MAT02026 - Inferência B

Lista 3 - Testes MP e UMP, função poder e TRV

Exercício 1 Suponha que a proporção p de itens defeituosos, em uma grande população de itens, seja desconhecida. Deseja-se testar as seguintes hipóteses $H_0 : p = 0,2$ versus $H_1 : p \neq 0,2$. Considere que uma amostra aleatória de 20 itens seja retirada desta população e denote $Y =$ número de itens defeituosos na amostra. O seguinte procedimento de teste será usado: Rejeitar H_0 se $Y \geq 7$ ou $Y \leq 1$.

a) Determine a funcão poder deste teste.

b) Calcule o valor da função poder para os seguintes pontos $p = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$. Faça o gráfico.

c) Determine o tamanho do teste, ou seja, o valor de $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta)$.

Exercício 2 Seja $X_1, \ldots, X_{10}$ uma amostra aleatória de tamanho $n = 10$ tal que $X_i \sim Bernoulli(\theta)$ onde $P(X_i = 1) = \theta = 1 - P(X_i = 0)$. Considere as hipóteses $H_0 : \theta \leq 1/2$ contra $H_1 : \theta > 1/2$. Assuma a seguinte regra de teste: Rejeitar H_0 se $\sum X_i \geq 6$.

a) Determine a função poder do teste.

b) Calcule a função poder para os seguintes pontos $p = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$. Faça o gráfico.

c) Determine o tamanho do teste, ou seja, o valor de $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta)$.

Exercício 3 Considere a variável aleatória X com a seguinte densidade $f(x) = \theta x^{\theta - 1} I_{(0,1)}(x)$. Para testar as hipóteses $H_0 : \theta \leq 1$ versus $H_1 : \theta > 1$, uma única observação (X_1) foi amostrada e o seguinte critério de rejeição foi adotado: rejeitar H_0 se $X_1 > 1/2$.

a) Encontre a função poder deste teste.

b) Determine o tamanho do teste.

Exercício 4 Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória tal que $X_i \sim$ Bernoulli(θ). Calcule $\lambda(X)$ e determine o critério de rejeição para o TRV (Teste da Razão de Verossimilhanças) considerando as hipóteses $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_0 : \theta > \theta_0$, em que θ_0 é um valor conhecido especificado pelo pesquisador.

Exercício 5 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra obtida a partir da distribuição Exponencial com parâmetro θ.

a) Encontre o TRV para testar $H_0 : \theta = 1$ versus $H_1 : \theta \neq 1$.

b) Se uma amostra de tamanho $n = 5$ observasse os seguintes valores $\mathbf{x} = \{0.8; 1.3; 1.8; 0.9; 1\}$, qual seria a sua conclusão se escolhermos a constante $c = 0.5$.

Exercício 6 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu_x, 9)$ e considere $Y_1, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu_y, 25)$. Assuma que essas duas amostras são independentes.

a) Encontre o TRV para $H_0 : \mu_x = \mu_y$ versus $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$. Dica: Determine a distribuição de $\overline{X} - \overline{Y}$.

b) Se você observar $n = 9$, $\sum_{i=1}^{9} x_i = 3.4$, $m = 16$, $\sum_{i=1}^{16} y_i = 4.3$. Qual seria a sua decisão considerando $c = 0.5$.

Exercício 7 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição Gama$(3, \lambda)$. Encontre o TRV para as hipóteses $H_0 : \lambda = \lambda_0$ versus $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$, onde λ_0 é um valor positivo e especificado pelo pesquisador.

Exercício 8 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da densidade

$$f(x/\theta) = \frac{2x}{\theta} I_{(0,\theta]}(x),$$

onde $\theta > 0$. Encontre o TRV para as hipóteses $H_0 : \theta \geq \theta_0$ versus $H_1 : \theta < \theta_0$, onde θ_0 é um valor positivo e especificado pelo pesquisador.

Exercício 9 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável $X \sim$ Geométrica(θ).

a) Encontre o TRV para as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

b) Encontre o teste uniformemente mais poderoso (UMP) para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta = \theta_1$, em que $\theta_0 < \theta_1$ são especificados pelo pesquisador.

c) Encontre o teste UMP para $H_0 : \theta = 0.3$ versus $H_1 : \theta = 0.5$.

d) Dado o teste UMP calculado na letra (c), considere que $n = 5$ e $\alpha = 0.04$, qual o critério de rejeição? Qual o erro tipo II? Se a amostra observada fosse $x = \{4, 5, 3, 2, 5\}$ qual a sua decisão?

e) Gere artificialmente, no software R, uma amostra de $n = 100$ de uma distribuição geométrica com parâmetro $\theta = 0.5$. Dado o teste UMP calculado na letra (b) e $\alpha = 0.04$, qual o critério de rejeição? Qual o erro tipo II? Compare com o resultado encontrado na letra (d).

Exercício 10 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição $N(\mu, 1)$.

a) Encontre o teste UMP para as hipóteses $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu = 1$.

b) Suponha que $n = 9$ e $\alpha = 0,05$. Qual é a região crítica do teste obtido em (a).

c) Faça o gráfico da função poder da letra (b).

