UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

MAT02023 - INFERÊNCIA A - 2019/1

Plano Aula 21

Markus Stein

21 May 2019

Estatísticas Suficientes

- **Definição de Suficiência**: (Notas de aula, definição 2.16) Se a distribuição condicional de uma amostra $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ dado uma estatística $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}) = (T_1(\boldsymbol{X}), \ldots, T_r(\boldsymbol{X}))$ **não depende de** θ, então chamamos $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ de **estatística suficiente**.

Observações
1. A própria amostra $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ é sempre uma estatística suficiente. Assim como a amostra ordenada $\big(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}\big)$.
2. No caso multi paramétrico temos $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$.
3. Na definição acima usamos uma estatistica r-dimensional $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}) = (T_1(\boldsymbol{X}), \ldots, T_r(\boldsymbol{X}))$, que chamamos de estatística conjuntamente suficiente e r pode ser diferente de k. Para $r = 1$ denotamos $T(\boldsymbol{X})$.

Exemplo 1: Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aletória de X, em que $X \sim Bernoulli(\theta)$. Verifique se $T = \sum_{i=1}^n X_i$ é uma estatística suficiente para θ.

Exemplo 2: Considere o exemplo 1 com $n = 3$ e $T_2 = X_1 + 2X_2 + X_3$, verifique se T_2 é uma estatística suficiente para θ.

Como verificar se uma estatística é suficiente?

- **Teorema**: Se $f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x})$ é a p.d.f (ou p.m.f) de X e $g_{\boldsymbol{\theta}}(t)$ a f.d.p (ou f.m.p) de $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$. Assim $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ é uma estatística suficiente para $\boldsymbol{\theta}$ se, para todo $\boldsymbol{x}$ no espaço amostral, a razão $f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x})/g_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}))$ for constante em relação à $\boldsymbol{\theta}$.
  Provar!!! (Notas de aula, teorema 2.7)

Como encontrar uma estatística suficiente?

- **Teorema da Fatoração** (de Neyman): (Casella e Berger, Teorema 6.2.6) Uma estatística $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ é suficiente para $\boldsymbol{\theta}$ se, e somente se, a distribuição de $\boldsymbol{X}$ pode ser fatorada como
  $$f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}) = g_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}))\, h(\boldsymbol{x}).$$
  Prova(?)

Tarefa 1: Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Poisson(\theta)$, encontre uma estatística suficiente para θ.

Tarefa 2: Começar a lista de exercícios 5 para entregar.
