# MAT02023 - Inferência A

## Lista 2 - Continuação de Conceitos de Probabilidade

***Amostra Aleatória***

**Exercício 1** Um dado é lançado $n$ vezes, independentemente. Seja $X_1, \cdots, X_n$ os sucessivos valores das faces. É razoável se pensar que $X_1, \cdots, X_n$ é uma a.a. de uma v.a. $X$.

**(a)** Qual o modelo probabilístico para a v.a. $X$?

**(b)** Qual o modelo estatístico para o experimento?

**(c)** Mostre que $\mathbb{E}X = \mu_1 = 3,5$, $\mathbb{E}X^2 = \mu_2 = 91/6$ e $\mathbb{E}X^4 = \mu_4 = 2275/6$.

**(d)** Obtenha uma distribuição aproximada para $\overline{X}$ e $M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

**(e)** Assuma $n = 12$ e calcule aproximadamente $P(40 \leq \sum_{i=1}^{n} X_i \leq 45)$ e $P(170 \leq \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \leq 190)$.

**(f)** Seja $N_i$ = "num. de vezes em que ocorre a face $i$". Qual a distribuição de $N_i$? Obtenha uma distribuição aproximada para $N_i$.

**Exercício 2** Bolas são sorteadas com reposição de uma urna contendo 1 bola branca e 2 bolas pretas. Denote $X_i = 0$ se a bola retirada no i-ésimo sorteio for branca e $X_i = 1$ se for preta. Considere a amostra aleatória $X_1, \ldots, X_9$:

a) Qual a distribuição conjunta destas nove variáveis aleatórias?

b) Qual a distribuição da soma destas variáveis?

c) Encontre o valor esperado da média amostral.

d) Encontre o valor esperado da variância amostral $S^2$.

**Exercício 3** Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população Exponencial($\lambda$). Especificamente, $X_i$ poderia representar o tempo até a falha (medida em anos) para $n$ equipamentos idênticos colocados em teste.

a) Encontre a distribuição conjunta das variáveis nesta amostra aleatória.

b) Qual é a probabilidade de que todos os equipamentos durem mais de 2 anos?

**Exercício 4** Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma a.a. de uma população $X$ com distribuição Bernoulli com parâmetro $p$.

**(a)** Qual a distribuição conjunta da a.a.?

**(b)** Qual a distribuição de $X_1 + \cdots + X_n$?

**(c)** Qual a distribuição de $\overline{X}$?

**(d)** Para $n = 2$, qual a distribuição de $\sum_{i}^{n}(X_i - p)^2$?

**Exercício 5** Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a. tal que $X_1 \sim f_{\boldsymbol{\theta}}$. Determine a distribuição amostral de $\overline{X}$, quando

**(a)** $X_1 \sim$ Poisson($\lambda$);

**(b)** $X_1 \sim$ Exponencial($\lambda$).

**Exercício 6**

*Calcule a variância e esperança dos seguintes estimadores:*

*a)* $\overline{X}$.

*b)* $S^2$.

### *Função Geradora de Momentos*

**Exercício 7** Encontre a função geradora de momentos de uma variável aleatória $X \sim Poisson(\lambda)$.

**Exercício 8** Encontre a função geradora de momentos de uma variável aleatória $X \sim Exp(\lambda)$.

**Exercício 9** Seja $X$ uma variável aleatória com distribuição de probabilidade $Gama(\alpha, \beta)$. Determine a função geradora de momentos de X.

**Exercício 10** Suponha que X tem distribuição $\chi^2_n$. Mostre que $E(X) = n$ e $Var(X) = 2n$. Sugestão: Use a função geradora de momentos.

**Exercício 11** Considere que $X$ e $Y$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão. Encontre a função geradora de momentos conjunta de $X$ e $Y$.

### *Teoremas Limite*

**Exercício 12** Suponha que uma população tem $\sigma = 2$ e $\overline{X}$ é a média de amostras de tamanho 100. Encontre $l$ tal que $P(-l < \overline{X} - \mu < l) = 0.9$.

**Exercício 13** Um pesquisador deseja estimar a média de uma população usando uma amostra grande o suficiente, tal que temos probabilidade de 0.95 que a média amostral não difira da média populacional por mais de 25% do desvio padrão. Qual deve ser o tamanho da amostra?

**Exercício 14** Seja $\overline{X}$ a média de uma amostra aleatória de tamanho 75 com a seguinte função densidade $f(x) = I(0;1)(x)$. Calcule um valor aproximado para a seguinte probabilidade $P(0.45 < \overline{X} < 0.55)$.

**Exercício 15** Considere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição Bernoulli($p$). Defina $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Qual é a distribuição de $Y$.

b) Seja $n = 100$ e $p = 0.5$, utilize o Teorema Central do Limite para calcular uma aproximação para a seguinte probabilidade $P(47,5 < Y < 52,5)$.

**Exercício 16** Seja $Y \sim Binomial(400, 1/5)$, calcule um valor aproximado para a probabilidade $P(Y/n > 0.25)$.

**Exercício 17** Seja $f(x) = \frac{1}{x^2} I_{(1,\infty)}(x)$ a densidade de uma variável aleatória $X$. Considere uma amostra aleatória de tamanho 72 de uma população ue segue esta distribuição. Calcule, aproximadamente, a probabilidade de que mais de 50 observações da amostra aleatória sejam menores que 3.

**Exercício 18** Prove os seguintes teoremas e corolários:

a) Teorema: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d. com $E(X_i) = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Então para todo $\epsilon > 0$ temos que

$$\lim_{n \to \infty} P(|\overline{X}_n - \mu| < \epsilon) = 1.$$

Isto é, $\overline{X}_n$ converge em probabilidade para $\mu$.

b) Teorema: Seja $f(\ldots)$ uma densidade com média $\mu$ e variância finita $\sigma^2$. Considere $\overline{X}_n$ a média amostral de uma amostra aleatória com tamanho $n$ obtida a partir de $f(\cdot)$. Seja $Z_n$ a seguinte variável aleatória

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sqrt{Var(\overline{X}_n)}}$$

A distribuição de $Z_n$ se aproxima da $N(0,1)$ conforme $n$ tende ao infinito.

c) Teorema: Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população com densidade $f(\cdot)$ com média $\mu$ e variância $\sigma^2$ então

$$E(\overline{X}) = \mu \text{ e } Var(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sigma^2$$

d) Teorema: Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias Normais independentes com médias $\mu_i$ e variâncias $\sigma_i^2$. Então

$$U = \sum_{i=1}^{k} \left( \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

possui distribuição $\chi^2_k$.

e) Corolário: Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória da distribuição Normal com média $\mu$ e variância $\sigma^2$ então $U = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$ tem distribuição $\chi^2_n$.

f) Teorema: Se $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ é uma amostra aleatória da distribuição $N(0,1)$, então:

   i) $\overline{Z} \sim N(0, 1/n)$
   ii) $\overline{Z}$ e $\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z})^2$ são independentes
   iii) $\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z})^2 \sim \chi^2_{n-1}$

g) Teorema: Se $Z \sim N(0,1)$ e $U \sim \chi^2_k$ são variáveis aleatórias independentes, então

$$\frac{Z}{\sqrt{U/k}} \sim t_k.$$