MAT02023 - Inferência A

Gabarito Lista 7 - Consistência e Eficiência

Exercício 1

Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim Poisson(\theta)$. Queremos estimar $P(X = 0) = \tau = \mathrm{e}^{-\theta}$. Temos que a estatística $S = \sum_{i=1}^n X_i$ é suficiente para θ. Consideremos

$$W = \begin{cases} 1, & X_1 = 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $E(W) = P(X_1 = 0) = \mathrm{e}^{-\theta}$, logo W é não viciado para $\mathrm{e}^{-\theta}$. Notemos que, para $t = 0, 1, 2, ...,$

$$E[W|S = t] = P(X_1 = 0|S = t) = \frac{P(\sum_{i=2}^n X_i = t)P(X_1 = 0)}{P(\sum_{i=1}^n X_i = t)}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-(n-1)\theta}((n-1)\theta)^t}{t!}\mathrm{e}^{-\theta}\frac{t!}{\mathrm{e}^{-n\theta}(n\theta)^t} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^t,$$

portanto de acordo com (2.5.1) temos que o estimador

$$\hat{\tau} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i}$$

é não viciado e é melhor que o estimador W pois apresenta EQM menor.

Exercício 2 Notas de Aula, pg. 70

Exercício 3

Exercício 4 Demonstração da Proposição 2.2 (i) das 'Notas de Aula', pg. 74.

Exercício 5 Demonstração da Proposição 2.2 (ii) das 'Notas de Aula', pg. 74.

Exercício 6 ???

Exercício 7

Exercício 8

Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de uma distribuição cuja fdp é dada por:

$f_X(x) = (1-\theta) + \dfrac{\theta}{2\sqrt{x}} x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x), \theta \in [0,1]$

a. Mostre que $\overline{X}$ é um EV para θ e calcule seu vício.

: **Solução:** $E(\overline{x}) = \frac{\sum(X_i)}{n} = \frac{3\theta-2\theta^2+1}{4\theta+2}$.
Logo $\overline{x}$ é EV para θ.

b. Verifique se $\overline{X}$ é um EANV para θ.

Solução: $\lim_{n\to\infty} b(\bar{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{3\theta-2\theta^2+1}{4\theta+2} \neq 0$.
Logo $\bar{X}$ não é EANV de θ

c. Verifique, se $\overline{X}$ é um ECForte de θ .
Solução: Como o estimador é assintoticamente viciado temos que ele não é ECForte;

Exercício 9

Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. tal que $E(X_1) = \mu$ e $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Verifique se $\overline{X}$ e S^2 são ECFraco de, respectivamente, μ e σ^2.

Dica: use o teorema abaixo

Teorema: Se $X_1, X_2, \ldots$ são v.a's iid com fda $F_X(.)$ e $E|$ X$|^p < \infty$ para p inteiro positivo, então $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} {X_i}^K}{n} \to E(X^K)$ em probabilidade quando $n \to \infty$ para $1 \leq K \leq p$.

Solução:

Pelo Teorema de Kintchin sabe-se que $\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \to E(X)$, ou seja, $\bar{X} \to E(X)$.

Pelo enunciado do exercício E(X)=μ.

Logo, $\bar{X} \to \mu$ o que mostra que $\bar{X}$ é estimador consistente de μ.

$S^2 = \frac{n}{(n-10}\sigma^2$ sabe-se que $\frac{n}{(n-1)} \to 1$ quando $n \to \infty$

$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} {X_i}^2}{n} \to E(X^2)$ e $E(|X|) < \infty$ pois $\sigma^2 < \infty$

Assim temos que $E(X) = \mu$, $VAR(X) = \sigma^2$ e $E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$

Logo $S^2 = \frac{n}{(n-1)} \left[\dfrac{\sum {X_i}^2}{n} - \bar{X}^2 \right] \to_{n\to\infty} 1(\mu^2 + \sigma^2 - \mu^2) = \sigma^2$ o que mostra que S é estimador consistente de σ^2

Exercício 10

Exercício 11

Exercício 12

Exercício 13

$$\sqrt{n}\,[\bar{X}^3 - \theta^3] \xrightarrow{d} N[0, 9\mu^4\sigma^2]$$

Exercício 14

a) $\hat{\beta}_n = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$

b) Calcule o limite inferior de Cramér-Rao

c) $\sqrt{n}\,[g(\hat{\beta}_n) - g(\beta)] \xrightarrow{d} N\left[0, \dfrac{1}{\beta^2}\right]$

d) O resultado coincide com aquele obtido em (c)

Exercício 15

a) $$\frac{Y_n - n}{\sqrt{2n}} = \frac{Y_n}{(2n)^{1/2}} - \frac{n}{(2n)^{1/2}} = \frac{Y_n}{(2n)^{1/2}} - \frac{n^{1/2}}{2^{1/2}}$$

$$n^{1/2} \cdot \left[\frac{1}{n^{1/2}}\left(\frac{Y_n}{(2n)^{1/2}}\right) - \frac{1}{2^{1/2}}\right] = \sqrt{n}\left[\frac{Y_n}{n\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

b) $W_n \overset{a}{\sim} N\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{n}\right]$

c) $\sqrt{W_n} \overset{a}{\sim} N\left[\dfrac{1}{2^{1/4}}, \dfrac{2^{-3/2}}{n}\right]$

Exercício 16

$$g\left(\frac{Y_n}{n}\right) = \left(\frac{Y_n}{n}\right)^2 \overset{a}{\sim} N\left[1, \frac{4}{n}\right]$$

Exercício 17

Informação de Fisher observada

$$\hat{I}(\hat{\theta}) = -\frac{d^2}{d\theta^2} \log L(\theta/x)\Big|_{\theta=\hat{\theta}}$$

Informação de Fisher Esperada

$$I(\theta) = -E\left[\frac{d^2}{d\theta} \log L(\theta/x)\right]$$

Através da $I(\theta)$ é possível obter o valor teórico para a variância assintótica do EMV. Na prática, o valor θ é desconhecido, por esse motivo, utiliza-se uma aproximação para $I(\theta)$. Essa aproximação é a informação de Fisher observada ($\hat{I}(\hat{\theta})$).

Exercício 18 ???