UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

MAT02023 - INFERÊNCIA A - 2019/1

Plano Aula 19

Markus Stein

14 May 2019

. . . continuação Família Exponencial

- Definições Bolafrine e Sandoval × Notas de aula/Casella e Berger.

- Exercícios da aula 18, quem fez?
- E os teoremas, alguma tentativa de provar?
- **Exercício 1:** Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$, verifique se a distribuição de $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ pertence a família exponencial multiparamétrica.

Relembrando função escore e informação de Fisher (individual e total)

Para uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n$ de X, onde $X \sim f(x;\theta)$, então

- **Função Escore** $U(\theta)$: seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ definimos a função escore como

$$U(\theta) = \frac{\partial\, log\, f(\boldsymbol{x};\theta)}{\partial \theta}$$

  - Para uma única variável aleatória X, podemos definir a **função escore individual** $U_1(\theta) = \frac{\partial\, log\, f(x;\theta)}{\partial \theta}$.
  - **Exercício 2**: Mostrar que a função escore total é dada pela soma dos escores individuais, $U(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, log\, f(x_i;\theta)}{\partial \theta}$!!!
  - **Teorema**: Mostrar que $E\left[U_1(\theta)\right] = 0$ para $f(\cdot)$ pertencente à família exponencial.

  - Como ficaria no caso multiparamétrico para uma amostra aleatória $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$? E no caso multiparamétrico $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$?
  - **Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV)**: se $f(\cdot)$ é diferenciável para todo θ, então o EMV $\widehat{\theta}_{EMV}$, é obtido como
    * problema de otimização: $\widehat{\theta}_{EMV}$ é o ponto de máximo de $log\, f(x;\theta)$, ou

    * solução de equação linear: $\widehat{\theta}_{EMV}$ é a solução de $U(\theta) = 0$

- **Informação de Fisher** (individual e total) esperada
  - Informação total: $I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial\, log\, f(\boldsymbol{X};\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]$;
  - Informação individual: $I_1(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial\, log\, f(X;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]$;
  - **Exercício 3:** Mostrar que $I(\theta) = n \times I_1(\theta)$

Tarefa 1: Fazer os exercícios acima.

Tarefa 2: Ler seções 1 e 2 do capítulo 6 do livro "Statistical Methods and Scientific Inference".

Tarefa 3: Ler "slides aula 13" para a próxima aula.

Aula 18

Família exponencial

- Definição 1: (**Família Exponencial Unidimensional**) (Bolfarine e Sandoval, definição 2.4.1, pg. 25) Dizemos que a distribuição da variável aleatória X, com f.m.p ou f.d.p. dada por $f(x;\theta)$, pertence à família exponencial unidimensional, se pudermos escrever f como

$$f(x;\theta) = e^{c(\theta)\,T(x)+d(\theta)+S(x)}\,I_A(x),$$

  onde
  - $c(\cdot)$ e $d(\cdot)$ são funções reais de θ;
  - $T(\cdot)$ e $S(\cdot)$ são funções reais de x;
  - A **não depende** de θ.

Exercício 1: Verificar qual(is) das seguintes distribuições pertence(m) à família exponencial. i) $X \sim Bernoulli(\theta)$, $X \sim Normal(\mu, 1)$, $X \sim Uniforme(0, \theta)$.

- Teorema 1: Família exponencial **unidimensional** para uma **amostra aleatória** $X_1, \ldots, X_n$ de X. (Bolfarine e Sandoval, teorema 2.4.1).
  Provar:

- Definição 2: (**Família Exponencial k Dimensional** (Bolfarine e Sandoval, definição 2.4.2, pg. 27) Dizemos que a distribuição da variável aleatória X, com f.m.p ou f.d.p. dada por $f(x;\boldsymbol{\theta})$, pertence à família exponencial k dimensional, se pudermos escrever f como

$$f(x;\boldsymbol{\theta}) = e^{\sum_{j=1}^{k} c_j(\theta)\,T_j(x)+d(\theta)+S(x)}\,I_A(x).$$

- Teorema 2: Família exponencial k **dimensional** para uma **amostra aleatória** (Notas de Aula, definição 2.13, pg. 37). Provar!!!

Informação de Fisher na Família Exponencial

Teorema 3: Seja X uma variável aleatória tal que sua f.d.p. ou f.m.p. $f(x;\theta)$ pertence à família exponencial, e a **informação individual de Fisher** dada por

$$I_1(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial}\log f(X;\theta)\right]^2\right\},$$

então vale a **igualdade da informação**

$$E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X;\theta)\right]^2\right\} = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X;\theta)\right]$$

Prova: