MAT02026 - Inferência B

Lista 4 - TRV assintótico. IC como testes, valor p e RVM

Exercício 1 Seja X_1 uma única observação obtida da distribuição $Beta(\theta, 1)$

a) Mostre que X_1^θ é uma quantidade pivotal.

b) Construa um intervalo com 95% de confiança utilizando a quantidade pivotal X_1^θ.

c) Assuma *a piori* $\theta \sim Gama(\alpha = 1, \beta)$, encontre um intervalo $1 - \alpha$ de credibilidade para θ. Compare os intervalos.

d) Comente sobre as suposições para construirmos intervalos segundo as duas abordagens.

e) Teste de hipóteses frequentistas e bayesianos também podem ser construídos com base nos intervalos de confiança e de credibilidade, respectivamente. Gere uma amostra de tamanho $n = 1$ da distribuição $Beta(1, 5; 1)$ e teste a hipótese $H_0 : \theta = 1$ contra $H_1 : \theta \neq 1$.

f) Calcule o valor p para os testes acima. Justifique os cálculos e interprete os valores p.

Exercício 2 Quiz sobre valor p.

a) Qual o significado do valor p na prática? Como a ciência tem utilizado o valor p para criar suas teorias? Cite exemplos.

b) Porque o uso do valor p tem sido muito criticado recentemente?

c) Qual sua conclusão sobre o problema. Indique alternativas ao valor p.

Exercício 3 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$

a) Se μ é desconhecido e σ^2, mostre que $Z = \sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)/\sigma$ é um teste de Wald para $H_0 : \mu = \mu_0$.

b) Se σ^2 é desconhecido e μ é conhecido, encontre a Estaistica de Wald para testar $H_0 : \sigma = \sigma_0$.

Exercício 4 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição Exponencial (θ), suponha que queremos testar $H_0 : \theta = 1$.

a) Mostre que o TRV rejeita H_0 quando $\sum X_i < c$.

b) Qual o valor de c para $\alpha = 0.05$.

c) Construa o teste assintótico da razão de verossimilhança e o teste de Wald e compare com o teste exato.

d) Gere aleatoriamente uma amostra de $n = 20$ e $\theta = 1.5$ de uma distribuição exponencial. Calcule os testes de Wald, verosmilhança assintótico e teste de verossimilhança exato para essa amostra. Repita o experimento 100 vezes e indique quantas vezes rejeita-se a H_0 a um nível de significância de 5%. Compare os resultados.

Exercício 5 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição de Poisson (λ).

a) Seja $\lambda_0 > 0$, encontre um teste de Wald de tamanho α para

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \text{ versus } H_1 : \lambda \neq \lambda_0$$

b) Calcule o TRV para as hipóteses acima.

c) Calcule o TRV assintótico para as hipóteses acima.

d) Calcule o Teste de Wald para as hipóteses acima.

e) Seja $\lambda = 1$ e $\lambda_0 = 0.8$, $n = 20$ e $\alpha = 0.05$. Simule $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de uma distribuição de Poisson (λ) e calcule os testes acima. Repita esse procedimento 100 vezes, calcule quantas vezes a hipótese nula foi rejeitada. Qual o valor do do erro tipo I para cada um dos testes?

Exercício 6 Verifique se as as distribuicoes dos exercícios 3, 4 e 5 possuem razão de verossimilhança monótona.

Exercício 7 Construa o teste uniformemente mais poderoso de tamanho α para:

1. Exercício 3 letra a, em que $H_0 : \mu \leq \mu_0$.
2. Exercício 4, em que $\theta \leq 1$.
3. Exercício 5 em que $\lambda \leq \lambda_0$.