UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

MAT02023 - INFERÊNCIA A - 2019/1

Plano Aula 14

Markus Stein

25 April 2019

continuação... Estimação × Predição

- Distribuição **preditiva *a posteriori*** (*versus* ***a priori***): Ver os gráficos abaixo.
  - Qual a influência da distribuição *a priori* $\pi(\theta)$ na distribuição preditiva a *priori* $f_X(x)$? E na distribuição preditiva *a posteriori* $f_{X_{n+1}|X}(x_{n+1})$?
  - E qual a influência da função de verossimilhança na distribuição preditiva *a posteriori* quando $n \to \infty$?
    - Estimador *plug-in* (abordagem frequentista): $f_X\left(x_{n+1};\hat{\theta}_{EMV}\right)$.

Estimadores pontuais Bayesianos (Apostila Prof. Paulo Justiniano, Capítulo 5)

"Uma função perda d, $d(a,\theta)$, representa a perda decorrente de se adotar a ação a quando o verdadeiro estado da natureza é θ."

- Definição (**Função perda**): Seja $d(a,\theta) \in \mathbb{R}$ uma função tal que:

i. $d(a,\theta) \geq 0$;
ii. $d(a,\theta) = 0$ se $a = \theta$;
então chamaremos d de função perda.

- **Estimadores Bayesianos ->** Minimizam a perda esperada $E\left[d(a,\theta)\right] = \int_\Theta d(a,\theta)\,\pi(\theta|\boldsymbol{X})\,d\theta$;

Resumo:

Função perda	$d(a,\theta)$	Estimador Bayesiano
Quadrática	$(a-\theta)^2$	$E(\theta \mid \boldsymbol{X})$
Absoluta	$\lvert a-\theta\rvert$	$Med(\theta \mid \boldsymbol{X})$
Zero-um	$I\left(\lvert a-\theta\rvert > \epsilon\right)$ *para um* $\epsilon > 0$	$Mod(\theta \mid \boldsymbol{X})$

- **Máxima verossimilhança generalizada** (Notas de Aula, Definição 2.11);
- **Estimador de Bayes** (Notas de Aula, Definição 2.12);
- Propriedade de **invariância** do estimador de Bayes? (Bolfarine e Sandoval, pg. 64).

Tarefa 1: Resolver listas suplementares.

Tarefa 2: Trazer dúvidas para a próxima aula.

Os gráficos abaixo comparam todas as distribuições disponíveis para $X_1, \ldots, X_n$ da $Bernoulli(p)$ (ou X da $Binomial(n, p)$) com *priori* $Beta(\alpha, \beta)$ em três situações:

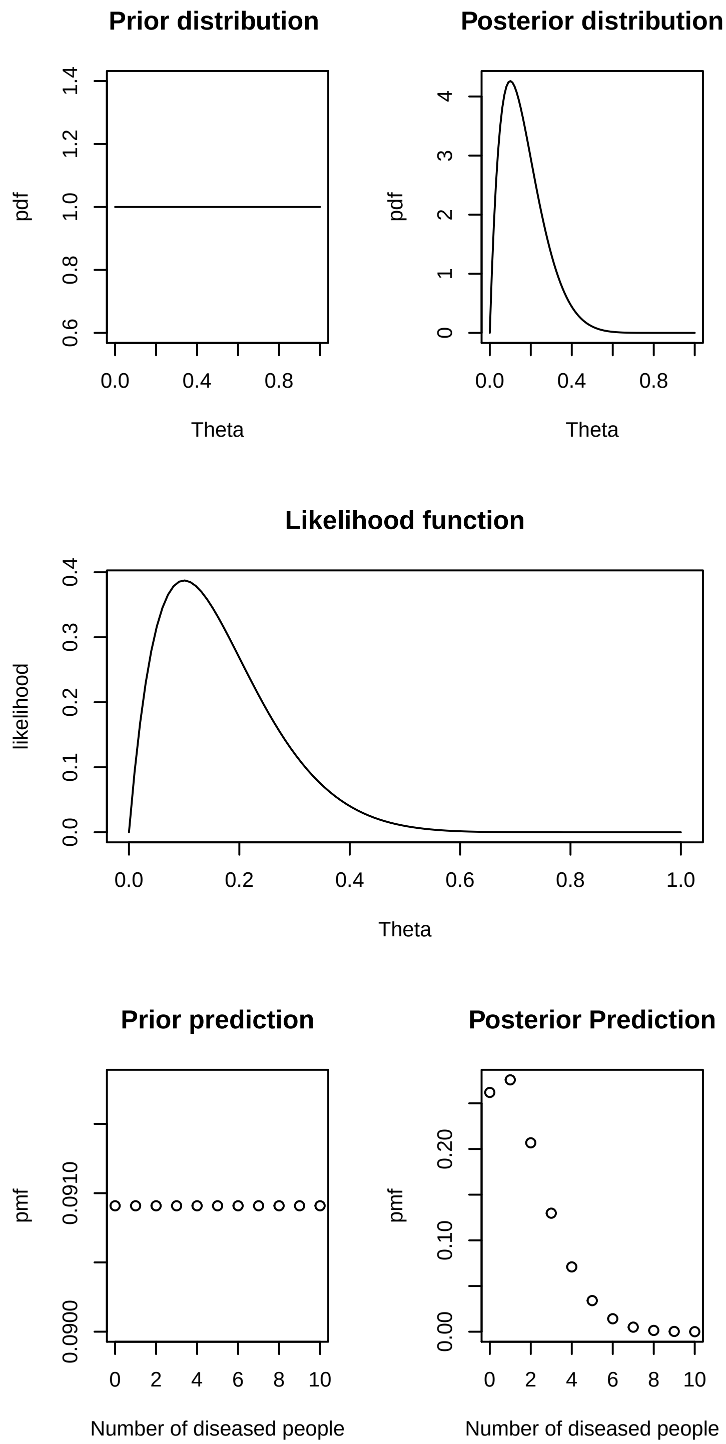
1. Amostragem de tamanho $n = 10$ da distribuição $Bernoulli(p)$ e distribuição *a priori* $Beta(1, 1)$. Suponha que estamos interessados em predizer a probabilidade de $m = 10$ novas observações.

```
library(LearnBayes)
library(VGAM)
```

