

Periodische Faltmuster mit Singularitäten

Periodic crease patterns with singularities

BACHELORARBEIT

vorgelegt der
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, INFORMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

angefertigt am
LEHRSTUHL B FÜR MATHEMATIK
RWTH AACHEN UNIVERSITY

von
MARKUS BAUMEISTER
betreut von
PROF. DR. WILHELM PLESKEN

14. September 2017

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
Notation	6
1. Grundlegende Begriffe	7
1.1. Einfache ebene Symmetrien	7
1.2. Faltkantenmuster	11
1.3. Dynamische Faltmuster	14
1.3.1. Bestimmung der Stetigkeit	15
1.3.2. Symmetrie	17
1.3.3. Äquivalenz	18
1.4. Statische Faltmuster	20
2. Das Miura–Ori	23
2.1. Anschauliche Beschreibung der Faltung	23
2.2. Faltung zu einem festen Zeitpunkt	25
2.2.1. Faltung des grünen Bereichs	25
2.2.2. Faltung des gelben Bereichs	26
2.2.3. Faltung von violetter und blauem Bereich	27
2.2.4. Translationen und stetige Fortsetzung	28
2.3. Fläche Zusammenfaltbarkeit	29
2.4. Komplette Faltung	31
3. Dreiecksmuster	37
3.1. Gleichseitiges Dreiecksmuster	37
3.2. Verfeinerung des Miura–Ori	43
4. Statische Analyse des Miura–Ori	51
4.1. Relationen zwischen den Höhen	52
4.2. Reduktion der Winkelgleichungen	54
4.3. Lösen der Winkelgleichungen	57
5. Pflasterung der Ebene	61
6. Ausblick	69
A. Charakterisierung von Drehungen	71
B. Geometrie in Zylinderkoordinaten	76
C. Faltskizzen	77
Literatur	82
Danksagung	83

Einleitung

Origami, die Kunst des Papierfaltens, besitzt eine lange Tradition. Im Vergleich dazu steckt die mathematische Beschreibung von Faltungen noch weitgehend in den Kinderschuhen. Es ist also längst überfällig, diese Beschreibung voranzutreiben. Dies kann nicht in einem Schritt passieren, da durch mehrfaches Falten eine hohe Komplexität im Origami erzielt werden kann, die schwer zu fassen ist. Stattdessen beginnen wir damit, eine einzelne Faltung zu verstehen. Diese Arbeit beschäftigt sich mit einer Unterklasse von solchen Faltungen, nämlich mit zweifach translationssymmetrischen Faltungen.

In Kapitel 1 führen wir zwei verschiedene Definitionen von Faltmustern ein. Die *dynamischen Faltmuster* beschreiben den gesamten Faltprozess, vom flachen Papier angefangen bis zum endgültigen Muster. Den *statischen Faltmustern* fehlt diese Dynamik. Sie beschreiben immer nur einen Moment der Faltung. Infolgedessen kann man mit ihnen Faltmuster beschreiben, die nicht aus einem flachen Stück Papier hervorgingen, sondern aus einer anderen Grundform. Wir führen Äquivalenzbegriffe für beide Arten von Faltungen ein, um die konkrete Berechnung von solchen zu vereinfachen. Darüber hinaus erklären wir, was wir unter Symmetrien von Faltmustern verstehen, insbesondere wie sich diese während der Faltung verhalten.

Kapitel 2 beschäftigt sich komplett mit dem Miura–Ori–Faltmuster. Wir geben eine Verallgemeinerung des Musters an, bei dem die Translationsrichtungen nicht orthogonal sind und beschreiben den Faltprozess im Detail. Wir zeigen auch, dass dieses Muster im Allgemeinen nicht flach zusammenfaltbar ist, geben aber auch an, wann das der Fall ist. Zudem geben wir eine Implementierung in Maple an, die aufzeigt, wie man solche Faltmuster angenehm visualisieren kann.

In Kapitel 3 betrachten wir ausschließlich Muster, die aus gleichseitigen Dreiecken aufgebaut sind. Der erste Teil des Kapitels behandelt eine Situation, in dem die Projektion des Faltmusters auf die Ebene ein simples Muster ergibt. Wir zeigen dann, dass diese Projektion nur von einem einfachen Faltmuster stammen kann. Im zweiten Teil fügen wir dem Miura–Ori Kanten hinzu, sodass die Grundflächen Dreiecke anstatt Parallelogramme sind und weisen nach, dass dadurch keine zusätzlichen Faltmuster zugelassen werden.

Im 4. Kapitel verallgemeinern wir das Miura–Ori, indem wir die Translationen vergrößern. Wir betrachten diesen Fall statisch und zeigen, dass sich auch hier im Wesentlichen keine neuen Faltmuster ergeben.

Das 5. Kapitel behandelt Überdeckungen der Ebene durch andere Mengen, sogenannte *Pflasterungen*. Wir zeigen, dass Pflasterungen bei einer Faltung erhalten bleiben. Wir können auch zeigen, dass die erhaltene Pflasterung die Symmetrien der Grundpflasterung und des Faltmusters teilt. Wir schließen das Kapitel mit der Betrachtung einer interessanten Pflasterung des Miura–Ori ab, in der bereits die gesamte Faltinformation steckt.

Notation

Mit \mathbb{N} bezeichnen wir die natürlichen Zahlen, angefangen bei 1. Falls nichts anderes gesagt wird, sind mit i, j, k, l, m und n stets Elemente dieser Menge gemeint.

Wird eine Gruppe G von den Elementen g_1, \dots, g_k erzeugt, so schreiben wir $G = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$.

Das offene Innere der Menge A heißt $\overset{\circ}{A}$, der Abschluss von A wird mit \overline{A} bezeichnet.

Wir verwenden den \mathbb{R}^n als Euklidischen Punktraum. Seine Elemente schreiben wir zeilenweise, die Elemente seines Translationsraumes als Spalten. Wir betten den \mathbb{R}^2 kanonisch in den \mathbb{R}^3 ein vermöge

$$\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, y, 0). \quad (1)$$

Insbesondere ist die Anwendung einer Abbildung auf dem \mathbb{R}^3 auf ein Element des \mathbb{R}^2 damit wohldefiniert. Dies führen wir auch für die Translationsräume aus.

Eine affine Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ zerfällt in einen linearen Anteil $\bar{\alpha}$ und einen Translationsanteil $t_\alpha \in \mathbb{R}^k$ gemäß

$$\alpha(x) = \bar{\alpha}(x) + t_\alpha \quad (2)$$

für $x \in \mathbb{R}^n$. Wenn wir die Punkte des \mathbb{R}^n mit dem $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ und den Translationsvektorraum \mathbb{R}^n mit dem $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ identifizieren, hat die Abbildung α die Matrixdarstellung

$$\left(\begin{array}{c|c} A & t_\alpha \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (n+1)}, \quad (3)$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ die Matrixdarstellung von $\bar{\alpha}$ ist. Wenn wir diese Darstellung wählen, schreiben wir sowohl Punkte als auch Vektoren als Spalten, grenzen diese aber von normalen Vektoren dadurch ab, dass wir einen Trennstrich über die letzte Komponente ziehen. Für Punkte (x, y) bzw. (x, y, z) gilt also

$$(x, y) \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \hline 1 \end{pmatrix} \equiv (x, y, 0) \qquad (x, y, z) \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

und für Translationsvektoren aus dem \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \hline 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ \hline 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \hline 0 \end{pmatrix}.$$

Die Menge der affinen Isomorphismen auf dem \mathbb{R}^n heißt $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$, die Menge der euklidischen Isomorphismen des \mathbb{R}^n bezeichnen wir mit $\text{Eukl}(\mathbb{R}^n)$. Eine *eigentliche* euklidische Abbildung ist eine euklidische Abbildung, deren Linearteil in der speziellen orthogonalen Gruppe liegt, wobei die spezielle orthogonale Gruppe diese Matrixgruppe ist:

$$SO(n) := SO(n, \mathbb{R}) := \{R \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid R^{tr} \cdot R = I_3 \text{ und } \det(R) = 1\}. \quad (4)$$

Wir schreiben I_n für die $n \times n$ -Einheitsmatrix.

Sind A und B zwei Punkte des \mathbb{R}^n , so bezeichnen wir mit $B - A$ oder \overrightarrow{AB} ihren Verbindungsvektor. Analog kennzeichnen wir gelegentlich Vektoren durch einen Pfeil, wie z. B. \overrightarrow{a} .

1. Grundlegende Begriffe

In diesem Kapitel führen wir die Sprache ein, die wir zur Beschreibung von Faltungen verwenden werden. Wir beginnen mit einer Charakterisierung der uns interessierenden Symmetriegruppen und diskutieren dann zwei verschiedene Arten, über Faltungen nachzudenken. Dies schließt die Betrachtung von Symmetrie- und Äquivalenzbegriffen für die Faltungen ein.

1.1. Einfache ebene Symmetrien

Translationssymmetrien spielen für uns eine entscheidende Rolle. Wir fordern Translationsymmetrien in zwei linear unabhängige Richtungen, sodass wir ein zweifach periodisches Muster erhalten. Diese Art von Symmetrie beschreiben wir als **p1-Symmetrie**. Fügt man dieser Symmetrie noch eine Drehung um 180° hinzu, nennen wir dies eine **p2-Symmetrie**. In diesem Kapitel analysieren wir die Eigenschaften dieser Symmetrien und gehen insbesondere auf ihre Darstellung als Matrizen ein.

Diese anschaulichen Beschreibungen legen eine Menge von Gruppen fest, die man als eine Äquivalenzklasse unter folgender Äquivalenzrelation verstehen kann:

Definition 1.1. Seien U, V Untergruppen von $\text{Eukl}(\mathbb{R}^2)$. Sie heißen **affin äquivalent**, falls es einen affinen Isomorphismus α gibt, der $U = \alpha \circ V \circ \alpha^{-1}$ erfüllt.

Wir zeigen in den Lemmata 1.3 und 1.4, dass dies genau unsere anschauliche Beschreibung der beiden Symmetriekategorien liefert.

Definition 1.2. Mit G_{p1} bezeichnen wir die affine Äquivalenzklasse der Matrixgruppe

$$\langle T_1, T_2 \rangle \leq \text{Eukl}(\mathbb{R}^2) \quad (5)$$

und G_{p2} sei die affine Äquivalenzklasse der Matrixgruppe

$$\langle D, T_1, T_2 \rangle \leq \text{Eukl}(\mathbb{R}^2), \quad (6)$$

mit

$$D := \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad T_1 := \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad T_2 := \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \quad (7)$$

Wir charakterisieren diese Äquivalenzklassen nun genauer.

Lemma 1.3. Die affine Äquivalenzklasse G_{p2} besteht aus allen Matrixgruppen der Form

$$\langle D(x_d, y_d), T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2) \rangle,$$

mit

$$D(x_d, y_d) := \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & x_d \\ 0 & -1 & y_d \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad T_1(x_1, y_1) := \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad T_2(x_2, y_2) := \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

wobei $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind und $\begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig ist.

Beweis. Sei α ein affiner Isomorphismus. Er hat die Form

$$\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & v \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right),$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ invertierbar ist und v in \mathbb{R}^2 liegt. Der inverse Isomorphismus ist dann

$$\alpha^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & -A^{-1}v \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

Wir konjugieren nun die Standarderzeuger mit diesem α . Diese Rechnung wird übersichtlicher, wenn man $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ definiert.

$$\begin{aligned} \alpha \left(\begin{array}{c|c} -I_2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \alpha^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} -I_2 & 2 \cdot v \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \\ \alpha \left(\begin{array}{c|c} I_2 & e_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \alpha^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} I_2 & Ae_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \\ \alpha \left(\begin{array}{c|c} I_2 & e_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \alpha^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} I_2 & Ae_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Da A invertierbar ist, sind die Spalten Ae_1 und Ae_2 linear unabhängig. Somit liegen höchstens die angegebenen Matrixgruppen in der Äquivalenzklasse G_{p2} .

Sei umgekehrt die Matrixgruppe $\langle D(x_d, y_d), T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2) \rangle$ vorgegeben. Da zwei linear unabhängige Spalten eine invertierbare Matrix definieren, liefern die Setzungen $A := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ und $v := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix}$ den gewünschten Isomorphismus. \square

Exakt analog beweist man das nächste Lemma.

Lemma 1.4. *Die affine Äquivalenzklasse G_{p1} besteht aus allen Matrixgruppen der Form*

$$\langle T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2) \rangle,$$

mit

$$T_1(x_1, y_1) := \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad T_2(x_2, y_2) := \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

wobei $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind.

Wir werden häufig die genauen Translationsanteile unterdrücken, z. B. werden wir T_1 statt $T_1(x_1, y_1)$ schreiben.

Bemerkung 1.5. *Sei $G = \langle D, T_1, T_2 \rangle$ eine beliebige Matrixgruppe aus G_{p2} . Dann gilt*

1. $\langle T_1, T_2 \rangle$ ist ein Normalteiler von G .

2. G zerfällt in das innere semidirekte Produkt $G = \langle T_1, T_2 \rangle \rtimes \langle D \rangle$.

3. $G/\langle T_1, T_2 \rangle$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung 2. Genauer: $G/\langle T_1, T_2 \rangle \cong \langle D \rangle$.

Beweis. 1. Man rechnet nach, dass Konjugation mit den Erzeugern von G nicht aus $\langle T_1, T_2 \rangle$ herausführt.

2. Da das Erzeugnis von $\langle T_1, T_2 \rangle$ und $\langle D \rangle$ bereits ganz G ist und da der Schnitt dieser beiden Untergruppen trivial ist, folgt die Behauptung aus dem ersten Teil.

3. Betrachte die Abbildung

$$\alpha : \langle T_1, T_2 \rangle \rtimes \langle D \rangle \rightarrow \langle D \rangle : (t, d) \mapsto d. \quad (8)$$

Nach Konstruktion des semidirekten Produktes ist dies ein Gruppenepimorphismus. Ebenso sieht man, dass $\text{Kern}(\alpha) = \langle T_1, T_2 \rangle$. Die Behauptung folgt nun aus dem Homomorphiesatz. \square

Wann immer eine Gruppe operiert, stellt sich die Frage nach einem Vertretersystem der Bahnen. Für unsere Gruppen können wir zusätzlich noch einige angenehme topologische Eigenschaften fordern.

Definition 1.6. Sei $G \leq \text{Eukl}(\mathbb{R}^2)$. Ein Fundamentalbereich von G ist eine Teilmenge $F \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Eigenschaften

1. F ist kompakt.
2. F ist zusammenhängend.
3. Es gibt ein Vertretersystem V der Bahnen von G auf \mathbb{R}^2 , sodass $\overset{\circ}{F} \subseteq V \subseteq F = \overline{V}$ gilt.

Man bemerke, dass $F = \overline{V}$ automatisch aus $\overset{\circ}{F} \subseteq V \subseteq F$ folgt, falls der Abschluss des Inneren von F gleich F ist. Eine Gruppe hat im Allgemeinen mehrere verschiedene Fundamentalbereiche.

Beispiel 1.7. Das Parallelogramm $(0, 0), (x_1, y_1), (x_1 + x_2, y_1 + y_2), (x_2, y_2)$ ist ein Fundamentalbereich der Gruppe $\langle T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2) \rangle$ (mit der Notation aus Lemma 1.4).

Im nächsten Lemma werden die Fundamentalbereiche von affin äquivalenten Untergruppen miteinander verknüpft.

Lemma 1.8. Sei $F \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Fundamentalbereich von $G \leq \text{Eukl}(\mathbb{R}^2)$. Sei α ein affiner Isomorphismus von \mathbb{R}^2 . Dann ist $\alpha(F)$ ein Fundamentalbereich von $\alpha \circ G \circ \alpha^{-1}$.

Beweis. Wir führen den Beweis in mehreren Etappen.

- $\alpha(F)$ ist kompakt: Sei $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von $\alpha(F)$. Da α eine affine Abbildung ist, ist sie insbesondere stetig, folglich ist $\alpha^{-1}(U_i)$ offen. Demnach ist $\{\alpha^{-1}(U_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von F . Da F kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\alpha^{-1}(U_1), \dots, \alpha^{-1}(U_n)$. Wir schließen nun, dass U_1, \dots, U_n eine endliche Teilüberdeckung von $\alpha(F)$ ist. Damit ist $\alpha(F)$ kompakt.

- $\alpha(F)$ ist zusammenhängend: Seien U, W offen mit $\alpha(F) \subseteq U \cup W$ und $U \cap W \cap \alpha(F) = \emptyset$. Dann sind auch $\alpha^{-1}(U)$ und $\alpha^{-1}(W)$ offen. Darüber hinaus gilt $F \subseteq \alpha^{-1}(U) \cup \alpha^{-1}(W)$ und $\alpha^{-1}(U) \cap \alpha^{-1}(W) \cap F = \emptyset$. Da F zusammenhängend ist, folgt $F \subseteq \alpha^{-1}(U)$ oder $F \subseteq \alpha^{-1}(W)$. Damit ergibt sich unmittelbar $\alpha(F) \subseteq U$ oder $\alpha(F) \subseteq W$. Damit ist $\alpha(F)$ zusammenhängend.
- $\alpha(F)$ enthält ein Vertretersystem V der Bahnen: Sei $\alpha(y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann gibt es ein $g \in G$ und ein $x \in F$, sodass $gx = y$. Dann gilt auch

$$(\alpha \circ g \circ \alpha^{-1})(\alpha(x)) = \alpha(y).$$

Da $\alpha(x) \in \alpha(F)$, zeigt dies die Behauptung.

- Das Innere von $\alpha(F)$ ist im Vertretersystem V enthalten: Seien $\alpha(f_1)$ und $\alpha(f_2)$ im Inneren von $\alpha(F)$. Gäbe es ein $\alpha \circ g \circ \alpha^{-1}$, dass diese Punkte ineinander überführt, so würde $gf_1 = f_2$ gelten, wobei f_1 und f_2 im Inneren von F lägen. Dies wäre ein Widerspruch dazu, dass F ein Fundamentalbereich ist.
- Der Abschluss des Vertretersystems V ist $\alpha(F)$ Wegen $\alpha(F) \subseteq \overline{V} \subseteq \alpha(F)$ folgt dies daraus, dass der Abschluss des Inneren von $\alpha(F)$ schon $\alpha(F)$ ist. \square

Mit diesem Lemma ist die Bestimmung eines Fundamentalbereichs von Gruppen aus G_{p2} vereinfacht.

Beispiel 1.9. In der Notation von Lemma 1.3 ist ein Fundamentalbereich der Gruppe $G := \langle D(0,0), T_1(1,0), T_2(0,1) \rangle$ durch das Dreieck $(0,0), (1,0), (0,1)$ gegeben.

Beweis. Das Quadrat $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ ist ein Fundamentalbereich von $\langle T_1, T_2 \rangle$. Wenn man $T_2 \circ T_1 \circ D$ auf das Dreieck $(0,0), (1,0), (0,1)$ anwendet, erhält man das Dreieck $(1,0), (1,1), (0,1)$. Zusammen ergeben diese beiden Dreiecke das Quadrat, folglich enthält das Dreieck ein Vertretersystem der Gruppenoperation.

Da das Quadrat ein Fundamentalbereich von $\langle T_1, T_2 \rangle$ ist, gilt für jeden inneren Punkt x des Dreiecks (der auch innerer Punkt des Quadrats ist), dass jedes Element aus der Bahn $G/\langle T_1, T_2 \rangle x$ genau einen Vertreter in diesem Quadrat hat. Da der Vertreter von Dx nicht mehr im ursprünglichen Dreieck liegt (wie wir oben gesehen haben), sind alle inneren Punkte des Dreiecks im Vertretersystem enthalten. Der Abschluss der inneren Punkte des Dreiecks ist schon das gesamte Dreieck. Damit handelt es sich um einen Fundamentalbereich. \square

Beispiel 1.10. In der Notation von Lemma 1.3 ist ein Fundamentalbereich der Gruppe $\langle D(0,0), T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2) \rangle$ durch das Dreieck $(0,0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ gegeben.

Beweis. Das ist eine Konsequenz aus Lemma 1.8, wenn man mit dem Fundamentalbereich aus Beispiel 1.9 startet und die affine Isomorphie aus Lemma 1.3 verwendet. \square

1.2. Faltkantenmuster

Wir möchten untersuchen, welche Muster man aus einem Blatt Papier falten kann, ohne dieses zu verbiegen. Während beim Origami virtuose Formen durch mehrfaches Zusammen- und Auseinanderfalten entstehen, beschäftigen wir uns in dieser Arbeit nur mit einer einzigen Faltung. Wir setzen weiterhin voraus, dass alle Faltkanten gerade sind.

Die Bedingung, dass das Papier nicht verbogen werden darf, lässt sich auch anders beschreiben: Wir fordern, dass alle unsere Faltungen auch mit Stahlplatten ausgeführt werden können, die entlang der Faltkanten mit Scharnieren verbunden sind.

Formal heißt dies, dass die Funktion, die das Muster beschreibt, stückweise affin ist (wobei die Details in den Definitionen 1.16 und 1.34 ausgeführt werden).

Damit ist die Position der Faltkanten wesentlich für die Faltung, wir beginnen also mit einer Beschreibung selbiger. Wir haben dabei insbesondere Muster wie in den Abbildungen 1 und 2 dargestellt im Sinn (man muss sich diese natürlich in alle Richtungen unendlich ausgedehnt vorstellen, um die doppelte Periodizität zu gewährleisten).

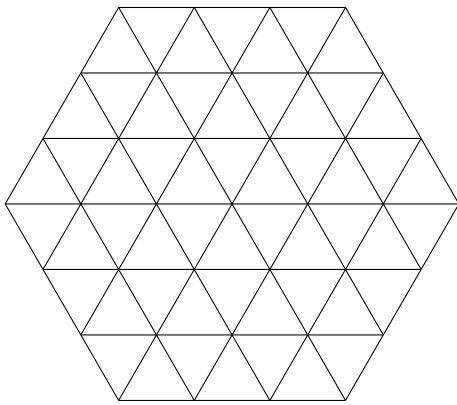


Abbildung 1: Hexagonales Muster

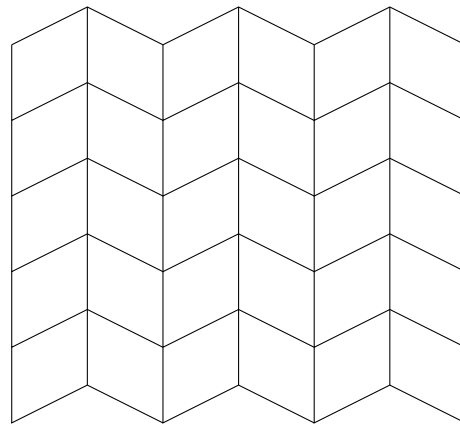


Abbildung 2: Parallelogramm-Muster

Es ist eine plausible Annahme, dass diese Muster aus Polygonen aufgebaut sind. Da wir in dieser Arbeit nur Muster aus konvexen Polygonen¹ betrachten, beschränken wir unsere Definitionen auf diese.

Definition 1.11. Seien $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Die **konvexe Hülle** von v_1, \dots, v_k ist definiert als die Menge

$$\{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \mid a_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \sum_{i=1}^k a_i = 1\}. \quad (9)$$

Falls keiner der Punkte v_1, \dots, v_k zur Bildung der Menge weggelassen werden kann, so heißt die Menge **konvexes Polygon** und die v_1, \dots, v_k sind dessen **Eckpunkte**.

Man kann sich überlegen, dass alle Innenwinkel eines konvexen Polygons höchstens Wert π haben. Wir können sogar zeigen, dass sie kleiner als π sind. Dazu betrachten wir ein konvexes

¹Also solche, die für je zwei Punkte auch deren Verbindungsstrecke enthalten.

Polygon mit Eckpunkten v_1, \dots, v_k . Wäre der Winkel am Eckpunkt v_1 gleich π , so läge dieser Punkt auf einer Kante des Polygons, also zwischen zwei anderen Eckpunkten v_i und v_j . Damit wäre die konvexe Hülle von v_1, \dots, v_k identisch zur konvexen Hülle von v_2, \dots, v_k . Dies stünde im Widerspruch zur Definition eines konvexen Polygons, da dort gefordert wurde, dass die Eckpunkte eine minimale Menge sind, deren konvexe Hülle das Polygon ergibt.

Man kann die Definition auch so verallgemeinern, dass man den Winkel π zulässt, müsste dann aber von der Minimalitätsbedingung Abstand nehmen.

Bemerkung 1.12. *Die konvexe Hülle ist abgeschlossen und konvex. Da sie von endlich vielen Punkten aufgespannt ist, ist sie auch kompakt.*

Unter affinen Abbildungen werden Polygone auf Polygone abgebildet:

Lemma 1.13. *Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein konvexes Polygon mit Eckpunkten v_1, \dots, v_k und $f : P \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine injektive affine Abbildung. Dann ist $f(P) \subseteq \mathbb{R}^m$ ein konvexes Polygon mit Eckpunkten $f(v_1), \dots, f(v_k)$.*

Beweis. Da f auf P affin ist, hat es dort die Form $\bar{f} + t_f$, wobei \bar{f} linear ist und $t_f \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & f \left(\left\{ a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \mid a_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \sum_{i=1}^k a_i = 1 \right\} \right) \\ &= \left\{ f(a_1 v_1 + \dots + a_k v_k) \mid a_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \sum_{i=1}^k a_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \bar{f}(a_1 v_1 + \dots + a_k v_k) + t_f \mid a_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \sum_{i=1}^k a_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ a_1 \bar{f}(v_1) + \dots + a_k \bar{f}(v_k) + (a_1 + \dots + a_k) t_f \mid a_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \sum_{i=1}^k a_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ a_1 f(v_1) + \dots + a_k f(v_k) \mid a_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \sum_{i=1}^k a_i = 1 \right\} \end{aligned}$$

Damit ist $f(P)$ ein konvexes Polygon mit Eckpunkten $f(v_1), \dots, f(v_k)$. Die Minimalität wird dabei durch die Invertierbarkeit von f auf P gesichert. \square

Als nächstes soll die Ebene in solche Polygone unterteilt werden. Dabei ist darauf zu achten, dass jeder Punkt in einem solchen Polygon vorkommt und dass sich die Polygone höchstens in den Rändern schneiden. Die Polygone sollen sich auch vernünftig zusammenfügen, d. h. Eckpunkte sollen nur mit anderen Eckpunkten zusammenstoßen. Damit können wir die Definition für unsere Zerlegung angeben.