Exercício 11 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável X com a seguinte função densidade:

$$f(x/\theta) = \theta x^{\theta - 1} I_{(0,1)}, \text{ em que } \theta > 0.$$

a) O teste mais poderoso para $H_0 : \theta = 1$ versus $H_1 : \theta = 2$ rejeitará H_0 se $[\sum_{i=1}^{n} - \log(x_i) \leq a]$ onde a é uma constante. Mostre este resultado.

b) Sendo $n = 2$ e $\alpha = [1 - \log(2)]/2$ qual seria a região crítica? Dica: se $X \sim$ Beta$(\theta,\, 1)$ então $-\log(X) \sim$ Exp(θ).

Exercício 12 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida da distribuição Poisson(θ). Encontre o teste UMP para as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta = \theta_1$, considere que $\theta_0 < \theta_1$

Exercício 13 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida da distribuição $N(0, \sigma^2)$.

a) Encontre o teste UMP para $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ versus $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$. Considere que $\sigma_0^2 < \sigma_1^2$.

b) Sendo $\sigma_0^2 = 1$, $\sigma_1^2 = 2$, $n = 2$ e $\alpha = 0.05$, qual seria a região crítica?

c) Gere artificialmente, no software R, uma amostra de $n = 10$ da distribuição normal com parâmetros ($\mu = 0, \sigma^2 = 2$). Dado o teste UMP calculado na letra (a), as hipóteses $\sigma_0^2 = 1$, $\sigma_1^2 = 2$ e $\alpha = 0.04$, qual o critério de rejeição? Qual o erro tipo II? Qual a sua decisão dado essa amostra?

d) Refaça o item anterior, mas utilize uma amostra de tamanho $n = 100$. Compare com o resultado encontrado na letra (c).

Exercício 14 O que é 'valor p'?

Exercício 15 O que é nível descritivo amostral?

Exercício 16 O que é nível de significância?

Exercício 17 Seja $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. uniforme$(\theta, \theta + 1)$. Para testar $H_0 : \theta = 0$ versus (vs.) $H_1 : \theta > 0$, temos dois testes concorrentes:

$$\phi_1(X_1): \text{ Rejeita } H_0 \text{ se } X_1 > 0.95,$$
$$\phi_2(X_1): \text{ Rejeita } H_0 \text{ se } X_1 + X_2 > C,$$

a) Encontre o valor de C para o qual ϕ_2 tenha o mesmo tamanho que ϕ_1.

b) Calcule a função poder de cada teste. Desenhe a função poder de cada teste.

c) ϕ_2 é mais poderoso que ϕ_1?

d) Mostre como encontrar um teste que tenha o mesmo tamanho de ϕ_2, mas que seja mais poderoso que ϕ_2.

Exercício 18 Seja $X_1, \ldots, X_n$ a.a. de uma v.a. X com função de densidade $N(0, \sigma^2)$.

a) Encontre o teste uniformemente mais poderoso (UMP) para testar $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs. $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

b) Seja $\alpha = 0.05$, $n = 9$ e $\sigma_0^2 = 9$. Faça o gráfico da função poder.

Exercício 19 Para amostras de tamanho $n = 1, 4, 16, 64, 100$ de uma população normal com média μ e variância conhecida σ^2, faça o gráfico da função poder dos seguintes testes da razão de verossimilhança (TRV's). Tome $\alpha = 0.05$.

a) $H_0 : \mu \leq 0$ vs. $H_1 : \mu > 0$.

b) $H_0 : \mu = 0$ vs. $H_1 :\neq 0$.

Exercício 20 Uma a.a. $X_1, \ldots, X_n$ é retirada de uma população Pareto com densidade

$$f(x|\theta,\nu) = \frac{\theta\nu^\theta}{x^{\theta+1}} I_{\nu,\infty}(x), \ \ \theta > 0, \ \ \nu > 0.$$

a) Encontre os EMV's de θ e ν.

b) Mostre que o TRV

$$H_0 : \theta = 1, \ \nu \text{ desconhecido}, \quad vs \quad H_1 : \theta \neq 1, \ \nu \text{ desconhecido},$$

tem região critica da forma $\{x : T(x) \leq c_1 \ ou \ T(x) \geq c_2\}$, em que $0 < c_1 < c_2$ e

$$T = \log\left[\frac{\prod_{i=1}^n X_i}{(\min_i X_i)^n}\right].$$

Exercício 21 Suponhamos que temos duas amostras de variáveis aleatórias independentes: $X_1 \ldots, X_n$ são $\exp(\theta)$ e $Y_1 \ldots, Y_n$ são $\exp(\mu)$. Encontre o TRV de $H_0 : \theta = \mu$ vs. $H_1 : \theta \neq \mu$.

Exercício 22 Um caso especial da família de distribuições *normal* é quando a média e a variância são relacionadas, como por exemplo a família $N(\theta, a\theta)$. Se estamos interessados em testar esse relacionamento, independente do valor de θ, nos deparamos com um problema chamado problema do parâmetro "nuisance".

a) Encontre o TRV de $H_0 : a = 1$ vs. $H_1 : a \neq 1$ baseado em uma amostra $X_1, \ldots, X_n$ de uma família $N(\theta, a\theta)$, em que θ é desconhecido.

b) Um problema similar ocorre quando a família é $N(\theta, a\theta^2)$. Assim, se $X_1, \ldots, X_n$ são i.i.d. $N(\theta, a\theta^2)$, quando θ é desconhecido, encontre o TRV de $H_0 : a = 1$ vs. $H_1 : a \neq 1$.