# MAT02023 - Inferência A

## Gabarito Lista 5 - Família Exponencial e Suficiência

(1) $T(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i \qquad E(T(x)) = \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^n$

(2) Utilize o exemplo dado em aula.

(3) $T(x) = X_{(1)}$

(4) Escreva a função de verossimilhança no formato

$$f(x/\theta) = h(x)\, c(\theta) \exp\left\{\sum_{i=1}^{K} \omega_i(\theta) t_i(x)\right\}$$

(5)

a) $T(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} \log x_i\right)$

b) $T(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

c) $T(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \log x_i, \sum_{i=1}^{n} \log(1-x_i)\right)$

d) $T(x) = \sum_{i=1}^{n} \log(1-x_i)$

e) $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

f) $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

**Exercício 6** A função densidade de probabilidade conjunta de $\boldsymbol{X}$ é dada por

$$f(\boldsymbol{x};\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda)\, I(x_i > 0) = \lambda^n\, e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}\, I(\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}).$$

E, pelo Teorema da Fatoração de Fisher-Neyman, podemos verificar que

$$f(\boldsymbol{x};\lambda) = g[\lambda; T(\boldsymbol{x})]\, h(\boldsymbol{x})$$

em que $g[\lambda; T(\boldsymbol{x})] = \lambda^n\, e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$ e $h(\boldsymbol{x}) = I(\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0})$. Então $T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ é uma estatística suficiente para $\lambda$.

**Exercício 7**

**Exercício 8**

**Exercício 9**

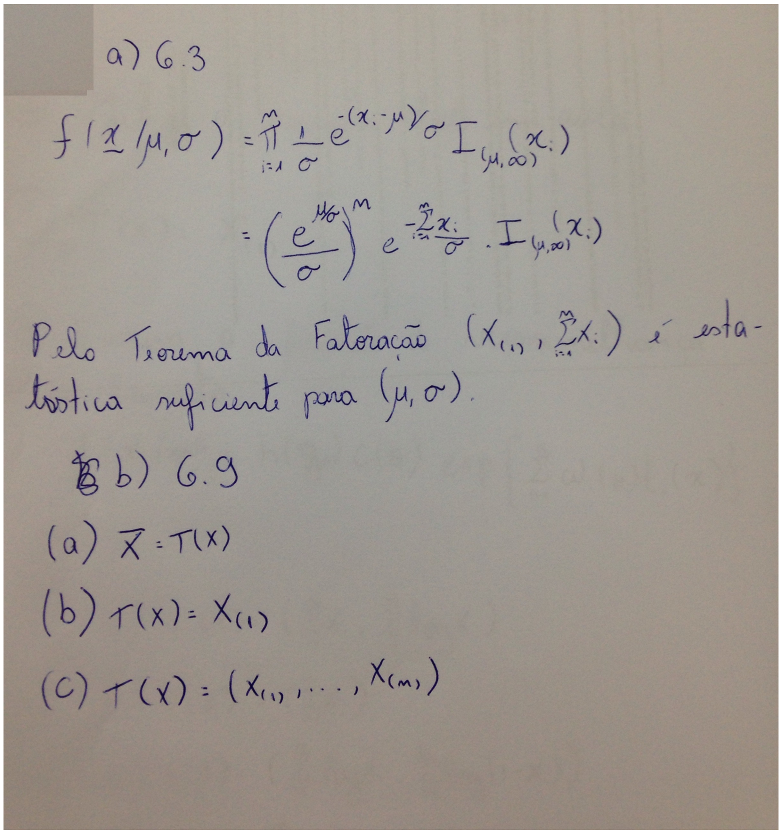
**Exercício 10** a) Feita em aula.

b) Passos comentados em aula.

**Exercício 11**

Mostre que a razão $\dfrac{L(\theta/x)}{L(\theta/y)}$ é constante EM FUNÇÃO DE $\theta$ se e somente se $T(X) = T(Y)$

**Exercício 12**



a) 6.3

$$f(\underset{\sim}{x}/\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma} e^{-(x_i-\mu)/\sigma} I_{(\mu,\infty)}(x_i)$$

$$= \left(\frac{e^{\mu/\sigma}}{\sigma}\right)^{n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma}} \cdot I_{(\mu,\infty)}(x_i)$$

Pelo Teorema da Fatoração $(X_{(1)}, \sum_{i=1}^{n} X_i)$ é estatística suficiente para $(\mu, \sigma)$.

b) 6.9

(a) $\bar{X} = T(X)$

(b) $T(X) = X_{(1)}$

(c) $T(X) = (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$

**Exercício 13**

**Exercício 14** 1) Colocar na forma da família exponencial UNIDIMENSIONAL para $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$, por exemplo:

$$f(\boldsymbol{x};\eta) \;=\; h(\boldsymbol{x})\, c(\theta)\, exp\left[\sum_{i=1}^{n} w(\theta)\, t(x_i)\right]$$

em que $\theta \in \Theta$;

ou na parametrização natural

$$f(\boldsymbol{x};\eta) \;=\; h(\boldsymbol{x})\, b(\eta)\, exp\left[\sum_{i=1}^{n} \eta\, t(x_i)\right]$$

em que $\eta \in \Omega$;

2) Verificar: $T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} t(x_i)$ é suficiente e completa para

a) $\eta$ se $\Omega$ é um subconjunto dos reais $\mathbb{R}$;

b) ou para $\theta$ se $\eta$ é uma função um a um de $\theta$ e $\Theta$ é um subconjunto dos reais $\mathbb{R}$.

**Exercício 15** O mesmo que na questão 14 mas agora a família Exponencial é BIDIMENSIONAL, $\boldsymbol{\theta}$ ou $\boldsymbol{\eta}$. Também, agora a estatística será do tipo $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = (\sum_{i=1}^{n} t_1(x_i), \sum_{i=1}^{n} t_2(x_i))$