Definition 1.14. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\{P_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sei eine abzählbare Familie von Teilmengen des \mathbb{R}^n . Das Paar $(M, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ heißt **Polygonzerlegung** (im \mathbb{R}^n), falls:

1. Jedes P_j ist ein konvexes Polygon.
2. $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} P_j = M$.
3. Schneidet man zwei Polygone P_j und P_k , so tritt einer von vier Fällen auf:
 - Sie sind gleich.
 - Sie haben leeren Schnitt.
 - Sie schneiden sich in genau einem Punkt, der Eckpunkt beider Polygone ist.
 - Ihr Schnitt ist eine Strecke zwischen v_1 und v_2 , wobei v_1 und v_2 Eckpunkte beider Polygone sind (also in einer gemeinsamen Kante).

Wegen Bedingung 2 genügt es, $\{P_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ anzugeben, um eine Polygonzerlegung eindeutig festzulegen.

Die Abbildungen 1 und 2 sind Beispiele für Polygonzerlegungen. Ein Beispiel für eine Unterteilung der Ebene (bis auf die Nullmengen der Ränder), die keine Polygonzerlegung ist, liegt in Abbildung 3 vor. Dabei entsprechen die Rechtecke unseren Polygonen. Schneidet man zwei Rechtecke, die direkt übereinander liegen, so ist der Schnitt die Hälfte einer Rechteckseite. Damit liegt keine Polygonzerlegung vor. Es ist jedoch möglich, durch die Einführung zusätzlicher Kanten eine Polygonzerlegung zu erschaffen. Eine mögliche solche Verfeinerung ist in Abbildung 4 zu sehen.

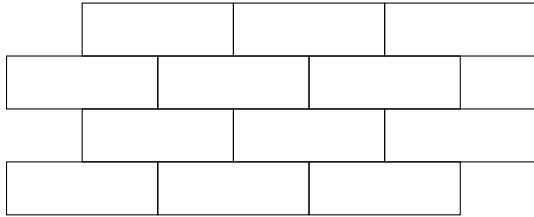


Abbildung 3: Ungültige Aufteilung

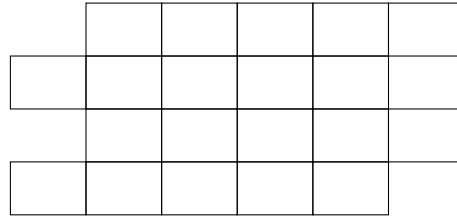


Abbildung 4: Gültige Verfeinerung

Polygonzerlegungen haben die angenehme Eigenschaft, dass sie unter injektiven, stückweise affinen Abbildungen wieder auf Polygonzerlegungen abgebildet werden. Man beachte, dass solche Abbildungen automatisch stetig sind.

Lemma 1.15. *Sei $(M, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ eine Polygonzerlegung im \mathbb{R}^n . Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive Abbildung, die eingeschränkt auf jedes P_j affin ist. Dann ist $(f(M), \{f(P_j)\}_{j \in \mathbb{N}})$ eine Polygonzerlegung.*

Beweis. Offenbar ist $\{f(P_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von Teilmengen von $f(M)$. Wir weisen also die Axiome für Polygonzerlegungen nach:

1. Sei P_j ein konvexes Polygon mit Eckpunkten v_1, \dots, v_k . Wegen Lemma 1.13 ist $f(P_j)$ ein konvexes Polygon mit Eckpunkten $f(v_1), \dots, f(v_k)$.

2. Sei $y \in f(M)$, dann gibt es ein $x \in M$ mit $y = f(x)$. Da $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} P_j = M$, gibt es ein P_k mit $x \in P_k$. Folglich ist $y \in f(P_k)$, d. h. $f(M) \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f(P_j)$. Die andere Inklusion ist klar.
3. Wir zeigen, dass $f(P_j \cap P_k) = f(P_j) \cap f(P_k)$ gilt, daraus folgt dann die Behauptung. Es ist klar, dass $f(P_j \cap P_k)$ in $f(P_j) \cap f(P_k)$ enthalten ist. Die andere Richtung folgt aus der Injektivität von f . \square

1.3. Dynamische Faltmuster

Wir sind nun bereit, den Faltprozess selbst zu beschreiben. Dafür ist wesentlich, dass die Polygone der Ebene nicht verzerrt werden, d. h. dass die Abbildung, die die Faltung beschreibt, eingeschränkt auf jedes dieser Polygone euklidisch ist. Da wir jederzeit an der durch das Polygon definierten Ebene spiegeln können, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass diese Transformation durch eine Drehung induziert wird.

Definition 1.16. Sei $(M, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ eine Polygonzerlegung im \mathbb{R}^2 . Ein **dynamisches Faltmuster** auf $(M, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ ist eine Abbildung $\mathcal{F} : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit den Eigenschaften:

1. \mathcal{F} ist stetig.
2. $\mathcal{F}(t, \cdot)|_{P_j}$ ist für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine eigentliche euklidische Abbildung.
3. $\mathcal{F}(0, (x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
4. Für $0 \leq t < 1$ ist $\mathcal{F}(t, \cdot)$ injektiv.

Damit haben wir den Prozess der Faltung beschrieben. Während $\mathcal{F}(0, \cdot)$ das noch flache Papier darstellt, befindet sich $\mathcal{F}(1, \cdot)$ in der endgültigen Faltungsphase. Die Injektivität sorgt dafür, dass das Papier sich während des Faltens nicht selbst berührt, also insbesondere nicht durchdringt. Eine Berührung am Ende der Faltung ist aber erlaubt. Wir heben einen Spezialfall einer solchen Berührung explizit hervor, und zwar den Fall, dass das Papier am Ende des Faltprozesses wieder flach ist (wobei Überlagerungen des Papiers erlaubt sind).

Definition 1.17. Ein dynamisches Faltmuster \mathcal{F} auf $(M, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ heißt **flach zusammenfaltbar**, falls $\mathcal{F}(1, M)$ in einer Ebene liegt.

Eine andere schöne Eigenschaft, die ein dynamisches Faltmuster aufweisen kann, sind Fixpunkte. Dabei handelt es sich um Punkte, die während des Faltvorgangs ihre Position nicht verändern. Etwas formaler heißt das:

Definition 1.18. Sei $(M, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ eine Polygonzerlegung und \mathcal{F} ein dynamisches Faltmuster darüber. Der Punkt $(x_{\text{fix}}, y_{\text{fix}}) \in M$ heißt **Fixpunkt** (von \mathcal{F}), falls

$$\mathcal{F}(t, (x_{\text{fix}}, y_{\text{fix}})) = (x_{\text{fix}}, y_{\text{fix}}, 0)$$

für alle $t \in [0, 1]$ gilt.

1.3.1. Bestimmung der Stetigkeit

Wenn man konkret ein dynamisches Faltmuster angeben möchte, stellt man schnell fest, dass es etwas unhandlich ist, die Stetigkeit direkt nachzurechnen. Aus diesem Grund wollen wir ein einfacheres Kriterium dafür angeben. Da man die Abbildungsmatrizen für die euklidischen Abbildungen auf den Polygonen meist sowieso bestimmt, sollen diese unsere Ausgangspunkte sein. Zuvor müssen wir noch einige technische Details klarstellen.

Definition 1.19. Eine Polygonzerlegung $(M, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ im \mathbb{R}^n heißt **lokal endlich**, falls es zu jedem $x \in M$ eine Umgebung gibt, die nur mit endlich vielen verschiedenen P_j nicht leeren Schnitt hat.

Diese Bedingung ist in den Anwendungen nahezu immer erfüllt. Wir können sie sogar noch verschärfen:

Lemma 1.20. Sei $(M, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ eine lokal endliche Polygonzerlegung und $x \in M$. Dann gibt es eine Umgebung U von x , sodass $P_j \cap U \neq \emptyset$ genau dann, wenn $x \in P_j$.

Beweis. Nach Definition gibt es eine Umgebung U , die nur von endlich vielen verschiedenen P_j geschnitten wird. Falls x in einem dieser P_j nicht vorkommt, so hat es einen positiven Abstand d davon (da P_j kompakt ist). Ersetze U durch $U \cap \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y - x\|_2 < \frac{d}{2}\}$, dann schneidet P_j dieses U nicht mehr. Da es nur endlich viele verschiedene P_j gibt, die U schneiden und x nicht enthalten, erzeugen wir durch Iteration dieses Verfahrens nach endlich vielen Schritten die gesuchte Umgebung. \square

Um die Stetigkeit des Faltmusters zu zeigen, weisen wir sie zunächst auf jedem der Polygone nach. Da die $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ ihre Topologie (und damit ihren Stetigkeitsbegriff) vom $\mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ erbt, beginnen wir mit einer Untersuchung von Matrizen.

Lemma 1.21. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Dann gilt $\|Mv\|_2 \leq n^{3/2} \|M\|_\infty \|v\|_2$, wobei $\|M\|_\infty$ der Betrag des betragsmäßig größten Eintrags von M ist.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \|Mv\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{ij} v_j \right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |M_{ij}| |v_j| \right)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \|M\|_\infty \|v\|_2 \right)^2} = \|M\|_\infty \|v\|_2 \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n 1 \right)^2} \\ &= \|M\|_\infty \|v\|_2 \sqrt{\sum_{i=1}^n n^2} = n^{3/2} \|M\|_\infty \|v\|_2. \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 1.22. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \mapsto M_t$ (komponentenweise) stetig. Sei $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Dann ist auch $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$, $t \mapsto M_t v$ stetig.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da γ in jeder Komponente γ_{ij} stetig ist, gibt es für jede davon ein δ_{ij} , sodass $|\gamma_{ij}(t') - \gamma_{ij}(t)| < \frac{\varepsilon}{n^{3/2}\|v\|_2}$ ist. Wenn wir δ als das Minimum der δ_{ij} wählen, dann folgt die Behauptung aus Lemma 1.21. \square

Lemma 1.23. *Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$, $t \mapsto \gamma(t)$ stetig. Dann ist auch $\varphi : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (t, x) \mapsto \gamma(t)(x)$ stetig.*

Beweis. Sei $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Wir suchen eine Umgebung V von (t, x) , sodass

$$\|\varphi(t', x') - \varphi(t, x)\|_2 < \varepsilon$$

für alle $(t', x') \in V$. Da $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$ mit der Produkttopologie ausgestattet ist, genügt es, eine Umgebung V_1 von t und eine Umgebung V_2 von x zu finden, sodass

$$\|\varphi(t', x') - \varphi(t, x)\|_2 < \varepsilon$$

für alle $t' \in V_1$ und $x' \in V_2$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi(t', x') - \varphi(t, x)\|_2 &= \|\varphi(t', x') - \varphi(t, x') + \varphi(t, x') - \varphi(t, x)\|_2 \\ &\leq \|(\gamma(t') - \gamma(t))x'\|_2 + \|\gamma(t)(x') - \gamma(t)(x)\|_2. \end{aligned}$$

Da $\gamma(t)$ stetig ist, gibt es eine Umgebung V_2 von x , sodass der zweite Summand für $x' \in V_2$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Wir fordern zusätzlich, dass V_2 in einem Ball mit Radius 1 um x enthalten ist, wodurch $\|x'\|_2 \leq \|x\|_2 + 1$ gilt.

Wir können $\gamma(t)(x)$ auch als $M_t \cdot x$ schreiben, wobei $M_t \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ die zugehörige Abbildungsmatrix ist. Da die $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ ihre Topologie von der des $\mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ erbt, ist die Abbildung $t \mapsto M_t$ komponentenweise stetig. Wir finden also mit Lemma 1.22 eine Umgebung V_1 , sodass für $t' \in V_1$ folgt, dass der erste Summand kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. \square

Damit können wir unseren Satz präsentieren:

Satz 1.24. *Sei $(M, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ eine lokal endliche Polygonzerlegung im \mathbb{R}^2 . Sei $\mathcal{F} : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Abbildung mit den Eigenschaften:*

- $M \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto \mathcal{F}(t, x)$ ist für jedes $t \in [0, 1]$ stetig.
- Für jedes P_j gibt es eine stetige Abbildung $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}^3)$, sodass $\mathcal{F}(t, x) = \gamma_j(t)(x)$.

Dann ist \mathcal{F} stetig.

Beweis. Die Abbildung $[0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (t, x) \mapsto \gamma_j(t)(x)$ ist gemäß Lemma 1.23 stetig, insbesondere ist auch ihre Einschränkung auf P_j stetig.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass die Stetigkeit auch an den Rändern der Polygone gilt, bzw. dass diese zusammenpassen. Sei also $(t, x) \in [0, 1] \times M$ und $((t_n, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge, die dagegen konvergiert. Wegen Lemma 1.20 können wir davon ausgehen, dass x_n in einem Polygon enthalten ist, in dem auch x liegt. Wir betrachten für jedes P_j , in dem x

vorkommt, die Teilfolge $((t_k, x_k))_{k \in \mathbb{N}}$, für die alle x_k in P_j liegen. Dann konvergiert $\gamma_j(t_k)(x_k)$ für $k \rightarrow \infty$ gegen $\gamma_j(t)(x)$.

Wir haben die Folge damit in endlich viele konvergente Teilfolgen unterteilt (sodass ab einem $N \in \mathbb{N}$ jedes Folgenglied in einer dieser Teilfolgen vorkommt). Wenn wir jetzt zeigen, dass alle diese Teilfolgen den selben Grenzwert haben, ergibt sich die Konvergenz von $((t_n, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Zu zeigen ist also, dass $\gamma_j(t)(x) = \gamma_l(t)(x)$ für $x \in P_j \cap P_l$ gilt. Dies folgt aber daraus, dass $x \mapsto \mathcal{F}(t, x)$ stetig ist. \square

1.3.2. Symmetrie

Wir möchten beschreiben, dass ein Faltmuster auch während der Faltung gewisse Symmetrien einhält. Hierbei muss man allerdings aufpassen, da sich beim Faltvorgang z. B. die Länge und die Richtung der Translationen ändern. Die Symmetriegruppe bleibt aber „im Wesentlichen“ gleich. Diese Gleichheit wird durch affine Äquivalenz beschrieben, wie wir in den Lemmata 1.3 und 1.4 für zwei Spezialfälle gezeigt haben.

Wenn man Invarianz unter der affinen Isomorphieklasse \mathcal{U} beschreiben möchte, kann man zu jedem Zeitpunkt t ein Element $U_t \in \mathcal{U}$ wählen und fordern, dass $g\mathcal{F}(t, M) = \mathcal{F}(t, M)$ für jedes $g \in U_t$ gilt. Damit haben wir jedoch nur beschrieben, dass das Faltmuster zu jedem Zeitpunkt t invariant unter einem Element von \mathcal{U} ist. Es ist aber plausibel, dass sich dieses U_t kontinuierlich mit der Faltung verändert. Dies können wir durch eine stetige Abbildung $\tau : [0, 1) \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ mit $\tau(0) = Id$ beschreiben, wobei $\text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ in die Matrixgruppe $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ eingebettet ist und wir Stetigkeit komponentenweise interpretieren. Dann ist U_t gegeben als $\tau(t) \circ U_0 \circ \tau(t)^{-1}$.

Wir erwarten aber noch eine weitere Eigenschaft, und zwar sollen sich die transformierten Gruppenelemente auf dem gefalteten Muster genauso verhalten, wie es die üblichen Gruppenelemente auf der Grundfläche tun. Dies entspricht der Bedingung

$$(\tau(t) \circ g \circ \tau(t)^{-1})\mathcal{F}(t, x) = \mathcal{F}(t, gx)$$

für jedes $g \in U_0$. Die Plausibilität dieser Forderung sieht man so: Die Eckpunkte der Polygone in der Polygonzerlegung bilden eine diskrete Menge, der minimale Abstand ist sogar positiv. Wir gehen nun davon aus, dass g einen der Punkte P in einen anderen Punkt Q überführt. Wenn wir jetzt ein wenig auffalten, variieren wir P leicht, sodass es zu P' wird. Gleichzeitig wird g leicht variiert (zu $\tau(t) \circ g \circ \tau(t)^{-1}$) und bildet den Punkt P' auf einen Punkt Q' ab. Dieser Punkt Q' muss sich wegen der Stetigkeit in der Nähe von Q befinden. Da es aber einen minimalen Abstand zwischen Punkten gibt, lässt es sich einrichten, dass der Abstand von Q' und Q kleiner als dieser ist, sodass nur Q durch die stetige Faltung zu Q' werden konnte.

Offenbar müssen wir die Invarianz zunächst einmal für $t = 0$ definieren, also für eine Polygonzerlegung.

Definition 1.25. Sei $(M, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ eine Polygonzerlegung im \mathbb{R}^n . Sie heißt **invariant unter** $G \in \text{Eukl}(\mathbb{R}^n)$, falls $g\{P_j\}_{j \in \mathbb{N}} = \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ für jedes $g \in G$ gilt.

Definition 1.26. Sei \mathcal{U} eine affine Isomorphieklasse in $\text{Eukl}(\mathbb{R}^2)$ und $U_0 \in \mathcal{U}$. Ein dynamisches Faltmuster \mathcal{F} über der Polygonzerlegung $(M, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ im \mathbb{R}^2 heißt **invariant unter** (U, τ) , falls $\tau : [0, 1) \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ eine stetige Abbildung mit folgenden Eigenschaften ist:

1. $\tau(0) = Id$.
2. $\{P_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ist invariant unter U_0 .
3. $(\tau(t) \circ g \circ \tau(t)^{-1})\mathcal{F}(t, x) = \mathcal{F}(t, gx)$ für jedes $g \in U_0$. Dabei operiert $\tau(t) \circ g \circ \tau(t)^{-1}$ in der dritten Komponente trivial.

Man beachte, dass die Symmetrie bei $t = 1$ gebrochen werden kann. Das ist z. B. dann der Fall, wenn das Faltmuster flach zusammenfaltbar ist. Tritt dies ein, so ist es nur noch in eine Richtung translationssymmetrisch.

Eine Konsequenz daraus, dass die Untergruppe zu jedem Zeitpunkt trivial auf der dritten Komponente operiert, ist diese Beobachtung:

Bemerkung 1.27. *Enthält die affine Isomorphieklasse aus Definition 1.26 Translationen, so sind diese zu jedem Faltzeitpunkt parallel zur xy -Ebene.*

1.3.3. Äquivalenz

Wenn man eine Faltung im Raum dreht, sollte sich das Wesen der Faltung nicht ändern. Um diese Intuition präzise zu machen, definieren wir eine Äquivalenzrelation auf den dynamischen Faltmustern.

Definition 1.28. Seien \mathcal{F}, \mathcal{G} dynamische Faltmuster über derselben Polygonzerlegung. Sie heißen **äquivalent**, wenn es eine Schar euklidischer Abbildungen $\varphi : [0, 1] \rightarrow \text{Eukl}(\mathbb{R}^3), t \mapsto \varphi_t$ gibt mit den Eigenschaften:

1. φ ist stetig.
2. $\varphi_0 = Id_{\mathbb{R}^3}$.
3. $\mathcal{G}(t, x) = \varphi_t(\mathcal{F}(t, x))$ für alle $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$.

Bemerkung 1.29. *In der Situation von Definition 1.28 ist $\varphi(t)$ eine eigentliche euklidische Abbildung, d. h. der Linearteil von $\varphi(t)$ liegt in der $SO(3)$.*

Beweis. Da φ stetig ist, ist auch die Abbildung, die t auf den Linearteil von $\varphi(t)$ abbildet, stetig. Da die Determinantenabbildung stetig ist, ist auch die Abbildung von t auf die Determinante des Linearteils von $\varphi(t)$ stetig. Diese Abbildung nimmt aber nur -1 oder $+1$ an und ist gleich 1 für $t = 0$. Folglich ist sie konstant Eins und der Linearteil von $\varphi(t)$ hat stets positive Determinante, ist also eine Drehung. \square

Bemerkung 1.30. *Es handelt sich bei der in 1.28 definierten Äquivalenz um eine Äquivalenzrelation. Ist umgekehrt ein dynamisches Faltmuster \mathcal{F} und eine solche Schar φ_t gegeben, so ist auch $(t, x) \mapsto \varphi_t(\mathcal{F}(t, x))$ ein dynamisches Faltmuster.*

Dieser Äquivalenzbegriff ist vor allem in Rechnungen nützlich. Er erlaubt es uns nämlich, mit einem Vertreter zu rechnen, der angenehme Eigenschaften wie z. B. Fixpunkte (vgl. Definition 1.18) besitzt. Das erlaubt es, die Abbildungsvorschriften übersichtlicher zu halten. Wir

beweisen zunächst, dass wir einen Punkt als Fixpunkt wählen können. Man kann allgemeiner zeigen, dass es einen Vertreter gibt, bei dem ein ganzes Polygon punktweise fest bleibt. Da wir uns letztendlich für symmetrische Muster interessieren, schränkt Bemerkung 1.27 die Vertreterwahl ein. Im Allgemeinen ist es dann nicht mehr möglich, ein ganzes Polygon zu fixieren.

Lemma 1.31. *Sei \mathcal{F} ein dynamisches Faltmuster auf der Polygonzerlegung $(M, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ und sei $(x_{\text{fix}}, y_{\text{fix}}) \in M$. Dann gibt es ein zu \mathcal{F} äquivalentes dynamisches Faltmuster \mathcal{G} mit Fixpunkt $(x_{\text{fix}}, y_{\text{fix}})$.*

Beweis. Definiere \mathcal{G} durch

$$\mathcal{G}(t, x) := \mathcal{F}(t, x) - \mathcal{F}(t, (x_{\text{fix}}, y_{\text{fix}})) + (x_{\text{fix}}, y_{\text{fix}}, 0).$$

Dann erfüllt \mathcal{G} die gesuchte Fixpunkteigenschaft. Im Sinne von Definition 1.28 definieren wir φ_t als Translation um $(x_{\text{fix}}, y_{\text{fix}}, 0) - \mathcal{F}(t, (x_{\text{fix}}, y_{\text{fix}}))$. Da \mathcal{F} stetig ist, ist φ stetig. \square

Unser Interesse gilt Bemerkung 1.27, da wir des Öfteren Faltmuster untersuchen, in denen es zwei verschiedene Translationssymmetrien gibt. Daraus folgt, dass jede Drehung, die eine Äquivalenz induziert, auch diese Ebene festlassen muss.

Lemma 1.32. *Sei $R \in SO(3)$ und $\langle T_1, T_2 \rangle$ ein zweidimensionaler R -invarianter Teilraum des \mathbb{R}^3 . Dann tritt einer dieser beiden Fälle ein:*

- *Man kann die Drehachse von R orthogonal zu $\langle T_1, T_2 \rangle$ wählen.*
- *Die Drehachse von R liegt in $\langle T_1, T_2 \rangle$ und der Drehwinkel ist π .*

Beweis. Sei v orthogonal zu $\langle T_1, T_2 \rangle$ in \mathbb{R}^3 , dann ist $B := (T_1, T_2, v)$ eine Basis des \mathbb{R}^3 . Da R eine orthogonale Abbildung ist, bleibt Rv orthogonal zu $\langle T_1, T_2 \rangle$. Folglich hat ${}^B R^B$ die Blockgestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & s \end{array} \right),$$

wobei $s \in \mathbb{R}$ und A orthogonal ist, weil $R|_{\langle T_1, T_2 \rangle}$ orthogonal ist, wie man an der Erhaltung der Längen sieht. Mit der Determinante erfahren wir, dass $s = \pm 1$. Falls $s = 1$, so können wir v als Drehachse wählen und sind fertig.

Falls $s = -1$, wissen wir aus Lemma A.2, dass der Drehwinkel π sein muss. Außerdem muss der Eigenvektor zum Eigenwert 1 dann in $\langle T_1, T_2 \rangle$ liegen. \square

Die Signifikanz dieses Lemmas liegt darin, dass sie uns Auskunft über alle Elemente der $SO(3)$ gibt, die eine Symmetrie auf unserem Faltmuster induzieren. Da der zweite Fall aus Lemma 1.32 selten vorkommt (da ein sehr spezieller Drehwinkel vorliegen muss), werden wir diesen nicht im Detail analysieren. Es lohnt sich aber, ihn im Hinterkopf zu behalten, da er sich in einigen Fällen als nützlich erweisen könnte. Interessanter ist der Fall, dass die Drehachse orthogonal auf der Ebene steht, da dann die gesamte $SO(2)$ auf dem Faltmuster operiert.

