# MAT02023 - Inferência A

## Gabarito Lista 1 - Revisão

***Matemática elementar***
**Exercícios 1 ao 8**

Lista 1 Inf A:

1) a) enumerável $\{0,1,2\}$
b) enumerável $\mathbb{N}$
c) enumerável $\mathbb{Z}$
d) não enumerável $\mathbb{R}$

2) a. $x^a y^a = (xy)^a$ CORRETO
b. $\frac{a}{x+y} \neq \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{y}$ FALSO
c. $(x^a)^b = x^{ab}$ CORRETO
d. $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$ CORRETO
e. $(x+y)^a \neq x^a + y^a$ FALSO
f. $x^a y^b \neq (xy)^{a+b}$ FALSO
g. $(-x)^2 \neq -x^2$ FASO
h. $\frac{x+y}{a} = \frac{x}{a} + \frac{y}{a}$ CORRETO

3) $f(x) = \log(\overbrace{3x+1}^{u})$ $\quad u = 3x+1 \quad \frac{du}{dx} = 3$
$f'(x) = \frac{1}{u} \, 3 = \frac{3}{3x+1}$

$f(x) = exp(\overbrace{3x}^{u})$ $\quad u = 3x \quad \frac{du}{dx} = 3$
$f'(x) = exp(u) \cdot 3 = 3exp(3x)$

4) a. CORRETO b. FALSO c. FALSO d. CORRETO
e. CORRETO f. CORRETO g. FALSO

5) $f(x) = exp(\overbrace{-3(x-1)^2}^{u})$
$f'(x) = exp(u) . (-6x+6)$
$f'(x) = 6(-x+1)\, exp(-3(x-1)^2)$

$\begin{cases} u = -3(x^2 - 2x + 1) = -3x^2 + 6x - 3 \\ \frac{du}{dx} = -6x + 6 \end{cases}$

6) a. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k}{k!}$

b. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \frac{f^{IV}(x_0)(x-x_0)^4}{4!} + \frac{f^{V}(x_0)(x-x_0)^5}{5!} + \frac{f^{VI}(x_0)(x-x_0)^6}{6!}$

c. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

8) a. $\sum_{i=1}^{m} (x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) - 2m\bar{x}\sum_{i=1}^{m} x_i + m\bar{x}^2 =$

$= \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) + m\bar{x}^2 - 2m\bar{x}.\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - m\bar{x}^2$

b. $\sum_{i=1}^{m} (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i^2 - 2x_i a + a^2) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - 2a\sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=1}^{m} a^2 =$

$= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - 2am\bar{x} + ma^2 - m\bar{x}^2 + m\bar{x}^2 =$

$= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + m(-2a\bar{x} + \bar{x}^2 + a^2) - m\bar{x}^2 =$

$= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - m\bar{x}^2 + m(\bar{x} - a)^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^2 + m(\bar{x} - a)^2$

**Exercício 9** a) R: $1/21$

b) R: $3/7$

c) R: $91/21$

d) R: $\frac{441}{21} - \left(\frac{91}{21}\right)^2 = 2.22$

**Exercício 10** a) $a = 3/14$ e $b = 1/14$

b) $27/14$

c) $2.21$

d) $8.84$

**Exercício 11** R: P(X=0)=0.5, P(X=1)=0.35, P(X=2)=0.12 P(X<3)=0.5+0.35+0.12=0.9659

**Exercício 12** R: 0.665, 0.619 e 0.597 aproximadamente.

**Exercício 13** a) R: $\frac{81}{128}$

b) R: $\frac{819}{1982}$

**Exercício 14** Denote $\hat{p}$ a proporção estimada de ratos que desenvolvem um certo tipo de tumor quando submetidos a radiação. Assumindo que $X_1, \ldots, X_n$ são i.i.d. segundo $X \sim Bernoulli(p)$, então sabemos que $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binomial(n, p)$. Por consequência

$$E(\hat{p}) = n^{-1} E\left(Y\right) = p$$

e

$$Var(\hat{p}) = n^{-2} Var\left(Y\right) = n^{-1} p(1-p).$$

$P\left(|\hat{p} - p| < 0,02\right) = P\left(-0,02 < \hat{p} - E(\hat{p}) < 0,02\right) = P\left(\frac{-0,02}{\sqrt{Var(\hat{p})}} < \frac{\hat{p}-E(\hat{p})}{\sqrt{Var(\hat{p})}} < \frac{0,02}{\sqrt{Var(\hat{p})}}\right) \geq 0.9.$

Assumindo que as condições do CLT valem para $\hat{p}$ temos $Z = \frac{\hat{p}-E(\hat{p})}{\sqrt{Var(\hat{p})}} \sim Normal(0,1)$ e que $P(Z < 1,64) \geq 0.95$. Então, para satisfazer a condição acima $P\left(Z < \frac{0,02}{\sqrt{Var(\hat{p})}}\right) \geq 0.95$, portanto

$$\frac{0,02}{\sqrt{Var(\hat{p})}} = 1,64 \Leftrightarrow \frac{0,02}{\sqrt{n^{-1}p(1-p)}} = 1,64 \Leftrightarrow n = \frac{1,64^2 \times p \times (1-p)}{\sqrt{0,02^2}}.$$

a) Na falta de informação sobre o verdadeiro valor de $p$, se usarmos $p = 0,5$ nos dará o maior tamanho de amostra e $n = 1681$.

b) Usando $p = 0,2$ teremos $n = 1076$.

