MAT02023 - Inferência A

Lista 5 - Família Exponencial e Suficiência

Exercício 1 Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória obtida a partir da distribuicção $f(x) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$ com $\theta > 0$. Encontre uma estatítica suficiente para θ. Calcule o valor esperado desta estatística.

Exercício 2 Seja X_1, X_2 uma amostra aleatória da variável $X \sim Poisson(\theta)$. Mostre que $T = X_1 + 2X_2$ não é suficiente para θ.

Exercício 3 Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória obtida a partir da distribuição $f(x) = \exp\{-(x-\theta)\} I_{(\theta,\infty)}(x)$ com $\theta > 0$. Encontre uma estatística suficiente para θ.

Exercício 4

Mostre que a distribuição indicada em cada um dos itens abaixo pertence à família exponencial.

a) Gama (α, β) com α e β desconhecidos.

b) Gama (α, β) com α conhecido e β desconhecido.

c) Beta (α, β) com α e β desconhecidos.

d) Beta (α, β) com α conhecido e β desconhecido.

e) Poisson (λ).

f) Normal (μ, σ^2) com μ e σ^2 desconhecidos.

g) Binomial Negativa com número de sucessos r conhecido e $0 < p < 1$ desconhecido.

h) Uniforme $(0, \theta)$.

Exercício 5 Para cada um dos itens do exercício 4, encontre uma estatística suficiente para o(s) parâmetro(s) de interesse.

Exercício 6 Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma a.a., onde $X_j \sim Exp(\lambda)$, para $j = 1 \cdots, n$. Encontre uma estatística suficiente para λ.

Exercício 7 Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma a.a. pertencente a família exponencial com função densidade de probabilidade

$$f(x, \boldsymbol{\eta}) = h(x) b(\boldsymbol{\eta}) \exp\left[\sum_{j=1}^{k} \eta_j T_j(x)\right].$$

Seja $\boldsymbol{T(X)} = (\sum_{i=1}^{n} T_1(X_i), \cdots, \sum_{i=1}^{n} T_k(X_i))$. Use o Teorema da Fatoração para mostrar que $\boldsymbol{T(X)}$ é uma estatística suficiente $k-$dimensional para $\boldsymbol{\eta}$.

Exercício 8 Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma a.a. onde uma das v.a.'s possui função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],$$

onde $\sigma > 0$ e $x > \mu$ e μ é real. Encontre uma estatística suficiente para (μ, σ).

Exercício 9 Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma a.a., onde $X_j \sim U(\theta - 1, \theta + 2)$, para $j = 1 \cdots, n$. Encontre uma estatística suficiente para θ.

Exercício 10 Mostre que para uma distribuição $f_\theta(\boldsymbol{x})$ de $\boldsymbol{X}$ pertencente à família exponencial, então:

a) $E(U) = 0$, em que $U = \frac{\partial}{\partial\theta} \log f_\theta(\boldsymbol{x})$.

b) $Var(U) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log f_\theta(\boldsymbol{x})\right)$.

Exercício 11 Nos Exercícios (1) e (3) determine se a estatística suficiente encontrada pode ser classificada como minimal.

Exercício 12 Faça os seguintes exercícios do livro 'Statistical Inference' de Casella e Berger:

a) 6.3 e 6.9 (a), (b) e (c).

Exercício 13 Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma a.a. onde $X_j \sim N(\mu, \gamma_o^2\mu^2)$, para $j = 1 \cdots, n$, onde $\gamma_o^2 > 0$ é conhecido e $\mu > 0$.

a) Encontre uma estatística suficiente para μ;

b) Mostre que $(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2)$ é uma estatística suficiente e minimal;

c) Encontre $E[\sum_{i=1}^{n} X_i^2]$;

d) Encontre $E[(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2]$;

e) Encontre

$$E\left[\frac{n+\gamma_o^2}{1+\gamma_o^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right].$$

Exercício 14 Encontre uma estatística suficiente minimal e completa quando $X_1, X_2, \cdots, X_n$ é uma a.a. seguindo as distribuições a seguir.

a) $X_1 \sim Binomial(k, p)$, com k conhecido;

b) $X_1 \sim Exponencial(\lambda)$;

c) $X_1 \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, com α conhecido;

d) $X_1 \sim Geomtrica(p)$;

e) $X_1 \sim Binomial - Negativa(r, \rho)$, com r conhecido;

f) $X_1 \sim Normal(\mu, \sigma^2)$, com σ^2 conhecido;

g) $X_1 \sim Normal(\mu, \sigma^2)$, com μ conhecido;

h) $X_1 \sim Poisson(\theta)$.

Exercício 15 Encontre uma estatística suficiente minimal e completa quando $X_1, X_2, \cdots, X_n$ é uma a.a. seguindo as distribuições a seguir.

a) $X_1 \sim Normal(\mu, \sigma^2)$;

b) $X_1 \sim Beta(\alpha, \beta)$;

c) $X_1 \sim chi(p, \sigma)$;

d) $X_1 \sim \Gamma(\alpha, \beta)$;

e) $X_1 \sim Log - Normal(\mu, \sigma^2)$.