Wir wollen dazu annehmen, unser dynamisches Faltmuster habe einen Fixpunkt. Wenn jeder Punkt durch Zylinderkoordinaten (r, φ, h) beschrieben ist, können wir aufgrund der Operation der $SO(2)$ zu jedem Zeitpunkt einen Punkt auswählen und dessen Winkelkomponente beliebig setzen.

1.4. Statische Faltmuster

Wir wollen noch eine andere Perspektive auf Faltungen geben, und zwar ein statisches Bild. Man kann sich nämlich die Projektion der Kanten eines Faltmusters auf eine Ebene ansehen und sich fragen, welches Faltmuster ein solches Bild erzeugt haben könnte. Dabei erlauben wir auch solche Muster, die sich nicht durch eine stetige Transformation aus einem Blatt Papier gewinnen lassen.

Es stellt sich die Frage, welche Form die Projektion der Kanten haben kann. Um plausibel zu machen, dass ein solches projiziertes Muster eine Polygonzerlegung ist, betrachten wir die Projektion der Kanten einiger dynamischen Faltmusters.

Folgerung 1.33. *Sei $(\mathbb{R}^2, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ eine Polygonzerlegung und \mathcal{F} ein dynamisches Faltmuster darauf. Für $0 \leq t < 1$ ist $(\text{Bild}(\mathcal{F}(t, \cdot)), \{\mathcal{F}(t, P_j)\}_{j \in \mathbb{N}})$ eine Polygonzerlegung.*

Sei weiterhin $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Projektion auf die ersten beiden Komponenten. Falls $E \circ \mathcal{F}(t, \cdot)$ injektiv ist, so ist $(\text{Bild}(E \circ \mathcal{F}(t, \cdot)), \{E(\mathcal{F}(t, P_j))\}_{j \in \mathbb{N}})$ eine Polygonzerlegung.

Beweis. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz von Lemma 1.15. □

Wir arbeiten nun umgekehrt und gehen von einem Muster auf der Ebene aus. Wenn wir nun allen Eckpunkten eine dritte Koordinate (eine Höhe) zuordnen, und zwischen diesen linear interpolieren, so erhalten wir wieder ein Faltmuster. Dieses ist genau dann aus Papier erzeugbar (jedoch nicht notwendig auffaltbar), wenn die Winkelsumme an jedem Punkt 360° beträgt. Offensichtlich muss diese Bedingung nur an den Eckpunkten überprüft werden.

Definition 1.34. Sei $(M, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ eine Polygonzerlegung im \mathbb{R}^2 . Eine **Höhenfunktion** ist eine stetige Abbildung $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, die auf jedem P_j affin ist. Sie heißt **statisches Faltmuster**, falls die Winkelsumme an jedem Punkt von $\text{Graph}(h)$ genau 360° beträgt.

Bemerkung 1.35. *Zu jeder Höhenfunktion $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ korrespondiert eine stetige, injektive Abbildung $\hat{h} : M \rightarrow \text{Graph}(h), x \mapsto (x, h(x))$, die auf jedem P_j affin ist.*

Beweis. Nach Konstruktion ist \hat{h} stetig und injektiv. Da h auf P_j affin ist, lässt sich $h(x)$ für $x \in P_j$ als $M_j \cdot x + t_j$ schreiben, wobei $M_j \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ und $t_j \in \mathbb{R}$ gilt. Damit lässt sich \hat{h} aus P_j durch

$$\left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ M_j & t_j \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$$

beschreiben, ist also eine affine Abbildung. □

Eine Höhenfunktion induziert eine Polygonzerlegung auf ihrem Graphen:

Lemma 1.36. Sei $(M, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ eine Polygonzerlegung im \mathbb{R}^2 und h eine Höhenfunktion darüber. Dann ist $(\text{Graph}(h), \{\text{Graph}(h|_{P_j})\}_{j \in \mathbb{N}})$ eine Polygonzerlegung.

Beweis. Das ist eine Konsequenz aus Lemma 1.15, wenn man die Abbildung aus Bemerkung 1.35 verwendet. \square

Zum Berechnen der Winkelsumme um einen Eckpunkt q betrachten wir alle Polygone P_j , die q enthalten und summieren ihre Innenwinkel bei q . Wir können zeigen, dass diese Winkel stets kleiner als 180° sind, da wir es mit konvexen Polygonen zu tun haben:

Lemma 1.37. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ein konvexes Polygon und $h : P \rightarrow \mathbb{R}$ affin. Dann ist $\text{Graph}(h)$ ein konvexes Polygon.

Beweis. Unter Verwendung der Abbildung aus Bemerkung 1.35 folgt die Behauptung aus Lemma 1.13. \square

Wenn man die Höhen aller Punkte um den gleichen Wert ändert, bleibt das Faltmuster im Wesentlichen erhalten. Das motiviert die folgende Definition von Äquivalenz:

Definition 1.38. Zwei Höhenfunktionen $h_1, h_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißen **äquivalent**, wenn es ein $v \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $h_1(p) = h_2(p) + v$ für alle $p \in M$ gilt.

Wie schon bei den dynamischen Faltmustern interessieren uns symmetrische statische Faltmuster. Die Definition für statische Faltmuster ist aber sehr einfach.

Definition 1.39. Sei $G \leq \text{Eukl}(\mathbb{R}^2)$ und $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ein statisches Faltmuster. Das Muster heißt **invariant unter G** , falls $h(g(x)) = h(x)$ für alle $g \in G$ und $x \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Es gibt statische Faltmuster, die besonders simpel sind. Dabei handelt es sich um sogenannte Zickzack-Faltungen:

Definition 1.40. Sei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Höhenfunktion und $v \in \mathbb{R}^2$. Die Höhenfunktion h heißt **v -Zickzack-Faltung**, falls $p_1 - p_2 \in \langle v \rangle$ impliziert, dass $h(p_1) = h(p_2)$ gilt (für $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$).

Bei einer Zickzack-Faltung sind die Eckpunkte der Polygone in der Polygonzerlegung nicht gegenüber den Punkten ausgezeichnet, die auf den Kanten liegen. Infolgedessen ist die Winkelsumme dieser Eckpunkte 360° , genau wie bei den Punkten auf den Kanten. Somit ist eine Zickzack-Faltung immer auch ein statisches Faltmuster.

Um konkret nachzuweisen, dass eine solche Faltung vorliegt, ist es sinnvoll, die Ebene so zu triangulieren, dass man die Voraussetzungen des nächsten Lemmas leicht überprüfen kann.

Lemma 1.41. Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ Eckpunkte eines nicht entarteten Dreiecks Δ . Sei $h : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ ein statisches Faltmuster mit $h(A) = h(B)$, das durch $h(A), h(B)$ und $h(C)$ festgelegt ist. Dann ist h eine v -Zickzackfaltung, wobei v der Verbindungsvektor zwischen A und B ist.

Beweis. Wir betrachten $\text{Graph}(h)$. Die Punkte $\begin{pmatrix} A \\ h(A) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} B \\ h(B) \end{pmatrix}$ haben nach Voraussetzung den Verbindungsvektor $\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es einen Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten aus $\text{Graph}(h)$ von der Form $\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}$ mit $z \neq 0$. Da eine affine Ebene durch einen Punkt und zwei linear unabhängige Vektoren festgelegt ist, hätten wir damit die Ebene beschrieben. Nun betrachte den Verbindungsvektor zwischen $\begin{pmatrix} A \\ h(A) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} C \\ h(C) \end{pmatrix}$. Dieser müsste dann eine Linearkombination der beiden ersten Verbindungsvektoren sein.

Damit hätte er aber die Form $\begin{pmatrix} \alpha v \\ \beta \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dies würde bedeuten, dass der Verbindungsvektor von A nach C in $\langle v \rangle$ läge, was ein Widerspruch zur Voraussetzung wäre, ein nicht entartetes Dreieck vorliegen zu haben. \square

Lemma 1.42. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beschränkte, konvexe Menge, die sich als Vereinigung endlich vieler konvexer Polygone P_j darstellen lässt. Sei ferner h eine Höhenfunktion auf M , die auf jedem P_j eine v -Zickzack-Faltung ist. Dann ist h auf ganz M eine v -Zickzack-Faltung.*

Beweis. Seien $p_1, p_2 \in M$ mit $p_1 - p_2 \in \langle v \rangle$. Da M konvex ist, liegt die Verbindungsstrecke $\overline{p_1 p_2}$ ganz in M . Diese Verbindungsstrecke schneidet endlich viele der P_j . Da die P_j konvex sind, gibt es endlich viele Übergänge zwischen verschiedenen P_j , die durch eine endliche Folge von Punkten $p_1, q_1, q_2, \dots, q_m, p_2$ auf $\overline{p_1 p_2}$ beschrieben sind. Weil h stetig ist, haben diese Punkte eine wohldefinierte Höhe und sind Teil zweier benachbarter Polygone. Folglich gilt $h(q_m) = h(p_2)$ und iterativ folgt (da auf allen P_j eine v -Zickzack-Faltung vorliegt) $h(p_1) = h(p_2)$. \square

Lemma 1.43. *Sei $G \in G_{p_2}$ und F sei ein Fundamentalbereich von G . Auf F sei die Höhenfunktion h eine v -Zickzack-Faltung. Dann liefert h auch eine v -Zickzack-Faltung auf ganz \mathbb{R}^2 .*

Beweis. Seien $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ mit $p_2 - p_1 \in \langle v \rangle$. Die Verbindungsstrecke liegt in der abgeschlossenen Kugel mit Radius $\|p_1\|_2 + \|p_2\|_2$. Für $g \in G$ betrachten wir die Restklasse $g\langle T_1, T_2 \rangle$. Da T_1 und T_2 linear unabhängige Translationen sind, schneiden nur endlich viele Elemente von $g\langle T_1, T_2 \rangle F$ die Kugel. Gemäß Lemma 1.5 ist $G/\langle T_1, T_2 \rangle$ zweielementig, also müssen wir nur zwei dieser Restklassen betrachten. Insgesamt haben also nur endlich viele gF mit $g \in G$ nichtleeren Schnitt mit der Kugel.

Die Behauptung folgt mit Lemma 1.42 und der Tatsache, dass eine Punktspiegelung die Richtung einer Zickzack-Faltung nicht ändert. \square

Wenn wir also eine Polygonzerlegung gegeben haben, die einen Fundamentalbereich mit endlich vielen Elementen überdeckt und sich selbst so in Dreiecke zerlegt, dass auf jedem dieser Dreiecke eine Zickzack-Faltung vorliegt (in dieselbe Richtung), so liegt auch auf der gesamten Ebene eine solche Zickzack-Faltung vor.

2. Das Miura–Ori

In diesem Kapitel untersuchen wir eine Verallgemeinerung des Miura–Ori–Faltmusters, die durch eine Verkleinerung der Symmetriegruppe entsteht. In Abschnitt 2.1 beschreiben wir, wie die Faltung dieses Musters anschaulich aussieht, während die konkrete Berechnung der Faltabbildung in Abschnitt 2.2 vorgenommen wird. Wir untersuchen in Abschnitt 2.3, wann das Muster flach zusammenfaltbar ist. Im letzten Abschnitt 2.4 fügen wir alle Resultate zum gesamten dynamischen Faltmuster zusammen und zeigen eine Visualisierung in Maple.

2.1. Anschauliche Beschreibung der Faltung

Das Miura–Ori ist ein Faltmuster, dessen Grundfläche aus Parallelogrammen aufgebaut ist. Diese Grundfläche ist in Abbildung 2 dargestellt. Das Muster hat zwei Translationssymmetrien, eine Drehsymmetrie um 180° und eine Spiegelsymmetrie. Ignoriert man die Spiegelung, lässt sich das Muster verallgemeinern (siehe Abbildung 5).

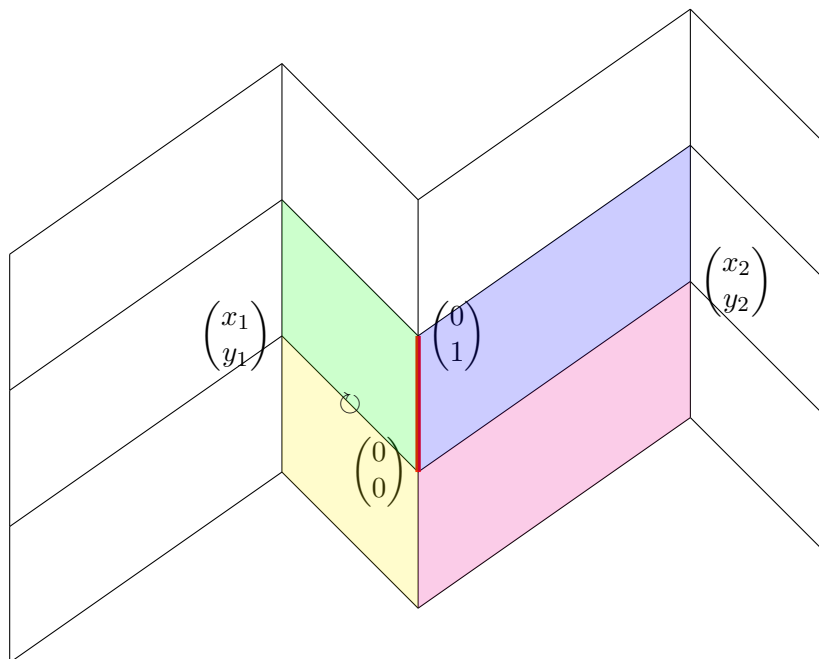
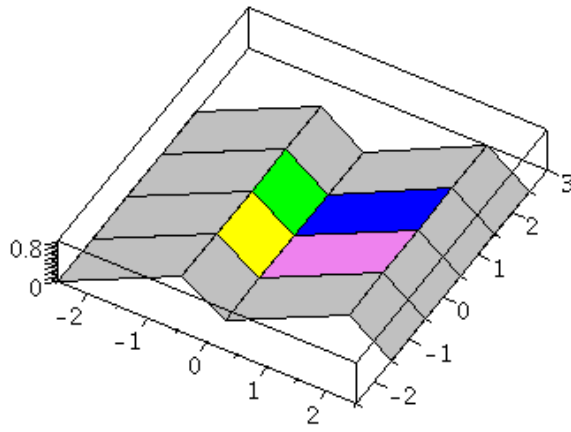
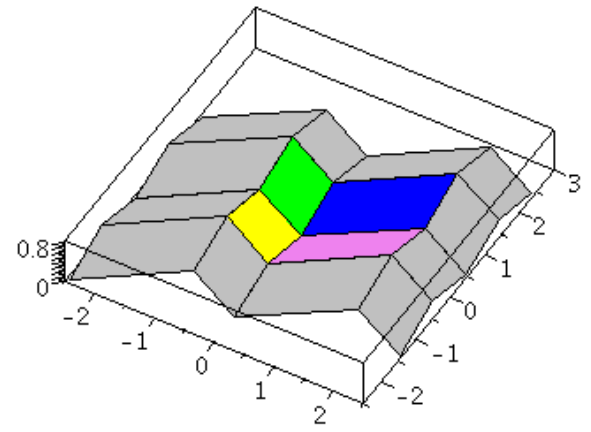


Abbildung 5: Faltmuster des verallgemeinerten Miura–Ori

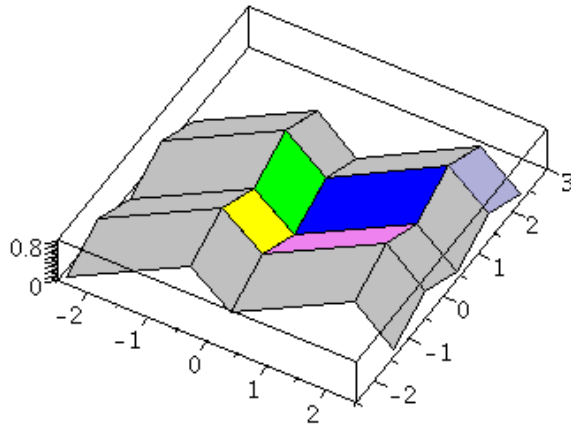
Wenn man noch nie gesehen hat, wie sich dieses Muster falten lässt, mag es einem langweilig vorkommen, da man nur Knicke entlang der vertikalen Linien erwartet. Das ist aber ein Trugschluss, denn insbesondere die Knicke entlang der diagonalen Linien machen dieses Muster interessant. In Abbildung 6 sind mehrere Stadien eines solchen Faltvorgangs dargestellt.



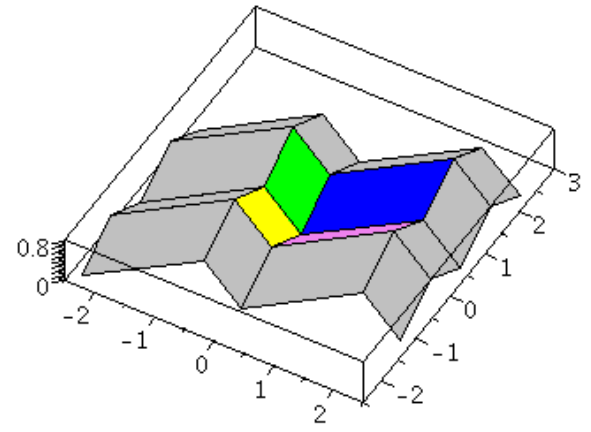
(a) $\alpha = 0$



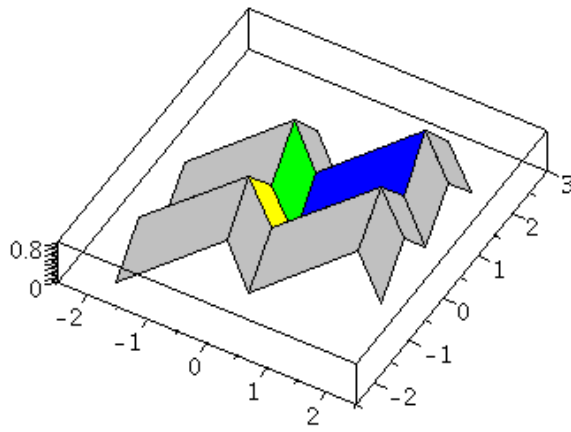
(b) $\alpha \approx 0.2866$



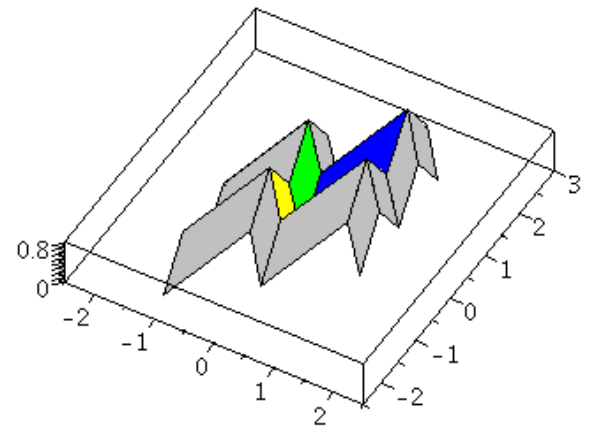
(c) $\alpha \approx 0.4095$



(d) $\alpha \approx 0.5323$



(e) $\alpha \approx 0.8599$



(f) $\alpha \approx 0.9627$

Abbildung 6: Verschiedene Faltstadien des Miura-Ori

2.2. Faltung zu einem festen Zeitpunkt

Wir möchten die dynamischen Faltpattern des Miura–Ori explizit angeben. Dabei genügt es, sich auf einen Fundamentalbereich einzuschränken, wobei man darauf achten muss, dass sich die Abbildung geeignet fortsetzen lässt. Wir betrachten den in Abbildung 5 farbig markierten Bereich als Fundamentalbereich der Translation, sowie das in dieser Abbildung skizzierte Koordinatensystem. Bezüglich diesem sind die Translationen durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ gegeben. Sie sind genau dann orthogonal, wenn $y_2 = y_1$, wie es z. B. beim klassischen Miura–Ori der Fall ist. Wir setzen voraus, dass $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$ gelten.

Da uns nur die Faltung selbst interessiert, wählen wir gemäß Lemma 1.31 den Ursprung als Fixpunkt. Nach der Analyse in Kapitel 1.3.3 dürfen wir auch fordern, dass $(0, 1)$ auf $(0, \cos(\alpha), \sin(\alpha))$ abgebildet wird. Dies erschöpft alle möglichen Freiheitsgrade. Während der Rechnung wird sich zeigen, welche Vorteile diese Wahl hat.

Wir suchen nach euklidischen Abbildungen für die einzelnen Bereiche. Da der Nullpunkt ein Fixpunkt ist, ist der Translationsanteil Null. Demnach handelt es sich um reine Drehungen (vgl. Definition 1.16). Die Drehsymmetrie erzwingt, dass die dritten Koordinaten von Nullpunkt und (x_1, y_1) stets gleich sein müssen. Damit ist die dritte Koordinate von (x_1, y_1) während des Faltvorgangs stets Null.

Wir beschreiben die Faltung in Abhängigkeit der Position von $(0, 1)$ in der Faltung. Der Fall $\alpha < 0$ kann durch Spiegelung an der Grundebene auf den Fall $\alpha > 0$ zurückgeführt werden. Somit können wir $\alpha \geq 0$ annehmen. Wir werden später sehen, dass wir zusätzlich $\alpha < \frac{\pi}{2}$ fordern können. Wir suchen also $\mathcal{F}(t, \cdot)$ für festes t , wobei wir t durch α parametrisieren.

2.2.1. Faltung des grünen Bereichs

Fangen wir mit der grünen Fläche an. Die Matrix der Gesamtdrehung sei $R_g(\alpha)$. Nach Voraussetzung erfüllt die rote Kante folgende Beziehung:

$$R_g(\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Wir spalten nun die Rotation R_x mit

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

ab, d. h. $R_g(\alpha) = (R_g(\alpha) \cdot R_x^{-1}) \cdot R_x$. Nun ist $R_g(\alpha) \cdot R_x^{-1} \in SO(3, \mathbb{R})$ und lässt die gedrehte rote Kante fest. Gemäß Satz A.7 handelt es sich dabei um die Drehachse. Der Drehwinkel sei mit $\varphi_g \in [0, 2\pi)$ bezeichnet. Somit

$$\begin{aligned}
R_g(\alpha) &= R\left(R_x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_g\right) \cdot R\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha\right) \\
&\stackrel{A.13}{=} R\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha\right) \cdot R\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_g\right) \\
&\stackrel{A.9}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_g) & 0 & \sin(\varphi_g) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi_g) & 0 & \cos(\varphi_g) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_g) & 0 & \sin(\varphi_g) \\ \sin(\alpha) \sin(\varphi_g) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \cos(\varphi_g) \\ -\cos(\alpha) \sin(\varphi_g) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cos(\varphi_g) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir können noch verwenden, dass diese Drehung den Punkt (x_1, y_1) in der Ebene belässt, d. h. seine dritte Komponente bleibt Null. Einsetzen liefert die äquivalente Bedingung:

$$0 = -\cos(\alpha) \sin(\varphi_g) x_1 + y_1 \sin(\alpha) \quad (10)$$

$$\sin(\varphi_g) = \frac{y_1}{x_1} \tan(\alpha) \quad (11)$$

Falls wir $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ fordern, folgt mit $x_1 < 0$, dass $\varphi_g \in (\pi, 2\pi)$ für $y_1 > 0$ bzw. $\varphi_g \in (0, \pi)$ für $y_1 < 0$ gilt. Falls $y_1 = 0$, so ist φ_g entweder Null oder π . Da sich φ_g stetig mit α ändert, und bei Null gestartet ist, muss in diesem Fall $\varphi_g = 0$ für den gesamten Faltprozess gelten.

