UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

MAT02023 - INFERÊNCIA A - 2019/1

Plano Aula 6

Markus Stein

28 March 2019

Método da máxima verossimilhança

- **Likelihood** - Definição dicionário Cambridge: the chance that something will happen. ("Is it probability?")

- Muitas funções de verossimilhança satisfazem **condições de regularidade**, tal que o EMV é obtido pela solução da equação $\frac{\partial}{\partial\theta}L(\theta;\boldsymbol{x})\Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \mathbf{0}$. (ainda é necessário verificar se $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}L(\theta;\boldsymbol{x})\Big|_{\theta=\hat{\theta}} < \mathbf{0}$)
  - Usualmente maximizamos a **log verossimilhança** $\ell(\theta;\boldsymbol{x}) = logL(\theta;\boldsymbol{x})$, pois o máximo de $L(\theta;\boldsymbol{x})$ é igual ao máximo de $\ell(\theta;\boldsymbol{x})$). (note que *log()* é função estritamente crescente em $(0,\infty)$).

- Situações em que as **condições de regularidade não são verificadas** ou a função de verossimilhança **não possui forma explícita**:

Exemplo 1: (**Uniforme**) Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ amostra aleatória tal que $X_1 \sim Uniforme(0,\theta)$, encontre o estimador de máxima verossimilhança para θ.

Exemplo2: (**Discreto**) Temos uma caixa com bolas brancas e vermelhas. Sabe-se que a proporção θ de bolas vermelhas na caixa é 1/3 ou 2/3. ($\theta \in \Theta = \{1/3, 2/3\}$). Uma uma amostra de tamanho $n = 3$ foi selecionada com reposição e apresenta bola vermelha na primeira extração e branca na segunda e na terceira. Encontre o estimador de máxima verossimilhança para θ.

Exemplo 3: (**Gamma**) Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ amostra aleatória tal que $X_1 \sim Gamma(\alpha,\beta)$, encontre o estimador de máxima verossimilhança para $\boldsymbol{\theta} = (\alpha,\beta)$.

- Princípio da invariância: prova no caso de função $g(\cdot)$ 1:1, Bolfarine e Sandoval (Teorema 3.2.2); caso mais geral, usando **verossimilhança induzida** ver Casella e Berger (Teorema 7.2.10).
  - Invariância funciona no caso multiparamétrico.

Tarefa 1: Reler slides e referências.

Exercício 1: Fazer exemplo 2 e 3 acima. Exercício 2: Espaço paramétrico restrito, Casela e Berger Exemplo 7.2.8
Exercício 3: Caso Multiparamétrico, Exemplo 7.2.11

Tarefa 2: finalizar a lista 2!!!

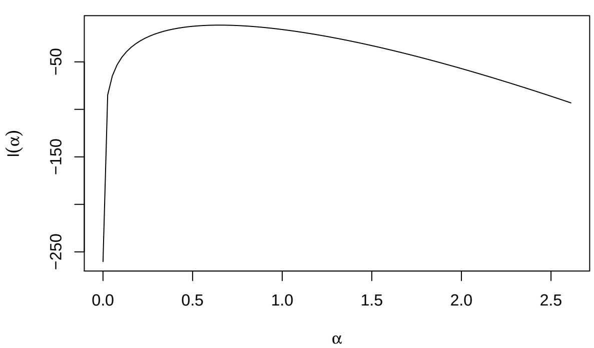
Exemplo EMV Gamma

Função de Verossimilhança da dist. Gamma(alpha, 1)

```
n <- 30
set.seed(123)
x <- rgamma(n, 0.75)          # verdadeiro alpha = 0.75

logl <- function(alpha, x) {
    if (length(alpha) < 1) stop("alpha must be scalar")
    if (alpha <= 0) stop("alpha must be positive")
    return(sum(dgamma(x, shape = alpha, log = TRUE)))
}

npoint <- 101
alphas <- seq(min(x), max(x), length = npoint)
logls <- double(npoint)
for (i in 1:npoint)
   logls[i] <- logl(alphas[i], x)
plot(alphas, logls, type = "l", xlab = expression(alpha), ylab = expression(l(alpha)))
```



EMV Gamma

```
n <- 30
set.seed(123)
x <- rgamma(n, 0.75)          # verdadeiro alpha = 0.75

mlogl <- function(alpha, x) {
    if (length(alpha) < 1) stop("alpha must be scalar")
    if (alpha <= 0) stop("alpha must be positive")
    return(- sum(dgamma(x, shape = alpha, log = TRUE)))
}

out <- nlm(mlogl, mean(x), x = x)
print(out)
```

```
## $minimum
## [1] 11.32858
```

```
##
## $estimate
## [1] 0.6499821
##
## $gradient
## [1] 2.627232e-06
##
## $code
## [1] 1
##
## $iterations
## [1] 5
```