

## MAT02026 - Inferência B

### LISTA 3 - TESTES UMP, FUNÇÃO PODER E TRV

**Exercício 1** Suponha que a proporção  $p$  de itens defeituosos, em uma grande população de itens, seja desconhecida. Deseja-se testar as seguintes hipóteses  $H_0 : p = 0,2$  versus  $H_1 : p \neq 0,2$ . Considere que uma amostra aleatória de 20 itens seja retirada desta população e denote  $Y =$  número de itens defeituosos na amostra. O seguinte procedimento de teste será usado: Rejeitar  $H_0$  se  $Y \geq 7$  ou  $Y \leq 1$ .

- Determine a função poder deste teste.
- Calcule o valor da função poder para os seguintes pontos  $p = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$ . Faça o gráfico.
- Determine o tamanho do teste, ou seja, o valor de  $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta)$ .

**Exercício 2** Seja  $X_1, \dots, X_{10}$  uma amostra aleatória de tamanho  $n = 10$  tal que  $X_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$  onde  $P(X_i = 1) = \theta = 1 - P(X_i = 0)$ . Considere as hipóteses  $H_0 : \theta \leq 1/2$  contra  $H_1 : \theta > 1/2$ . Assuma a seguinte regra de teste: Rejeitar  $H_0$  se  $\sum X_i \geq 6$ .

- Determine a função poder do teste.
- Calcule a função poder para os seguintes pontos  $p = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$ . Faça o gráfico.
- Determine o tamanho do teste, ou seja, o valor de  $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta)$ .

**Exercício 3** Considere a variável aleatória  $X$  com a seguinte densidade  $f(x) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$ . Para testar as hipóteses  $H_0 : \theta \leq 1$  versus  $H_1 : \theta > 1$ , uma única observação ( $X_1$ ) foi amostrada e o seguinte critério de rejeição foi adotado: rejeitar  $H_0$  se  $X_1 > 1/2$ .

- Encontre a função poder deste teste.
- Determine o tamanho do teste.

**Exercício 4** Suponha que  $X_1, \dots, X_n$  é uma amostra aleatória tal que  $X_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ . Calcule  $\lambda(X)$  e determine o critério de rejeição para o TRV (Teste da Razão de Verossimilhanças) considerando as hipóteses  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  versus  $H_1 : \theta > \theta_0$ , em que  $\theta_0$  é um valor conhecido especificado pelo pesquisador.

**Exercício 5** Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra obtida a partir da distribuição Exponencial com parâmetro  $\theta$ .

- Encontre o TRV para testar  $H_0 : \theta = 1$  versus  $H_1 : \theta \neq 1$ .
- Se uma amostra de tamanho  $n = 5$  observasse os seguintes valores  $\mathbf{x} = \{0.8; 1.3; 1.8; 0.9; 1\}$ , qual seria a sua conclusão se escolhermos a constante  $c = 0.5$ .

**Exercício 6** Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória da distribuição  $N(\mu_x, 9)$  e considere  $Y_1, \dots, Y_m$  uma amostra aleatória da distribuição  $N(\mu_y, 25)$ . Assuma que essas duas amostras são independentes.

- a) Encontre o TRV para  $H_0 : \mu_x = \mu_y$  versus  $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$ . Dica: Determine a distribuição de  $\bar{X} - \bar{Y}$ .
- b) Se você observar  $n = 9$ ,  $\sum_{i=1}^9 x_i = 3.4$ ,  $m = 16$ ,  $\sum_{i=1}^{16} y_i = 4.3$ . Qual seria a sua decisão considerando  $c = 0.5$ .

**Exercício 7** Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória da distribuição Gama(3,  $\lambda$ ). Encontre o TRV para as hipóteses  $H_0 : \lambda = \lambda_0$  versus  $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$ , onde  $\lambda_0$  é um valor positivo e especificado pelo pesquisador.

**Exercício 8** Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória da densidade

$$f(x/\theta) = \frac{2x}{\theta} I_{(0,\theta]}(x),$$

onde  $\theta > 0$ . Encontre o TRV para as hipóteses  $H_0 : \theta \geq \theta_0$  versus  $H_1 : \theta < \theta_0$ , onde  $\theta_0$  é um valor positivo e especificado pelo pesquisador.

**Exercício 9** Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória da variável  $X \sim \text{Geométrica}(\theta)$ .

- a) Encontre o TRV para as hipóteses  $H_0 : \theta = \theta_0$  contra  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ .
- b) Encontre o teste uniformemente mais poderoso (UMP) para testar  $H_0 : \theta = \theta_0$  versus  $H_1 : \theta = \theta_1$ , em que  $\theta_0 < \theta_1$  são especificados pelo pesquisador.
- c) Encontre o teste UMP para  $H_0 : \theta = 0.3$  versus  $H_1 : \theta = 0.5$ .
- d) Dado o teste UMP calculado na letra (c), considere que  $n = 5$  e  $\alpha = 0.04$ , qual o critério de rejeição? Qual o erro tipo II? Se a amostra observada fosse  $x = \{4, 5, 3, 2, 5\}$  qual a sua decisão?
- e) Gere artificialmente, no software R, uma amostra de  $n = 100$  de uma distribuição geométrica com parâmetro  $\theta = 0.5$ . Dado o teste UMP calculado na letra (b) e  $\alpha = 0.04$ , qual o critério de rejeição? Qual o erro tipo II? Compare com o resultado encontrado na letra (d).

**Exercício 10** Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da distribuição  $N(\mu, 1)$ .

- a) Encontre o teste UMP para as hipóteses  $H_0 : \mu = 0$  contra  $H_1 : \mu = 1$ .
- b) Suponha que  $n = 9$  e  $\alpha = 0,05$ . Qual é a região crítica do teste obtido em (a).
- c) Faça o gráfico da função poder da letra (b).