2.2.2. Faltung des gelben Bereichs

Wir nutzen als nächstes die Rotationssymmetrie des Musters aus. Es liegt nämlich eine Rotation der xy -Ebene vor, die die dritte Koordinate fest lässt und die Punkte $(0, 0)$ und (x_1, y_1) (bzw. ihre Bilder) tauscht. Bezeichnen wir diese Drehung (in Abhängigkeit von α) als D_α , so besitzt diese die Matrix

$$D_\alpha = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & x_d \\ 0 & -1 & 0 & y_d \\ 0 & 0 & 1 & z_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Aus $D_\alpha R_g(\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = R_g(\alpha) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ folgt

$$\begin{pmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos(\varphi_g) \\ x_1 \sin(\alpha) \sin(\varphi_g) + y_1 \cos(\alpha) \\ -x_1 \cos(\alpha) \sin(\varphi_g) + y_1 \sin(\alpha) \end{pmatrix} \stackrel{11}{=} \begin{pmatrix} x_1 \cos(\varphi_g) \\ y_1 (\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \tan(\alpha)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da diese Drehungen den gelben in den grünen Bereich überführen (und umgekehrt), ist die Abbildungsmatrix für den gelben Bereich $R_y(\alpha)$ der Linearteil der folgenden Matrix:

$$D_\alpha \cdot R_g(\alpha) \cdot D_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} \cos(\varphi_g) & 0 & -\sin(\varphi_g) & 0 \\ \sin(\alpha) \sin(\varphi_g) & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \cos(\varphi_g) & 0 \\ \cos(\alpha) \sin(\varphi_g) & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cos(\varphi_g) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2.2.3. Faltung von violetterm und blauem Bereich

Um die Abbildungsmatrix des violetten Bereichs anzugeben, zerlegen wir die Abbildung wie beim grünen Bereich in zwei Drehungen. Die erste Drehung dreht $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ um die x-Achse auf $R_y(\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die zweite dreht um diese neue Achse um den Winkel $\varphi_v \in [0, 2\pi)$. Bei der ersten Drehung müssen wir auf die Orientierung der Drehachse achten.

$$\begin{aligned} R_v(\alpha) &= R \left(R \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \right) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_v \right) \cdot R \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \right) \\ &= R \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \right) \cdot R \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_v \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_v) & 0 & -\sin(\varphi_v) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi_v) & 0 & \cos(\varphi_v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_v) & 0 & -\sin(\varphi_v) \\ \sin(\alpha) \sin(\varphi_v) & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \cos(\varphi_v) \\ \cos(\alpha) \sin(\varphi_v) & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cos(\varphi_v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ebenso verfahren wir für den blauen Bereich. Für diesen zerlegen wir die Matrix genau wie wir es für den grünen Bereich getan haben. Die einzige Änderung ist der Drehwinkel der Drehung um $R_x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit lautet sie

$$R_b(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_b) & 0 & -\sin(\varphi_b) \\ \sin(\alpha) \sin(\varphi_b) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \cos(\varphi_b) \\ -\cos(\alpha) \sin(\varphi_b) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cos(\varphi_b) \end{pmatrix}.$$

Da das Faltpattern stetig sein muss, folgt

$$R_v(\alpha) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = R_b(\alpha) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich

$$\begin{pmatrix} x_2 \cos(\varphi_v) \\ x_2 \sin(\alpha) \sin(\varphi_v) + y_2 \cos(\alpha) \\ x_2 \cos(\alpha) \sin(\varphi_v) - y_2 \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \cos(\varphi_b) \\ x_2 \sin(\alpha) \sin(\varphi_b) + y_2 \cos(\alpha) \\ -x_2 \cos(\alpha) \sin(\varphi_b) + y_2 \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad (12)$$

ergibt. Wir wissen auch, dass die Bilder von (x_1, y_1) und (x_2, y_2) durch eine Translation ineinander übergehen und daher die selbe dritte Koordinate haben. Allerdings ist die dritte Koordinate von (x_1, y_1) während der Faltung stets Null, somit haben wir

$$x_2 \cos(\alpha) \sin(\varphi_v) - y_2 \sin(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \sin(\varphi_v) = \frac{y_2}{x_2} \tan(\alpha) \quad (13)$$

$$x_2 \cos(\alpha) \sin(\varphi_b) - y_2 \sin(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \sin(\varphi_b) = \frac{y_2}{x_2} \tan(\alpha), \quad (14)$$

wobei wir wieder $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ verwendet haben. Insbesondere folgt $\sin(\varphi_v) = \sin(\varphi_b)$. Da wir mit $x_2 \neq 0$ aus der ersten Komponente von Gleichung (12) die Relation $\cos(\varphi_v) = \cos(\varphi_b)$ ableiten können, gilt bereits die Gleichheit $\varphi_v = \varphi_b$.

Mit $x_2 > 0$ und $\alpha \in [0, \pi)$ muss $\varphi_v \in (0, \pi)$ für $y_2 > 0$ bzw. $\varphi_v \in (\pi, 2\pi)$ für $y_2 < 0$ gelten. Wie wir schon bei φ_g gesehen haben, ist der Winkel φ_v im Spezialfall $y_2 = 0$ konstant Null.

2.2.4. Translationen und stetige Fortsetzung

Wir haben bis jetzt Abbildungsmatrizen für den Fundamentalbereich der Translationen angegeben. Als nächstes möchten wir die konkreten Translationen im aufgefalteten Muster bestimmen und simultan die Stetigkeit von $x \mapsto \mathcal{F}(t, x)$ garantieren. Dazu verwenden wir die in Abbildung 7 dargestellten Bezeichnungen.

Damit wir das Muster in zwei Translationsrichtungen fortsetzen können, müssen die Ränder des Bereichs zueinander passen. Dafür müssen folgende Strecken parallel und gleich lang sein:

$$\begin{array}{ll} \overline{L_1 M_1} \leftrightarrow \overline{L_3 M_3} & \overline{M_1 R_1} \leftrightarrow \overline{M_3 R_3} \\ \overline{L_1 L_2} \leftrightarrow \overline{R_1 R_2} & \overline{L_2 L_3} \leftrightarrow \overline{R_2 R_3} \end{array}$$

Um dies nachzuweisen, machen wir uns die Eigenschaften orthogonaler Abbildungen zunutze. Wir wissen nämlich, dass orthogonale Abbildungen sowohl Längen als auch Parallelität erhalten. Wir weisen die gewünschte Eigenschaft exemplarisch für $\overline{L_1 M_1}$ und $\overline{L_3 M_3}$ nach. Da $\overline{L_1 M_1}$ und $\overline{L_2 M_2}$ im Grundzustand parallel und gleich lang sind, werden sie beim Faltvorgang durch die orthogonale Abbildung auf der grünen Fläche (zu der sie beide gehören), auf parallele, gleich lange Strecken abgebildet. Das gleiche Argument zeigt, dass $\overline{L_2 M_2}$ und $\overline{L_3 M_3}$ in der Auffaltung parallel und gleich lang sind. Folglich gilt dies auch für die Strecken $\overline{L_1 M_1}$ und $\overline{L_3 M_3}$, was zu zeigen war.

Wir bestimmen nun zunächst die vertikale Translation in Abhängigkeit von α . Diese bildet

$$R_v(\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } R_g(\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ab. Demnach gilt}$$

$$T_2(\alpha) = R_g(\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - R_v(\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

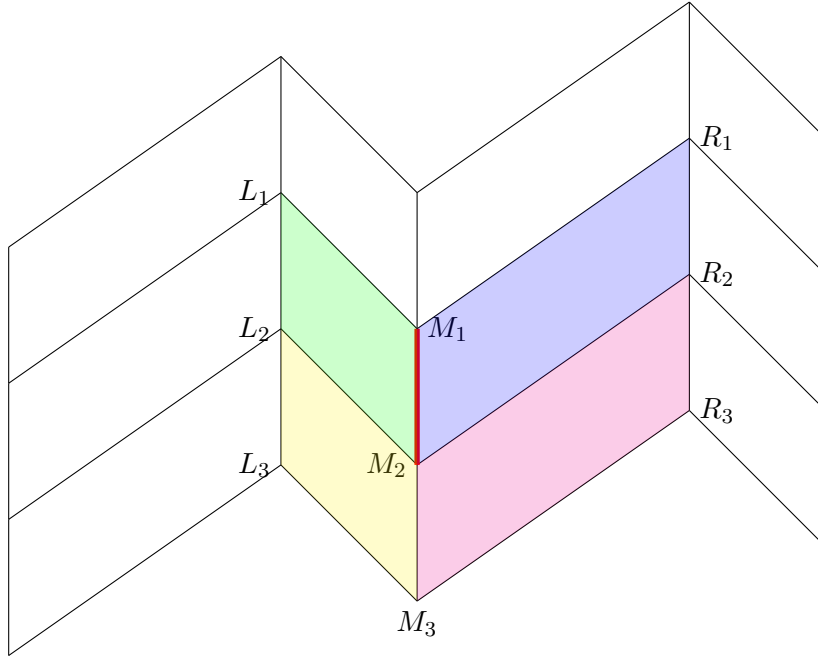


Abbildung 7: Faltmuster des verallgemeinerten Miura-Ori

Die andere Translation bildet $R_g(\alpha) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $R_v(\alpha) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ab, d. h.

$$T_1(\alpha) = R_v(\alpha) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} - R_g(\alpha) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \cos(\varphi_v) - x_1 \cos(\varphi_g) \\ (y_2 - y_1)(\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \tan(\alpha)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

mit $\sin(\varphi_v) = \frac{y_2}{x_2} \tan(\alpha)$ und $\sin(\varphi_g) = \frac{y_1}{x_1} \tan(\alpha)$. Da $\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \tan(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$, sind die Translationen genau dann orthogonal, wenn $y_1 = y_2$ gilt.

2.3. Flache Zusammenfaltbarkeit

Wir wissen, dass das gewöhnliche Miura-Ori im Sinne von Definition 1.17 flach zusammenfaltbar ist. Jetzt möchten wir überprüfen, inwieweit dies auch auf unser verallgemeinertes Miura-Ori zutrifft. Da sowohl die Bilder von $(0, 0)$ und $(0, 1)$ immer in der Ebene $x = 0$ bleiben, ist das Faltmuster nur dann flach zusammenfaltbar, wenn $\mathcal{F}(1, \mathbb{R}^2)$ auch in dieser Ebene liegt.

Das Faltmuster ist auf den grünen Flächen flach zusammenfaltbar, wenn die erste Kompo-

nente von $R_g \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Null wird. Analog bei den Violetten. Wir erhalten:

$$\varphi_g = \begin{cases} \pi/2 & y_1 \leq 0 \\ 3\pi/2 & y_1 > 0 \end{cases} \quad \varphi_v = \begin{cases} \pi/2 & y_2 \geq 0 \\ 3\pi/2 & y_2 < 0 \end{cases}$$

Für $y_1 = 0$ oder $y_2 = 0$ ist mindestens einer dieser Winkel konstant Null, weswegen das Muster in diesem Fall nie flach zusammenfaltbar sein kann. Wir betrachten also im Folgenden nur $y_1, y_2 \neq 0$. Wir erhalten so die kritischen Werte für α :

$$\tan(\alpha_g) = \frac{x_1}{y_1} \sin(\varphi_g) = \frac{-x_1}{|y_1|} \quad \tan(\alpha_v) = \frac{x_2}{y_2} \sin(\varphi_v) = \frac{x_2}{|y_2|}$$

Das Muster ist genau dann flach zusammenfaltbar, wenn es einen Faltwinkel α gibt, bei dem sowohl grüne als auch violette Flächen simultan in der Ebene $x = 0$ liegen. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\alpha_g = \alpha_v$ bzw. $\tan(\alpha_g) = \tan(\alpha_v)$ gilt.

Folgerung 2.1. *Das verallgemeinerte Miura–Ori aus Abbildung 5 ist genau dann flach zusammenfaltbar, wenn $\frac{-x_1}{|y_1|} = \frac{x_2}{|y_2|}$ gilt.*

Falls sie nicht gleich sind, geschehen ebenfalls interessante Dinge. Denn sobald α den kleineren der beiden Winkel erreicht hat, liegt eine der betrachteten Flächen auf der Ebene $x = 0$ und verletzt damit die Injektivität der Abbildung. Folglich muss die Faltung hier aufhören. Wir ziehen daraus eine wichtige Konsequenz:

Folgerung 2.2. *Es gelten $\cos(\varphi_g) \geq 0$ und $\cos(\varphi_v) \geq 0$, insbesondere auch*

$$\sin(\varphi_g) = \sqrt{1 - \frac{y_1^2}{x_1^2} \tan(\alpha)} \quad \sin(\varphi_v) = \sqrt{1 - \frac{y_2^2}{x_2^2} \tan(\alpha)}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis für φ_g ; für φ_v gilt eine analoge Argumentation. Der Winkel φ_g ist zu Beginn der Faltung ($\alpha = 0$) identisch Null und ändert sich stetig mit dem Winkel α . Sobald φ_g eine Nullstelle des Kosinus annimmt, stoppt die Faltung (da sonst die Injektivität des dynamischen Faltmusters verletzt wäre). Folglich ist $\cos(\varphi_g)$ stets positiv. \square

Wir möchten uns nun anschauen, wie der Faltvorgang sich kurz vor diesem Ende verhält. Zu diesem Zweck betrachten wir die Winkel φ_g und φ_v , da diese uns angeben, wie weit die Flächen davon entfernt sind, auf der Ebene $x = 0$ zu liegen. Wir nehmen für diese Betrachtung an, dass $\alpha_g < \alpha_v$ ist, d. h. die grüne Fläche wird zuerst auf die Ebene $x = 0$ stoßen. Uns interessiert das Verhältnis der Geschwindigkeiten, mit denen sich die jeweiligen Winkel in Abhängigkeit von α verändern. Wir betrachten also die Funktionen

$$\tilde{\varphi}_g : \alpha \mapsto \arcsin\left(\frac{y_1}{x_1} \tan(\alpha)\right) \quad \tilde{\varphi}_v : \alpha \mapsto \arcsin\left(\frac{y_2}{x_2} \tan(\alpha)\right)$$

und suchen

$$\frac{\frac{d}{d\alpha}\tilde{\varphi}_v}{\frac{d}{d\alpha}\tilde{\varphi}_g}$$

in einer Umgebung von $\arctan\left(\frac{-x_1}{|y_1|}\right)$.

Wir bilden die Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha}\tilde{\varphi}_g(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_1}{x_1}\tan(\alpha)\right)^2}} \cdot \frac{y_1}{x_1} \cdot (1 + \tan(\alpha)^2) \stackrel{x_1 \leq 0}{=} \frac{-y_1(1 + \tan(\alpha)^2)}{\sqrt{x_1^2 - y_1^2 \tan(\alpha)^2}} \\ \frac{d}{d\alpha}\tilde{\varphi}_v(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_2}{x_2}\tan(\alpha)\right)^2}} \cdot \frac{y_2}{x_2} \cdot (1 + \tan(\alpha)^2) \stackrel{x_2 \geq 0}{=} \frac{y_2(1 + \tan(\alpha)^2)}{\sqrt{x_2^2 - y_2^2 \tan(\alpha)^2}}\end{aligned}$$

sowie ihr Verhältnis

$$\frac{\frac{d}{d\alpha}\tilde{\varphi}_v}{\frac{d}{d\alpha}\tilde{\varphi}_g} = -\frac{y_2}{y_1} \cdot \sqrt{\frac{x_1^2 - y_1^2 \tan(\alpha)^2}{x_2^2 - y_2^2 \tan(\alpha)^2}}$$

und beobachten, dass für $\tan(\alpha) \rightarrow \frac{-x_1}{|y_1|}$ auch $\tan(\alpha)^2 \rightarrow \frac{x_1^2}{y_1^2}$ gilt und daher das Verhältnis gegen Null konvergiert. Daraus können wir ablesen, dass sich φ_v fast nicht mehr ändert, sobald die grüne Fläche fast aufgefaltet ist. Es erscheint gegen Ende des Zusammenfaltprozesses so, als würde sich nur noch die grüne Fläche bewegen, während die Violette stagniert.

2.4. Komplette Faltung

Bis jetzt haben wir ausgerechnet, wie das Muster zu einem festen Zeitpunkt (parametrisiert durch α) aussehen muss, falls es existiert. Diese Momentaufnahmen müssen, wie in Definition 1.16 gefordert, zu einer gemeinsamen Abbildung kombiniert werden. Ein formales Detail ist der Zeitparameter, der in der Definition zwischen 0 und 1 liegt. Da die Faltfunktion für $t < 1$ injektiv sein muss, gilt der Maximalwert für α , den wir aus der Untersuchung der flachen Zusammenfaltbarkeit erhalten haben. Dieser lautet

$$\alpha_{\max} := \min \left\{ \arctan \left(\frac{-x_1}{|y_1|} \right), \arctan \left(\frac{x_2}{|y_2|} \right) \right\}$$

Wir haben in Kapitel 2.2.4 nachgewiesen, dass $m \mapsto \mathcal{F}(t, m)$ für jedes t stetig ist. Alle Drehmatrizen, die wir berechnet haben, hängen stetig von α ab, folglich sind die Voraussetzungen von Satz 1.24 erfüllt. Damit haben wir in der Tat alle dynamischen Faltmuster bestimmt. Wir erinnern daran, dass das Ergebnis eindeutig war, weil wir $\alpha > 0$ gefordert hatten. Für $\alpha < 0$ erhalten wir ein an der Grundebene gespiegeltes Muster. Man überprüft nun leicht, dass sich auch die Symmetriegruppe des Musters so transformiert, wie es in Definition 1.28 gefordert ist.

Um sich davon überzeugen zu können, dass wir richtig gerechnet haben, insbesondere dass das Faltmuster wirklich stetig ist, visualisieren wir unsere Rechnung in Maple. Wir präsentieren ein Programm in Maple, mit dem man die dynamischen Faltmuster dieses Abschnitts für beliebige Parameter darstellen kann. Verschiedene Stadien dieser Visualisierung sind in Abbildung 6 zu sehen.

```
> restart;
with(LinearAlgebra):
with(plots):
```

Definiere die Punkte der Auffaltung.

```
> Mitte := < 0, 0, 0>:
Oben := < 0, 1, 0>:
Unten := < 0, -1, 0>:
Links := < x[1], y[1], 0>:
Rechts := < x[2], y[2], 0>:
```

Definiere die Abbildungsmatrizen.

```
> sin_g := y[1]/x[1]*tan(alpha):
cos_g := sqrt(1-y[1]^2/x[1]^2*tan(alpha)^2):
R_gruen := Matrix( [ [cos_g, 0, sin_g],
                     [sin(alpha)*sin_g, cos(alpha), -sin(alpha)*cos_g],
                     [-cos(alpha)*sin_g, sin(alpha), cos(alpha)*cos_g] ] );
R_gelb := Matrix( [ [cos_g, 0, -sin_g],
                    [sin(alpha)*sin_g, cos(alpha), sin(alpha)*cos_g],
                    [cos(alpha)*sin_g, -sin(alpha), cos(alpha)*cos_g] ] );
```

```
sin_b := y[2]/x[2]*tan(alpha):
cos_b := sqrt(1-y[2]^2/x[2]^2*tan(alpha)^2):
R_blau := Matrix( [ [cos_b, 0, -sin_b],
                    [sin(alpha)*sin_b, cos(alpha), -sin(alpha)*cos_b],
                    [-cos(alpha)*sin_b, sin(alpha), cos(alpha)*cos_b] ] );
R_violett := Matrix( [ [cos_b, 0, -sin_b],
                      [sin(alpha)*sin_b, cos(alpha), -sin(alpha)*cos_b],
                      [cos(alpha)*sin_b, -sin(alpha), cos(alpha)*cos_b] ] );
```

$$R_{gruen} := \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \frac{y_1^2 \tan(\alpha)^2}{x_1^2}} & 0 & \frac{y_1 \tan(\alpha)}{x_1} \\ \frac{\sin(\alpha) y_1 \tan(\alpha)}{x_1} & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \sqrt{1 - \frac{y_1^2 \tan(\alpha)^2}{x_1^2}} \\ -\frac{\cos(\alpha) y_1 \tan(\alpha)}{x_1} & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \sqrt{1 - \frac{y_1^2 \tan(\alpha)^2}{x_1^2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 R_{gelb} &:= \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \frac{y_1^2 \tan(\alpha)^2}{x_1^2}} & 0 & -\frac{y_1 \tan(\alpha)}{x_1} \\ \frac{\sin(\alpha) y_1 \tan(\alpha)}{x_1} & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \sqrt{1 - \frac{y_1^2 \tan(\alpha)^2}{x_1^2}} \\ \frac{\cos(\alpha) y_1 \tan(\alpha)}{x_1} & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \sqrt{1 - \frac{y_1^2 \tan(\alpha)^2}{x_1^2}} \end{bmatrix} \\
 R_{blau} &:= \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \frac{y_2^2 \tan(\alpha)^2}{x_2^2}} & 0 & -\frac{y_2 \tan(\alpha)}{x_2} \\ \frac{\sin(\alpha) y_2 \tan(\alpha)}{x_2} & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \sqrt{1 - \frac{y_2^2 \tan(\alpha)^2}{x_2^2}} \\ -\frac{\cos(\alpha) y_2 \tan(\alpha)}{x_2} & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \sqrt{1 - \frac{y_2^2 \tan(\alpha)^2}{x_2^2}} \end{bmatrix} \\
 R_{violett} &:= \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \frac{y_2^2 \tan(\alpha)^2}{x_2^2}} & 0 & -\frac{y_2 \tan(\alpha)}{x_2} \\ \frac{\sin(\alpha) y_2 \tan(\alpha)}{x_2} & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \sqrt{1 - \frac{y_2^2 \tan(\alpha)^2}{x_2^2}} \\ \frac{\cos(\alpha) y_2 \tan(\alpha)}{x_2} & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \sqrt{1 - \frac{y_2^2 \tan(\alpha)^2}{x_2^2}} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Definiere die Polygone.

```

> Poly_gruen := [Mitte, Oben, Oben+Links, Links];
Poly_gelb := [Mitte, Links, Links+Unten, Unten];
Poly_violett := [Mitte, Unten, Unten+Rechts, Rechts];
Poly_blau := [Mitte, Rechts, Rechts+Oben, Oben];

```

Definiere die Translationen.

```

> Trans_vert := R_gruen.Oben - R_violett.Unten;
Trans_hori := simplify( R_violett.Rechts - R_gruen.Links);

```

$$Trans_{vert} := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2)

Trans_hori:=

(2)

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{x_2^2 \cos(\alpha)^2 - y_2^2 + y_2^2 \cos(\alpha)^2}{x_2^2 \cos(\alpha)^2}} x_2 - \sqrt{\frac{x_1^2 \cos(\alpha)^2 - y_1^2 + y_1^2 \cos(\alpha)^2}{x_1^2 \cos(\alpha)^2}} x_1 \\ -\frac{-y_2 + y_1}{\cos(\alpha)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Spezialisiere die Koordinaten. Beachte, dass $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$ gelten müssen.

```
> Koordinaten := x[1]=-1, y[1] = 0.5, x[2]=1.5, y[2]=1;  
Koordinaten:= x1 = -1, y1 = 0.5, x2 = 1.5, y2 = 1
```

(3)

Berechne die passenden Polygone für die graphische Darstellung. Dabei ist "poly" das Polygon in der Grundebene, "R_Matrix" ist die Drehmatrix für dieses Polygon, "t_hori" ist die Anzahl der durchgeführten horizontalen Translationen, "t_vert" die Zahl der vertikalen Translationen. Der Auffaltwinkel wird über "winkel" festgelegt und "farbe" ist die Farbe des Polygons in der Graphik.

```
> pPlot := proc( poly, R_Matrix, t_hori, t_vert, winkel, farbe)  
  local rechnung, punkte, zeichnen;  
  
  rechnung := map(i ->  
    R_Matrix.i + t_hori * Trans_hori + t_vert * Trans_vert, poly);  
  punkte := map(i -> convert(i, list), rechnung);  
  zeichnen := subs( [Koordinaten, alpha=winkel], punkte);  
  
  return polygonplot3d( zeichnen, color=farbe);  
end proc;
```

Dieses Programm verwaltet die gezeichneten Flächen:

```
> Faltmuster := proc(winkel)  
  local P1,P2,P3,P4, Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7,Q8,Q9,Q10,Q11,Q12;  
  
  P1 := pPlot( Poly_gruen, R_gruen, 0, 0, winkel, green);  
  P2 := pPlot( Poly_gelb, R_gelb, 0, 0, winkel, yellow);  
  P3 := pPlot( Poly_violett, R_violett, 0, 0, winkel, violet);  
  P4 := pPlot( Poly_blau, R_blau, 0, 0, winkel, blue);  
  
  # Polygone darum herum  
  
  Q1 := pPlot( Poly_violett, R_violett, -1, 1, winkel, grey);  
  Q2 := pPlot( Poly_gelb, R_gelb, 0, 1, winkel, grey);  
  Q3 := pPlot( Poly_violett, R_violett, 0, 1, winkel, grey);  
  Q4 := pPlot( Poly_gelb, R_gelb, 1, 1, winkel, grey);  
  Q5 := pPlot( Poly_gruen, R_gruen, 1, 0, winkel, grey);  
  Q6 := pPlot( Poly_gelb, R_gelb, 1, 0, winkel, grey);  
  Q7 := pPlot( Poly_gruen, R_gruen, 1, -1, winkel, grey);  
  Q8 := pPlot( Poly_blau, R_blau, 0, -1, winkel, grey);
```

```

Q9 := pPlot( Poly_gruen, R_gruen, 0, -1, winkel, grey);
Q10 := pPlot( Poly_blau, R_blau, -1, -1, winkel, grey);
Q11 := pPlot( Poly_violett, R_violett, -1, 0, winkel, grey);
Q12 := pPlot( Poly_blau, R_blau, -1, 0, winkel, grey);

```

```

return plots[display]({P1,P2,P3,P4, Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7,Q8,Q9,
Q10,Q11,Q12}, axes=boxed, scaling=constrained, orientation=[-60,
45,0]);
end proc:

```

Bestimme maximalen Auffaltwinkel.

```

> Winkel_max := min( subs([Koordinaten], arctan(-x[1]/abs(y[1])) ),
subs([Koordinaten], arctan(x[2]/abs(y[2])) ) );

```

$$Winkel_max := \arctan\left(\frac{1.5}{|1|}\right)$$

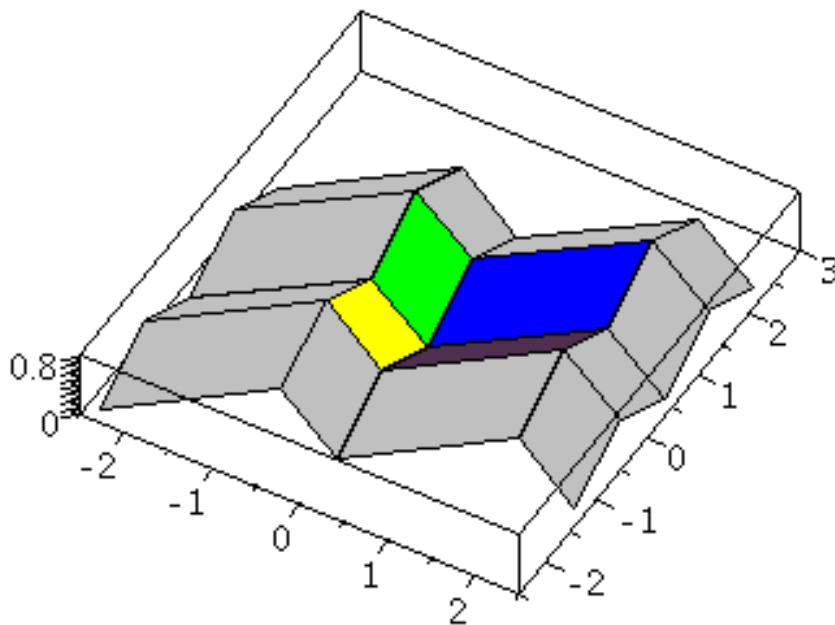
(4)

```

> plots[animate]( Faltmuster, [alpha], alpha= 0..Winkel_max,
frames=50);

```

$$a = 0.4813683543$$



3. Dreiecksmuster

3.1. Gleichseitiges Dreiecksmuster

In diesem Kapitel betrachten wir Faltmuster, die aus gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt sind (das Grundmuster ist in Abbildung 1 dargestellt) und die eine $p2$ -Symmetrie aufweisen. Zudem fordern wir, dass sich bei der Projektion auf die ersten beiden Komponenten ein Muster wie in Abbildung 8 ergibt. Dabei sind die Schnittpunkte der Geraden genau die Punkte mit nicht trivialen Stabilisator unter der Gruppenoperation. Dies kann man gut am blau markierten Fundamentalbereich sehen, wenn man bedenkt, dass bei jeder Ecke eines kleinen Dreiecks eine Drehung um 180° vorliegt.

