# MAT02023 - Inferência A

## Lista 6 - Avaliação de Estimadores

**Exercício 1** Explique com suas palavras o que é uma estatística suficiente.

**Exercício 2** Explique com suas palavras o que é uma estatística suficiente mínima.

**Exercício 3** Quais são as suposições do Teorema de Famílias Completas para a Família Exponencial. Comente as suposições.

**Exercício 4** Fale sobre a suposição de suficiência no Teorema da Equivalência. Uma estatística pode ser minimal sem ser suficiente?

**Exercício 5** Comente sobre as afirmações abaixo:

a) Se existe uma estatística suficiente para $\theta$, então é minimal se for completa.

b) Uma estatística suficiente e completa é única.

**Exercício 6** Mostre que a seguinte igualdade é válida: $E\left[(T(X)-\theta)^2\right] = Var\left[T(X)\right] + Vicio^2$.

**Exercício 7** Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória, onde $X_j \sim Bernoulli(\theta)$, para todo $j = 1, \cdots, n$. Considere os estimadores

$$\widehat{\theta}_1 = \overline{X} \quad \text{e} \quad \widehat{\theta}_2 = \frac{Y + \frac{\sqrt{n}}{2}}{n + \sqrt{n}},$$

onde $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Encontre:

a) $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_i)$, para $i = 1, 2$;

b) $EQM(\widehat{\theta}_i)$, para $i = 1, 2$.

**Exercício 8** Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória onde $X_j$, para todo $j = 1, \cdots, n$, possui função densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x, \theta) = f_X(x) = e^{-(x-\theta)}, \quad x > \theta, \quad \theta > 0.$$

Sejam

$$\widehat{\theta}_1 = \overline{X} \quad \text{e} \quad \widehat{\theta}_2 = X_{(1)},$$

dois estimadores para $\theta$.

a) Verifique se $\widehat{\theta}_1$ e $\widehat{\theta}_2$ são estimadores não viciados para $\theta$;

b) Encontre e compare os EQM's dos dois estimadores.

**Exercício 9** Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória onde $X_j$, para todo $j = 1, \cdots, n$, possui função densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x, \theta) = f_X(x) = \frac{2x}{\theta^2}, \quad 0 < x < \theta, \quad \theta > 0.$$

Sejam

$$\widehat{\theta}_1 = \overline{X} \quad \text{e} \quad \widehat{\theta}_2 = X_{(n)},$$

dois estimadores para $\theta$.

a) Verifique se $\widehat{\theta}_1$ e $\widehat{\theta}_2$ são estimadores não viciados para $\theta$;

b) Encontre e compare os EQM's dos dois estimadores.

**Exercício 10** Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória, onde $X_j \sim Normal(0, \sigma^2)$, para todo $j = 1, \cdots, n$. Seja $Y^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2$. Considere os estimadores

$$\widehat{\sigma}_c^2 = cY^2.$$

a) Encontre o EQM do estimador acima;

b) Encontre o valor de $c$ que minimiza o $EQM$ em **(a)**.

**Exercício 11** Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória, onde $X_j$, para $j = 1 \cdots, n$, possui função densidade de probabilidade dada pela expressão abaixo

$$f_X(x) = (1 - \theta) + \frac{\theta}{2\sqrt{x}} x^{\theta - 1} I_{[0,1]}(x),$$

onde $\theta \in [0, 1]$.

a) Mostre que $\overline{X}$ é um, estimador viciado para $\theta$ e calcule o seu vício;

b) Verifique se $\overline{X}$ é um estimador assintoticamente não viciado para $\theta$;

c) Verique se $\overline{X}$ é um estimador consistente em média quadrática para $\theta$.

**Exercício 12** Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória, onde $X_j$, para $j = 1 \cdots, n$, possui função densidade de probabilidade dada pela expressão abaixo

$$f_X(x) = \theta x^{\theta - 1} I_{(0,1)}(x).$$

Mostre que $\overline{X}$ é um estimador não viciado para $\tau(\theta) = \frac{\theta}{1+\theta}$.

