UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

MAT02023 - INFERÊNCIA B - 2019/2

Plano Aula 25

Markus Stein

11 November 2019

TRV considerações finais

Distribuições amostrais derivadas da distribuição *Normal*

- **Exemplo 1**: Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma a. a. de $X \sim Normal(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ uma a.a. de $Y \sim Normal(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, tal que $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ são independentes. Encontre o TRV para testar:

a. $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ contra $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ assumindo que $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$;
b. *(Behrens-Fisher problem)* $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ contra $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ assumindo que $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$;
c. $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ contra $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$.

- **Exemplo 2**: *(Teste t pareado)* Seja $(X_1, Y_1), \ldots (X_n, Y_n)$ uma a.a. de $(X, Y) \sim Normal_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ uma a.a. de $Y \sim Normal(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Use o TRV para testar $H_0 : \mu_X = \mu_Y$. Dica: mostre que $W_i = X_i - Y_i \sim Normal(\mu_W, \sigma_W^2)$.

Distribuições discretas

- **Exemplo aula passada**: Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma a.a. de $X \sim Bernoulli(\pi_1)$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ uma a.a. de $Y \sim Bernoulli(\pi_2)$, tal que $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ são independentes. Encontre o TRV para testar $H_0 : \pi_1 = \pi_2$ contra $H_0 : \pi_1 \neq \pi_2$.
- **Exemplo 3**: (*Equilíbrio de Hardy-Weinberg*) Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma a. a. de $X \sim Multinomial(N, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$. Use o TRV para testar $H_0 : \pi_1 = \pi_2 = \pi_3$.

Teste Qui Quadrado (χ^2)

- **Exemplo 4**: *(Tabelas $r \times c$)* Suponha que temos uma tabela de contingência $r \times c$ com n indivíduos independentemente selecionados, sendo n_{ij} o número de unidades classificadas na linha i e na coluna j, para todo $i = 1, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, c$. Seja π_{ij} a probabilidade de um indivíduo ser classificado na linha i e coluna j, tal que $\pi_{ij} \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \pi_{ij} = 1$.

a. Encontre o TRV para testar $H_0 : \pi_{ij} = a_i b_j$, para algum $a_i > 0$ e $b_j > 0$ tais que $\sum_{i=1}^{r} a_i = 1$ e $\sum_{j=1}^{c} b_j = 1$, contra a alternativa $H_1 : \pi_{ij} \neq a_i b_j$ para pelo meno
b. Compare o teste do ítem (a) com o teste qui quadrado de independência, para tesar se a variável da linha e da coluna são independentes.

Teste Exato de Fisher

- **Exemplo 5**: *(Tabela 2×2 restrita)* Seja $S_1 \sim Binomial(n_1, \pi_1)$ independente de $S_2 \sim Binomial(n_2, \pi_2)$. Para testar as hipóteses $H_0 : \pi_1 = \pi_2$ contra $H_1 : \pi_1 > \pi_2$:

a. Mostre que sob H_0 temos que $S = S_1 + S_2$ é estatística suficiente e $S_1 | S = s \sim$ *Hipergeométrica*$(n_1 + n_2, n_1, s)$.
b. Calcule o valor p (condicional) para esse teste?

c. Compare com o valor p do TRV assintótico.

Leitura: Ler seções 8.2.2 e 8.3.5 do livro Casella e Berger.

Tarefa: Fazer lista 5 para entregar.

Para cada um dos exercícios abaixo b. Calcule o valor p (condicional) para o teste? c. Compare com o valor p do TRV assintótico.