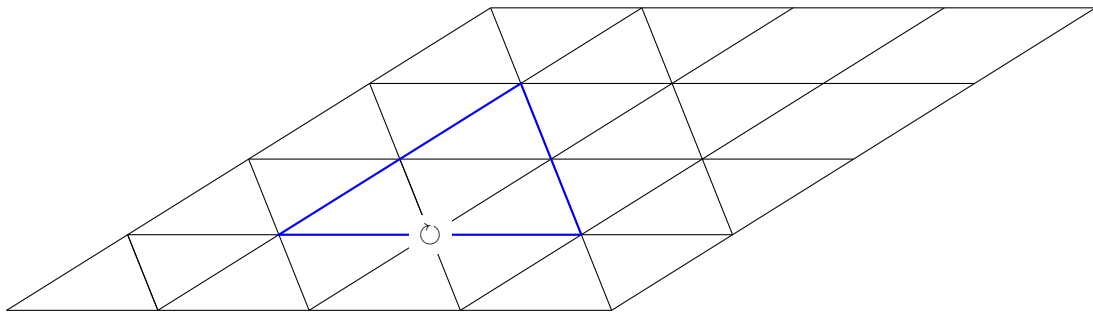


Abbildung 8: Projektion des Dreiecksmusters auf die Ebene

Diese Situation legt es nahe, nach statischen Faltmustern zu suchen. Als Vorbereitung darauf legen wir das Koordinatensystem fest:

Wir wählen das kartesische Koordinatensystem so, dass eine der Translationen gleich $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Die zweite Translation ist dann beliebig mit Wert $\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$, wobei $x_p, y_p \in \mathbb{R}$ mit $y_p \neq 0$ gilt. Der blau gekennzeichnete Fundamentbereich F^Δ der $p2$ ist durch das Dreieck $(0,0), (1,0), (x_p, y_p)$ gegeben. Die in Abbildung 8 markierte Drehung vertauscht den Ursprung mit $(1,0)$.

Wir legen folgende Notation für diesen Abschnitt fest:

$$p1^\Delta := \langle T_1, T_2 \rangle \qquad p2^\Delta := \langle D, T_1, T_2 \rangle \qquad (17)$$

mit

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad T_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad T_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & y_p \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad (18)$$

In diesem Kapitel weichen wir davon ab, Punkte zeilenweise zu notieren, wenn die spaltenweise Schreibweise besser lesbar ist. Sollte dies geschehen, sind die entsprechenden Objekte eindeutig als Punkte deklariert.

Lemma 3.1. *Die Punkte aus F^Δ mit nicht-trivialem Stabilisator unter $p2^\Delta$ sind genau*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_p/2 \\ y_p/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{x_p+1}{2} \\ y_p/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Beweis. Sei (p_1, p_2) aus F^Δ mit $g \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ und $g \in p2^\Delta$. Nach Bemerkung 1.5 lässt sich g als $g = t \cdot d$ darstellen mit $t \in \langle T_1, T_2 \rangle$ und $d \in \langle D \rangle$.

Falls $d = 1$, so folgt $t = 1$, da $\langle T_1, T_2 \rangle$ treu auf \mathbb{R}^2 operiert. Also betrachte $d = D$. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = T_1^a T_2^b D \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1 + 1 + a + bx_p \\ -p_2 + by_p \end{pmatrix}$. Also folgt $2p_1 = 1 + a + bx_p$ und $2p_2 = by_p$.

Da sich (p_1, p_2) in F^Δ befindet, gibt es $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, sodass

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 x_p \\ \alpha_3 y_p \end{pmatrix} \quad (20)$$

gilt. Einsetzen liefert $by_p = 2\alpha_3 y_p$, also $b = 2\alpha_3$, da $y_p \neq 0$. Analog folgt

$$a = 2p_1 - 1 - bx_p = 2\alpha_2 + 2\alpha_3 x_p - 1 - 2\alpha_3 x_p = 2\alpha_2 - 1. \quad (21)$$

Da $a, b \in \mathbb{Z}$, erhalten wir nun $\alpha_2, \alpha_3 \in \{0, 1/2, 1\}$. Gemeinsam mit der Randbedingung $\alpha_2 + \alpha_3 \leq 1$ ergeben sich die gewünschten Punkte. \square

Folgerung 3.2. *Für die in Lemma 3.1 errechneten Punkte sind die Bahnen unter $p1^\Delta$ und $p2^\Delta$ gleich.*

Beweis. Jeder dieser Punkte x wurde von einem $t \cdot D$ mit $t \in p1^\Delta$ stabilisiert. Damit liegen Dx und x in der selben Bahn. \square

In Abbildung 9 ist dargestellt, wie die Kanten zwischen den Eckpunkten verlaufen.

Lemma 3.3. *Die Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ in Abbildung 9 sind kongruent.*

Beweis. Da diese Dreiecke die selben Seitenlängen haben (wie man leicht an den Verbindungsvektoren zwischen den Punkten einsieht), sind sie kongruent. \square

Lemma 3.4. *Schneidet man die Menge der Bahnen der $p2^\Delta$ auf \mathbb{R}^2 mit den Punkten aus Lemma 3.1, so erhält man*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} x_p/2 \\ y_p/2 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \frac{x_p+1}{2} \\ y_p/2 \end{pmatrix} \right\}. \quad (22)$$

Beweis. Klar ist, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$ in einer Bahn liegen. Wir müssen also nur noch zeigen, dass die anderen Elemente alle in verschiedenen Bahnen liegen. Wegen Folgerung 3.2 können wir uns auf die Untersuchung der Bahnen der $p1^\Delta$ auf \mathbb{R}^2 beschränken. Da aber nur ganzzahlige Vielfache der Translationen in der $p1^\Delta$ liegen, sieht man, dass die übrigen Elemente nicht durch Translationen ineinander überführt werden können. Damit liegen die Punkte in vier verschiedenen Bahnen. \square

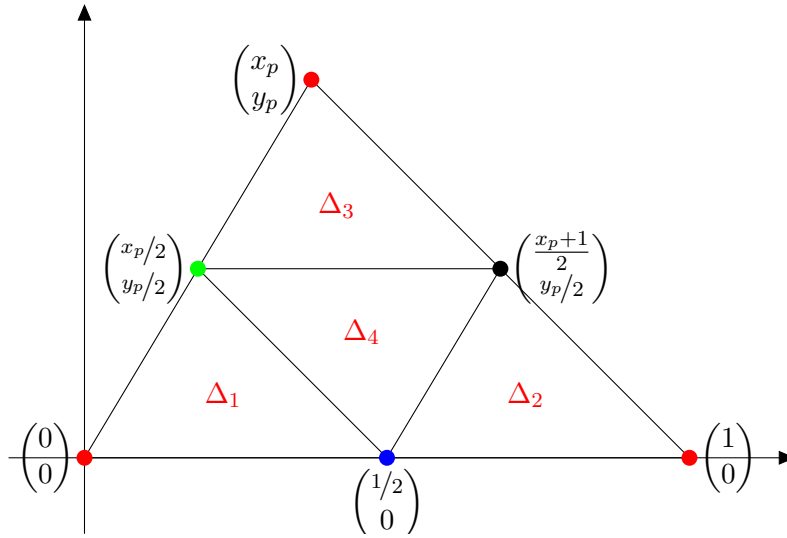


Abbildung 9: Fundamentalbereich des Faltmusters

Wir können die Bahnen unter $p2^\Delta$ in Abbildung 9 darstellen, indem Punkte genau dann die gleiche Farbe erhalten, wenn sie in der selben Bahn liegen. Punkte in der gleichen Bahn haben gleiche Höhe.

Wir interessieren uns dafür, welche Höhen wir diesen Bahnen zuordnen können. Auf jedem der Dreiecke interpolieren wir linear zwischen den Ecken; diese Interpolation ist eindeutig durch die Wahl der Höhen der drei Eckpunkte festgelegt. Zudem können wir die Höhen völlig unabhängig voneinander wählen. Umgekehrt haben wir durch die Wahl der vier Höhen für die Punktmengen aus Lemma 3.4 die Höhen aller Punkte des Fundamentalbereichs festgelegt. Da es sich um einen Fundamentalbereich handelt, sind dadurch die Höhen aller Punkte aus \mathbb{R}^2 festgelegt (vgl. Definition 1.39).

Da wir uns für Äquivalenzklassen von Faltmustern interessieren (gemäß Definition 1.38) können wir ein äquivalentes Faltmuster betrachten, in dem die Bahn von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Höhe Null besitzt. Die drei anderen Höhen a, b, c sind beliebige reelle Zahlen. Wir erhalten also folgende Punkte im \mathbb{R}^3 :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_p/2 \\ y_p/2 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{x_p+1}{2} \\ y_p/2 \\ c \end{pmatrix} \quad (23)$$

Wir wollen hier noch kurz auf die geforderte Stetigkeit von der Höhenfunktion eingehen. Während es klar ist, dass wir auf dem Fundamentalbereich selbst stetig sind, ist dies an den Rändern nicht offensichtlich. Wir betrachten also den Fall, dass $g_1 F^\Delta \cap g_2 F^\Delta \neq \emptyset$ für $g_1, g_2 \in p2^\Delta$. Nach Anwendung von g_1^{-1} auf diese Gleichung können wir uns auf den Fall beschränken, dass $F^\Delta \cap g F^\Delta \neq \emptyset$ für ein $g \in p2^\Delta$.

Lemma 3.5. *Sei $g \in p2^\Delta$ mit $F^\Delta \cap g F^\Delta \neq \emptyset$. Dann tritt einer von drei Fällen ein:*

- gF^Δ und F^Δ sind gleich und $g = 1$.
- Der Schnitt ist genau eine der Seiten des Dreiecks F^Δ .
- Die Mengen schneiden sich in genau einem der drei Eckpunkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$.

Beweis. Da F^Δ ein Vertretersystem der Operation von $p2^\Delta$ enthält, das alle inneren Punkte von F^Δ umfasst, kann nur dann für $g \neq 1$ ein Schnitt vorliegen, wenn dieser auf dem Rand stattfindet. Da $p2^\Delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = p1^\Delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (vgl. Folgerung 3.2) und $p1^\Delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gerade die Eckpunkte sind, können sich Ecken nur mit Ecken schneiden. Gibt es also einen Schnittpunkt, der nicht auf einer Ecke liegt, so müssen sich dort zwei Kanten schneiden. Die sich ergebende Schnittkante ist dann eine Dreiecksseite (da sie bei den anliegenden Ecken aufhört). \square

Dieses Lemma reduziert die Fortsetzungsproblematik auf die Überprüfung der drei Seiten des Fundamentalbereichs F^Δ . Es sagt uns auch, dass $g_1 F^\Delta$ genau dann gleich zu $g_2 F^\Delta$ ist, wenn $g_1 = g_2$ gilt. Demnach können wir uns für die Fortsetzung auf die Untersuchung von drei Gruppenelementen beschränken.

Um zu zeigen, dass das statische Faltmuster auf F^Δ für jede Wahl von a, b, c stetig auf den \mathbb{R}^2 fortsetzbar ist, müssen wir also für jede Kante das eindeutige $g \in p2^\Delta$ finden, für das sich F^Δ und gF^Δ in dieser Kante schneiden, und nachweisen, dass der Anschluss stetig erfolgt.

Kante	Gruppenelement
$(0, 0) - (1, 0)$	D
$(1, 0) - (x_p, y_p)$	$T_2 D$
$(x_p, y_p) - (0, 0)$	$T_2 T_1^{-1} D$

Tabelle 1: Kanten mit zugehörigen Gruppenelementen

In Tabelle 1 sind die Gruppenelemente zu jeder Kante angegeben, die nach dem vorangehenden Lemma eindeutig sind. Man überprüft nun, dass jedes dieser Gruppenelemente die Drehung um den Mittelpunkt der entsprechenden Kante ist. Betrachtet man Abbildung 9, so erkennt man, dass sich das Muster in alle Richtungen stetig fortsetzen lässt. Zusammenfassend:

Folgerung 3.6. Sei $h : F^\Delta \rightarrow \mathbb{R}$ eine Höhenfunktion über der in Abbildung 9 dargestellten Polygonzerlegung. Dann gibt es genau eine Möglichkeit, h zu einer $p2^\Delta$ -invarianten Höhenfunktion auf \mathbb{R}^2 fortzusetzen.

Als nächstes nutzen wir die Information, dass das Grundmuster aus gleichseitigen Dreiecken besteht. Da alle Dreiecke aneinander angrenzen, haben alle die gleiche Seitenlänge, nennen

wir sie s . Aus $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ und Δ_4 erhalten wir folgende Gleichungen:

$$s^2 = \frac{1}{4} + a^2 = \frac{x_p^2 + y_p^2}{4} + b^2 = \frac{(x_p - 1)^2 + y_p^2}{4} + (b - a)^2 \quad (24)$$

$$s^2 = \frac{1}{4} + a^2 = \frac{x_p^2 + y_p^2}{4} + (c - a)^2 = \frac{(x_p - 1)^2 + y_p^2}{4} + c^2 \quad (25)$$

$$s^2 = \frac{1}{4} + (b - c)^2 = \frac{x_p^2 + y_p^2}{4} + b^2 = \frac{(x_p - 1)^2 + y_p^2}{4} + c^2 \quad (26)$$

$$s^2 = \frac{1}{4} + (b - c)^2 = \frac{x_p^2 + y_p^2}{4} + (c - a)^2 = \frac{(x_p - 1)^2 + y_p^2}{4} + (b - a)^2 \quad (27)$$

Ignorieren der doppelten Gleichungen und geschicktes Gleichsetzen führt auf das System

$$a^2 = (b - c)^2 \quad (28)$$

$$b^2 = (a - c)^2 \quad (29)$$

$$c^2 = (b - a)^2 \quad (30)$$

Lemma 3.7. *Das Gleichungssystem*

$$a^2 = (b - c)^2$$

$$b^2 = (a - c)^2$$

$$c^2 = (b - a)^2$$

mit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ hat die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(v, v, 0) | v \in \mathbb{R}\} \cup \{(v, 0, v) | v \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, v, v) | v \in \mathbb{R}\}. \quad (31)$$

Beweis. Falls $c = 0$, so folgt $a = b$ und man überprüft leicht, dass dies eine Lösung ist.

Falls $c \neq 0$, dividiere alle Gleichungen durch c^2 und erhalte (mit $\hat{a} := \frac{a}{c}$ und $\hat{b} := \frac{b}{c}$):

$$\hat{a}^2 = (\hat{b} - 1)^2$$

$$\hat{b}^2 = (\hat{a} - 1)^2$$

$$1 = (\hat{b} - \hat{a})^2$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass $\hat{b} = \hat{a} + 1$ oder $\hat{a} = \hat{b} + 1$ gilt. Im Fall $\hat{b} = \hat{a} + 1$ ergibt die zweite Gleichung, dass $\hat{a} = 0$ und somit $\hat{b} = 1$ gelten muss. Im anderen Fall nutzt man analog die erste Gleichung, um $\hat{b} = 0$ und $\hat{a} = 1$ zu etablieren. Eine Resubstitution ergibt $a = 0$ und $b = c$, bzw. $a = c$ und $b = 0$, also beide Male Lösungen des Systems. \square

Damit ist die Vorarbeit geleistet, mit der wir das erste Ergebnis dieses Abschnitts präsentieren können.

Satz 3.8. *Sei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Höhenfunktion über der in Abbildung 8 dargestellten Polygonzerlegung $(\mathbb{R}^2, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ mit den Eigenschaften:*

- h ist invariant unter $p2^\Delta$.
- Die Polygonzerlegung von $\text{Graph}(h)$ (vgl. Lemma 1.36) besteht aus gleichseitigen Dreiecken.

Dann sind alle P_j kongruent und gleichschenkelig. Zudem ist h eine Zickzack-Faltung.

Beweis. Da h invariant unter $p2^\Delta$ ist, genügt es, h auf dem Fundamentalbereich F^Δ festzulegen (Abbildung 9). Gemäß Folgerung 3.6 ergibt jede Höhenfunktion auf F^Δ auch eine auf \mathbb{R}^2 .

Da sich $\text{Graph}(h)$ in gleichseitige Dreiecke unterteilt, gelten die Gleichungen (25) bis (27), die durch Lemma 3.7 gelöst werden. Daraus können wir ablesen, dass von den vier Höhen jeweils zwei gleich sind (wir erinnern daran, dass wir eine der Höhen auf Null festgesetzt hatten). Aus den Gleichungen (27) für Δ_4 sieht man, dass damit zwei Seiten von Δ_4 gleich lang sind. Da alle Dreiecke in der Projektion nach Lemma 3.3 kongruent sind, sind damit alle Dreiecke in der Projektion gleichschenkelig.

Wegen des Lemmas 1.41 liegt in jedem der Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ eine Zickzack-Faltung vor. Diese Dreiecke unterteilen F^Δ in Polygone, folglich haben wir gemäß Lemma 1.42 eine Zickzack-Faltung des Fundamentalbereichs. Mit Lemma 1.43 erhalten wir schließlich eine Zickzack-Faltung auf dem gesamten \mathbb{R}^2 . \square

Wir möchten nun wissen, was passiert, wenn wir dieses Muster beibehalten, aber die operierende Gruppe auf eine ihrer Untergruppen einschränken. Wir wollen nämlich anstatt der $p2^\Delta$ die $p1^\Delta$ betrachten. Dabei wird natürlich der Fundamentalbereich entsprechend vergrößert. Eine solche Vergrößerung ist in Abbildung 10 dargestellt. Dabei sind die Eckpunkte bereits nach den Bahnen von $p1^\Delta$ gefärbt, d.h. zwei Punkte haben genau dann die gleiche Farbe, wenn sie in der gleichen Bahn unter $p1^\Delta$ liegen.

Es fällt auf, dass die Bereiche $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ sich im Vergleich zu Abbildung 9 nicht verändert haben, weswegen noch immer die gleichen Höhenbeschränkungen gelten. Alle hinzugefügten Schnittpunkte sind aber bereits durch diese festgelegt. Folglich ist schon der gesamte Fundamentalbereich festgelegt. Man prüft nun leicht nach, dass auch auf den hinzugekommenen Dreiecken eine Zickzack-Faltung vorliegt, die die selbe Richtung wie auf den übrigen Dreiecken hat. Wie im letzten Abschnitt folgt, dass dieses Muster (auf den \mathbb{R}^2 fortgesetzt) nur Zickzack-Faltungen zulässt. Damit haben wir diesen Satz bewiesen:

Satz 3.9. Sei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Höhenfunktion über der in Abbildung 8 dargestellten Polygonzerlegung $(\mathbb{R}^2, \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}})$ mit den Eigenschaften:

- h ist invariant unter $p1^\Delta$.
- Die Polygonzerlegung von $\text{Graph}(h)$ (vgl. Lemma 1.36) besteht aus gleichseitigen Dreiecken.

Dann sind alle P_j kongruent und gleichschenkelig. Zudem ist h eine Zickzack-Faltung.

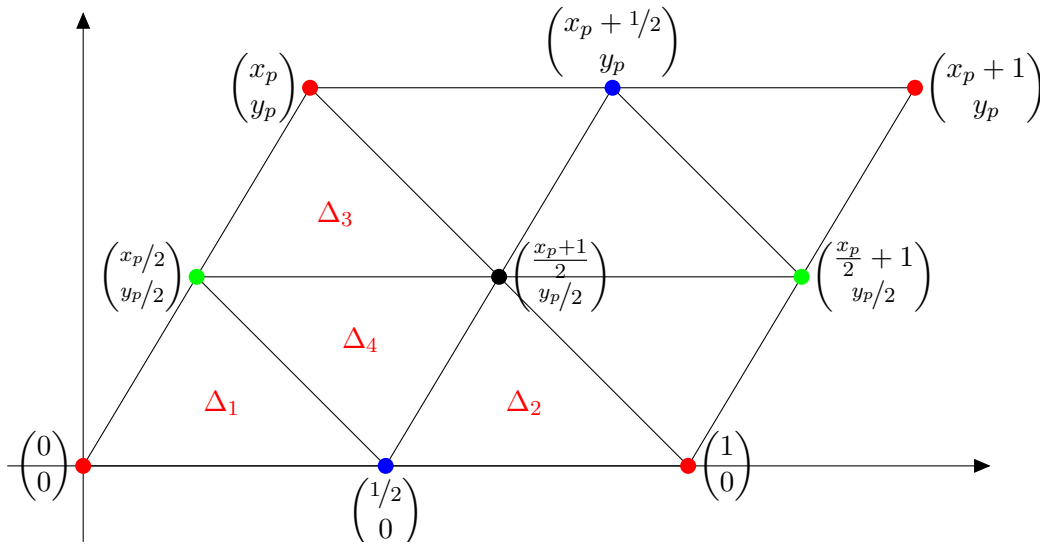


Abbildung 10: Fundamentalbereich des Faltmusters

3.2. Verfeinerung des Miura–Ori

Im Vergleich der Ergebnisse des letzten Abschnitts zu denen des Miura–Ori lässt sich folgende Bemerkung machen: Die Dreiecksmuster des letzten Abschnitts lassen nur Zickzack–Faltungen zu, das Miura–Ori aber kann durch Hinzufügen weiterer Kanten als Dreiecksmuster aufgefasst werden, auf dem es Faltungen gibt, die keine Zickzack–Faltungen sind. Diese Diskrepanz lässt sich dadurch beseitigen, dass man erkennt, wie speziell die Situation des letzten Abschnitts war. Dadurch, dass wir die Punkte mit nicht–trivialem Stabilisator unter $p2^\Delta$ als Eckpunkte der Polygone in der Polygonzerlegung von \mathbb{R}^2 gewählt haben, haben wir die Zickzack–Faltung festgelegt. Dies wird insbesondere dadurch deutlich, dass wir bereits dann eine Zickzack–Faltung erhielten, wenn wir nur Translationssymmetrien vorausgesetzt haben.

In diesem Abschnitt möchten wir uns der Frage widmen, ob sich weitere dynamische Faltmuster ergeben, wenn wir zusätzliche Kanten im Miura–Ori einfügen. In Anlehnung an den letzten Abschnitt wählen wir die Parallelogramme so, dass sich gleichseitige Dreiecke ergeben, wenn man sie zerteilt. Die vorgenommene Zerlegung ist in Abbildung 11 dargestellt, wobei ein Fundamentalbereich der Translationen rot umkreist ist.

Wir möchten alle möglichen dynamischen Faltmuster auf Basis dieses Musters bestimmen. Dabei begnügen wir uns hier damit, nur die Koordinaten der Ecken anzugeben, da diese das dynamische Faltmuster schon eindeutig festlegen. Insbesondere übersetzt sich eine kontinuierliche Variation der Punkte in eine kontinuierliche Variation der euklidischen Abbildungen (vgl. Definition 1.16). Somit ist die Stetigkeit des Faltmusters nach Satz 1.24 automatisch garantiert.