**Exercício 15** Sim. 865 indiv?duos.

**Exercício 16** a) R. $\alpha = 3$

b) R. $\alpha = 5/4$.

**Exercício 17** a) R: 2

b) R: 1/4

c) R: $F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-2}, & \text{se } x \geq 1 \\ 0, & \text{se } x < 1. \end{cases}$

**Exercício 18** a) R:$P(X > 1200) = 0,3012$

b) R: média=1000; $P(X < 1000) = 0,6321$

c) R: x=693,15

**Exercício 19** a) R: $X \sim Exp(1)$

$P(X < 0,25) = 0,2212$

b) R: $P(X > 0,75) = 0,4724$

**Exercício 20** R: P(X<1)=0,3297

**Exercício 21** R: 0,1085

**Exercício 22** R: $E(L) = 3.980,59$

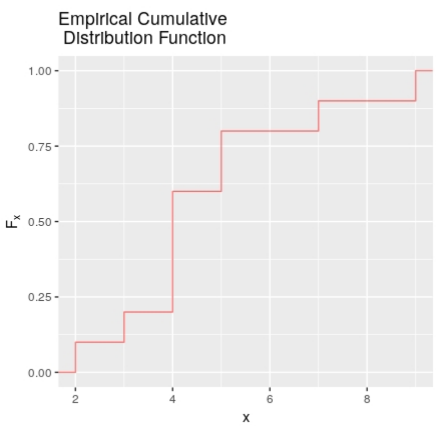
**Exercício 23** R: 73,19 nota máxima para receber conceito A

70,33 nota máxima para receber conceito R

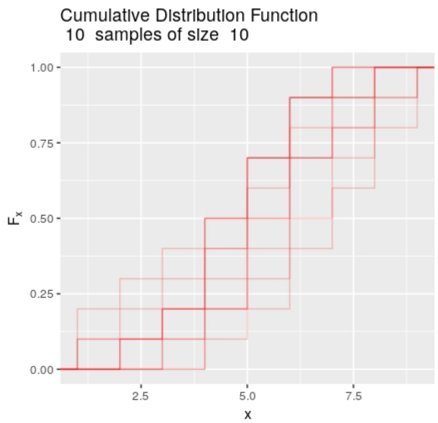
**Exercício 24** Utilize o R para:

a)
```r
## Poisson case
# set up
lambda <- 5                  # parametro
n <- 10                      # tamanho da amostra
xgen <- rpois(n, lambda)     # amostra gerada
```

b)
```r
dfgen <- data.frame(xgen)
# empirical cdf plot
plotecdf <- ggplot(dfgen, aes(xgen)) +
            stat_ecdf(colour="red", alpha = 0.5) +
            labs(title="Empirical Cumulative \n Distribution Function",
                 y = expression(F[x]), x = "x")
plotecdf
```




c)
```r
# plot multiple samples with fixed n
n <- 10
nsim <- 10
lambda <- 5
xgen <- rpois(n * nsim, lambda)
dfgen <- data.frame(xgen, g = factor(rep(1:nsim, rep(n, nsim))))
plotfixedn <- ggplot()
for(i in 1:nsim){
  # print(plotfixedn + stat_ecdf(aes(xgen), dfgen, colour = "red", alpha = 0.5))
  plotfixedn <- plotfixedn + stat_ecdf(aes(xgen), dfgen[dfgen$g==i,],
                                       colour = "red", alpha = 0.2)
}
plotfixedn + labs(title=paste("Cumulative Distribution Function \n", nsim,
                              " samples of size ",n), y = expression(F[x]),
                  x = "x")
```




d)
```
# funcao para calfular Fn(x) de 'nsim' amostras geradas de tamanho 'n'
Fnx <- function(n, x, nsim){
  # n    - tamanho da amostra
  # x    - particular valor da Poisson
  # nsim - número de simulacoes

  Fnxgen <- NULL                # objeto para guardar os Fn(x)'s
  for(i in 1:nsim){
    xgen <- rpois(n, lambda)    # gera amostra
    Fn <- ecdf(xgen)            # calcula CDF
    Fnxgen <- c(Fnxgen, Fn(5))   # armazena Fn(x)
  }
  hist(Fnxgen, main=paste("tamanho amostra n =", n), xlab=paste("Fn(",x,")"))
  abline(v=ppois(5, lambda), col="red")     # F(x) real
}
par(mfrow=c(2,2))
Fnx(10, 5, 100)
Fnx(100, 5, 100)
Fnx(1000, 5, 100)
Fnx(10000, 5, 100)
```