MAT02023 - Inferência A

Lista Suplementar

Exercício 1 (Caso Multiparamétrico) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$. Considerando o vetor paramétrico de interesse $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$, responda:

a) qual o estimador pelo método dos momentos (EMM) para $\boldsymbol{\theta}$? (Lista 3, exercício 9)

b) Encontre o estimador de máxima verossimilhança (EMV) para $\boldsymbol{\theta}$. (Lista 3, exercício 9)

c) Assuma que μ e σ^2 são independentes *a priori*, então utilizando a distribuição *a priori* de Jeffreys, encontre:

   (a) a distribuição conjunta *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$ pelo método da proporcionalidade. O núcleo resultante possui a forma de alguma distribuição bivariada conhecida?

   (b) Encontre as distribuições *a posteriori* marginais de $\boldsymbol{\theta}$, $\pi(\mu|\boldsymbol{x})$ e $\pi(\boldsymbol{\sigma^2}|\boldsymbol{x})$.

Exercício 2 Cite diferenças (vantagens ou disvantagens) dos estimadores Bayesianos em relação ao estimador de máxima verossimilhança quanto:

a) a estimação do parâmetro de interesse θ.

b) a comunicação/interpretação dos resultados?

c) a estimação de $g(\theta)$.

Exercício 3 Qual a diferença entre **estimação** e **previsão**? Qual o objetivo de cada problema? Cite exemplos.

Exercício 4 Discuta uma abordagem frequentista para predição/previsão de futuras observações. Cite uma vantagem/desvantagem em relação ao método Bayesiano.

Exercício 5 Qual o melhor estimador pontual Bayesiano?

Exercício 6 (Priori de Jeffreys) Assuma $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Poisson(\theta)$ e considerando a distribuição *a priori* de Jeffreys, encontre a distribuição *a posteriori* para θ.

Exercício 7 (Uso sequencial do Teorema de Bayes) Estamos analisando o número de acidentes em uma rodovia X. Podemos considerar que essa variável segue uma distribuição Poisson de taxa λ. Vamos supor ainda que a distribuição *a priori* para λ é dada por $\lambda \sim Gama(\alpha;\beta)$. Registra-se o número de acidentes em 10 dias consecutivos, $X_1,\ldots,X_{10}$ i.i.d de X:

a) encontre a distribuição *a posteriori* para λ, $\pi(\lambda|\boldsymbol{x})$.

b) Agora suponha que são registrados o número de acidentes em mais 5 dias $\boldsymbol{X^*} = X_1^*,\ldots,X_5^*$. Encontre a distribuição *a posteriori* de λ dado $\boldsymbol{X^*}$, $\pi(\lambda|\boldsymbol{X^*})$.

Exercício 8 (Invariância) Considere uma amostra aleatória de valores $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tais que X_i são i.i.d. $Bernoulli(\theta)$. Suponha que a distribuição *a priori* para *theta* seja $\theta \sim Beta(\alpha,\beta)$, então responda:

a) Encontre os estimadores bayesianos média e moda *a posteriori*.

b) Suponha agora que queremos estimar $g(\theta) = \theta(1-\theta)$. Use como estimador Bayesiano a média *a posteriori*.