Unser Fundamentalbereich ist in Abbildung 12 dargestellt, zusammen mit der Namens-

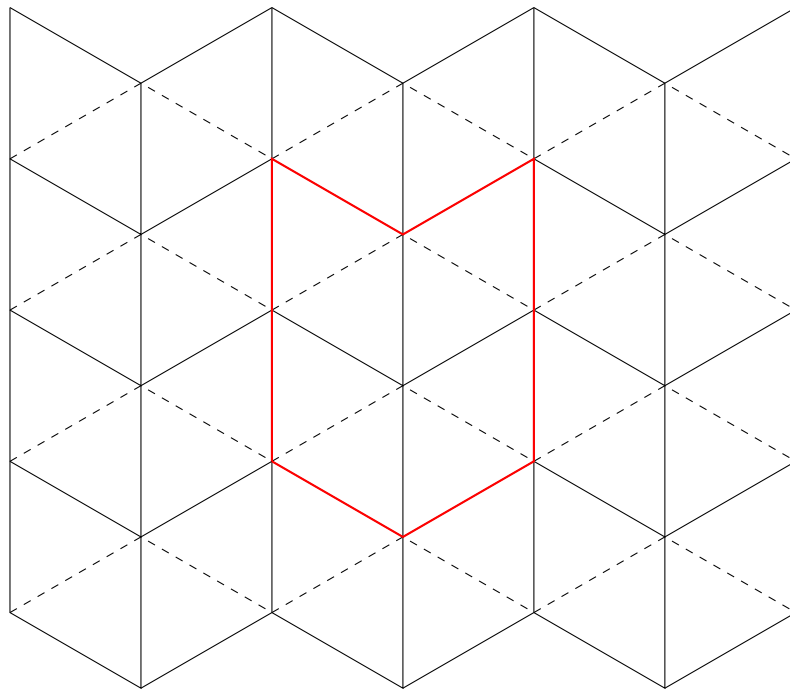


Abbildung 11: Verfeinertes Faltkantenmuster des Miura-Ori

konvention für die Punkte. Er ist im Vergleich zu Abbildung 11 gedreht. Das Zentrum der Drehung D befindet sich genau zwischen Q und V . Die horizontale Translation T_1 erfüllt

$$P + T_1 = X \qquad Q + T_1 = Y \qquad R + T_1 = Z$$

und die vertikale Translation T_2 genügt den Bedingungen

$$R + T_2 = P \qquad W + T_2 = U \qquad Z + T_2 = X.$$

Bemerkung 3.10. *Es gibt ein dynamisches Faltmuster \mathcal{F}_M über der in Abbildung 11 dargestellten Polygonzerlegung, das im Sinne von Definition 1.26 invariant unter $\langle T_1, T_2, D \rangle$ ist².*

Beweis. Das dynamische Faltmuster aus Kapitel 2 erfüllt diese Bedingung. \square

Wir unterdrücken meistens die Abhängigkeit der Gruppenelemente von t in der Notation. Falls nicht, schreiben wir z. B. $T_1(t)$.

Wir verwenden Zylinderkoordinaten zur Beschreibung der Punkte. Die Grundebene wird durch Polarkoordinaten beschrieben, die wir mit den komplexen Zahlen identifizieren. Wir schreiben Zylinderkoordinaten als $[re^{i\theta}, h]$, wobei $re^{i\theta}$ die Polarkoordinaten in der Ebene beschreiben und h die dritte Komponente. Wir legen die Koordinaten zu einigen Punkten aus Abbildung 12 an:

$$V = [0, 0] \qquad Z = [1, 0] \qquad Y = [e^{\frac{\pi i}{3}}, 0] \qquad X = [\sqrt{3}e^{\frac{\pi i}{2}}, 0]$$

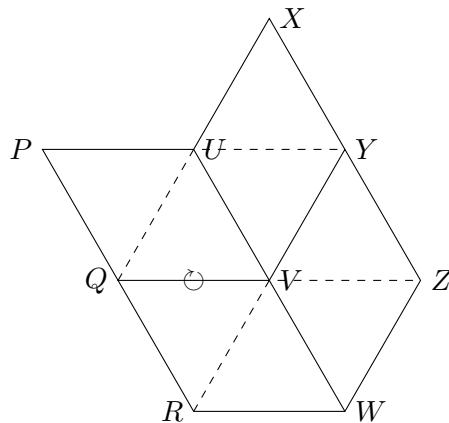


Abbildung 12: Fundamentalbereich der Translationen des verfeinerten Miura-Oris

Da wir nur an Äquivalenzklassen dynamischer Faltmuster interessiert sind, können wir zwei Punkte von \mathcal{F}_M festsetzen.

²Die genau Form von τ muss noch bestimmt werden.

Lemma 3.11. *Wir können \mathcal{F}_M aus Bemerkung 3.10 so wählen, dass Q und V Fixpunkte davon sind, d. h.*

$$\mathcal{F}_M(t, Q) = [-1, 0] \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_M(t, V) = [0, 0].$$

Beweis. Gemäß Lemma 1.31 können wir V als Fixpunkt wählen. Da \mathcal{F}_M invariant unter der Drehung D ist, hat der Punkt Q die selbe Höhe wie V . Nach der Analyse in Kapitel 1.3.3 können wir die Winkelkoordinate von Q auf π festlegen. Damit wird Q ein Fixpunkt (da er Abstand 1 von V hat). \square

Folgerung 3.12. *Bezüglich der in Lemma 3.11 definierten Situation hat die Drehung D die (von t unabhängige) Matrixdarstellung*

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \quad (32)$$

Wir verwenden die Translation T_1 , um die Position von Y einzuschränken.

Lemma 3.13. *Sei die Situation aus Lemma 3.11 gegeben. Dann gibt es eine stetige Abbildung $\varphi : [0, 1] \rightarrow (-\pi, \pi)$, $t \mapsto \varphi_t$ mit $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ und*

$$\mathcal{F}_M(t, Y) = [e^{i\varphi_t}, 0].$$

Beweis. Wegen $Q + T_1 = Y$ folgt $\mathcal{F}_M(t, Q) + T_1(t) = \mathcal{F}_M(t, Y)$, insbesondere haben $\mathcal{F}_M(t, Q)$ und $\mathcal{F}_M(t, Y)$ die gleiche Höhe. Da Y Abstand 1 von V hat, gilt dies auch für $\mathcal{F}_M(t, Y)$. Damit ist $\mathcal{F}_M(t, Y)$ als $[e^{i\varphi_t}, 0]$ gegeben (wobei $\varphi_t \notin \{\pm\pi\}$, da $\mathcal{F}_M(t, Y) \neq \mathcal{F}_M(t, Q)$ ist). Die Stetigkeit von φ folgt aus der Stetigkeit von \mathcal{F}_M . \square

Folgerung 3.14. *In der Situation von Lemma 3.13 gilt*

$$T_1(t) = \overline{\mathcal{F}_M(t, Q)\mathcal{F}_M(t, Y)} = [e^{i\varphi_t} + 1, 0]. \quad (33)$$

Wir bestimmen jetzt alle Punkte in Abhängigkeit von φ_t . Wir beginnen mit U .

Folgerung 3.15. *In der Situation von Lemma 3.13 und mit der Setzung*

$$h_{\pm}(t) := \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cos\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right)^2}} \quad (34)$$

hat $\mathcal{F}_M(t, U)$ die Koordinaten (sowohl zylindrisch als auch kartesisch angegeben)

$$\mathcal{F}_M(t, U) = \left[-\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right)} e^{i\frac{\pi + \varphi_t}{2}}, h_{\pm}(t) \right] = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right), h_{\pm}(t) \right). \quad (35)$$

Zudem gilt $\varphi_t \in [\frac{\pi}{3}, \pi)$.

Beweis. Da U Abstand 1 von Y , Q und V hat, gilt dies auch im gefalteten Zustand. Mit Lemma B.4 folgen die angegebenen Koordinaten. Aus diesem Lemma folgt auch, dass φ zwischen $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{5\pi}{3}$ liegt. Da φ während des Faltvorgangs kontinuierlich variiert, bei $\frac{\pi}{3}$ startet und niemals gleich π wird, gilt sogar $\varphi \in [\frac{\pi}{3}, \pi)$. \square

Folgerung 3.16. *In der Situation von Lemma 3.13 gilt*

$$R = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right), h_{\pm}(t) \right) = \left[-\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right)} e^{-i\frac{\pi + \varphi_t}{2}}, h_{\pm}(t) \right]. \quad (36)$$

Beweis. Wegen $R = D(U)$ gilt auch $\mathcal{F}_M(t, R) = D(\mathcal{F}_M(t, U))$. Zusammen mit den Folgerungen 3.12 und 3.15 ergeben sich die angegebenen Koordinaten. Da U schon Abstand 1 zu Q und V hatte und Drehungen orthogonal sind, hat auch R diesen Abstand von den beiden. \square

Lemma 3.17. *In der Situation von Lemma 3.13 gilt*

$$\mathcal{F}_M(t, Z) = \left[\frac{-1}{2 \cos\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right)} e^{i\frac{3\varphi_t - \pi}{2}}, h_{\pm}(t) \right]. \quad (37)$$

Beweis. Wir bestimmen $\mathcal{F}_M(t, Z)$ über die Translation $T_1(t)$. Es gilt also

$$\mathcal{F}_M(t, Z) = \mathcal{F}_M(t, R) + T_1(t) = \left[-\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right)} e^{-i\frac{\pi + \varphi_t}{2}} + e^{i\varphi_t} + 1, h_{\pm}(t) \right].$$

Wir überprüfen, ob $\mathcal{F}_M(t, Z)$ tatsächlich Abstand 1 von $\mathcal{F}_M(t, Y)$ und $\mathcal{F}_M(t, V)$ hat. Da $\mathcal{F}_M(t, R)$ und $\mathcal{F}_M(t, Q)$ Abstand 1 haben, gilt dies auch für $\mathcal{F}_M(t, Z)$ und $\mathcal{F}_M(t, Y)$ (nach Anwendung von $T_1(t)$). Wenn wir $(T_1(t) \circ D)(\mathcal{F}_M(t, U)) = \mathcal{F}_M(t, Z)$ und $(T_1(t) \circ D)(\mathcal{F}_M(t, Y)) = \mathcal{F}_M(t, V)$ zeigen, dann folgt schon, dass der Abstand zwischen $\mathcal{F}_M(t, V)$ und $\mathcal{F}_M(t, Z)$ gleich 1 ist. Die erste dieser Gleichheiten ist klar. Für die andere bemerke

$$(T_1(t) \circ D)(\mathcal{F}_M(t, Y)) = [e^{i\varphi_t} + 1, 0] + ([-e^{i\varphi_t}, 0] + [-1, 0]) = [0, 0] = \mathcal{F}_M(t, V).$$

Um den Standardkoordinatenvertreter von $\mathcal{F}_M(t, Z)$ auszurechnen, betrachte

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right)} e^{-i\frac{\pi + \varphi_t}{2}} + e^{i\varphi_t} + 1 \\ &= \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right)} \left(-e^{-i\frac{\pi + \varphi_t}{2}} + 2 \cos\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right) e^{i\varphi_t} + 2 \cos\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right)} \left(-e^{-i\frac{\pi + \varphi_t}{2}} + e^{i\frac{\pi + \varphi_t}{2}} e^{i\varphi_t} + e^{-i\frac{\pi + \varphi_t}{2}} e^{i\varphi_t} + e^{i\frac{\pi + \varphi_t}{2}} + e^{-i\frac{\pi + \varphi_t}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right)} \left(e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{3\varphi_t}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\varphi_t}{2}} + e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\varphi_t}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right)} \left(e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{3\varphi_t}{2}} - ie^{i\frac{\varphi_t}{2}} + ie^{i\frac{\varphi_t}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right)} e^{i\frac{\pi + 3\varphi_t}{2}} = \frac{-1}{2 \cos\left(\frac{\pi + \varphi_t}{2}\right)} e^{i\frac{3\varphi_t - \pi}{2}} \end{aligned}$$

Da $\varphi_t \in [\frac{\pi}{3}, \pi)$ (vgl. Folgerung 3.15), folgt $\frac{\varphi_t}{2} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$, woraus $\cos(\frac{\pi+\varphi_t}{2}) = -\sin(\frac{\varphi_t}{2}) \leq 0$ folgt. Damit ist der Vorfaktor der Polardarstellung von $\mathcal{F}_M(t, Z)$ positiv. Da $\frac{3}{2}\varphi_t - \frac{\pi}{2} \in [0, \pi)$, ist dies der Exponent der Standardkoordinatendarstellung von $\mathcal{F}_M(t, Z)$. \square

Folgerung 3.18. *In der Situation von Lemma 3.13 gilt*

$$\mathcal{F}_M(t, W) = \left[\frac{-1}{2 \cos\left(\frac{\pi+\varphi_t}{2}\right)} e^{i\frac{\varphi_t-\pi}{2}}, h_{\pm}(t) \right]. \quad (38)$$

Beweis. Da $\mathcal{F}_M(t, W) + T_2(t) = \mathcal{F}_M(t, U)$, ist die dritte Komponente von $\mathcal{F}_M(t, W)$ gleich $h_{\pm}(t)$. Setzen wir $\mathcal{F}_M(t, W)$ also als $[re^{i\theta}, h_{\pm}(t)]$ an, dann legt $r^2 + h_{\pm}(t)^2 = 1$ den Wert von $r > 0$ fest. Wir müssen also nur noch den Winkel bestimmen. Dazu beobachten wir, dass $\mathcal{F}_M(t, W)$ von $\mathcal{F}_M(t, Z)$ und $\mathcal{F}_M(t, R)$ gleichen Abstand hat, weswegen gemäß Lemma B.3

$$\theta \in \frac{-\frac{\pi+\varphi_t}{2} + \frac{3\varphi_t-\pi}{2}}{2} + \pi\mathbb{Z} = \frac{\varphi_t - \pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

gilt. Weil $\frac{\varphi_t-\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{3}, 0)$, und da θ im flachen Zustand den Wert $-\frac{\pi}{3}$ besitzt und stetig variiert, folgt $\theta = \frac{\varphi_t-\pi}{2}$.

Da es nach Bemerkung 3.10 mindestens ein dynamisches Faltpattern gibt, ist mindestens eine der beiden Lösungen hier eine echte Lösung. Der einzige Spielraum im Vorzeichen von $h_{\pm}(t)$ entspricht einer Spiegelung an der Grundebene. Mit anderen Worten: Die Koordinaten mit $h_+(t)$ liefern genau dann ein dynamisches Faltpattern, wenn es die Koordinaten mit $h_-(t)$ tun. Somit sind beide hier gefundenen Lösungen gültig. \square

Folgerung 3.19. *In der Situation von Lemma 3.13 gilt*

$$T_2(t) = \overrightarrow{\mathcal{F}_M(t, W)\mathcal{F}_M(t, U)} = \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} e^{i\frac{\varphi+\pi}{2}}, 0 \right]. \quad (39)$$

Beweis. Wir verwenden die Folgerungen 3.15 und 3.18 und rechnen nach:

$$\overrightarrow{\mathcal{F}_M(t, W)\mathcal{F}_M(t, U)} = \left[\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\varphi_t}{2}\right)} e^{i\frac{\varphi_t}{2}} \left(e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}} \right), 0 \right] = \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi_t}{2}\right)} e^{i\frac{\varphi_t+\pi}{2}}, 0 \right] \quad \square$$

Folgerung 3.20. *In der Situation von Lemma 3.13 gilt*

$$\mathcal{F}_M(t, P) = \mathcal{F}_M(t, R) + T_2(t) = \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi_t}{2}\right)} \left(2e^{-i\frac{\pi+\varphi_t}{2}} + e^{i\frac{\pi+\varphi_t}{2}} \right), h_{\pm}(t) \right] \quad (40)$$

$$\mathcal{F}_M(t, X) = \mathcal{F}_M(t, Z) + T_2(t) = \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi_t}{2}\right)} \left(2e^{i\frac{3\varphi_t-\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi+\varphi_t}{2}} \right), h_{\pm}(t) \right]. \quad (41)$$

Dies schließt die Analyse ab. Da die Anschlussbedingungen nach Konstruktion erfüllt sind, haben wir genau zwei Muster gefunden. Aufgrund der inhärenten Spiegelung (vgl. Beweis von Folgerung 3.18) kann man sagen, dass wir im Wesentlichen ein Muster gefunden haben. Dieses eine Muster ist das bekannte Miura–Ori. Wir können also darauf schließen, dass das Hinzufügen der Kanten keine weiteren Faltpattern ermöglicht hat.

Satz 3.21. *Alle dynamischen Faltmuster über der in Abbildung 11 dargestellten Polygonzerlegung, die unter $(\langle T_1, T_2, D \rangle, \tau)$ invariant ist (für geeignetes τ), wurden bereits in Kapitel 2 gefunden.*

Es ist aber durchaus interessant, dass sich nur das Miura–Ori ergibt, aus dem wir das Muster verfeinert hatten. Betrachtet man nämlich Abbildung 12 erneut, so haben wir das Miura–Ori gefunden, bei dem an den gestrichelten Kanten keine echte Faltkante vorliegt. Man hätte noch erwarten können, dass sich ein Miura–Ori dadurch ergibt, dass man die durchgezogenen schrägen Kanten festlässt.

Dies wird durch die Wahl unserer Translationsrichtungen verhindert. Während nämlich die eine Translation entlang von Kanten verschiebt, verschiebt die andere entlang von Flächen. Diese Asymmetrie unterscheidet die Translationen voneinander und zwingt dem Faltmuster die Orientierung auf, die wir in unserer Rechnung bemerkt haben.

4. Statische Analyse des Miura–Ori

Während wir in Kapitel 2 ein dynamisches Faltmuster des Miura–Ori angegeben haben, werden wir hier eine statische Analyse dieses Musters durchführen. Während wir zuvor die Gruppe $\langle T_1, T_2, D \rangle$ betrachteten, schränken wir uns jetzt auf $\langle T_1^2, T_2^2, D \rangle$ ein³. Dadurch besteht der Fundamentalbereich der Translationen nun aus 16 statt aus 4 Parallelogrammen. Der Fixpunkt der Drehung wird im Muster mit \circlearrowright markiert. Die Grundfläche zusammen mit den Namen der Punkte ist in Abbildung 13 dargestellt. Zur besseren Unterscheidung nennen wir dieses Muster T4–Miura–Ori⁴.

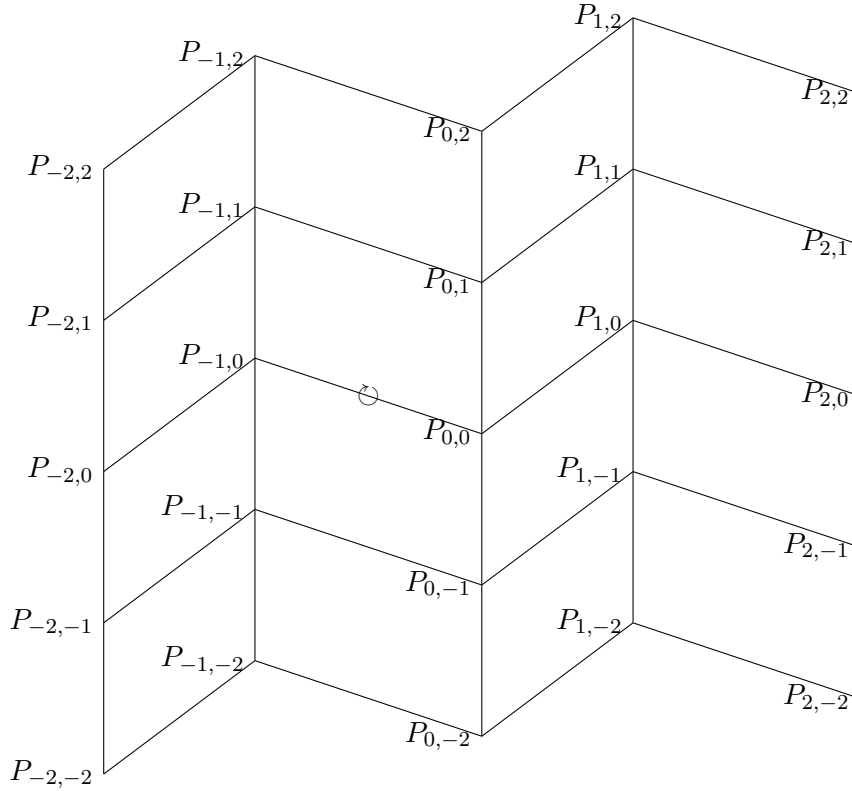


Abbildung 13: Grundfläche des T4–Miura–Ori

Mit der statischen Betrachtung können wir zunächst einmal nicht alle Muster finden, die man aus dem in Abbildung 13 dargestellten Muster falten kann, sondern nur diejenigen, die bei einer Projektion auf die xy -Ebene dieses Muster induzieren. Wir wählen unser Koordinatensystem so, dass die Punkte durch

$$P_{0,0} = (0, 0) \quad P_{1,0} = (x_2, y_2) \quad P_{-1,0} = (x_1, y_1) \quad P_{0,1} = (0, 1)$$

³Vergleiche Definition 1.2 für diese Notation.

⁴Der Name rührt daher, dass eine Translation das Muster um vier Parallelogramme verschiebt.

gegeben sind. Dies legt die Koordinaten aller anderen Punkte eindeutig fest. Eine wesentliche Aufgabe der statischen Analyse ist es, möglichst viele Relationen zwischen den Höhen zu finden, um es später einfacher zu machen, die Winkelsummen zu überprüfen.

4.1. Relationen zwischen den Höhen

Die Symmetrien des Musters vereinfachen die Analyse, da die Höhen unter einer Symmetrietransformation gleich bleiben. Wenn wir also die Bahnen der Symmetriegruppe auf dem Muster bestimmen, dann sind die Höhen innerhalb einer Bahn konstant.

Die Gruppe enthält zwei Translationen. Die horizontale Translation T_1 überführt $P_{-2,j}$ in $P_{2,j}$, die vertikale Translation T_2 überführt $P_{i,-2}$ in $P_{i,2}$. Wir können die Indexmenge also mit $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ identifizieren. Die Drehung D operiert vermöge $P_{i,j} \mapsto P_{-i-1,-j}$.

Bemerkung 4.1. Die Abbildung $\delta : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} : (i, j) \mapsto (-i-1, -j)$ erfüllt $\delta^2 = Id$ und hat keinen Fixpunkt.

Beweis. Zeige zunächst die Idempotenz:

$$\delta^2((i, j)) = \delta((-i-1, -j)) = (-(-i-1)-1, -(-j)) = (i, j).$$

Für einen Fixpunkt $(i, j) \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ von δ müsste

$$i = -i-1 \pmod{4} \quad \Leftrightarrow \quad 2i = -1 \pmod{4}$$

gelten, aber diese Gleichung ist unerfüllbar, da $2i$ gerade und -1 ungerade ist. Folglich gibt es keinen Fixpunkt. \square

Da D Ordnung 2 und keinen Fixpunkt auf $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ hat, sind alle Bahnen von D auf der Indexmenge zweielementig. Demnach liegen acht Bahnen vor. Die Nummerierung dieser Bahnen ist Abbildung 14 zu entnehmen.

Als nächstes verwenden wir, dass die Grundflächen des Musters Vierecke sind. Da eine Ebene durch drei Punkte eindeutig festgelegt ist, genügt die Angabe von drei der vier Eckpunkten, um die Höhe des letzten Eckpunkts anzugeben. Da wir aber sogar Parallelogramme vorliegen haben, können wir noch mehr sagen:

Lemma 4.2. Sei ein Parallelogramm wie in Abbildung 15 gegeben, dem die Höhen aus Abbildung 16 zugeordnet werden. Dann ist $h_3 = h_2 + h_4 - h_1$.

Beweis. Die Höhenzuordnung ist nach Bemerkung 1.35 eine affine Abbildung, erhält also Parallelität. Demnach ist das Viereck in Abbildung 16 ein Parallelogramm. Insbesondere überträgt sich die Relation

$$E_3 = E_1 + \overrightarrow{E_1 E_2} + \overrightarrow{E_1 E_4}$$

aus Abbildung 15 auf die Höhen. \square

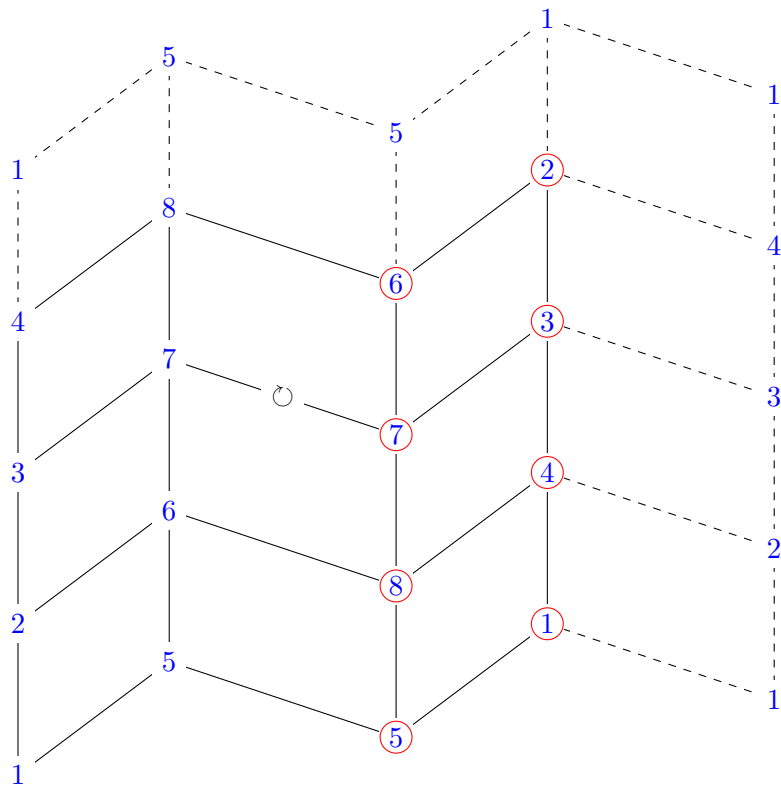


Abbildung 14: Die Bahnen der Symmetriegruppe

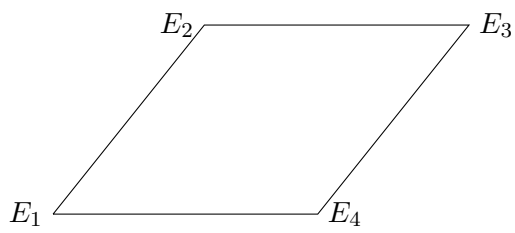


Abbildung 15: Ein Parallelogramm

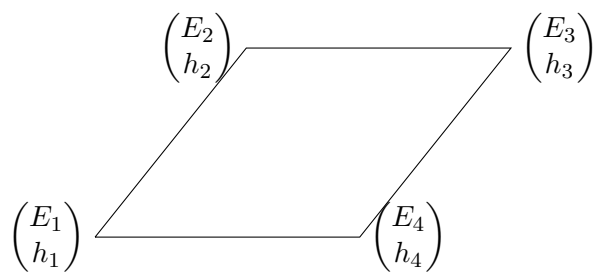


Abbildung 16: Parallelogramm mit Höhen

Da wir jetzt explizit mit den Höhen arbeiten müssen, nutzen wir die Tatsache, dass wir eigentlich über eine Äquivalenzklasse von statischen Faltpattern sprechen. Dadurch können wir annehmen, dass $P_{0,0}$ die Höhe Null zugeordnet bekommt. Damit ist Bahn 7 festgelegt.

