MAT02026 - Inferência B

Gabarito Lista 3 - Testes MP e UMP, função poder e TRV

Exercício 1 a) $\beta(p)$ inclui as seguintes expressões:

$$\sum_{y=7}^{20} \binom{20}{y} p^y (1-p)^{20-y} \qquad e \qquad \sum_{y=0}^{1} \binom{20}{y} p^y (1-p)^{20-y}$$

b) $\beta(p) = \{1, 0.39, 0.16, 0.4, 0.75, 0.94, 0.99, 1, 1, 1, 1\}$.

c)

Exercício 2 a) $\beta(p)$ inclui a expressão:

$$\sum_{x=6}^{10} \binom{10}{x} \theta^x (1-\theta)^{10-x}$$

b) $\beta(p) = \{0, 0, 0.01, 0.05, 0.17, 0.38, 0.63, 0.85, 0.97, 0.99, 1\}$.

c) 0,38

Exercício 3 a) $\beta(\theta) = 1 - \frac{1}{2^\theta}$

b) 0.5

Exercício 4 Se $\theta_0 < \overline{X}$, então

$$\lambda(X) = \left(\frac{\theta_0}{\overline{X}}\right)^{\sum X_i} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\overline{X}}\right)^{n-\sum X_i}.$$

Exercício 5 a) Rejeitar H_0 se $((\overline{X})^n \exp\{n(1-\overline{X})\}) < c$ para algum $c \in (0,1)$

b) Não rejeitar H_0.

Exercício 6 a) Rejeitar H_0 se $\exp\{-\frac{1}{2V}W^2\} < c$, onde $V = \frac{9}{n} + \frac{25}{m}$, $W = \overline{X} - \overline{Y}$ e $c \in (0,1)$.

b) Não rejeitar H_0

Exercício 7 Se $\lambda_0 < \hat{\lambda}$ rejeitamos H_0 se $\left(\left(\frac{\lambda_0}{\hat{\lambda}}\right)^{3n} \exp\left(\hat{\lambda} - \lambda_0\right) \sum X_i\right) < c$, onde $c \in (0,1)$ e $\hat{\lambda}$ é o EMV de λ.

Exercício 8 Se $\theta_0 \geq x_{(n)}$ rejeitamos H_0 se $\left(\frac{x_{(n)}}{\theta_0}\right) < c$ onde $c \in (0,1)$ e $x_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Exercício 9

a) Rejeitar H_0 se

$$\left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right)^{n}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\hat{\theta}}\right)^{\sum x_i} < c$$, em que $\hat{\theta}$ é o E

b) $$\sum x_i \le \frac{\ln k - n\log\theta_0 + n\log\theta_1}{\ln(1-\theta_0) - \ln(1-\theta_1)}$$

c) $$\sum x_i \le \frac{\ln c - n\ln 0{,}3 + n\ln 0{,}5}{\ln(1-0{,}3) - \ln(1-0{,}5)}$$

d) ERRO TIPO II = 0,77

$\sum x_i = 19$ $\quad k' = 2$

Como $\sum x_i > c'$, aceita-se H_0

e) $k' = 186$ $\quad \alpha = 0{,}0399$

ERRO TIPO II ≈ 0

Exercício 10

a) $$\bar{X} \geq -\frac{\log k}{n} + \frac{1}{2}$$

b) $\bar{X} > 0{,}54$

Exercício 11

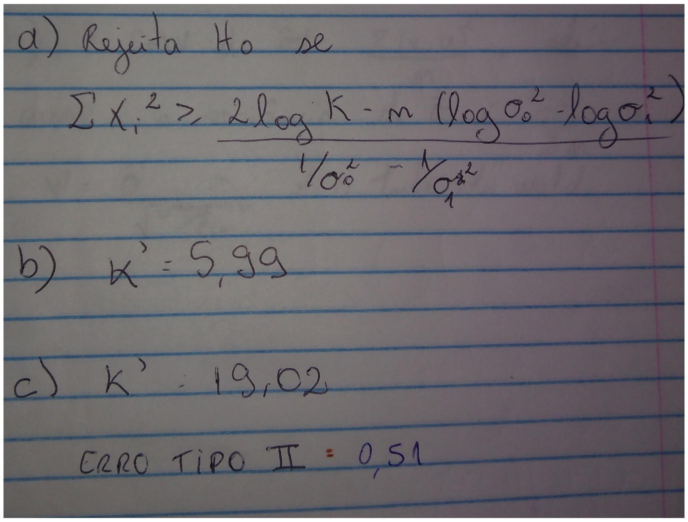
a) $-\sum \log X_i \le n\log 2 - \log k$

b) $-\sum \log X_i \le \log 2$

Exercício 12

$$\sum X_i \geq \frac{\log k - n(\theta_1 - \theta_0)}{\ln(\theta_0) - \ln(\theta_1)}$$

