UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

MAT02023 - INFERÊNCIA A - 2019/1

Plano Aula 27

Markus Stein

11 June 2019

- *...aula passada...*: Como encontrar um ENVVUM usando a Desigualdade de Crámer-Rao?

Exemplo 1: Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Poisson(\lambda)$. Verifique se $T(\boldsymbol{X}) = \overline{X}$ é ENVVUM para λ usando a Desigualdade de Crámer-Rao.

Exemplo 2: Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Uniforme(0, \theta)$. Encontre o Limite Inferior de Crámer-Rao. Verifique se $T(\boldsymbol{X}) = X_{(n)}$ é ENVVUM para θ.

- *Obs. 1*: Nem sempre o limite é atingido! Se não for atingido, como podemos encontrar um ENVVUM?

Estimadores baseados em Estatísticas Suficientes

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X tal que $f(\boldsymbol{x}; \theta)$ seja sua f.d.p (ou f.m.p). Considere $W = W(\boldsymbol{X})$ um estimador para $\tau(\theta)$ e $S = S(\boldsymbol{X})$ uma estatística suficiente para θ. Note que

$$\widehat{\theta} = E\left(W|S\right)$$

é um estimador para $\tau(\theta)$ ($\widehat{\theta}$ é função de S que não depende de θ).

- **Teorema de Rao-Blackwell**: (Notas de Aula, pg. 70)
  Se $W(\boldsymbol{X})$ é um estimador não viesado para $\tau(\theta)$, então $\widehat{\theta} = E\left(W|S\right)$ é não viesado para $\tau(\theta)$, $E(\widehat{\theta}) = \tau(\theta)$, e $Var(\widehat{\theta}) \leq Var\left(W\right)$.

Prova: Use o fato de que para duas variáveis aleatórias X e Y, $E(X) = E\left(E\left(X|Y\right)\right)$ e $Var(X) = Var\left(E\left(X|Y\right)\right) + E\left(Var\left(X|Y\right)\right)$.

- *Obs. 2*: Dizemos que $\widehat{\theta}$ é uniformemente melhor do que W.
- *Obs. 3*: Qualquer estimador W que não é função de umas estatística suficiente S pode ser melhorado utilizando o teorema acima.

Exemplo 3: Para os dados do exemplo 1 acima, considere que queremos estimar $\tau(\theta) = P(X = 0) = e^{-\theta}$. Defina a estatística $S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e o estimador W tal que $W(\boldsymbol{X}) = 1, se\ X_1 = 0$ ou $W(\boldsymbol{X}) = 0, caso\ contrário$. Encontre um estimador melhor do que W baseado em S.

Estimadores baseados em Estatísticas Suficientes e Completas

- **Teorema de Lehmann-Scheffé**: (Notas de Aula, pg. 71)
  Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X tal que $f(\boldsymbol{x}; \theta)$ seja sua f.d.p (ou f.m.p). Considere $W = W(\boldsymbol{X})$ um estimador não viesado para $\tau(\theta)$ e $C = C(\boldsymbol{X})$ uma estatística suficiente e completa para $\tau(\theta)$, então $\widehat{\theta} = E\left(W|C\right)$ é um **ENVVUM** para $\tau(\theta)$.
  Prova?

Exemplo 4: Para os dados do exemplo 1 acima, utilize o teorema de Lehmann-Scheffé para mostrar que $\overline{X}$ é ENVVUM para λ.

Tarefa 1: Fazer a lista de exercícios 6 para entregar.

Tarefa 2: Ler páginas 68 a 72 das "Notas de Aula".