Wir fassen die Höhe von Bahn 6 als Parameter $b \in \mathbb{R}$ auf. Mit Lemma 4.2 und der Beziehung $\overrightarrow{P_{0,0}P_{-1,1}} = \overrightarrow{P_{0,0}P_{-1,0}} + \overrightarrow{P_{0,0}P_{0,1}}$ folgt, dass auch Bahn 8 diese Höhe hat. Die Bahnen 5 und 3 sind noch frei, also parametrisieren wir diese Höhe durch $c \in \mathbb{R}$ bzw. $a \in \mathbb{R}$. Die Grundflächen des Musters sind Parallelogramme, folglich haben Bahn 2 und Bahn 4 die Höhe $a + b$ haben und Bahn 1 Höhe $a + c$.

Folgerung 4.3. *Alle Höhenfunktionen auf dem Muster in Abbildung 13 lassen sich durch die drei reellen Parameter a, b, c beschreiben.*

4.2. Reduktion der Winkelgleichungen

Im vorigen Abschnitt haben wir alle möglichen Urbilder der Projektion auf die xy -Ebene bestimmt. Wir interessieren uns dafür, welche davon aus Papier bestanden haben könnten. Zu diesem Zweck untersuchen wir die Winkelsumme an jedem Eckpunkt. Da das Muster symmetrisch ist, genügt es, diese Bedingungen an einem Vertretersystem zu testen. Wir wollen dafür die in Abbildung 14 rot markierten Punkte verwenden. Dennoch benötigen wir die genauen Koordinaten der Punkte. Diese sind in Abbildung 17 dargestellt.

Wir erinnern an die Definition des Winkels (mit Φ als Standardskalarprodukt):

Bemerkung 4.4. *Für zwei Vektoren a und b ist der eingeschlossene Winkel α (der kleinere der beiden) gegeben durch:*

$$\|a\|_2 \|b\|_2 \cos(\alpha) = \Phi(a, b).$$

Da alle vorkommenden Winkel gemäß Lemma 1.37 kleiner als π sind, liefert der Arkuskosinus mit dieser Bemerkung stets den korrekten Winkel.

Folgerung 4.5. *Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Der Winkel zwischen a und b ist genau dann α , wenn der Winkel zwischen a und $-b$ gleich $\pi - \alpha$ ist.*

Für den Spezialfall, dass genau vier Winkel vorliegen, machen wir eine simple Beobachtung, die eine überraschend große Tragweite hat.

Bemerkung 4.6. *Falls $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$, dann gilt auch $\sum_{i=1}^4 (\pi - \alpha_i) = 2\pi$.*

Wir untersuchen nun Winkelkonfigurationen mit genau vier Winkeln detaillierter, um die Anzahl der notwendigen Rechnungen weiter zu reduzieren. Wir betrachten also Situationen, wie sie in Abbildung 18 dargestellt sind.

Wir können Folgerung 4.5 und Bemerkung 4.6 kombinieren, um eine Symmetrie der Winkelkonfiguration für vier Punkte aufzudecken.

Satz 4.7. *In der Situation von Abbildung 18 gilt $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 2\pi$ genau dann, wenn $\sum_{i=1}^4 \beta_i = 2\pi$ gilt (alle Winkel sind kleiner als π vorausgesetzt).*

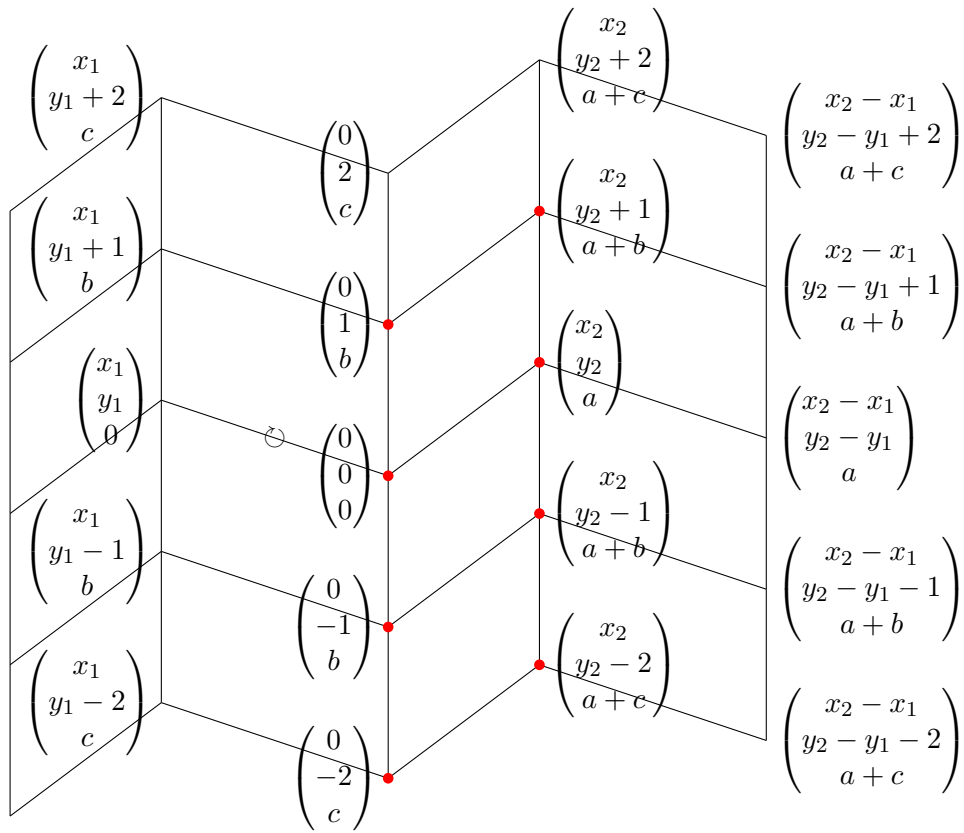


Abbildung 17: Präzise Koordinaten des Miura-Ori

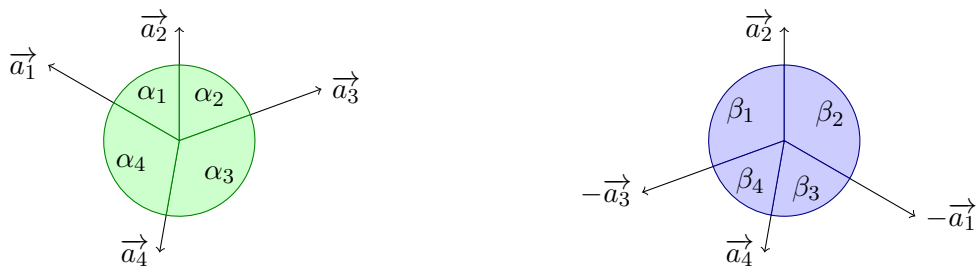


Abbildung 18: Zwei Winkelkonfigurationen eines Punktes

Beweis. Aus Folgerung 4.5 erhalten wir die Beziehungen

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \pi - \alpha_2 & \beta_2 &= \pi - \alpha_1 \\ \beta_3 &= \pi - \alpha_4 & \beta_4 &= \pi - \alpha_3.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus Bemerkung 4.6. \square

Schaut man sich die Punkte $P_{0,0}$ und $P_{1,0}$ in Abbildung 17 genau an, so fällt auf, dass ihre vertikalen Verbindungsvektoren gleich sind. Zudem sind ihre horizontalen Verbindungsvektoren genau so additiv invertiert, wie es in Satz 4.7 gefordert ist. Demzufolge erfüllen sie die Voraussetzungen dieses Satzes. Ebenso sieht man, dass $P_{0,j}$ und $P_{1,j}$ immer auf diese Weise gepaart sind. Infolgedessen müssen wir die Winkelsummen nur für die $P_{0,j}$ untersuchen.

Richten wir unser Augenmerk nun auf $P_{0,0}$ und $P_{0,-2}$, so erkennen wir eine nützliche Struktur in der Winkelkonfiguration.

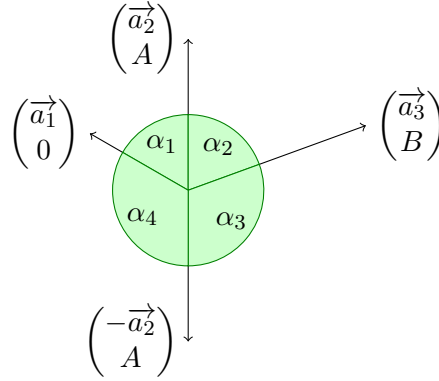


Abbildung 19: Spezielle Winkelkonfiguration am Beispiel von $P_{0,-2}$

Satz 4.8. *Sei die Winkelkonfiguration aus Abbildung 19 gegeben (wobei $A, B \in \mathbb{R}$ angenommen, sowie alle Winkel kleiner als π sind). Dann gilt $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 2\pi$ genau dann, wenn $A \cdot B = 0$.*

Beweis. Die Winkel sind gegeben über

$$\|\vec{a}_1\|_2 \sqrt{\|\vec{a}_2\|_2^2 + A^2} \cos(\alpha_1) = \Phi(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \quad (42)$$

$$\sqrt{\|\vec{a}_2\|_2^2 + A^2} \sqrt{\|\vec{a}_3\|_2^2 + B^2} \cos(\alpha_2) = \Phi(\vec{a}_2, \vec{a}_3) + AB \quad (43)$$

$$\sqrt{\|\vec{a}_3\|_2^2 + B^2} \sqrt{\|\vec{a}_2\|_2^2 + A^2} \cos(\alpha_3) = -\Phi(\vec{a}_2, \vec{a}_3) + AB \quad (44)$$

$$\sqrt{\|\vec{a}_2\|_2^2 + A^2} \|\vec{a}_1\|_2 \cos(\alpha_4) = -\Phi(\vec{a}_1, \vec{a}_2). \quad (45)$$

Kombinieren wir (42) und (45), so folgt $\alpha_4 = \pi - \alpha_1$. Damit ist die Winkelsumme genau dann gleich 2π , wenn $\alpha_3 = \pi - \alpha_2$ erfüllt ist.

Falls $A \cdot B = 0$ gilt, so ergibt sich $\alpha_3 = \pi - \alpha_2$ aus den Gleichungen (43) und (44). Gilt umgekehrt $\alpha_3 = \pi - \alpha_2$, so folgt aus denselben Gleichungen (da $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$), dass $A \cdot B = 0$. \square

Der Satz 4.8 ist auf die Winkelkonfigurationen um $P_{0,0}$ und $P_{0,-2}$ anwendbar und liefert dieses Resultat:

Folgerung 4.9. *In der Situation von Abbildung 17 gelten $ab = 0$ und $a(b - c) = 0$.*

Man kann jetzt die Analyse der übrigen Punkte $P_{0,1}$ und $P_{0,-1}$ als identisch erkennen. Benennen wir die Winkel um $P_{0,1}$ mit γ_i , dann haben wir das Gleichungssystem

$$\sqrt{1 + (c - b)^2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cos(\gamma_1) = y_1 \quad (46)$$

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{1 + b^2} \cos(\gamma_2) = -y_1 \quad (47)$$

$$\sqrt{1 + b^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + a^2} \cos(\gamma_3) = -y_2 - ab \stackrel{*}{=} -y_2 \quad (48)$$

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + a^2} \sqrt{1 + (c - b)^2} \cos(\gamma_4) = y_2 + a(c - b) \stackrel{*}{=} y_2. \quad (49)$$

Genauso ergibt sich das System für $P_{0,-1}$, wobei wir hier δ_i als Winkel wählen.

$$\sqrt{1 + b^2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cos(\delta_1) = y_1 \quad (50)$$

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{1 + (c - b)^2} \cos(\delta_2) = -y_1 \quad (51)$$

$$\sqrt{1 + (c - b)^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + a^2} \cos(\delta_3) = -y_2 + a(c - b) \stackrel{*}{=} -y_2 \quad (52)$$

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + a^2} \sqrt{1 + b^2} \cos(\delta_4) = y_2 - ab \stackrel{*}{=} y_2 \quad (53)$$

Aus den Gleichungen (50) und (47) folgt $\delta_1 = \pi - \gamma_2$. Analog folgt $\delta_2 = \pi - \gamma_1$. Mit Folgerung 4.9 können wir die mit $*$ markierten Umformungen ausführen und erhalten $\delta_3 = \pi - \gamma_4$ und $\delta_4 = \pi - \gamma_3$. Nach Bemerkung 4.6 müssen wir nur eines der beiden Gleichungssysteme auf eine passende Winkelsumme überprüfen.

4.3. Lösen der Winkelgleichungen

Da die Gleichungen $ab = 0$ und $a(b - c) = 0$ erfüllt sein müssen, führen wir eine Fallunterscheidung durch.

Falls $a = b = c = 0$, ist das statische Faltpattern ersichtlich flach.

Falls $a \neq 0$, so folgt $b = 0$ und $b = c$, also auch $c = 0$. Man sieht leicht, dass nun alle weiteren Winkelbedingungen erfüllt sind. Wenn man sich die Höhen in Abbildung 17 ansieht, so erkennt man, dass die Höhen konstant auf den Parallelen zur y-Achse sind. Mit anderen Worten: Es liegt eine $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ -Zickzack-Faltung vor. Zum Beweis bemerke, dass sich

jedes Parallelogramm in zwei Dreiecke zerlegen lässt, sodass Lemma 1.41 eine Zickzack-Faltung auf jedem Parallelogramm etabliert, die sich mit Lemma 1.42 auf den gesamten Fundamentalbereich ausdehnen lässt. Da es sich um einen Fundamentalbereich der p_1 handelt und dieser einen Fundamentalbereich der p_2 enthält, so folgt aus Lemma 1.43 bereits, dass das Muster auf ganz \mathbb{R}^2 eine $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ -Zickzack-Faltung ist.

Kommen wir nun zum interessanteren Fall $a = 0$. Bei diesem sollten wir das bekannte Miura–Ori als eine Lösung erhalten, hoffen aber auf weitere Faltmuster. Wir betrachten die Winkel γ_i und möchten die Gleichung

$$\begin{aligned} \cos(\gamma_4) &= \cos(2\pi - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3) \\ &= \cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2) \cos(\gamma_3) - \cos(\gamma_1) \sin(\gamma_2) \sin(\gamma_3) \\ &\quad - \sin(\gamma_1) \cos(\gamma_2) \sin(\gamma_3) - \sin(\gamma_1) \sin(\gamma_2) \cos(\gamma_3) \end{aligned} \quad (54)$$

verwenden. Wir müssen also die Gleichungen (46) bis (49) umschreiben, und die Gleichung $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos(x)^2}$ verwenden, die wegen $x \in [0, \pi]$ wohldefiniert ist:

$$\begin{aligned} \cos(\gamma_1) &= \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{1 + (b - c)^2}} & \sin(\gamma_1) &= \frac{\sqrt{x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)(b - c)^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{1 + (b - c)^2}} \\ \cos(\gamma_2) &= \frac{-y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{1 + b^2}} & \sin(\gamma_2) &= \frac{\sqrt{x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)b^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{1 + b^2}} \\ \cos(\gamma_3) &= \frac{-y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \sqrt{1 + b^2}} & \sin(\gamma_3) &= \frac{\sqrt{x_2^2 + (x_2^2 + y_2^2)b^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \sqrt{1 + b^2}} \\ \cos(\gamma_4) &= \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \sqrt{1 + (b - c)^2}} \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (54) ein, so ist ihr Hauptnenner

$$(x_1^2 + y_1^2)(1 + b^2) \sqrt{1 + (b - c)^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Indem man damit multipliziert, erhält man

$$\begin{aligned} y_2(x_1^2 + y_1^2)(1 + b^2) &= y_1^2 y_2 - y_1 \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)b^2} \sqrt{x_2^2 + (x_2^2 + y_2^2)b^2} \\ &\quad + y_1 \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)(b - c)^2} \sqrt{x_2^2 + (x_2^2 + y_2^2)b^2} \\ &\quad + y_2 \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)(b - c)^2} \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)b^2}. \end{aligned}$$

Die linke Seite wertet sich zu

$$\begin{aligned} y_2(x_1^2 + y_1^2)(1 + b^2) &= x_1^2 y_2 + y_1^2 y_2 + y_2 b^2 (x_1^2 + y_1^2) \\ &= y_1^2 y_2 + y_2 (x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)b^2) \end{aligned}$$

aus, sodass man die Gleichung in die Form

$$\begin{aligned} y_2 \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)b^2} & \left(\sqrt{x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)b^2} - \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)(b-c)^2} \right) \\ & = y_1 \sqrt{x_2^2 + (x_2^2 + y_2^2)b^2} \left(\sqrt{x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)(b-c)^2} - \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)b^2} \right) \end{aligned}$$

umstellen kann. Aus dieser Gleichheit folgt wiederum

$$\begin{aligned} & \left(y_1 \sqrt{x_2^2 + (x_2^2 + y_2^2)b^2} + y_2 \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)b^2} \right) \\ & \cdot \left(\sqrt{x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)(b-c)^2} - \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)b^2} \right) = 0. \quad (55) \end{aligned}$$

Falls der zweite Faktor Null ist, folgt $b^2 = (b-c)^2$, bzw. nach kurzer Umformung $c(c-2b) = 0$. In diesem Fall gilt also $c = 0$ oder $c = 2b$. Der Fall $c = 0$ entspricht dem Miura–Ori, von dem wir ausgegangen waren (und das wir in Kapitel 2 analysiert hatten). Der Fall $c = 2b$ stellt auch ein Miura–Ori dar, aber eines, das doppelt so groß wie das ursprüngliche ist. Also liefert dieser Fall keine wesentlich neuen Einsichten.

Wird der erste Faktor in Gleichung (55) Null, so können wir zunächst einmal aus

$$y_1 \sqrt{x_2^2 + (x_2^2 + y_2^2)b^2} = -y_2 \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)b^2}$$

schließen, dass $y_1 y_2 \leq 0$ gilt. Wir quadrieren die Gleichung und kürzen $(1+b^2) > 0$ heraus, um $x_2^2 y_1^2 = x_1^2 y_2^2$ zu erhalten. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\left(\frac{y_1}{x_1} \right)^2 = \left(\frac{y_2}{x_2} \right)^2,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass sowohl x_1 als auch x_2 ungleich Null sind. Da x_1 und x_2 verschiedenes Vorzeichen haben, ebenso wie y_1 und y_2 (außer, sie sind Null), folgt

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Dies ist gleichbedeutend dazu, dass $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind, wie man über die Determinante leicht einsieht. In Abbildung 20 ist dieser Fall dargestellt. Man erkennt, dass eine $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ –Zickzack–Faltung vorliegt.

Es lässt sich also abschließend festhalten, dass in dieser Situation keine noch unbekannten statischen Faltpattern existieren.

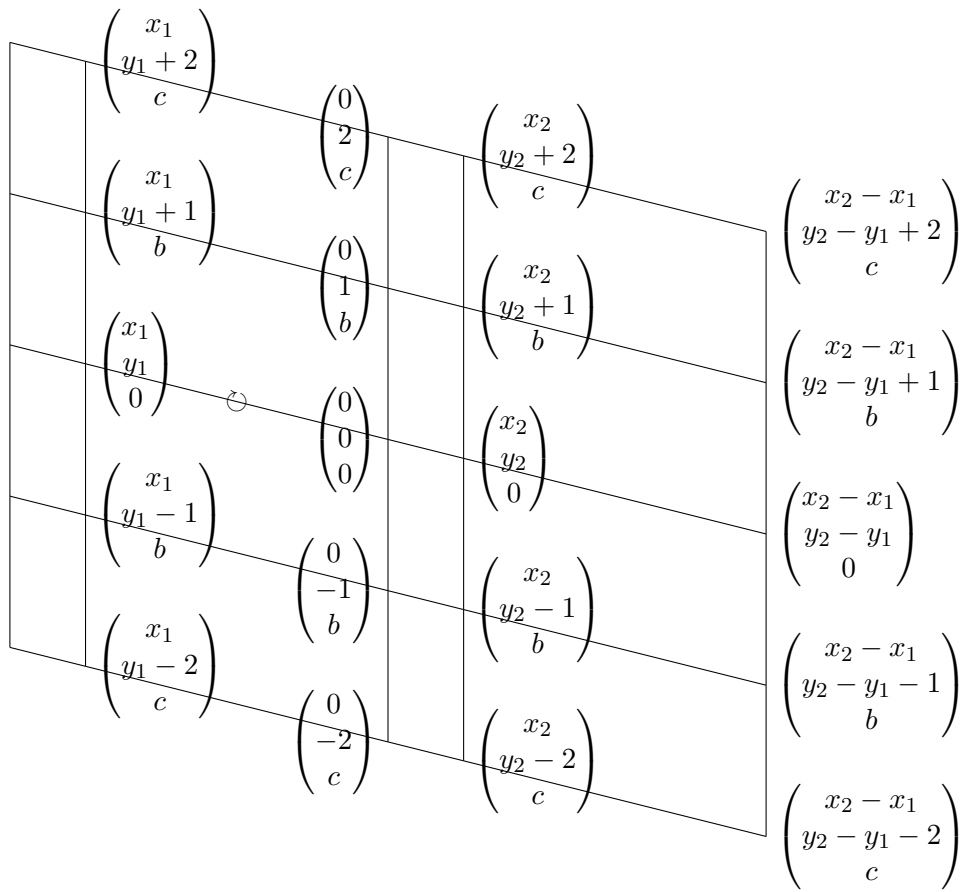


Abbildung 20: Grenzfall des Miura-Ori

5. Pflasterung der Ebene

In diesem Kapitel betrachten wir Pflasterungen der Ebene, insbesondere auch, inwieweit diese mit Faltmustern verträglich sind. Wir geben im Anschluss ein Beispiel für eine Pflasterung des Miura–Ori an, die die gesamte Faltinformation des Musters enthält.

Wir möchten uns bei der Definition von Pflasterungen vom Begriff der Polygonzerlegungen (vgl. Definition 1.14) leiten lassen. Dabei stellen wir aber eine Schwierigkeit fest: Da die Pflasterung nicht notwendigerweise durch konvexe Polygone geschehen soll, wird die Formulierung der Schnittbedingung subtiler. Anschaulich sollen sich zwei verschiedene Elemente der Pflasterung höchstens in ihren Rändern schneiden. Wenn wir aber eine Ebene im \mathbb{R}^3 betrachten, dann besteht diese Ebene nur aus Randpunkten (bezüglich der Standardtopologie des \mathbb{R}^3). Damit liefert diese Bedingung aber keine Einschränkungen.

Um unsere Intuition zu retten, müssen wir uns auf die *Relativtopologie* zurückziehen. Sei dazu $M \subseteq \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Eine Menge $U \subseteq M$ heißt offen in der Relativtopologie bezüglich M , falls es eine offene Teilmenge T des \mathbb{R}^n gibt, sodass $U = M \cap T$ gilt.

Definition 5.1. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Mengenfamilie $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von M heißt **Pflasterung** (von M), falls

1. Jedes K_j ist kompakt und zusammenhängend.
2. $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = M$.
3. Bezüglich der Relativtopologie auf M gilt $\overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \emptyset$ für verschiedene K_i, K_j .

Die K_j heißen **Pflastersteine**.

Satz 5.2. Sei \mathcal{F} ein dynamisches Faltmuster über der Polygonzerlegung $(M, \{P_k\}_{k \in \mathbb{N}})$. Falls $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Pflasterung von M ist, dann ist $\{\mathcal{F}(t, K_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Pflasterung von $\mathcal{F}(t, M)$ für jedes $t \in [0, 1)$.

Beweis. Es ist klar, dass $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(t, K_j) = \mathcal{F}(t, M)$. Da \mathcal{F} stetig ist, ist jedes $\mathcal{F}(t, K_j)$ kompakt und zusammenhängend. Das dynamische Faltmuster ist injektiv, da $t < 1$ vorausgesetzt war, folglich ist es bijektiv auf sein Bild. Daher gilt $\mathcal{F}(t, X \cap Y) = \mathcal{F}(t, X) \cap \mathcal{F}(t, Y)$ für alle $X, Y \subseteq M$. Damit kann die Schnittbedingung nur verletzt werden, falls $\mathcal{F}(t, \cdot)$ einen Randpunkt eines K_j auf einen inneren Punkt (bezüglich der Relativtopologie) von $\mathcal{F}(t, K_j)$ abbildet.

Da $\mathcal{F}(t, \cdot)$ stetig, ist es auch stetig bezüglich der Relativtopologie seines Bildes. Damit ist das Urbild des offenen Inneren von $\mathcal{F}(t, K_j)$ selbst wieder offen, enthält also insbesondere keinen Randpunkt. \square

Interessant wird es natürlich, wenn eine Pflasterung symmetrisch wird.