Exercício 13



d) Rejeita H_0 se

$$\sum x_i^2 \geq \frac{2\log k - n(\log\sigma_0^2 - \log\sigma_1^2)}{1/\sigma_0^2 - 1/\sigma_1^2}$$

b) $k' = 5,99$

c) $k' = 19,02$

ERRO TIPO II = 0,51

Exercício 14

Exercício 15

Exercício 16

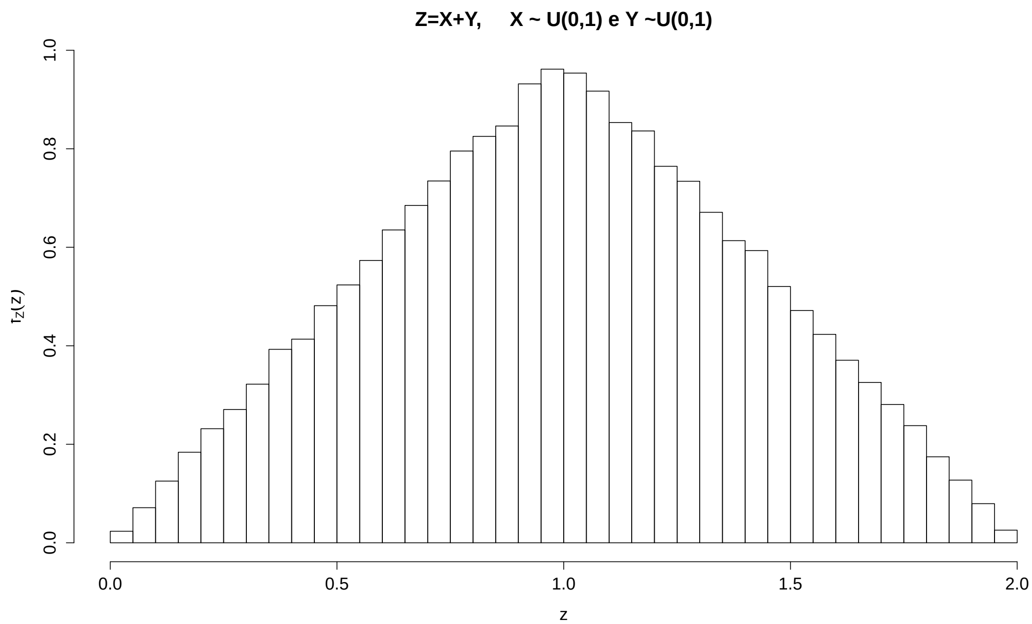
Exercício 17 a) O tamanho de ϕ_1 pode ser obtido diretamente por

$$\alpha = P(X_1 > 0.95) = 0.05.$$

Para calcular o tmanho de ϕ_2 precisamos encontrar a distribuição de $Z = X_1 + X_2$, sendo que $X_1 \sim U(0,1)$ e $X_2 \sim U(0,1)$. Observe na figura (histograma), que foi gerada com o código

```
# Gerando uniformes
x1=runif(100000,0,1)
x2=runif(100000,0,1)
z=x1+x2
hist(z,freq=F,breaks=60,main=expression("Z =" ~ X[1]+X[2] ~ ",  " ~ X[1] ~ "~U(0,1) " ~ ",
                                        " ~ X[2] ~ "~U(0,1) "), ylab=expression(f[Z](z)))
```

que a distribuição de Z em questão é uma distribuição triangular.



Podemos usar a convolução para obter a densidade de Z. Assim, para $0 \leq z \leq 2$

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= f_{X_1+X_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_Y(z-x)dx \\
&= \int_0^1 f_x(x) f_Y(z-x)dx = \int_0^1 f_Y(z-x)dx \\
&= \begin{cases} \int_0^z f_Y(z-x)dx & \text{se } 0 \leq z < 1 \\ \int_{z-1}^1 f_Y(z-x)dx & \text{se } 1 \leq z \leq 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} z & \text{se } 0 \leq z < 1 \\ 2-z & \text{se } 1 \leq z < 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Assim, para encontrar C tal que $P(X_1 + X_2 > C) = 0.05$ é razoável/necessário assumir que $1 \leq C \leq 2$. Logo

$$
P(X_1 + X_2 > C] = P(Z > C) = \int_C^1 (2-z)dz = \frac{(2-C)^2}{2}.
$$

Segue que $\alpha = 0.05$, C$=$ 1.68.