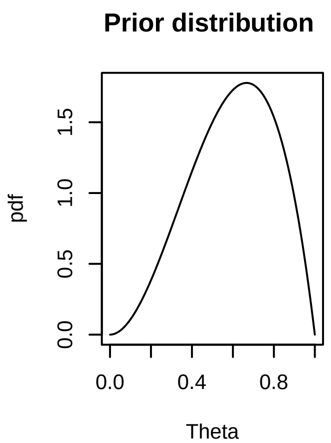
```
## Loading required package: stats4

## Loading required package: splines

##
## Attaching package: 'VGAM'

## The following object is masked from 'package:LearnBayes':
##
##     laplace
```

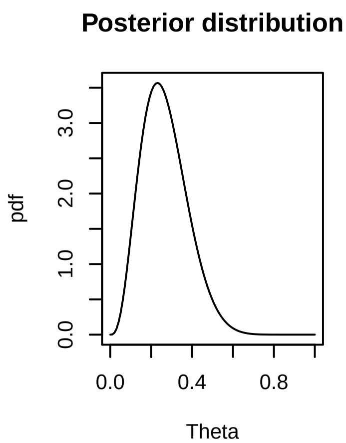
```
###### prior parameters
a <- 1
b <- 1
#### Data
n <- 10
x <- 1
###### Prior Distribution
theta <- seq(0, 1, length = 100)
hx <- dbeta(theta, a,b)
layout(matrix(c(1,2,3,3,4,5), 3, 2, byrow = TRUE))
plot(theta, hx, type = "l" ,xlab = "Theta", ylab = "pdf",
main = "Prior distribution ")
####### Posterior distribution
post <- dbeta(theta, a+x, b+n-x)
plot(theta, post, type = "l",xlab="Theta", ylab="pdf",
main="Posterior distribution")
### Likelihood Function
likelihood<-choose(n,x)*theta^(x)*(1-theta)^(n-x)
plot(theta, likelihood, type="l", xlab="Theta", ylab="likelihood",
main="Likelihood function")
##### Prior Predictive
prior.pred <- 1
m <- 10
y <- 0:m
for (i in 1:(m+1)){
prior.pred[i] = dbetabinom.ab(y[i], m, a,b)
}
plot(y, prior.pred, xlab="Number of diseased people", ylab="pmf",
main="Prior prediction")
####### Posterior Predictive
pos.pred <- 1
y <- 0:m
m <- 10
for (i in 1:(m+1)){
pos.pred[i] = dbetabinom.ab(y[i], m, x+a,b+n-x)
}
plot(y, pos.pred, xlab="Number of diseased people", ylab="pmf",
```

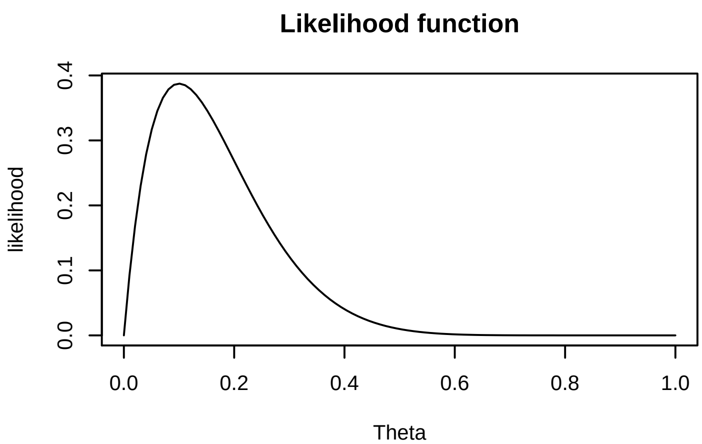
```
main="Posterior Prediction")
```

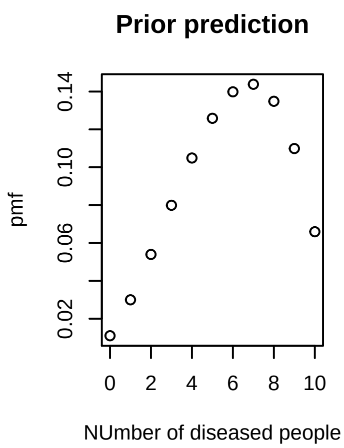


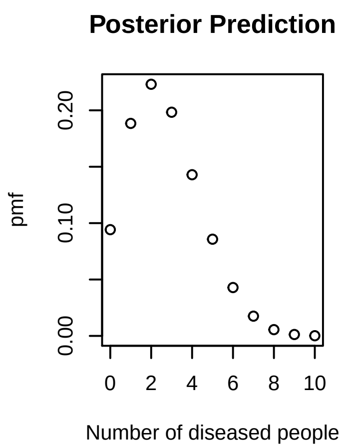
2. Amostragem de tamanho $n = 10$ da distribuição $Bernoulli(p)$ e distribuição *a priori* $Beta(3,2)$. Suponha que estamos interessados em predizer a probabilidade de $m = 10$ novas observações.











3. Amostragem de tamanho $n = 100$ da distribuição $Bernoulli(p)$ e distribuição *a priori* $Beta(3, 2)$. Suponha que estamos interessados em predizer a probabilidade de $m = 100$ novas observações.