UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

MAT02023 - INFERÊNCIA B - 2019/2

Plano Aula 2 e 3

Markus Stein

14 August 2019

Intervalos de Confiança (IC)

"O que podemos dizer sobre a variabilidade de um estimador $\widehat{\theta}$?"

- **Exemplo 1**: Como podemos usar o resultado abaixo para contruir intervalos de confiança?

Teorema: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes tal que $X_i \sim Normal(\mu, \sigma^2)$. Então:
i. $\overline{X}$ e S^2 são independentes;
ii. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$;
iii. $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t_{(n-1)}$.
Provar!!!

Definição (**Estimador Intervalar**): Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória e $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ uma possível realização. Assuma $\theta \in \Theta$ o parâmetro de interesse. Se existem estatísticas $L(\boldsymbol{X})$ e $U(\boldsymbol{X})$ tal que $L(\boldsymbol{x}) \leq U(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$, então $[L(\boldsymbol{X}); U(\boldsymbol{X})]$ é denominado **estimador intervalar**.

- Estimador intervalar + Coeficiente de confiança = **Intervalo de Confiança**.

Definição (**Probabilidade de Cobertura** - Casella e Berger, definição 9.1.4.): Seja $[L(\boldsymbol{X}); U(\boldsymbol{X})]$ um estimador intervalar para θ, definimos $P_\theta\left[L(\boldsymbol{X}) < \theta < U(\boldsymbol{X})\right]$ como a probabilidade de que o intervalo (aleatório) cubra o verdadeiro parâmetro θ, denominada **probabilidade de cobertura**.

Definição (**Coeficiente de Confiança** - Casella e Berger, definição 9.1.5.): Seja $[L(\boldsymbol{X}); U(\boldsymbol{X})]$ um estimador intervalar para θ, definimos como **coeficiente de confiança** a menor (*infimum*) das probabilidades de cobertura. Ou seja, $inf_\theta \;\; P_\theta\left[L(\boldsymbol{X}) < \theta < U(\boldsymbol{X})\right]$.

- Em geral, $inf_\theta \;\; P_\theta(L(\boldsymbol{X}) < \theta < U(\boldsymbol{X})) = 1 - \alpha$ para um α próximo de 0.
- Nesse caso dizemos que $IC(\theta; 1-\alpha) = [L(\boldsymbol{X}); U(\boldsymbol{X})]$ é um intervalo $(1-\alpha) \times 100\%$ para θ.

- **Exemplo 2**: IC para população Normal. Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$, com σ^2 conhecido. A estatística suficiente minimal $\sum_{i=1}^n X_i$ é uma quantidade pivotal? E $\overline{X}$? Encontre uma quantidade pivotal com base em $\overline{X}$.

Método da quantidade pivotal

Definição (**Quantidade pivotal**): $Q(\boldsymbol{X}; \theta)$ (Notas de aula, definição 1.2.).

- **Exemplo 3**: Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim Uniforme(0, \theta)$. A estatística suficiente minimal $X_{(n)}$ é uma quantidade pivotal? Encontre uma quantidade pivotal com base em $X_{(n)}$.

Como encontrar IC usando quantidades pivotais?

- Se para $Q(\boldsymbol{X};\theta)$ temos $P(q_1 \geq Q \geq q_2) = 1-\alpha$ se e somente se $P(t_1 \leq \theta \leq t_2) = 1-\alpha$. Então, dizemos que $IC(\theta; 1-\alpha) = [t_1; t_2]$ é um intervalo $(1-\alpha) \times 100\%$ para θ.
- Interpretação quando $\boldsymbol{X}$ *versus* $\boldsymbol{x}$! **Estimador intervalar** $\times$ **estimativa intervalar**.
- Existem infinitos intervalos, **escolhemos o de menor tamanho**.

- **continuação Exemplo 2**: Encontrar ICs para μ e σ^2 com base nas quantidades pivotais do Teorema acima.
  - E quando temos interesse em duas populações, como calcular IC para duas médias μ_1 e $\mu 2$ (todas as combinações)? E para σ_1 e σ_2?

Tarefa 1: Ler "Plano Aula 3" e refazer os exemplos acima.

Tarefa 2: Fazer lista 1 para entregar.

Leitura: "Uma senora toma chá" capítulo 12.
