UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

MAT02023 - INFERÊNCIA B - 2019/2

Plano Aula 5

Markus Stein

26 August 2019

Intevalos Bayesianos

Vimos até agora como obter ICs analiticamente e baseado em resultados de convergência (dos MLEs).

- Relembrando conceitos de Inferência Bayesiana: Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim f(x;\theta)$, para $x \in \mathcal{X}$ (suporte da distribuição) e $\theta \in \Theta$ (espaço paramétrico, no caso multiparamétrico $\boldsymbol{\theta}$).
  - Função de **verossimlhança**: Para $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ temos $L(\theta) = f(\boldsymbol{x};\theta)$;
  - Distribuição *a priori*: $\pi(\theta)$, ou dizemos que $\theta \sim \pi$;
  - Distribuição *a posteriori*: $\pi(\theta|\boldsymbol{x}) = \frac{L(\theta)\times\pi(\theta)}{\int_{\theta\in\Theta} L(\theta)\times\pi(\theta)d\theta}$.

Definição (**Intervalo de Credibilidade**): (Bolfarine e Sandoval, seção 5.5) Dizemos que $[t_1, t_2]$ é um intervalo de credibilidade para θ, com coeficiente de credibilidade $\gamma = 1 - \alpha$, se $\int_{t_1}^{t_2} \pi(\theta|\boldsymbol{x})d\theta = \gamma$.
\+ Intervalo simétrico (central) *versus* HPD ("highest probability a posteriori").

- **Exemplo 1**: Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim Normal(\mu, 1)$. Assuma uma distribuição *a priori* $\mu \sim Normal(\mu_0, 1)$. Encontre um intervalo de 95% credibilidade para μ.
- **Exemplo 2**: Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim Uniforme(0, \theta)$. Utilizando a priori $\pi(\theta)$ sendo a distribuição de Pareto, encontre o intervalo de credibilidade $(1-\alpha)$ para θ.

Intervalos *Boostrap*

"*Bootstrap* é um técnica utilizada para se aproximar distribuições amostrais."

"Sempre que fórmulas existirem, *bootstrap* tenderá a"concordar" com elas."

- Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim f(x;\theta)$ para $\theta \in \Theta$ (ou $\boldsymbol{\theta}$).
- Podemos estimar θ através de $\hat{\theta}_{EMV}$ e gerar amostras $\boldsymbol{X}^* = (X_1^*, \ldots, X_n^*)$ de $X^* \sim f(x;\hat{\theta}_{EMV})$.
- Se gerarmos $\boldsymbol{X}_1^*, \ldots, \boldsymbol{X}_B^*$, B reamostras bootstrap de $f(x;\hat{\theta})$ e denotamos $\hat{\theta}_j^*$ o EMV reamostra j:
  - Viés: denote $\overline{\hat{\theta}^*} = \frac{1}{B}\hat{\theta}_j^*$ então $Viés = \overline{\hat{\theta}^*} - \hat{\theta}_{EMV}$;
  - Variância *bootstrap*: $Var_B^*(\hat{\theta}) = \frac{1}{B-1}\sum_{j=1}^{B}(\hat{\theta}_j^* - \overline{\hat{\theta}^*})^2$;
  - Intervalo paramétrico *versus* percentil.

- **continuação exemplo 1**: Encontre um intervalo *bootstrap* (paramétrico) para μ.

Tarefa: Finalizar lista 1 para entregar.

Leitura: "Uma senora toma chá" capítulo 11.
