{9} = 16.91898 \rightarrow c = 152.2708.$$

Segue que a função poder é dada por

$$\beta(\sigma^2) = P\left(X \geq \frac{152.2708}{\sigma^2}\right)$$

em que $X \sim \chi^2_{(9)}$.

7. a) Fazendo a razão de verossimilhanças encontramos que rejeita-se H_0 se $\overline{x} > \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$. Para $\alpha = 0.05$ temos que $c = 1.645$.

$$\beta(\mu) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > 1.645 - \frac{\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > 1.645 - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}\right)$$

b) Nesse caso rejeita-se H_0 se $|\overline{x}| > \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$. Para $\alpha = 0.05$ temos que $c = 1.96$.

$$\beta(\mu) = P\left(-1.96 - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma} \leq Z \leq 1.96 + \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}\right)$$

Use o R para fazer os gráficos.

8. Uma a.a. $X_1, \ldots, X_n$ é retirada de uma população Pareto com densidade

$$f(x|\theta, \nu) = \frac{\theta\nu^\theta}{x^{\theta+1}} I_{\nu,\infty}(x), \ \ \theta > 0, \ \ \nu > 0.$$

a) $\hat{\nu} = x_{(1)}$ e

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\log\left(\prod x_i / x_{(1)}^n\right)} = \frac{n}{T}$$

b)

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \left(\frac{T}{n}\right)^n e^{-T+n}.$$

Observe que $\frac{\partial}{\partial T}\log\lambda(\mathbf{x}) = (T/n) - 1$. Assim, $\lambda(\mathbf{x})$ é crescente para $T \leq n$ e decrescente para $T \geq n$. Ou seja, existe um c_1 e um c_2 tal que $\lambda(\mathbf{x})$ é grande se $T \geq c_1$ ou $T \leq c_2$.

9. Não Fazer

10. Não fazer