MAT02023 - Inferência A

Lista 1 - Conceitos de Probabilidade

Matemática elementar

Exercício 1

Diga quais dos conjuntos abaixo é um conjunto enumerável e qual é não enumerável:

a) $\{0, 1, 2\}$

b) $\mathbb{N}$

c) $\mathbb{Z}$

d) $\mathbb{R}$

Exercício 2 Identifique abaixo quais igualdades estão corretas:

a) $x^a y^a = (xy)^a$

b) $\frac{a}{x+y} = \frac{a}{x}\frac{a}{y}$

c) $(x^a)^b = x^{ab}$

d) $(\frac{x}{y})^a = \frac{x^a}{y^b}$

e) $(x+y)^a = x^a + y^a$

f) $x^a y^b = (xy)^{a+b}$

g) $(-x)^2 = -x^2$

h) $\frac{x+y}{a} = \frac{x}{a} + \frac{y}{a}$

Exercício 3 Esboce o gráfico das funções $f(x) = log(3x+1)$ e $f(x) = exp(3x)$ (dica: utilize algum software para fazer isso). Obtenha as derivadas $f'(x)$ das duas funções acima.

Exercício 4 Verifique quais das seguintes igualdades são válidas:

a) $log(xy) = log(x) + log(y)$

b) $log(x+y) = log(x) + log(y)$

c) $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y)$

d) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

e) $log(\frac{x}{y}) = log(x) - log(y)$

f) $\exp(xy) = (\exp(x))^y$

g) $\exp(xy) = \exp(x) + \exp(y)$

Exercício 5 Esboce o gráfico da função $f(x) = \exp(-3(x-1)^2)$ e obtenha a sua derivada $f'(x)$.

Exercício 6 A expansão de Taylor permite aproximar uma função $f(x)$ que pode ser muito complicada por uma função muito simples. A aproximação de Taylor precisa escolher um ponto de referência x_0, ela vale para pontos x no entorno de x_0 (este entorno varia de problema para problema). A expansão de Taylor da função f no ponto x próximo de x_0 é dada por

$$f(x) \approx f(x_0)\frac{(x-x_0)}{0!} + f(x_0)'\frac{(x-x_0)}{1!} + f(x_0)''\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots$$

a) Qual é a expressão da Série de Taylor?

b) Qual a fórmula do polinômio de Taylor de ordem 6?

c) Obtenha a expressão aproximada para $f(x) = \exp(x)$ para $x \approx x_0 = 0$.

d) Faça um gráfico com as duas funções, $f(x) = \exp(x)$ e sua aproximação de Taylor de 2^{a}. ordem, para $x \in (-1, 2)$.

e) Faça um gráfico com as duas funções, $f(x) = \exp(x)$ e sua aproximação de Taylor de 3^{a}. ordem, para $x \in (-1, 2)$.

f) Obtenha a expressão aproximada para $f(x) = \exp(x)$ para $x \approx x_0 = 1$. Faça um gráfico com as duas funções, $f(x) = \exp(x)$ e sua aproximação de Taylor de 2^{a}. ordem, para $x \in (-1, 2)$.

g) Obtenha a expressão aproximada para $f(x) = \exp(x)$ para $x \approx x_0 = 1$. Faça um gráfico com as duas funções, $f(x) = \exp(x)$ e sua aproximação de Taylor de 3^{a}. ordem, para $x \in (-1, 2)$.

Exercício 7 Na expansão de Taylor, aproximações numa região mais extensa em torno do ponto de refer encia x_0 podem ser obtidas usando um polinômio de grau n mais elevado (o que implica calcular derivadas de ordens mais elevadas):

$$f(x) \approx f(x_0)\frac{(x-x_0)}{0!} + f(x_0)^{(1)}\frac{(x-x_0)}{1!} + f(x_0)^{(2)}\frac{(x-x_0)^2}{2!} + f(x_0)^{(3)}\frac{(x-x_0)^3}{3!} + f(x_0)^{(4)}\frac{(x-x_0)^4}{4!} \dots$$

Para $x_0 = 0$, faça um gráfico de $f(x) = \frac{e^x}{cos(x)}$ com a aproximação até a segunda ordem e até a quarta ordem para $x \in (-1, 1)$.

Exercício 8 Seja $\overline{X}$ a média amostral, verique:

a)

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2$$

b) Se $a \in \mathbb{R}$, então

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + n(\overline{X} - a)^2$$

Introdução à Probabilidade

Exercício 9 Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$p(x) = cx, \quad x = 1, 2, \ldots, 6.$$

Encontre:

a) o valor de c.

b) a probabilidade de X ser um número ímpar.

c) Calcule a esperança da variável aleatória X.

d) Calcule a variância de X.

Exercício 10 A variável aleatória discreta X assume apenas os valores 0, 1, 2, 3, 4 e 5. A função densidade de probabilidade de X é dada por

$$P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = a$$

$$P(X = 4) = P(X = 5) = b$$

$$P(X = 2) = 3P(X = 4).$$

$\mathbb{E}[.]$ e $Var[.]$ denotam, respectivamente, esperança e variância.

a) Calcule a e b para que a função massa de probabilidade seja válida.

b) Calcule $\mathbb{E}[X]$.

c) Calcule $Var[X]$.

d) Defina $Z = 3 + 4X$ e calcule a covariância entre Z e X.

Exercício 11 Em um posto de pedágio de uma rodovia, constata-se que, num dado instante, a chegada de um veículo comporta-se segundo a lei de Poisson. A probabilidade de nenhum veículo, P(X = 0), se apresentar para pagar o pedágio em um instante t é de 0,4966. Calcule a probabilidade de que menos de três carros estejam em fila, num instante para pagar o pedágio.

