MAT02023 - Inferência A

Lista 4 - Método de Bayes

Exercício 1 Leia os capítulos 1 e 2 da apostila do professor Paulo Justiniano.

Exercício 2 Considere uma urna com 5 bolas, das quais algumas são vermelhas e as restantes são verdes. Seja θ a proporção de bolas vermelhas na urna. Assuma a *priori* $\pi(\theta) = 1/6$ para $\forall\theta$. Uma bola foi retirada com reposição da urna e sua cor foi observada. Seja $X = 1$ se a bola retirada é vermelha e 0 caso contrário.

a) Qual o espaço paramétrico Θ?

b) Suponha que a bola retirada era vermelha. Qual a distribuição a *posteriori*?

c) Seja Y uma segunda bola retirada com reposição da urna. Construa a preditiva a *posteriori* $f(y \mid x)$.

d) Suponha que foram retiradas 2 bolas com reposição da urna e se observou Z=número de bolas vermelhas entre as duas. Construa a *posteriori* $\pi(\theta \mid z = 1)$. Compare os resultados com o item (c).

Exercício 3 Considere um experimento onde $f(x;\theta) = 2x\theta^{-2}$, em que $0 < x < \theta$ e $0 < \theta < 1$. Uma amostra de tamanho 3 foi coletada e observado os seguintes valores: $x = (0.1; 0.2; 0.25)$.

a) Usando *priori* uniforme calcule e interprete $\pi(\theta \leq 0.3 \mid x)$.

b) Usando uma distribuição a *priori* $\pi(\theta) = 3\theta^2$, $\theta \in [0, 1]$, calcule e interprete $\pi(\theta \leq 0.3 \mid x)$.

c) Compare os resultados dos itens anteriores.

Exercício 4 Considere uma v.a. X com distribuição geométrica tal que $f(x;\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}$. Considere a *priori* $\pi(\theta = 1/4) = \pi(\theta = 1/2) = \pi(\theta = 3/4) = 1/3$.

a) Determine *a posteriori* considerando que foi observado $X = 2$. Repita para $X = x$.

b) Repita o item anterior utilizando *priori* $Beta(\alpha, \beta)$.

Exercício 5 Uma amostra $X_1, \ldots, X_n$ de n clientes de uma plano de saúde será selecionada aleatoriamente e será observado se o plano de saúde foi acionado alguma vez ou não par cada cliente. A incerteza inicial sobre a probabilidade p de que o cliente acesse o plano de saúde possui uma distribuição $Beta(\alpha, \beta)$. Dada a probabilidade p de que o cliente acesse o plano de saúde pode-se assumir que $X_1, \ldots, X_n$ são iid com distribuição $Bernoulli(p)$, onde $X_i = 1$, se o i-ésimo cliente acessou o plano e $X_i = 0$ caso contrário.

a) Qual a distribuição a *priori* de p?

b) Qual a distribuição preditiva a *priori*?

c) Qual a distribuição a *posteriori* de p?

d) Qual a distribuição preditiva a *posteriori* para uma nova observação?

e) Indique as distribuições em (b), (c) e (d) supondo que em uma amostra de 12 clientes 9 acionaram o plano de saúde em algum momento nos casos $\alpha = \beta = 5$, $\alpha = \beta = 1$ e $\alpha = \beta = 0.2$.

f) Indique as distribuições em (c) e (d) supondo que em uma amostra de 100 clientes 75 acionaram o plano de saúde em algum momento nos casos $\alpha = \beta = 5$, $\alpha = \beta = 1$ e $\alpha = \beta = 0.2$.

Exercício 6 O que é uma hiperpriori?

Exercício 7 O que é uma *priori* de referência ou pouco informativa? Explique a diferença entre a *priori* de Bayes Laplace e a *priori* de Jeffreys?

Exercício 8 Deseja-se estimar: a proporção de residentes de determinada cidade que concordam com a construção de um presídio na cidade. Para isto, observou-se uma amostra de 100 pessoas, das quais 26 concordavam com a construção do presídio.

a) Antes de observar a amostra, um especialista afirmou que essa proporção se comportava conforme uma distribuição Beta com esperança *a priori* de 0,20 e variância *a priori* de 0,0064. Encontre os parâmetros desta *priori* e construa *a posteriori*.

b) Calcule a estimativa de MVG e de Bayes.

Exercício 9 Deseja-se estimar o diâmetro médio de determinada peça produzida em certa fábrica. A experiência indica que esse diâmetro é normalmente distribuído com variância 4 cm^2. Um engenheiro escolheu como priori para μ uma $N(a = 30; b^2 = 16)$, pois acredita ser praticamente impossível que esse diâmetro seja menor que 18 cm ou maior que 42 cm. Uma amostra de 12 peças foi observada e se obteve $\overline{X} = 32cm$.

a) Qual a preditiva *a priori* e *a posteriori*?

b) Qual a distribuição *a posteriori*?

c) Calcule a estimativa de MVG e de Bayes.

Exercício 10 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d. com $X_i \sim Poisson(\lambda)$. Além disso, assuma que λ tenha uma distribuição $Gama(\alpha, \beta)$. Qual a distribuição preditiva *a priori* e qual a distribuição preditiva *a posteriori*?