UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

MAT02023 - INFERÊNCIA A - 2019/1

Plano Aula 22

Markus Stein

23 May 2019

. . . relembrando aula passada. . . Estatística Suficiente

Exemplo 1: Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Poisson(\theta)$, $0 < \theta < \infty$:
a. Verifique se $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente para θ.
b. Encontre uma estatística suficiente para θ.

Exemplo 2: Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aletória de X, em que $X \sim Uniforme(\theta, \theta + 1)$ e $0 < \theta < \infty$. Verifique se $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente para θ.

- Obs. 1: Toda **função 1 a 1 (injetora) de uma estatística suficiente** é uma estatística suficiente. (Como mostrar?)
- Obs. 2: Suporte da densidade conjunta (**Função indicadora**): Ler Observação 2.5 das 'Notas de aula', página 50.

Estatísticas Suficientes e Mínimas

"Levam ao menor número possível de subconjuntos do espaço amostral."

- Definição **Estatística suficiente minimal**: (Casella e Berger, definição 6.2.11) Uma estatística suficiente $T(\boldsymbol{X})$ é chamada de suficiente e minimal se para qualquer outra estatística suficiente $S(\boldsymbol{X})$, $T(\boldsymbol{x})$ é uma função de $S(\boldsymbol{x})$.

Exemplo 3: (**Partição mínimal**): Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Bernoulli(\theta)$, $0 < \theta < 1$, responda:
a. Para $n = 3$, compare as partições do espaço amostral geradas por $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $T_2(\boldsymbol{X}) = 5\,T + 2$, $T_3(\boldsymbol{X}) = T^2$, $T_4(\boldsymbol{X}) = X_1\,X_2 + X_3$, e $T_5(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$. Qual a candidata a estatística minimal?
b. como mostrar que $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é minimal no caso geral?

- **Teorema da Equivalência**: (Casella e Berger, teorema 6.2.13) Seja $f_\theta(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}; \theta)$ a f.d.p (ou f.m.p) da amostra aleatória $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Suponha que exista a função $T(\boldsymbol{x})$ tal que, para todo par de pontos amostrais $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, a razão $f_\theta(\boldsymbol{x})/f_\theta(\boldsymbol{y})$ é constante em relação a θ se o somente se $T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y})$. Então $T(\boldsymbol{X})$ é uma estatística suficiente e minimal para θ.
  Prova(?)

Exemplo 4: resolva ítem (b) do Exemplo 3 utilizando o Teorema da Equivalência.

Tarefa 1: Ler as Notas de Aula, seção 2.3 (principalmente subseção 2.3.6 para a pŕoxima aula)

Tarefa 2: Fazer a lista de exercícios 5 para entregar.