b)

$$
\beta_1(\theta) = P_\theta(X_1 > 0.95) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta \leq -0.05 \\ \theta + 0.05 & \text{se } -0.05 < \theta \leq 0.95 \\ 1 & \text{se } 0.95 < \theta. \end{cases}
$$

Para encontrar a função poder do teste ϕ_2 precisamos calcular a distribuição/densidade de $Z = X_1 + X_2$ em que $X_i \sim U(\theta, \theta+1)$. Usando o fato que a densidade da soma $X_1 + X_2$ é uma triangular entre 2θ e $2\theta + 2$, podemos escrevê-la como

$$f_Z(z) \quad = \quad \begin{cases} z - 2\theta & \text{se } 2\theta \le z < 2\theta + 1 \\ 2\theta + 2 - z & \text{se } 2\theta + 1 \le z < 2\theta + 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\beta_2(\theta) = P_\theta(X_1 + X_2 > C) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta \le C/2 - 1 \\ (2\theta + 2 - C)^2/2 & \text{se } C/2 - 1 < \theta \le (C-1)/2 \\ 1 - (C - 2\theta)^2/2 & \text{se } (C-1)/2 < \theta \le C/2 \\ 0 & \text{se } C/2 < \theta. \end{cases}$$

Assuma que C=1.68 e faça os gráficos.

c) Observe nos gráfico que em algumas regiões o ϕ_2 tem mais poder que o ϕ_1 e em outras regiões o contrário acontece.

d) Uma opção é rejeitar $H_0 : \theta = 0$ também quando $X_1 > 1$ ou $X_2 > 1$. Nesse caso o tamanho continua o mesmo do ϕ_2 mas você rejeita em mais situações. Então seria mais poderoso que ϕ_2.

Exercício 18 a) O teste mais poderoso para esse teste alternativo será o de região crítica dada por

$$A^* = \left\{ \mathbf{x}; \frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} \ge k \right\}$$

.

$$\frac{L_1}{L_0} \ge k \Leftrightarrow \sum x_i^2 \ge \log\left[k(\sigma_1^2/\sigma_0^2)^{n/2}\right] \left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right)^{-1} = c$$

Assim, o teste MP acima terá região crítica dada por

$$A^* = \left\{ \sum x_i^2 \ge c \right\}$$

.

Como o teste acima vale para qualquer valor de σ_1^2 , ele também será o teste UMP.

b) Observe que

$$\sum \left(\frac{X_i}{3}\right)^2 \sim \chi^2_{(9)}$$

e

$$\alpha = P_{H_0}\left(\sum X_i^2 \ge c\right) = P_{H_0}\left(\sum \left(\frac{X_i}{3}\right)^2 \ge \frac{c}{9}\right)$$

Dessa forma, basta encontrarmos $c/9$ com o comando $qchisq(0.95, 9)$.

$$\frac{c}{9} = 16.91898 \to c = 152.2708.$$

Segue que a função poder é dada por

$$\beta(\sigma^2) = P\left(X \geq \frac{152.2708}{\sigma^2}\right)$$

em que $X \sim \chi^2_{(9)}$.

Use o R para fazer os gráficos.

Exercício 19 a) Fazendo a razão de verossimilhanças encontramos que rejeita-se H_0 se $\overline{x} > \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$. Para $\alpha = 0.05$ temos que $c = 1.645$.

$$\beta(\mu) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > 1.645 - \frac{\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > 1.645 - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}\right)$$

b) Nesse caso rejeita-se H_0 se $|\overline{x}| > \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$. Para $\alpha = 0.05$ temos que $c = 1.96$.

$$\beta(\mu) = P\left(-1.96 - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma} \leq Z \leq 1.96 + \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}\right)$$

Exercício 20 a) $\hat{\nu} = x_{(1)}$ e

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\log\left(\prod x_i / x_{(1)}^n\right)} = \frac{n}{T}$$

b)

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \left(\frac{T}{n}\right)^n e^{-T+n}.$$

Observe que $\frac{\partial}{\partial T} \log \lambda(\mathbf{x}) = (T/n) - 1$. Assim, $\lambda(\mathbf{x})$ é crescente para $T \leq n$ e decrescente para $T \geq n$. Ou seja, existe um c_1 e um c_2 tal que $\lambda(\mathbf{x})$ é grande se $T \geq c_1$ ou $T \leq c_2$.

Exercício 21

Exercício 22