MAT02026 - Inferência B

Gabarito Lista 6 - TH e IC Bayesianos

Exercício 1 Considere que $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com distribuição Binomial Negativa (r, θ), $r > 0$ e $0 < \theta < 1$, cuja função de probabilidade é dada por:

$$p(x/r, \theta) = \binom{x + r - 1}{x} \theta^r (1 - \theta)^x$$

Assuma que r é conhecido

a) Usando a distribuição conjugada natural de θ, obtenha a distribuição a *posteriori* de θ.

b) Suponha que foi selecionada uma amostra aleatória dessa população e que obteve $\sum x_i = 70$, sendo $r = 5$ e $n = 10$. Considere as hipóteses: $H_0 : \theta \leq 0.5$ vs $H_1 : \theta > 0.5$ Qual das hipóteses apresenta uma maior probabilidade a *posteriori*, admitindo que possui uma informação "moderada" acerca de θ, a qual é introduzida no modelo por meio de uma distribuição Beta (2,2)?

c) Indique o valor do fator de bayes em favor de H_1. Poderá concluir que existe forte evidência em favor desta hipótese?

Exercício 2 Dezesseis consumidores habituais de comida de uma cadeia de fast food foram recrutados para participar de um estudo cujo objectivo era comparar o sabor de dois tipos de recheio usado num certo tipo de bolo confeccionado com carne de vaca. Um dos conjuntos de dezasseis recheios que foi analisado tinha sido congelado 8 meses atrás e mantido num congelador de elevada qualidade (com alterações de temperatura de menos do que um grau na escala de Fahrenheit) durante todo o período de tempo. Os restantes 16 recheios foram armazenados em congeladores de qualidade média, com variações de temperatura entre 0 e 15 graus Fahrenheit.

Os gestores da cadeia de fast food pretendem verificar se a qualidade do refrigeramento altera o sabor dos recheios e portanto avaliar se valerá a pena o elevado custo associado a uma maior qualidade de refrigeração.

Os produtos são descongelados e cozinhados por um único chef. O planejamento do experimento é feito de forma a que seja "duplamente-cego", i.e., nem os empregados que servem o recheio nem os consumidores têm qualquer conhecimento sobre os produtos que estão a servir (consumir) em qualquer momento. No fim da experiência observa-se que 13 dos 16 consumidores preferiram os recheios que tinham sido congelados no congelador de maior qualidade.

a) Qual é o modelo que você sugere para analisar estes dados? Que pressupostos deve impor?

b) Seja θ a probabilidade de que os consumidores prefiram o produto mais caro. Sejam Beta(0.5, 0.5), Beta(1.0, 1.0) e Beta(2.0, 2.0) três distribuições que refletem diferentes níveis de conhecimento, a priori, relativamente a θ. Obtenha as distribuições a posteriori correspondentes. Para cada uma delas,

- calcule a média, moda e mediana de θ a posteriori. Comente os resultados que obtiver.
- Indique a $P(\theta > 0.6|x)$.
- Calcule o intervalo HPD de 95% de credibilidade para θ.

- Calcule o fator de Bayes para $H_0 : \theta \geq 0.6$ vs. $H_1 : \theta < 0.6$. Faça os comentários que considerar adequados.

Exercício 3 Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição de Poisson(θ), $\theta > 0$. Considere a distribuição Gama(1, 1) como distribuição a priori para θ. Obtenha o intervalo de credibilidade de 90% de igual probabilidade e o intervalo de credibilidade HPD de 90% para θ. Considerando uma amostra aleatória de dimensão $n = 10$ para a $\sum x_i = 6$.

Exercício 4 Numa certa população, seja θ a proporção de indivíduos que têm uma determinada doença. Suponha que se pretende testar a hipótese $H_0 : \theta = 0.2$ contra a hipótese alternativa $H_1 : \theta = 0.3$. Informações anteriores mostram que $P(H_0) = 0.25$. Suponha que se observam n indivíduos verificando-se que x apresentam a doença. Calcule o fator de Bayes a favor de H_0. Para que valores de x é que se tem $P(H_0|x) > P(H_1|x)$?

Exercício 5 Ler o material do blog https://www.countbayesie.com/blog/2016/3/16/bayesian-reasoning-in-the-twilight-zone

Exercício 6 Deseja-se estimar θ: a proporção de residentes de determinada cidade que concordam com a construção de um presídio na cidade. Para isto, observou-se uma amostra de 100 pessoas, das quais 26 concordavam com a construção do presídio.

a) Antes de observar a amostra, um especialista afirmou que essa proporção se comportava conforme uma distribuição Beta com esperança a priori de 0,20 e variância a *priori* de 0,0064. Encontre os parâmetros desta priori e construa a *posteriori*.

b) Calcule a estimativa de MVG e de Bayes.

c) Através do R, encontre o ICs 95% Central e HPD.

d) Seja $H_0 : \theta \leq 0,5$. Qual a probabilidade desta hipótese ser verdadeira, a *posteriori*?

Exercício 7 Deseja-se estimar o diâmetro médio de determinada peça produzida em certa fábrica. A experiência indica que esse diâmetro é normalmente distribuído com variância $4cm^2$. Um engenheiro escolheu como priori para μ uma $N(\mu_0 = 30; \sigma_0^2 = 16)$, pois acredita ser praticamente impossível que esse diâmetro seja menor que 18 cm ou maior que 42 cm. Uma amostra de 12 peças foi observada e se obteve $\overline{x} = 32$cm.

a) Calcule o IC 95% HPD para μ. Calcule também o 1º e 3º quartis.

b) Usando priori $\pi(\mu)$ propocional a 1, repita o item a.

c) Qual seria o IC 95% encontrado pela inferência clássica? Compare com os itens anteriores.

Exercício 8 Seja X o tempo de vida de uma lâmpada (em mil horas) fabricada por a certa companhia. Considera-se que X é uma variável aleatóia com densidade

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

Considere uma priori para θ:

$$\pi(\theta) = 16\theta e^{-4\theta}, \quad \theta > 0.$$

a) Encontre a distribuição a posteriori para θ.

b) Encontre o estimador de Bayes de E(X) e Var(X).