

Plano Aula 25

Markus Stein

11 November 2019

TRV considerações finais

Distribuições amostrais derivadas da distribuição *Normal*

- **Exemplo 1:** Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ uma a. a. de $X \sim \text{Normal}(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ uma a.a. de $Y \sim \text{Normal}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, tal que \mathbf{X} e \mathbf{Y} são independentes. Encontre o TRV para testar:
 - $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ contra $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ assumindo que $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$;
 - (Behrens-Fisher problem) $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ contra $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ assumindo que $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$;
 - $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ contra $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$.
- **Exemplo 2:** (Teste *t* pareado) Seja $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ uma a.a. de $(X, Y) \sim \text{Normal}_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ uma a.a. de $Y \sim \text{Normal}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Use o TRV para testar $H_0 : \mu_X = \mu_Y$. Dica: mostre que $W_i = X_i - Y_i \sim \text{Normal}(\mu_W, \sigma_W^2)$.

Modelos discretos

- **Exemplo aula passada:** Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ uma a.a. de $X \sim \text{Bernoulli}(\pi_1)$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ uma a.a. de $Y \sim \text{Bernoulli}(\pi_2)$, tal que \mathbf{X} e \mathbf{Y} são independentes. Encontre o TRV para testar $H_0 : \pi_1 = \pi_2$ contra $H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$.
- **Exemplo 3:** (Equilíbrio de Hardy-Weinberg) Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ uma a. a. de $X \sim \text{Multinomial}(N, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$. Use o TRV para testar $H_0 : \pi_1 = \pi_2 = \pi_3$.

Teste Qui Quadrado (χ^2)

- **Exemplo 4:** (Tabelas $r \times c$) Suponha que temos uma tabela de contingência $r \times c$ com n indivíduos independentemente selecionados, sendo n_{ij} o número de unidades classificadas na linha i e na coluna j , para todo $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, c$. Seja π_{ij} a probabilidade de um indivíduo ser classificado na linha i e coluna j , tal que $\pi_{ij} \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \pi_{ij} = 1$.
 - Encontre o TRV para testar $H_0 : \pi_{ij} = a_i b_j$, para algum $a_i > 0$ e $b_j > 0$ tais que $\sum_{i=1}^r a_i = 1$ e $\sum_{j=1}^c b_j = 1$, contra a alternativa $H_1 : \pi_{ij} \neq a_i b_j$ para pelo menos
 - Compare o teste do item (a) com o teste qui quadrado de independência, para testar se a variável da linha e da coluna são independentes.

Teste Exato de Fisher

- **Exemplo 5:** (Tabela 2×2 restrita) Seja $S_1 \sim \text{Binomial}(n_1, \pi_1)$ independente de $S_2 \sim \text{Binomial}(n_2, \pi_2)$. Para testar as hipóteses $H_0 : \pi_1 = \pi_2$ contra $H_1 : \pi_1 > \pi_2$:
 - Mostre que sob H_0 temos que $S = S_1 + S_2$ é estatística suficiente e $S_1 | S = s \sim \text{Hipergeométrica}(n_1 + n_2, n_1, s)$.
 - Como calcular o valor p (condicional) para esse teste?

Leitura: Ler seções 8.2.2 e 8.3.5 do livro Casella e Berger.

Tarefa: Fazer lista 5 para entregar.
