MAT02026 - Inferência B

Gabarito Lista 1 - Intervalos de Confiança e Intervalos de Credibilidade

Exercício 1

Defina $A = \{L(x) \leq \theta\}$ e $B = \{U(x) \geq \theta\}$. Verifique que $(A \cup B) = 1$ e $(A \cap B) = (L(x) \leq \theta \leq U(x))$.

Exercício 2

a) Use que o EMV para β é $X_{(n)} = max(X_i)$. Como sabemos a distribuição de cada X_i, sabemos também a do $\max(X_i)$. Assim, $X_{(n)}/\beta$ é uma quantidade pivotal e

$$0.05 = \left(\frac{X_{(n)}}{\beta} \leq q\right) = \left(X_{(n)} \leq q\beta\right) = \left(\frac{q\beta}{\beta}\right)^{\alpha_0 n} = q^{\alpha_0 n}$$

Assim, $q = 0.05^{-\alpha_0 n}$ e $0.95 = \left(\frac{X_{(n)}}{\beta} > q\right) = \left(\frac{X_{(n)}}{q} > \beta\right)$. Portanto

$[\frac{X_{(n)}}{0.05^{-\alpha_0 n}}]$ é a cota superior desejada.

b) Use $\hat{\alpha} = \frac{1}{n}\left[\sum_i \left(\log(X_{(n)} - \log(X_i)\right)\right]^{-1}$. $\hat{\alpha} = 12.59$ e $X_{(n)} = 25$. Assim o IC fica $(0, 25.43)$.

Exercício 3

a) $X - \theta \sim U[-1/2, 1/2]$. Assim $(q_1 < X - \theta < q_2) = q_2 - q_1$. Logo escolhendo $q_2 = 1/2 - \frac{\alpha}{2}$ e $q_1 = -1/2 + \frac{\alpha}{2}$ segue que o IC dado por $[X - 1/2 + \frac{\alpha}{2}; X + 1/2 - \frac{\alpha}{2}]$ tem $(1-\alpha)100\%$ de confiança para θ.

b) Observe que X/θ tem densidade $f(t) = 2t$, $0 \leq t \leq 1$. Assim $(q_1 < X/\theta < q_2) = q_2^2 - q_1^2$. Escolha $q_1 = \sqrt{\alpha/2}$ e $q_2 = \sqrt{1 - \alpha/2}$.

Exercício 4

Use $\frac{\overline{X} - \theta}{S/\sqrt{n}}$ como pivô. (É possível usar outro pivô?)

Exercício 5

a) $Y = -((log(X))^{-1}$, $f_Y(y) = \frac{\theta}{y^2} e^{-\theta/y}$, $0 < y < \infty$. Assim $P(1/2Y \leq \theta \leq 1/Y) = P(1/2\theta \leq Y \leq 1/\theta) = \int_{1/2\theta}^{1/\theta} f_Y(y)dy = 0.2325$

b) $X^\theta \sim U(0,1)$. Assim, $(q_1 \leq X^\theta \leq q_2) = q_2 - q_1$.

c) $\left[\frac{\log(0.975)}{\log X}; \frac{\log(0{,}025)}{\log X}\right]$.

Exercício 6

$$\left[\overline{X} - 1,96\sqrt{1/n}; \overline{X} + 1,96\sqrt{1/n}\right]$$

Exercício 7

a) $\lambda \sum_{i=1}^{10} X_i \sim Gama(10, 1)$.

b) $\left[\frac{5{,}425}{\sum_{i=1}^{10} X_i}; \frac{15{,}705}{\sum_{i=1}^{10} X_i} \right]$

c) $2\lambda \sum_{i=1}^{10} X_i \sim Gama(10, 1/2)$.

Exercício 8

Exemplo 5.4.2 do livro Bolfarine e Sandoval

Exercício 9

a) Com base na teoria de verossimilhança, quando $n \to \infty$ temos que (eficiência assintótica)

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda) \to Normal\left(0, I^{-1}(\lambda)\right).$$

Para $\hat{\lambda} = \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $I^{-1}(\lambda) = nI_1^{-1}(\lambda) = \frac{n}{\lambda}$. Então uma quantidade pivotal assintótica é dada por

$$Q(\boldsymbol{X}, \lambda) = \frac{\overline{X} - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \sim Normal(0, 1).$$

b) Para $g(\hat{\theta}) = \frac{\hat{\theta}}{1-\hat{\theta}}$, segue da simples aplicação do método Delta.

$$\sqrt{n}\left(g(\hat{\lambda}) - g(\lambda)\right) \to Normal\left(0, \frac{(g'(\lambda))^2}{I(\lambda)}\right), \text{ quando } n \to \infty.$$

Exercício 10

- 9.26 do livro Casella e Berger.

  a) Função de verossimilhança: Se $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ é uma amostra aleatória de $X \sim Beta(\theta, 1)$, então para $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ temos que

  $$L(\theta) = f(\boldsymbol{x}; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta)\Gamma(1)} x_i^{\theta-1}(1-x_i)^{1-1} I_{[0,1]}(x_i) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1}.$$

  Obs. 1: Se θ for inteiro é fácil mostrar que $\frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta)\Gamma(1)} = \theta$, e para θ real?

  Obs. 2: Note que $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1} = e^{\log \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1}} = e^{\sum_{i=1}^{n}(\theta-1)\log x_i}$.

  b) Distribuição *a priori*: Se $\theta \sim Gama(r, \lambda)$ então

  $$\pi(\theta) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \theta^{r-1} e^{-\lambda\theta}.$$

c) Distribuição *a posteriori*: Usando o princípio da proporcionalidade

$$
\begin{aligned}
\pi(\theta|\boldsymbol{x}) &\propto \theta^n \, e^{\sum_{i=1}^n (\theta-1)\log x_i} \left[\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\right] \theta^{r-1} \, e^{-\lambda\theta} \\
&\propto \theta^n \, e^{\theta \sum_{i=1}^n \log x_i} \theta^{r-1} \, e^{-\lambda\theta} \\
&= \theta^{n+r-1} \, e^{-(\lambda - \sum_{i=1}^n \log x_i)\theta}.
\end{aligned}
$$

Note que o núcleo da distribuição *a posteriori* tem a forma de uma distribuição *Gama* tal que

$$\theta|\boldsymbol{x} \sim Gama(n+r, \lambda - \sum_{i=1}^n \log x_i).$$

d) Por fim, precisamos encontrar $[t_1, t_2]$ tal que $\int_{t_1}^{t_2} \pi(\theta|\boldsymbol{x})d\theta = 1 - \alpha$.

- 9.29 (a) do livro Casella e Berger Ver exemplo 7.2.14 do mesmo livro para distribuição *a posteriori*, então mostrar como obter o intervalo a partir da distribuição.