Lista 4

Prof. Marcio Valk
Disciplina: Inferência B

1. Uma caixa contém 2 moedas. Uma apresenta cara com probabilidade 0,5 (equilibrada) e a outra apresenta cara com probabilidade 0,6 (viesada). Uma delas é escolhida aleatoriamente e lançada 3 vezes. Deseja-se saber se a moeda selecionada é a equilibrada ou a viesada.

   a) Defina um teste para decidir entre $H_0 : \theta = 0.5$ e $H_1 : \theta = 0.6$.

   b) Calcule as probabilidades de erro tipo I e II.

2. Em 1000 lançamentos de uma moeda, foram observadas 560 caras e 440 coroas. É razoável assumir que a moeda é equilibrada?

3. Em uma determinada cidade o número de acidentes com automóveis em dado ano segue a distribuição de Poisson. Nos últimos anos a média do número de acidentes por ano foi 15, e este ano foi 10. É correto afirmar que o número de acidentes está diminuindo?

4. Seja $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. uniforme$(\theta, \theta + 1)$. Para testar $H_0 : \theta = 0$ versus (vs.) $H_1 : \theta > 0$, temos dois testes concorrentes:

$$\phi_1(X_1): \text{ Rejeita } H_0 \text{ se } X_1 > 0.95,$$
$$\phi_2(X_1): \text{ Rejeita } H_0 \text{ se } X_1 + X_2 > C,$$

   a) Encontre o valor de C para o qual ϕ_2 tenha o mesmo tamanho que ϕ_1.

   b) Calcule a função poder de cada teste. Desenhe a função poder de cada teste.

   c) ϕ_2 é mais poderoso que ϕ_1?

   d) Mostre como encontrar um teste que tenha o mesmo tamanho de ϕ_2, mas que seja mais poderoso que ϕ_2.

5. Seja $X_1, \ldots, X_n$ a.a. de uma v.a. X com função de densidade dada por

$$f(x) = \theta x^{\theta - 1}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0.$$

   a) Mostre que o teste mais poderoso para testar $H_0 : \theta = 1$ vs. $H_1 : \theta = 2$ rejeita H_0, se e somente se, $\sum_{i=1}^{n} - \log x_i \leq a$, em que a é uma constante.

   b) Sendo $n = 2$ e $\alpha = (1 - \log 2)/2$, qual é a região crítica?

6. Seja $X_1, \ldots, X_n$ a.a. de uma v.a. X com função de densidade $N(0, \sigma^2)$.

   a) Encontre o teste uniformemente mais poderoso (UMP) para testar $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs. $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

   b) Seja $\alpha = 0.05$, $n = 9$ e $\sigma_0^2 = 9$. Faça o gráfico da função poder.

7. Para amostras de tamanho $n = 1, 4, 16, 64, 100$ de uma população normal com média μ e variância conhecida σ^2, faça o gráfico da função poder dos seguintes testes da razão de verossimilhança (TRV's). Tome $\alpha = 0.05$.

   a) $H_0 : \mu \leq 0$ vs. $H_1 : \mu > 0$.

   b) $H_0 : \mu = 0$ vs. $H_1 :\neq 0$.

8. Uma a.a. $X_1, \ldots, X_n$ é retirada de uma população Pareto com densidade

$$f(x|\theta,\nu) = \frac{\theta\nu^\theta}{x^{\theta+1}} I_{\nu,\infty}(x), \;\; \theta > 0, \;\; \nu > 0.$$

   a) Encontre os EMV's de θ e ν.

   b) Mostre que o TRV

$$H_0 : \theta = 1, \; \nu \text{ desconhecido}, \quad vs \quad H_1 : \theta \neq 1, \; \nu \text{ desconhecido},$$

   tem região critica da forma $\{x : T(x) \leq c_1 \; ou \; T(x) \geq c_2\}$, em que $0 < c_1 < c_2$ e

$$T = \log\left[\frac{\prod_{i=1}^n X_i}{(\min_i X_i)^n}\right].$$

9. Suponhamos que temos duas amostras de variáveis aleatórias independentes: $X_1 \ldots, X_n$ são $\exp(\theta)$ e $Y_1 \ldots, Y_n$ são $\exp(\mu)$. Encontre o TRV de $H_0 : \theta = \mu$ vs. $H_1 : \theta \neq \mu$.

10. Um caso especial da família de distribuições *normal* é quando a média e a variância são relacionadas, como por exemplo a família $N(\theta, a\theta)$. Se estamos interessados em testar esse relacionamento, independente do valor de θ, nos deparamos com um problema chamado problema do parâmetro "nuisance".

   a) Encontre o TRV de $H_0 : a = 1$ vs. $H_1 : a \neq 1$ baseado em uma amostra $X_1, \ldots, X_n$ de uma família $N(\theta, a\theta)$, em que θ é desconhecido.

   b) Um problema similar ocorre quando a família é $N(\theta, a\theta^2)$. Assim, se $X_1, \ldots, X_n$ são i.i.d. $N(\theta, a\theta^2)$, quando θ é desconhecido, encontre o TRV de $H_0 : a = 1$ vs. $H_1 : a \neq 1$.