MAT02026 - Inferência B

Gabarito Lista 4 - TRV assintótico, IC como testes, valor p e RVM

Exercício 1 a) Resolvido no gabarito da prova 1.

b) Resolvido no gabarito da prova 1.

c) Resolvido no gabarito da prova 1. Comentar sobre confiança $\times$ credibilidade.

d) Falar das suposições de modelo e amostragem.

e) Em breve...

f) Em breve...

Exercício 2 a)

b)

c)

Exercício 3 a) Uma vez que $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ é o desvio padrão estimado (ou erro padrão?) de $\overline{X}$, então a estatística é uma estatística do tipo Wald.

b) O EMV de σ^2 para um valor fixado de μ é dado por $\hat{\sigma}^2_\mu = \frac{\sum_i (x_i-\mu)^2}{n}$.

(* Obs.: Se W_n é EMV, $1/\sqrt{I_n(W_n)}$ é um erro padrão para W_n. Alternativamente, usamos $1/\sqrt{\hat{I}_n(W_n)})$ em que $\hat{I}_n(W_n)$ é a informação de Fisher observada, $\hat{I}_n(W_n) = -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L(\theta)\Big|_{\theta=W_n}$).

A informação observada de Fisher é dada por

$$-\frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2}\left(-\frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{\hat{\sigma}^2_\mu}{2\sigma^2}\right)\Bigg|_{\sigma^2=\hat{\sigma}^2_\mu} = \frac{n}{2\hat{\sigma}^2_\mu}.$$

Então, usando o Método Delta, a variância de $\hat{\sigma}_\mu = \sqrt{\hat{\sigma}^2_\mu}$ é dada por $Var(\hat{\sigma}_\mu) = \frac{\hat{\sigma}^2_\mu}{8n}$, então uma estatística do tipo Wald é dada por

$$\frac{\hat{\sigma}_\mu - \sigma_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2_\mu}{8n}}}.$$

Exercício 4 a) Para o TRV precisamos calcular $\lambda(\boldsymbol{x})$. Note que, como o H_0 é hipótese simples, o EMV restrio é dado por $\hat{\theta}_0 = 1$ e o EMV irrestrito é $\hat{\theta} = 1/\overline{X}$ (verificar!). Assim

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta)} = \frac{L(\hat{\theta}_0)}{L(\hat{\theta})} = \frac{\hat{\theta}_0^n e^{-\hat{\theta}_0\sum_{i=1}^n x_i}}{\hat{\theta}^n e^{-\hat{\theta}\sum_{i=1}^n x_i}} = \frac{\frac{1}{1}^n e^{-\frac{1}{1}\sum_{i=1}^n x_i}}{\frac{1}{\overline{x}}^n e^{-\frac{1}{\overline{x}}\sum_{i=1}^n x_i}} = \frac{e^{-n\overline{x}}}{\frac{1}{\overline{x}}^n e^{-n}}.$$

Então, a região de rejeicao A_1 para testar $H_0 : \theta \leq 1$ pode ser reescrita como

$$A_1 = \{\lambda(\boldsymbol{x}) < c\} \Leftrightarrow A_1 = \left\{\overline{x}^n e^{-\overline{x}n} < c^*\right\}.$$

A segunda forma de A_1 é claramente uma função de X e usando propriedades da função *Gama* podemos mostrar também que $\sum_{i=1}^n X_i \leq c^{**}$

b) Verifique que $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim Gama(n, \theta)$, então basta encontrar c tal que

$$0,05 = P(Y < c)$$

.

c) TRV assintótico:

Para o teste assintótico usamos o resultado (Teorema de Wilks)

$$\lambda(\boldsymbol{x}) \sim \chi^2_{(1)},$$

(porque 1 grau de liberdade?) quando $n \to \infty$. Assim $Z = \overline{x}^n e^{-\overline{x}} \sim \chi^2_{(1)}$ quando o tamanho da amostra cresce indefinidamente. ...

Teste de Wald:

Usando as propriedades do EMV, temos que sob H_0 $\frac{\widehat{\theta}-\theta_0}{\sqrt{Var(\widehat{\theta})}} \sim Normal(0,1)$, quando $n \to \infty$.

Lembrando que, sob certas condições de regularidade, $Var(\widehat{\theta}) = I_n(\theta)$ (vide exercício 3). ...

d) Em breve...

Exercício 5 a)

b)

c)

d)

e)

Exercício 6

Exercício 7 1.

2.

3.