Exercício 12 Em 1693, Samuel Pepys escreveu uma carta para Isaac Newton propondo-lhe um problema de probabilidade, relacionado a uma aposta que planejava fazer. Pepys perguntou o que é mais provável: obter pelo menos um 6 quando 6 dados são lançados, obter pelo menos dois 6 quando 12 dados são lançados, ou obter pelo menos três 6 quando 18 dados são lançados. Newton escreveu três cartas a Pepys e finalmente o convenceu de que o primeiro evento é mais provável. Calcule as três probabilidades.

Exercício 13 Um lote de componentes eletrônicos contém 20 itens, dos quais 5 são defeituosos. Seleciona-se ao acaso uma amostra de 5 itens. Calcule a probabilidade de que a amostra contenha no máximo um item defeituoso se

a) a amostragem é feita com reposição.

b) a amostragem é feita sem reposição.

Exercício 14 Um pesquisador deseja estimar a proporção de ratos nos quais se desenvolve um certo tipo de tumor quando submetidos a radiação. Ele deseja que sua estimativa não se desvie da proporção verdadeira por mais de 0,02 com uma probabilidade de pelo menos 90%.

a) Quantos animais ele precisa examinar para satisfazer essa exigência?

b) Como seria possível diminuir o tamanho da amostra utilizando a informação adicional de que em geral esse tipo de radiação não afeta mais que 20% dos ratos?

Exercício 15 Um cientista resolve estimar a proporção p de indivíduos com certa moléstia numa região. Ele deseja que a probabilidade de que a sua estimativa não se desvie do verdadeiro valor de p por mais que 0,02 seja de pelo menos 95%. Qual deve ser o tamanho da amostra para que essas condições sejam satisfeitas? Um outro cientista descobre que a doença em questão está relacionada com a concentração da substância A no sangue e que é considerado doente todo indivíduo para o qual a concentração A é menor que 1,488 mg/cm3. Sabe-se que a concentração da substância A no sangue tem distribuição normal com desvio padrão 0,4 mg/cm3 e média maior que 2,0 mg/cm3. Você acha que essas novas informações podem ser utilizadas pelo primeiro cientista para diminuir o tamanho amostral? Em caso afirmativo, qual seria o novo tamanho amostral?

Exercício 16 Suponha que X seja uniformemente distribuída entre $[-\alpha, \alpha]$, onde $\alpha > 0$. Determinar o valor de α de modo que as seguintes relações estejam satisfeitas:

a) $P(X > 1) = 1/3$

b) $P(X < 1/2) = 0,7$

Exercício 17 Seja X uma variável aleatória contínua com densidade dada por

$$f(x) = \frac{c}{x^3}, \quad x \geq 1.$$

Obtenha:

a) o valor de c.

b) a probabilidade de X ser maior que 2.

c) a função de distribuição de X.

Exercício 18 Uma lâmpada tem duração de acordo com a seguinte densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 0.001e^{-0.001x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Determinar

a) A probabilidade de que uma lâmpada dure mais do que 1200 horas.

b) A probabilidade de que uma lâmpada dure menos do que sua duração média.

c) A duração mediana.

Exercício 19 Se as interrupções no suprimento de energia elétrica ocorrem segundo uma distribuição de Poisson com a média de uma por mês (quatro semanas), qual a probabilidade de que entre duas interrupções consecutivas haja um intervalo de:

a) Menos de uma semana.

b) Mais de três semanas.

Exercício 20 O tempo até a venda de um certo modelo de eletrodoméstico, que é regularmente abastecido em um supermercado, segue uma distribuição exponencial, com parâmetros $\lambda = 0,4$ aparelhos/dia. Indique a probabilidade de um aparelho indicado ao acaso ser vendido logo no primeiro dia.

Exercício 21 O salário mensal em reais de um trabalhador da empresa A tem distribuição normal com parâmetros $\mu_A = 1800$ e $\sigma_A = 300$; para a empresa B, os parâmetros da distribuição normal são $\mu_B = 2000$ e $\sigma_B = 200$. A empresa A tem o triplo de funcionários da empresa B. Se uma pessoa é escolhida aleatoriamente entre os trabalhadores das duas empresas, qual a probabilidade de que receba mais de 2200 reais por mês?

Exercício 22 Suponha que X, a carga de ruptura de um cabo (em kg), tenha distribuição normal com $\mu = 100$ e $\sigma^2 = 16$. Cada rolo de 100 m de cabo dá um lucro de R\$ 4.250,00 desde que $X > 95$. Se $x < 95$, o cabo deverá ser utilizado para uma finalidade diferente e um lucro de R\$ 1700,00 será obtido. Determinar o lucro esperado por rolo.

Exercício 23 Suponha que as notas de uma prova sejam normalmente distribuídas, com média $\mu = 72$ e desvio padrão $\sigma = 1,3$. Considerando que 18% dos alunos mais adiantados receberam conceito "A" e 10% dos mais atrasados o conceito "R", encontre a nota mínima para receber "A" e a máxima para receber "R".

Exercício 24 Utilize o R para:

a) gerar uma amostra aleatória (aleatória simples sem reposição) de uma $Poisson(\lambda = 5)$ de tamanho $n = 10$;

b) calcule e faça o gráfico da Função de Distribuição Empírica (Amostral) $F_n^*(x)$ (Definição 1.13 do material) referente à amostra selecionada;

c) repita os passos 1 e 2 de modo a ter os resultados para $nsim = 10$ amostras;

d) encontre a distribuição amostral de $F_{10}^*(x)$ para um particular valor de x, por exemplo $x = 5$. O que se pode dizer sobre essa distribuição? O que acontece com ela quando a número de amostra $nsim$ aumenta? E quando o tamanho da amostra n aumenta?