**Exercício 11** Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória da variável  $X$  com a seguinte função densidade:

$$f(x/\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}, \text{ em que } \theta > 0.$$

- a) O teste UMP para  $H_0 : \theta = 1$  versus  $H_1 : \theta > 1$  rejeitará  $H_0$  se  $[\sum_{i=1}^n -\log(x_i) \leq a]$  onde  $a$  é uma constante. Mostre este resultado.
- b) Sendo  $n = 2$  e  $\alpha = [1 - \log(2)]/2$  qual seria a região crítica? Dica: se  $X \sim \text{Beta}(\theta, 1)$  então  $-\log(X) \sim \text{Exp}(\theta)$ .

**Exercício 12** Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória obtida da distribuição Poisson( $\theta$ ). Encontre o teste UMP para as hipóteses  $H_0 : \theta = \theta_0$  versus  $H_1 : \theta = \theta_1$ , considere que  $\theta_0 < \theta_1$

**Exercício 13** Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória obtida da distribuição  $N(0, \sigma^2)$ .

- a) Encontre o teste UMP para  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  versus  $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ .
- b) Sendo  $\sigma_0^2 = 1$ ,  $\sigma_1^2 = 2$ ,  $n = 2$  e  $\alpha = 0.05$ , qual seria a região crítica?
- c) Gere artificialmente, no software R, uma amostra de  $n = 10$  da distribuição normal com parâmetros ( $\mu = 0, \sigma^2 = 2$ ). Dado o teste UMP calculado na letra (a), as hipóteses  $\sigma_0^2 = 1$ ,  $\sigma_1^2 = 2$  e  $\alpha = 0.04$ , qual o critério de rejeição? Qual o erro tipo II? Qual a sua decisão dado essa amostra?
- d) Refaça o item anterior, mas utilize uma amostra de tamanho  $n = 100$ . Compare com o resultado encontrado na letra (c).

**Exercício 14** O que é 'valor  $p$ '?

**Exercício 15** O que é nível descritivo amostral?

**Exercício 16** O que é nível de significância?

**Exercício 17** Seja  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. uniforme( $\theta, \theta + 1$ ). Para testar  $H_0 : \theta = 0$  versus (vs.)  $H_1 : \theta > 0$ , temos dois testes concorrentes:

$$\begin{aligned}\phi_1(X_1) : & \text{Rejeita } H_0 \text{ se } X_1 > 0.95, \\ \phi_2(X_1) : & \text{Rejeita } H_0 \text{ se } X_1 + X_2 > C,\end{aligned}$$

- a) Encontre o valor de  $C$  para o qual  $\phi_2$  tenha o mesmo tamanho que  $\phi_1$ .
- b) Calcule a função poder de cada teste. Desenhe a função poder de cada teste.
- c)  $\phi_2$  é mais poderoso que  $\phi_1$ ?
- d) Mostre como encontrar um teste que tenha o mesmo tamanho de  $\phi_2$ , mas que seja mais poderoso que  $\phi_2$ .

**Exercício 18** Para amostras de tamanho  $n = 1, 4, 16, 64, 100$  de uma população normal com média  $\mu$  e variância conhecida  $\sigma^2$ , faça o gráfico da função poder dos seguintes testes da razão de verossimilhança (TRV's). Tome  $\alpha = 0.05$ .

- a)  $H_0 : \mu \leq 0$  vs.  $H_1 : \mu > 0$ .
- b)  $H_0 : \mu = 0$  vs.  $H_1 : \mu \neq 0$ .

**Exercício 19** Uma a.a.  $X_1, \dots, X_n$  é retirada de uma população Pareto com densidade

$$f(x|\theta, \nu) = \frac{\theta \nu^\theta}{x^{\theta+1}} I_{\nu, \infty}(x), \quad \theta > 0, \quad \nu > 0.$$

- a) Encontre os EMV's de  $\theta$  e  $\nu$ .
- b) Mostre que o TRV

$$H_0 : \theta = 1, \nu \text{ desconhecido}, \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq 1, \nu \text{ desconhecido},$$

tem região crítica da forma  $\{x : T(x) \leq c_1 \text{ ou } T(x) \geq c_2\}$ , em que  $0 < c_1 < c_2$  e

$$T = \log \left[ \frac{\prod_{i=1}^n X_i}{(\min_i X_i)^n} \right].$$

**Exercício 20** Suponhamos que temos duas amostras de variáveis aleatórias independentes:  $X_1, \dots, X_n$  são  $\exp(\theta)$  e  $Y_1, \dots, Y_n$  são  $\exp(\mu)$ . Encontre o TRV de  $H_0 : \theta = \mu$  vs.  $H_1 : \theta \neq \mu$ .

**Exercício 21** Um caso especial da família de distribuições *normal* é quando a média e a variância são relacionadas, como por exemplo a família  $N(\theta, a\theta)$ . Se estamos interessados em testar esse relacionamento, independente do valor de  $\theta$ , nos deparamos com um problema chamado problema do parâmetro “nuisance”.

- a) Encontre o TRV de  $H_0 : a = 1$  vs.  $H_1 : a \neq 1$  baseado em uma amostra  $X_1, \dots, X_n$  de uma família  $N(\theta, a\theta)$ , em que  $\theta$  é desconhecido.
- b) Um problema similar ocorre quando a família é  $N(\theta, a\theta^2)$ . Assim, se  $X_1, \dots, X_n$  são i.i.d.  $N(\theta, a\theta^2)$ , quando  $\theta$  é desconhecido, encontre o TRV de  $H_0 : a = 1$  vs.  $H_1 : a \neq 1$ .