**Exercício 13** $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória, onde $\mathbb{E}(X_j) = \mu$ e $(X_j) = \sigma^2$, para todo $j = 1, \cdots, n$, $\sigma^2$ finita. Considere os estimadores para a média populacional

$$\widehat{\mu}_1 = \overline{X} \quad \text{e} \quad \widehat{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_n}{2}.$$

a) Verifique se os estimadores são não viciados;

b) Qual dos estimadores é mais eficiente?

c) Analise os estimadores quanto à consistência.

**Exercício 14** Prove o seguinte teorema:

**Teorema 1 (Desigualdade de Cramér-Rao)** *Seja* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *uma amostra da densidade* $f(x/\theta)$. *Considere* $W(x) = W(X_1, \ldots, X_n)$ *como qualquer estimador satisfazendo*

$$\frac{\partial}{\partial\theta}E[W(X)] = \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial\theta}[W(X)f(x/\theta)]dx \quad e \quad Var[W(X)] \geq \infty$$

*Então*

$$Var[W(X)] \geq \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}E[W(X)]\right)^2}{E\left(\left[\frac{\partial}{\partial\theta}logf(X/\theta)\right]^2\right)}.$$

**Exercício 15** Prove o seguite corolário: Se as suposições do teorema anterior estão satisfeitas e além disso $X_1, \ldots, X_n$ são iid com densidade $f(X/\theta)$, então

$$Var[W(X)] \geq \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}E[W(X)]\right)^2}{nE\left(\left[\frac{\partial}{\partial\theta}logf(X_i/\theta)\right]^2\right)}$$

observe que $W(X)$ no numerador é multivariado, isto é, $X = (X_1, \ldots, X_n)$, enquanto $f(X_i/\theta)$ é univariado.

**Exercício 16** Qual a diferença entre consistência forte e consistência fraca?

**Exercício 17** Faça os seguintes exercícios do livro Statistical Inference:

a) 7.9, 7.11 (a), 7.12 (b) e (c), 7.38, 7.40,

**Exercício 18** Seja $X$ uma única observação da distribuição Bernoulli($\theta$). Considere os estimadores $T_1(X) = X$ e $T_2(X) = 1/2$.

a) Os estimadores $T_1(X)$ e $T_2(X)$ são estimadores não-viciados para $\theta$?

b) Calcule o EQM para $T_1(X)$ e $T_2(X)$.

**Exercício 19**

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da densidade $f(x|\theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)}I_{0,\infty}(x)$, em que $\theta > 0$.

a) Qual o estimador de máxima verossimilhança de $1/\theta$?

b) Encontre o limite inferior de Cramér-Rao (LICR) para $e^{-\theta}$.

c) Encontre o LICR para a variância de um estimador não-viciado de $1/\theta$.

**Exercício 20** Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma $Exponencial(\lambda)$.

**(a)** Encontre, se possível, um estimador não viciado de variância uniformemente mínima (ENVVUM) para $1/\lambda$.

**(b)** Encontre, se possível, um ENVVUM para $\lambda$.

**Exercício 21** Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma $Binomial(k, p)$, com $k$ conhecido. Encontre, se possível, um ENVVUM para $P(X = 1)$.

**Exercício 22** Suponha que quando o raio de um círculo é medido, é cometido um erro que tem uma distribuição $N(0, \sigma^2)$. Se forem realizadas $n$ medições independentes, encontre um estimador não viciado da área do círculo. É o melhor não viciado?

**Exercício 23** Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória, onde $X_1 \sim Poisson(\lambda)$, e $\overline{X}$ e $S^2$ estimadores da média e da variância amostral.

a) Prove que $\overline{X}$ é o melhor estimador não viciado de $\lambda$.

b) Prove a identidade $\mathbb{E}(S^2|\overline{X}) = \overline{X}$ e utilize-a para demonstrar explicitamente que $Var(S^2) > Var(\overline{X})$.