

Plano Aula 11 e 12

Markus Stein

18 and 23 September 2019

Hipótese (nula) simples contra alternativa composta

“ $H_0 : \theta \in \Theta_0$, para $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, contra $H_1 : \theta \in \Theta_1$ ”.

- **Exemplo 1:** Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ uma a.a. de $X \sim Normal(\mu, 1)$. Considere ainda $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu > 0$. Utilizando o Lema de Neyman-Pearson encontre o teste UMP com $\alpha = 0,05$ e $n = 9$.

Definição (**Testes uniformemente mais poderosos - UMP**): Um teste com região crítica A_1^* (dada pelo Lema de Neyman-Pearson) para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_0 : \theta \in \Theta_1$ é dito ser UMP se ele é MP de nível α para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_0 : \theta = \theta_1$ para todo $\theta_1 \in \Theta_1$.

- “A região A_1^* de um teste UMP não pode depender de um particular θ_1 para qualquer $\theta_1 \in \Theta_1$ ”.
- **continuação Exemplo 1:** Encontre o teste UMP testar $H_0 : \mu = 0$ contra $H_0 : \mu \neq 0$.
- **Exemplo 2:** Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ uma a.a. de $X \sim Binomial(n, \pi)$. Considere ainda $H_0 : \pi = 0.5$ contra $H_1 : \pi > 0.5$. Utilizando o lema de Neyman-Pearson encontre o teste UMP com $\alpha = 0,05$ e $n = 9$.

Definição (**Função Poder**): A função poder de um teste com região de rejeição A_1^* é dada por

$$\pi(\theta) = P_\theta(\mathbf{X} \in A_1^*). \quad (* \text{ note que } \alpha = \pi(\theta_0))$$

* qual o formato ideal da função poder?

- **continuação Exemplo 1:**... $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu > 0$.

Considerações sobre $\pi(\theta)$ (α e β)

- Hipótese de *nulidade* e Hipótese de *pesquisa*.
 - **Exemplo 3:** Exercício 13, lista 2.

Definição (**Tamanho do teste \times Nível do teste**): Para $0 \leq \alpha \leq 1$, o teste com função poder $\pi(\theta)$ é um teste com

- *tamanho* α se $\sup_{\theta \in \Theta_0} \pi(\theta) = \alpha$;
- *nível* α se $\sup_{\theta \in \Theta_0} \pi(\theta) \leq \alpha$.

Definição (Nível descritivo (amostral) ou “**valor p**”): $\hat{\alpha}$ é o menor nível α para o qual a hipótese nula seria rejeitada.

- probabilidade de H_0 ser verdadeira?

- **continuação Exemplo 1:** Utilizando $n = 9$ e $\bar{x} = 0,68$ calcule o “valor p ” para o teste acima.

Hipóteses compostas

Definição: (Classe de testes UMP) Seja \mathcal{C} uma classe de testes para $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contra $H_1 : \theta \in \Theta_1$ (em que $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$, ambos não atômicos e $\Theta_0 \neq \emptyset$ e $\Theta_1 \neq \emptyset$). Um teste na classe \mathcal{C} , com função poder $\pi(\theta)$, é UMP se $\pi(\theta) \geq \pi'(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta_1$ e toda $\pi'(\theta)$ função poder de outro teste na classe \mathcal{C} .

Teorema: ... Revisitando o Lema de Neyman-Pearson... “Notas de Aula” pág. 9 e 10.

- Testes (hipóteses) **unilaterais** \times testes (hipóteses) **bilaterais**.

Teste da Razão de Verossimilhanças (Generalizada)

Estatística de teste: $\lambda(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta)}$

- **continuação Exemplo 1:** Encontre o teste UMP testar $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu \neq 0$. Qual o espaço paramétrico? Encontre um teste UMP de nível α .
- **continuação Exemplo 1:** Encontre o teste UMP testar $H_0 : \mu \geq 0$ contra $H_1 : \mu < 0$. μ e σ^2 desconhecidos. Qual o espaço paramétrico? Encontre um teste UMP de nível α .

Razão de verossimilhanças monótona

- família exponencial

Testes não viesados

Tarefa: Começar lista 3 para entregar.

Leitura: Ler seções 8.3.1, 8.3.2 e 8.3.4 do livro Casella e Berger.

Atividade (possivelmente valendo ponto extra para prova 1):

Com os modelos $\text{Binomial}(10, \pi)$, $\text{Poisson}(\lambda)$, $\text{Exponencial}(\alpha)$, $\text{Normal}(\mu, 2)$ e $\text{Uniforme}(0, \theta)$:

1. encontre um exemplo prático e formule um teste UMP adequado (hipótese de nulidade *versus* hipótese de pesquisa, nível do teste, tamanho do teste, amostra e valor p);
2. Fale sobre as consequências da decisão (conclusão do problema);
3. Calcule e interprete um intervalo de confiança (IC) para o parâmetro de interesse; 4. Plote a função poder $\pi(\theta)$;
5. Mostre o significado da frase “a função poder tem o mesmo papel do EQM, no contexto de estimação, pois são usadas para avaliar e comparar dois testes”;
6. Fale sobre o efeito na função poder quando mudamos α ou se aumentamos n .