MAT02026 - Inferência B

Lista 6 - TH e IC Bayesianos

Exercício 1 Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma a. a. de $X \sim Normal(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ uma a.a. de $Y \sim Normal(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, tal que $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ são independentes. Encontre o TRV para testar:

a) $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ contra $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ assumindo que $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$;

b) *(Behrens-Fisher problem)* $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ contra $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ assumindo que $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$;

c) $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ contra $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$.

Exercício 2 *(Teste t pareado)* Seja $(X_1, Y_1), \ldots (X_n, Y_n)$ uma a.a. de $(X, Y) \sim Normal_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ uma a.a. de $Y \sim Normal(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Use o TRV para testar $H_0 : \mu_X = \mu_Y$. Dica: mostre que $W_i = X_i - Y_i \sim Normal(\mu_W, \sigma_W^2)$.

Exercício 3 Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma a.a. de $X \sim Bernoulli(\pi_1)$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ uma a.a. de $Y \sim Bernoulli(\pi_2)$, tal que $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ são independentes. Encontre o TRV para testar $H_0 : \pi_1 = \pi_2$ contra $H_0 : \pi_1 \neq \pi_2$.

Exercício 4 *(Equilíbrio de Hardy-Weinberg)* Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma a. a. de $X \sim Multinomial(N, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ Use o TRV para testar $H_0 : \pi_1 = \pi_2 = \pi_3$.

Exercício 5 *(Tabelas $r \times c$)* Suponha que temos uma tabela de contingência $r \times c$ com n indivíduos independentemente selecionados, sendo n_{ij} o número de unidades classificadas na linha i e na coluna j, para todo $i = 1, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, c$. Seja π_{ij} a probabilidade de um indivíduo ser classificado na linha i e coluna j, tal que $\pi_{ij} \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \pi_{ij} = 1$.

a) Encontre o TRV para testar $H_0 : \pi_{ij} = a_i b_j$, para algum $a_i > 0$ e $b_j > 0$ tais que $\sum_{i=1}^r a_i = 1$ e $\sum_{j=1}^c b_j = 1$, contra a alternativa $H_1 : \pi_{ij} \neq a_i b_j$ para pelo menos um par (i, j).

b) Compare o teste do ítem (a) com o teste qui quadrado para independência, para tesar se a variável da linha e da coluna são independentes.

Exercício 6 *Teste Exato de Fisher (Tabela 2×2 restrita)* Seja $S_1 \sim Binomial(n_1, \pi_1)$ independente de $S_2 \sim Binomial(n_2, \pi_2)$. Para testar as hipóteses $H_0 : \pi_1 = \pi_2$ contra $H_1 : \pi_1 > \pi_2$:

a) Mostre que sob H_0 temos que $S = S_1 + S_2$ é estatística suficiente e $S_1 | S = s \sim$ *Hipergeométrica*$(n_1 + n_2, n_1, s)$.

b) Calcule o valor p (condicional) para o teste exato de Fisher.

c) Compare com o valor p do TRV assintótico.

d) Compare com os valores p do TRV e do teste qui quadrado do exercício 5.

Exercício 7 Considere variações dos exercícios acima para outras distribuições como $Poisson(\lambda)$, $Exponencial(\lambda)$, $Gama(\alpha, \beta)$, $Beta(\alpha, \beta)$, $Uniforme(0, \theta)$, ...