MAT02026 - Inferência B

Gabarito Lista 6 - TH e IC Bayesianos

Exercício 1 Seja a amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ com distribuição Binomial Negativa(r, θ), com função de probabilidade:

$$p(x|r,\theta) = \binom{x+r-1}{x}\theta^r(1-\theta)^x$$

com $x = 0, 1, 2, \ldots$

a) A conjugada da binomial negativa é a distribuiçao beta.

Assumindo uma prior uniforme, beta(a,b), temos:

$$\theta \sim beta(a,b)$$

e a regra de atualização é dada por:

$$\theta|x \sim beta(a + rn, b + \sum_i x_i)$$

com $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

b) Seja $\theta \sim beta(2,2)$.

Para $r = 5, n = 10, \sum_i x_i = 70$ temos $\theta|x \sim beta(52, 72)$.

Sejam as hipóteses $H_0 : \theta \leq 0.5$ vs. $H_1 : \theta 0.5$.

Qual das hipóteses apresenta maior probabilidade à posteriori?

$$p(H_0|x) = p(\theta \leq 0.5|x) = pbeta(0.5, 52, 72) = 0.964$$

$$p(H_1|x) = 1 - p(H_0|x) = 0.036$$

c)

$$O(H_1, H_0|x) = \frac{p(H_1|x)}{p(H_0|x)} = \frac{0.036}{0.964} = 0.037$$

Assumindo que as hipóteses tinham inicialmente igual probabilidade:

O fator de Bayes a favor de H_1:

$$B(x) = \frac{O(H_1, H_0|x)}{O(H_1, H_0)} = \frac{0.037}{1} = 0.037$$

Não existe evidência a favor de H_1.

Exercício 2 Seja θ a probabilidade de preferir o congelador de maior qualidade.

a) Modelo de dados proposto: $f(x|\theta) \sim binomial(\theta)$

Não se considera as diferenças de gostos individuais dos clientes.

b) $N = 16, x = 13$

Para $\theta_1 \sim beta(0.5, 0.5)$, $\theta_1 \sim beta(13.5, 3.5)$

$p(\theta_1 > 0.6|x) = 1 - p(\theta_1 \leq 0.6|x)$

Seja $H_0 : \theta \geq 0.6$ vs. $H_1 : \theta < 0.6$

Assumimos $p(H_0) = P(H_1) = 0.5$, logo $O(H_0, H_1) = 1$

$$B(x) = \frac{O(H_0, H_1|x)}{O(H_0, H_1)} = O(H_0, H_1|x) = \frac{p(\theta_1 \geq 0.6|x)}{p(\theta_1 < 0.6|x)} = \frac{0.9637}{0.036} = 26.6$$

Repetindo os cálculos para priors diferentes:

Para $\theta_2 \sim beta(1, 1)$ obtemos $B(x) = 19$

Para $\theta_3 \sim beta(2, 2)$ obtemos $B(x) = 13.3$

A prior aparenta ter um grande efeito no fator de Bayes.

Exercício 3

$$\theta \sim Gamma(1, 1)$$

$$X_i \sim Poisson(\theta)$$

Para $n = 10, \sum_i x_i = 6$ *temos:*

$$\theta|x \sim Gamma(7, 11)$$

Intervalo de confiança a 90
qgamma(0.05,7,11)
qgamma(0.95,7,11)
Região de credibilidade HPD a 90
library(TeachingDemos)
hpd(qgamma,conf=0.9, shape=7, rate=11)

Exercício 4 prior: $\theta \sim beta(1, 1)$

verosimilhança de x casos em n observações: $x \sim binomial(\theta)$
posterior: $\theta|x \sim beta(x + 1, n - x + 1)$
Temos as seguintes hipóteses: + $H_0 : \theta = 0.2$ + $H_1 : \theta = 0.3$
Hipóteses à priori: + $p(H_0) = 0.25$ + $p(H_1) = 0.75$
Tendo assim $O(H_0, H_1) = \frac{0.25}{0.75} = \frac{1}{3}$
Seja o fator de Bayes em favor de H_0:

$$B(x) = \frac{O(H_0, H_1|x)}{O(H_0, H_1)}$$

Se o fator de bayes for maior que 1 (para favorecer H_0 como é pedido no enunciado). Assim:

$$B(x) = \frac{O(H_0, H_1|x)}{O(H_0, H_1)} 1 \iff \frac{O(H_0, H_1|x)}{\frac{1}{3}} 1 \iff O(H_0, H_1|x) \frac{1}{3}$$

