MAT02023 - Inferência A

Lista 7 - Consistência e Eficiência

Exercício 1 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Poisson(\lambda)$. Considere que queremos estimar $\tau(\theta) = P(X = 0) = e^{-\theta}$. Defina a estatística $S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e o estimador W tal que

$$W(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, \text{ se } X_1 = 0 \text{ ou} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Encontre um estimador melhor do que W baseado em S.

Exercício 2 Prove o Teorema de Rao-Blackwell, que diz: se $W(\boldsymbol{X})$ é um estimador não viesado para $\tau(\theta)$, então $\widehat{\theta} = E\left(W|S\right)$ é não viesado para $\tau(\theta)$ e $Var(\widehat{\theta}) \leq Var\left(W\right)$.

Exercício 3 Para os dados do exercício 1 acima, utilize o teorema de Lehmann-Scheffé para mostrar que $\overline{X}$ é ENVVUM para λ.

Exercício 4 Prove que consistência forte de estimadores implica em consistência fraca.

Exercício 5 Mostre que se $lim_{n\to\infty} Var\left[W_n(\boldsymbol{X})\right] = 0$ e $lim_{n\to\infty} Viés\left[W_n(\boldsymbol{X})\right] = 0 \Rightarrow W_n(\boldsymbol{X})$ é consistente.

Exercício 6 Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória, onde $X_j \sim Uniforme(0, \theta)$, para todo $j = 1, \cdots, n$, $\theta \in \Theta = (0, \infty)$.

a) Seja $X_{(n)} = \max(X_1, \cdots, X_n)$. Mostre que $X_{(n)}$ é um estimador consistente fraco para θ;

b) Considere $Y_n = 2\overline{X}$. Verifique se Y_n é consistente para θ.

Exercício 7 Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória, onde $X_j \sim Uniforme(0, \theta)$, para $j = 1, \ldots, n$. Mostre que $W(\boldsymbol{X}) = \left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right)^{\frac{1}{n}}$ é um estimador consistente para θe^{-1}.
Dica: Use $W^*(\boldsymbol{X}) = \log(W(\boldsymbol{X}))$ e a Lei Fraca dos Grandes Números.

Exercício 8 Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória, onde X_j, para $j = 1, \ldots, n$, possui função densidade de probabilidade dada pela expressão abaixo

$$f_X(x) = (1 - \theta) + \frac{\theta}{2\sqrt{x}} x^{\theta - 1} I_{[0,1]}(x),$$

onde $\theta \in [0, 1]$.

a) Mostre que $\overline{X}$ é um, estimador viciado para θ e calcule o seu vício;

b) Verifique se $\overline{X}$ é um estimador assintoticamente não viciado para θ;

c) Verique se $\overline{X}$ é um estimador consistente para θ.

Exercício 9 Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória, onde $E(X_j) = \mu$ e $Var(X_j) = \sigma^2$, para todo $j = 1, \ldots, n$, σ^2 finita. Verifique se $\overline{X}$ and S^2 são estimadores consistentes de, respectivamente, μ e σ^2.
Dica: Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ é uma a.a., onde cada X_j possui função densidade de probabilidade $f_X(\cdot)$ e $\mathbb{E}|X_j|^p < \infty$, para algum inteiro positivo p e $j = 1, \cdots, n$. Então, para $1 \leqslant k \leqslant p$,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^k \longrightarrow \mathbb{E}(X^k).$$

Exercício 10 Explique o significado de:

a) Viés, ou vício de um estimador;

b) Eficiência;

c) ENVVUM;

d) Desigualdade de Crámer-Rao;

e) Consistência forte;

f) Consistência fraca;

g) Estimador assintóticamente não viesado;

h) Eficiência assintótica;

Exercício 11 Comente o que significa, para a inferência pontual, o teorema de Rao-Blacwell.

Exercício 12 Qual a utilidade do Teorema de Lehmann-Scheffé?

Exercício 13 Suponha que $X_1; \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória da distribuição Normal com média desconhecida $\theta \neq 0$ e variância conhecida σ^2. Utilize o Método Delta para determinar a distribuição assintótica de $\overline{X}^3$.

Exercício 14 Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória da distribuição Exponencial com parâmetro β. A densidade de probabilidade é dada por $f(x|\beta) = \beta \exp\{-\beta x\} I_{(0,\infty)}(x)$,

a) Encontre $\hat{\beta}_n$, o estimador de máxima verossimilhança para β.

b) Se n é grande, a distribuição de $\hat{\beta}_n$ será aproximadamente Normal com média β. Mostre que a variância desta distribuição Normal será β^2/n.

c) Use o Método Delta para encontrar a distribuição assintótica de $1/\hat{\beta}_n$.

d) Mostre que $1/\hat{\beta}_n = \overline{X}$ e utilize o Teorema Central do Limite para determinar a distribuição assintótica de $\hat{\beta}_n$.

Exercício 15 Seja Y_n uma variável aleatória com distribuição χ^2_n. É possível mostrar que quando o tamanho amostral n é grande, a formulação $(Y_n - n)/\sqrt{2n}$ terá aproximadamente distribuição Normal (0,1).

a) Mostre que $\frac{(Y_n - n)}{\sqrt{2n}} = \sqrt{n}\left(\frac{Y_n}{n\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

b) Considere o estimador $W_n(X) = \frac{Y_n}{n\sqrt{2}}$. Qual a distribuição assintótica de W_n.

c) Considere a função $g(u) = \sqrt{u}$, consequentemente $g'(u) = 1/2\sqrt{u}$. Determine a distribuição assintótica de $g[W_n(X)]$.

Exercício 16 Seja Y_n uma variável aleatória com distribuição Poisson(n). Para uma amostra grande, temos que a distribuição de $(Y_n - n)/\sqrt{n}$ será aproximadamente $N(0, 1)$. Considere a função $g(u) = u^2$. Obtenha a distribuição assintótica de $g(Y_n/n)$.
Dica: Considere resultados similares ao que foi feito nos itens (a) e (b) da Questão 14.

Exercício 17 Qual a diferença entre a Informação de Fisher Observada e a Esperada?

Exercício 18 Indique o enunciado do Teorema de Lehmann–Scheffé. Comente sobre as suposições e resultados.