Ou seja,

$$O(H_0, H_1|x)\frac{1}{3} \iff \frac{p(H_0|x)}{p(H_1|x)}\frac{1}{3} \iff p(H_0|x)3p(H_1|x)$$

Ora, sabendo que os dados seguem uma binomial:
$+\ p(H_0|x) = p(\theta = 0.2|x) = \binom{n}{x}0.2^x0.8^{n-x}$ $+\ p(H_1|x) = p(\theta = 0.3|x) = \binom{n}{x}0.3^x0.7^{n-x}$
Juntando tudo:

$$\binom{n}{x}0.2^x0.8^{n-x}3\binom{n}{x}0.3^x0.7^{n-x}$$

$$0.2^x0.8^{n-x}3 \times 0.3^x0.7^{n-x}$$

$$x\frac{n-8.67}{4.2}$$

Exercício 5

Exercício 6 a) Parâmetros da priori $\alpha = 4.8$ e $\beta = 19.2$. Logo, $\theta/x \sim Beta(30.8, 93.2)$

b) Estimativa MVG=0.244 e estimativa de bayes=0.248.

c) IC central =(0.17;0.32) e IC HPD =(0.174, 0.32)

d) $P(\theta \leq 0.5) \approx 1$

Exercício 7 a) IC HPD= (30.839 ; 33.079), 1º quartil=31,573, 3º quartil 32.344

b) ICP HPD=(30.868; 33.131), 1º quartil=31.610, 3º quartil= 32.389

c) IC clássico igual ao HPD do item b.

Exercício 8 a) A distribuição a posteriori será dada pela distribuição condicional de θ dado X:

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_\Theta f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{g(x)}}$$

Para encontrar $g(x)$ vamos resolver a seguinte integral:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_\Theta f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta = \int_0^\infty \theta e^{\theta x}16\theta e^{-4\theta}d\theta && (1)\\
&= \int_0^\infty 16\theta^2 e^{-(x+4)\theta}d\theta && (2)\\
&= \frac{32}{(x+4)^3}\int_0^\infty \frac{(x+4)^3}{2}\theta^2 e^{-(x+4)\theta}d\theta && (3)\\
&= \frac{32}{(x+4)^3}, && (4)
\end{aligned}$$

pois a função que está sendo integrada acima é uma densidade de θ, a saber, $\theta \sim$Gamma$(\lambda = 4, r = 23)$.

Substituindo em $\pi(\theta|x)$ obtemos

$$\pi(\theta|x) = \frac{\theta e^{\theta x} 16\theta e^{-4\theta}}{\frac{32}{(x+4)^3}} = \frac{(x+4)^3}{2}\theta^2 e^{-(x+4)\theta}$$

b) Note que E(X)=$\frac{1}{\theta}$ e Var(X)=$\frac{1}{\theta^2}$. calculemos então os estimadores de Bayes com perda quadrática d_{B_1} e d_{B_2}, respectivamente a para E(X) e Var(X).

$$\begin{aligned}
d_{B_1}(x) &= E(\frac{1}{\theta|x}) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta}\frac{(x+4)^3}{2}\theta^2 e^{-(x+4)\theta} && (5)\\
&= \int_0^\infty \frac{(x+4)^3}{2}\theta e^{-(x+4)\theta} && (6)\\
&= \frac{(x+4)}{2}\int_0^\infty \frac{(x+4)^2}{2}\theta e^{-(x+4)\theta} && (7)\\
&= \frac{(x+4)}{2}. && (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{B_2}(x) &= E(\frac{1}{\theta^2|x}) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta^2}\frac{(x+4)^3}{2}\theta^2 e^{-(x+4)\theta} && (9)\\
&= \int_0^\infty \frac{(x+4)^3}{2} e^{-(x+4)\theta} && (10)\\
&= \frac{(x+4)^2}{2}\int_0^\infty (x+4)\theta e^{-(x+4)\theta} && (11)\\
&= \frac{(x+4)^2}{2}. && (12)
\end{aligned}$$