Definition 5.3. Sei $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Pflasterung von $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Sie heißt **invariant unter** $G \leq \text{Eukl}(\mathbb{R}^n)$, falls $g\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ für jedes $g \in G$ gilt.

Bemerkung 5.4. Es gilt sogar Gleichheit: $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ist genau dann invariant unter $G \leq \text{Eukl}(\mathbb{R}^n)$, wenn $g\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}} = \{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ für jedes $g \in G$ gilt.

Beweis. Da $g\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ für jedes $g \in U$ gilt, gilt es insbesondere auch für g^{-1} . Multiplikation mit g liefert dann die Behauptung. \square

Satz 5.5. *Sei \mathcal{F} ein dynamisches Faltmuster über der Polygonzerlegung $(M, \{P_k\}_{k \in \mathbb{N}})$, das invariant unter (U_0, τ) mit $U_0 \leq \text{Eukl}(\mathbb{R}^2)$ sei. Sei ferner $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Pflasterung von M , die unter U_0 invariant ist.*

Dann ist $\{\mathcal{F}(t, K_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine unter $\tau(t) \circ U_0 \circ \tau(t)^{-1}$ invariante Pflasterung von $\mathcal{F}(t, M)$ für jedes $t \in [0, 1)$.

Beweis. Nach Satz 5.2 handelt es sich um eine Pflasterung. Wir müssen also nur noch zeigen, dass die Pflasterung invariant unter $\tau(t) \circ U_0 \circ \tau(t)^{-1}$ ist. Sei dazu $g \in U_0$. Es gilt (vgl. Definition 1.26)

$$(\tau(t) \circ g \circ \tau(t)^{-1})\mathcal{F}(t, K_j) = \mathcal{F}(t, gK_j)$$

Da $\{K_j\}$ invariant unter U_0 ist, folgt $gK_j \in \{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Damit ist $\{\mathcal{F}(t, K_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ invariant unter $\tau(t) \circ U_0 \circ \tau(t)^{-1}$. \square

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel.

Beispiel 5.6. *Eine Polygonzerlegung ist eine Pflasterung. Wenn diese eine Symmetrie aufweist, die von der Faltung respektiert wird, gilt dies aufgrund der Sätze 5.2 und 5.5 auch für die Bilder der Polygone.*

Dieses Beispiel sagt uns im Wesentlichen nur, dass wir die Polygone ausschneiden und in Form des Faltmusters wieder zusammenkleben können. Das ist beinahe die Definition einer Auffaltung. Allerdings enthalten die Elemente der Pflasterung in dem folgenden Sinn keine Information über die Faltung:

Betrachtet man die Pflastersteine koordinatenunabhängig (also ihre Bahn unter der Gruppe der eigentlichen euklidischen Transformationen), so lässt sich das Faltmuster nicht rekonstruieren, wenn man nur weiß, wie sich zwei verschiedene Pflastersteine schneiden. Das liegt daran, dass für das Zusammenfügen auch der Winkel zwischen den Flächen relevant ist – dieser variiert aber im Allgemeinen. Interessanter ist der Fall, dass in den Pflastersteinen genug Information enthalten ist, um das Faltmuster wieder herzustellen.

Beispiel 5.7. *Wir betrachten das Miura–Ori, dessen Faltmuster in Abbildung 21 angegeben ist. Wir fordern, dass $y_1 = y_2 < 0$ und $1 + y_1 > 0$ gelten. Die farbigen Bereiche sind Vertreter der Operation der G_{p2} auf dem Muster.*

Die blaue Fläche ist begrenzt von $(0, 1 + y_1)$, $(\frac{x_2}{2}, 1 + \frac{y_1}{2})$, $(\frac{x_2}{2}, \frac{y_1}{2})$, $(0, y_1)$, $(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2})$ und $(\frac{x_1}{2}, 1 + \frac{y_1}{2})$. Die grüne Fläche ist um $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ verschoben. Lässt man einen geeigneten Vertreter G der G_{p2} auf diesen Flächen operieren, erhält man eine Pflasterung der Ebene, die dann auch G -invariant ist. Wenn man das Miura–Ori jetzt auffaltet, so erhält man gemäß Satz 5.5 eine weitere invariante Pflasterung. Die Auffaltung dieser Pflasterung lässt sich in Abbildung 22 betrachten.

Die hellblau markierten Flächen liegen in der Bahn der blauen Fläche (unter Operation eines geeigneten Vertreters der G_{p2}). Analoges gilt für die hellgrünen Flächen. Die genauen Koordinaten lassen sich mit den in Kapitel 2 bestimmten Abbildungen ausrechnen. Das Maple-Worksheet, mit dem die Bilder bestimmt wurden, ist diesem Beispiel angefügt.

Wir erkennen auch einen Sonderfall: Falls x_1 und x_2 den gleichen Betrag haben, so lassen sich grüner und blauer Bereich (im gefalteten Zustand) durch eine Spiegelung ineinander überführen. Man muss also nur eine Fläche produzieren, um daraus das gesamte Faltmuster aufzubauen. Dies entspricht genau der Tatsache, dass das Miura-Ori in diesem Fall auch eine Spiegelsymmetrie aufweist, weswegen der Fundamentalbereich der Automorphismengruppe kleiner ist.

Im Unterschied zu Beispiel 5.6 schneiden die Kanten der Pflastersteine die Faltkanten nur in endlich vielen Punkten. Eine Konsequenz daraus ist, dass der Anschluss eines Steines an einen anderen gerade erfolgen muss (da dieser Anschluss ansonsten eine Faltkante wäre), d. h. die beiden können nur den Winkel π einschließen. Wir können das ursprüngliche Muster also komplett rekonstruieren, wenn wir die gefalteten Pflastersteine⁵ zur Verfügung haben und wissen, in welcher Kante sich je zwei davon schneiden. Damit ist das Zusammenfügen der Pflastersteine determiniert und jegliche Information über die Faltung des Miura-Ori muss schon in der Faltung der Steine selbst gelegen haben. In diesem Sinne enthalten die Pflastersteine „das Wesentliche“ der Faltung.

⁵Genauer: Wir kennen ihre Bahn unter den eigentlich euklidischen Abbildungen.

```
> restart;
with(LinearAlgebra):
with(plots):
```

Definiere die Abbildungsmatrizen (wie beim normalen Miura-Ori)

```
> sin_g := y[1]/x[1]*tan(alpha):
cos_g := sqrt(1-y[1]^2/x[1]^2*tan(alpha)^2):
R_gruen := Matrix( [ [cos_g, 0, sin_g],
                     [sin(alpha)*sin_g, cos(alpha), -sin(alpha)*cos_g],
                     [-cos(alpha)*sin_g, sin(alpha), cos(alpha)*cos_g] ]):
R_gelb := Matrix( [ [cos_g, 0, -sin_g],
                     [sin(alpha)*sin_g, cos(alpha), sin(alpha)*cos_g],
                     [cos(alpha)*sin_g, -sin(alpha), cos(alpha)*cos_g] ]):

sin_b := y[2]/x[2]*tan(alpha):
cos_b := sqrt(1-y[2]^2/x[2]^2*tan(alpha)^2):
R_blau := Matrix( [ [cos_b, 0, -sin_b],
                     [sin(alpha)*sin_b, cos(alpha), -sin(alpha)*cos_b],
                     [-cos(alpha)*sin_b, sin(alpha), cos(alpha)*cos_b] ]):
R_violett := Matrix( [ [cos_b, 0, -sin_b],
                        [sin(alpha)*sin_b, cos(alpha), -sin(alpha)*cos_b],
                        [cos(alpha)*sin_b, -sin(alpha), cos(alpha)*cos_b] ]):
```

Definiere die Drehmatrix.

```
> R_Matrix := Matrix( [[-1,0,0], [0,-1,0], [0,0,1]] );
R_trans := simplify( R_gruen.<x[1],y[1],0> );
```

$$R_Matrix := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_trans := \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{x_1^2 \cos(\alpha)^2 - y_1^2 + y_1^2 \cos(\alpha)^2}{x_1^2 \cos(\alpha)^2}} x_1 \\ \frac{y_1}{\cos(\alpha)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1)

Definiere die Translationen (wie beim Miura-Ori)

```
> Trans_vert := R_gruen.< 0, 1, 0> - R_violett.< 0, -1, 0>:
Trans_hori := simplify( R_violett.< x[2], y[2], 0> - R_gruen.< x
[1], y[1], 0> ):
```

Definiere die Flächen.

```
> blau_m := <0,0,0>:
blau_l := R_gruen.<x[1]/2,y[1]/2,0>:
blau_lo := R_gruen.<x[1]/2,y[1]/2+1,0>:
blau_o := R_gruen.<0,1+y[1],0>:
blau_ro := R_blau.<x[2]/2,y[2]/2+1,0>:
```



```

blau_r := R_blaue.<x[2]/2,y[2]/2,0>:
blau_u := R_gelb.<0,y[1],0>:
> gruen_m := R_gelb.<0,-1,0>:
gruen_l := R_gelb.<x[1]/2,y[1]/2-1,0>:
gruen_lo := R_gruen.<x[1]/2,y[1]/2,0>:
gruen_o := R_gelb.<0,y[1],0>:
gruen_ro := R_blaue.<x[2]/2,y[2]/2,0>:
gruen_r := R_violett.<x[2]/2,y[2]/2-1,0>:
gruen_u := R_gruen.<0,y[1]+1,0> - Trans_vert:
> Stein_blaue := [ blau_m, blau_o, blau_lo, blau_l,
                    blau_m, blau_l, blau_u,
                    blau_m, blau_u, blau_r,
                    blau_m, blau_r, blau_ro, blau_o, blau_m ]:
Stein_gruen := [ gruen_m, gruen_o, gruen_lo, gruen_l,
                  gruen_m, gruen_l, gruen_u,
                  gruen_m, gruen_u, gruen_r,
                  gruen_m, gruen_r, gruen_ro, gruen_o, gruen_m ]:

```

Spezialisiere die Koordinaten. Beachte, dass $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$ gelten müssen.

```

> y_koord := -0.4:
Koordinaten := x[1]=-2, y[1] = y_koord, x[2]=1.5, y[2] = y_koord;
Koordinaten:=  $x_1 = -2, y_1 = -0.4, x_2 = 1.5, y_2 = -0.4$  (2)

```

Berechne die passenden Flächen für die graphische Darstellung. Dabei ist "flaech" die Grundfläche, "drehen" gibt an, ob diese gedreht werden soll, "t_hori" ist die Anzahl der durchgeführten horizontalen Translationen, "t_vert" die Zahl der vertikalen Translationen. Der Auffaltwinkel wird über "winkel" festgelegt und "farbe" ist die Farbe der Fläche in der Graphik.

```

> pPlot := proc( flaech, drehen, t_hori, t_vert, winkel, farbe)
    local rechnung, punkte, zeichnen;

    rechnung := map(i -> R_Matrix^drehen.i + drehen*R_trans +
t_hori * Trans_hori + t_vert * Trans_vert, flaech);
    punkte := map(i -> convert(i, list), rechnung);
    zeichnen := subs( [Koordinaten, alpha=winkel], punkte);

    return polygonplot3d( zeichnen, color=farbe);
end proc:

```

Dieses Programm verwaltet die gezeichneten Flächen:

```

> Faltmuster := proc(winkel)
    local P1,P2, pL := NULL, i,j, L_blue, L_green;

    P1 := pPlot( Stein_blaue, 0, 0, 0, winkel, "Blue");
    P2 := pPlot( Stein_gruen, 0, 0, 0, winkel, "Green");

    # Polygone darum herum (mit beliebigen Farben)
    L_blue := "LightBlue";
    L_green := "LightGreen";

```

```

pL := pL, pPlot( Stein_gruen, 0, 0, 1, winkel, L_green) ;
pL := pL, pPlot( Stein_blau, 0, 0, -1, winkel, L_blue) ;
for i in {0,1} do
  for j in {-1,0} do
    pL := pL, pPlot( Stein_blau, 1, i, j+1, winkel, L_blue);
    pL := pL, pPlot( Stein_gruen, 1, i, j, winkel, L_green);
  od;
od;

return display({P1,P2, pL}, axes=boxed, scaling=constrained,
orientation=[-75,20,-45]);
end proc:

```

Bestimme maximalen Auffaltwinkel.

```

> Winkel_max := min( subs([Koordinaten], arctan(-x[1]/abs(y[1])) ),
  subs([Koordinaten], arctan(x[2]/abs(y[2])) ) );

```

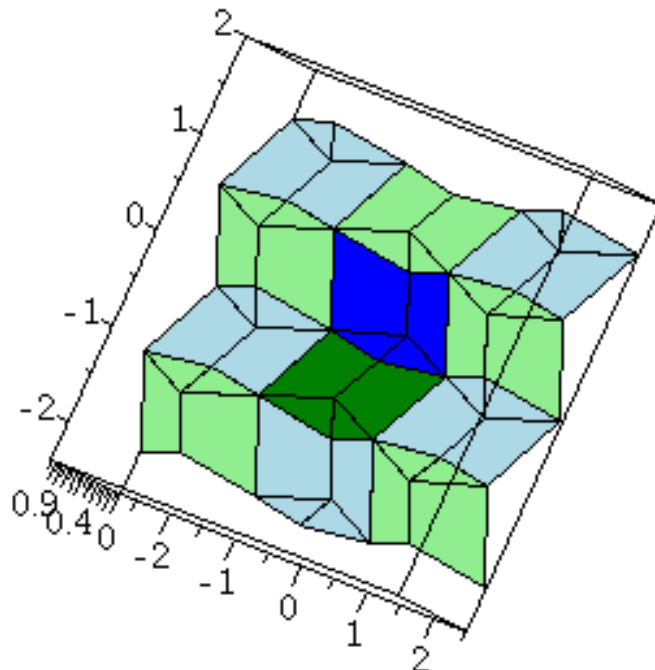
$$\text{Winkel_max} := \arctan\left(\frac{1.5}{|-0.4|}\right) \quad (3)$$

```

> animate( Faltmuster, [alpha], alpha= 0..Winkel_max, frames=50);

```

a = 0.5347730347



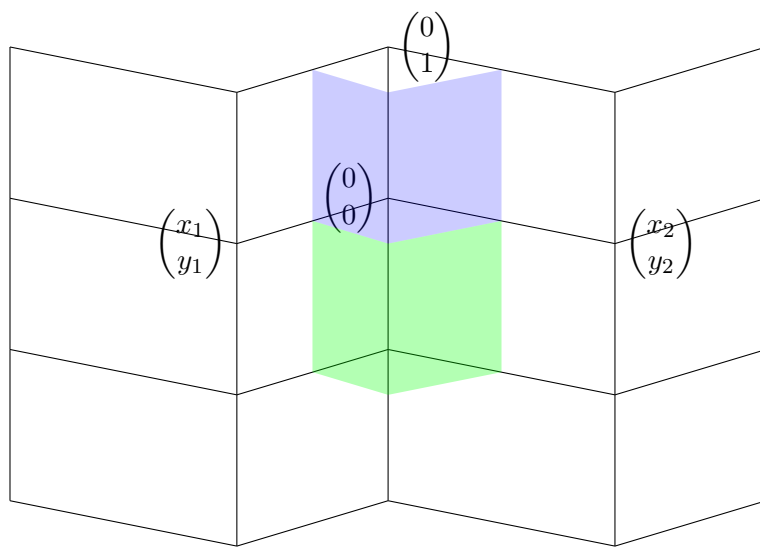
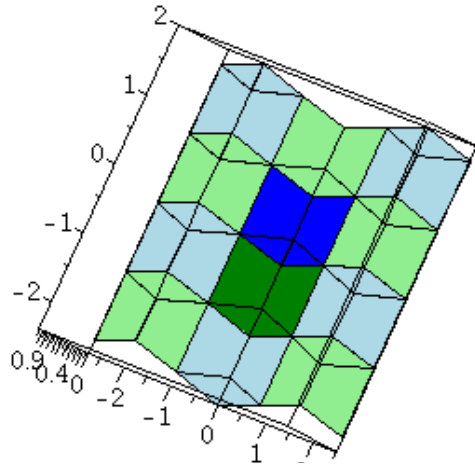
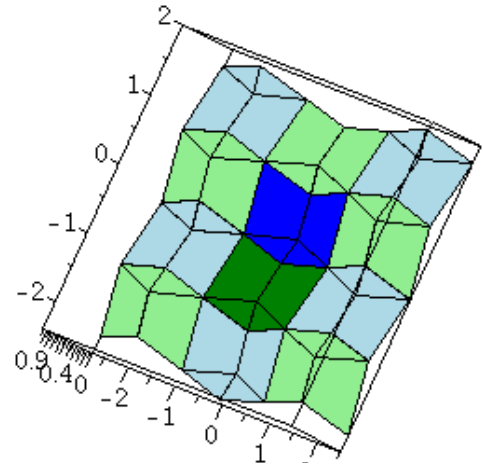


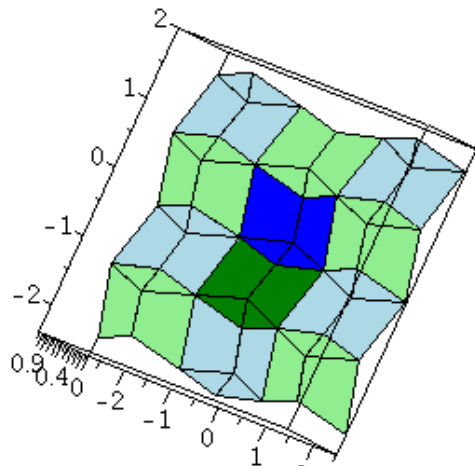
Abbildung 21: Pflasterung des Miura-Ori



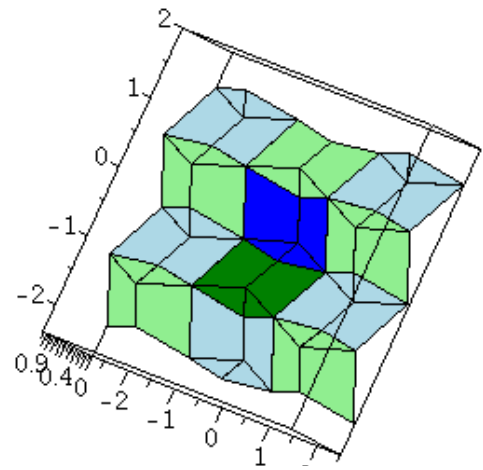
(a) $\alpha = 0$



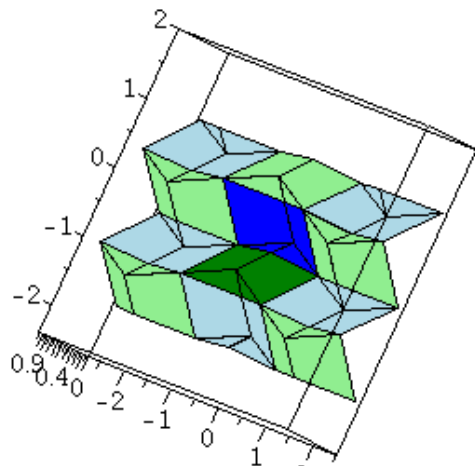
(b) $\alpha \approx 0.2139$



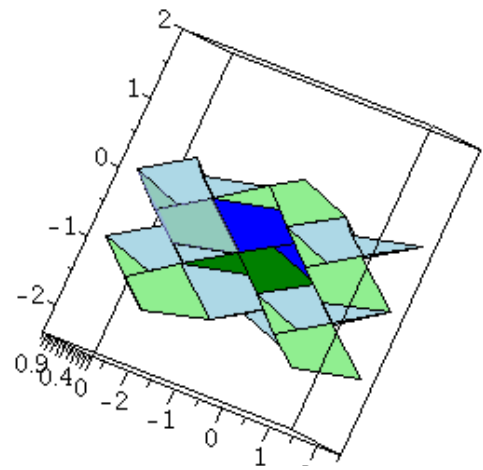
(c) $\alpha \approx 0.3209$



(d) $\alpha \approx 0.5348$



(e) $\alpha \approx 0.8289$



(f) $\alpha \approx 1.0695$

Abbildung 22: Faltung der Pflasterung

6. Ausblick

In dieser Arbeit wurden wir von zwei Zielen geleitet. Wir haben sowohl nach noch unbekannten Faltmustern gesucht, als auch darauf hingearbeitet, anhand eines Faltkantenmusters alle möglichen Faltmuster darüber erkennen zu können.

Bezogen auf das erste Ziel können wir einen Erfolg verbuchen. In Kapitel 2 analysieren wir eine Verallgemeinerung des Miura–Ori im Detail. Abgesehen davon aber scheiterten unsere Versuche. Insbesondere in den Kapiteln 3 und 4 kann man sehen, dass eine Abschwächung der Bedingungen an das Miura–Ori–Faltmuster meistens keine neuen Muster hervorbringt. Es wäre interessant herauszufinden, woran es liegt, dass Faltmuster auf diese Weise „robust“ gegenüber Veränderungen sind.

Für unser zweites Ziel haben wir zwei wesentliche Ansätze entwickelt, die statischen und die dynamischen Faltmuster. Die Verknüpfung zwischen diesen beiden ist aber noch nicht vollständig geklärt. So ist es z. B. nicht klar, wann man mit dem Ergebnis einer statischen Analyse eine Aussage über die Dynamik der Faltung sagen kann. Viel wichtiger aber ist das globale Ergebnis, das wir aus dieser Arbeit ziehen: Es gibt kein Standardverfahren, um alle Faltmuster auf Basis ihrer Faltkanten zu bestimmen, insbesondere keinen strukturellen Ansatz. Jede unserer Analysen beruhte darauf, die gegebene Situation geschickt auszunutzen. Leider skalieren diese Ansätze nicht gut und werden sehr schnell sehr aufwendig, wenn die Komplexität der Muster steigt. Somit wäre es eine große Errungenschaft, ein strukturelles und leicht skalierbares Verfahren zur Analyse von Faltungen zu entwickeln.

Zum Schluss eine letzte Beobachtung: In der Regel führten ähnliche Faltkantenmuster zu ähnlichen Faltungen. Dies sieht man z. B. in Kapitel 2, in dem wir die Faltmuster in Abhängigkeit von den Parametern des Grundmusters bestimmt haben. Eine interessante Frage ist nun, in welcher Form man die Grundmuster ändern kann, ohne die Faltungen wesentlich zu ändern. Wenn man darüber genaue Informationen hätte, wäre es eventuell möglich, ein vorgegebenes Faltkantenmuster auf ein Muster zu transformieren, dessen Faltungen einfacher zu bestimmen sind, und diese Ergebnisse auf das ursprüngliche Muster anzuwenden.

A. Charakterisierung von Drehungen

In diesem Anhang behandeln wir die Charakterisierung einer Drehung durch Drehachse und Drehwinkel, die mit einer Vertauschungsrelation von zwei Drehungen abschließt. Alle Resultate sind bekannt, wir geben aber eigene Beweise für diese.

Da eine Rotation linear ist, beschreiben wir diese durch eine Matrix. Diese Matrix muss orthogonal sein, da jede Rotation die Längen, die durch das Standardskalarprodukt induziert sind, invariant lässt. Weiterhin erhalten Rotationen die Orientierung des Raumes, folglich haben diese Determinante 1.

Definition A.1. Die **spezielle orthogonale Gruppe** ist die Matrixgruppe

$$SO(3, \mathbb{R}) := \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^{tr} \cdot R = I_3 \text{ und } \det(R) = 1\}. \quad (56)$$

Wir wollen zeigen, dass jede Drehung eine Drehachse hat. Da die Drehachse unter der Drehung fest bleibt, suchen wir hier nach einem Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Lemma A.2. *Jedes Element R der $SO(3, \mathbb{R})$ ist komplex diagonalisierbar mit den Eigenwerten $1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}$, wobei $\theta \in [0, \pi]$ bestimmt ist durch $\text{Spur } R = 1 + 2 \cdot \cos(\theta)$.*

Beweis. Da R nur reelle Einträge hat, ist das komplex Adjungierte zu R gleich seinem Transponierten. Folglich ist R unitär und somit insbesondere komplex diagonalisierbar. Die Summe der Eigenwerte ist die Spur, also reell. Das Produkt der Eigenwerte ist die Determinante von R , also gleich 1.

Das charakteristische Polynom χ von R ist ein reelles Polynom vom Grad 3, hat als solches also mindestens eine reelle Nullstelle. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. χ hat genau drei reelle Nullstellen. Da eine orthogonale Matrix nur Eigenwerte ± 1 haben kann, bleiben die Möglichkeiten $(1, 1, 1)$ und $(1, -1, -1)$. Im ersten Fall wähle $\theta = 0$, im zweiten Fall $\theta = \pi$.
2. χ hat weniger als drei reelle Nullstellen. Damit hat χ eine komplexe Nullstelle. Da unitäre Matrizen nur Eigenwerte vom Betrag 1 haben, hat diese Nullstelle die Form $e^{i\theta}$. Da χ ein reelles Polynom ist, ist damit auch $e^{-i\theta}$ eine Nullstelle. Wir können also ohne Einschränkung $\theta \in [0, \pi]$ wählen.

Bezeichnen wir mit n_E den reellen Eigenwert, so gilt

$$1 = \det(R) = n_E \cdot e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = n_E. \quad (57)$$

Für die Spurrelation bemerke, dass

$$\text{Spur}(R) = 1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 1 + 2 \cdot \cos(\theta) \in [-1, 3]. \quad (58)$$

Da der Kosinus auf $[0, \pi]$ invertierbar ist, legt die Spurrelation den Winkel θ bereits eindeutig fest. \square

Bis auf den Sonderfall $\theta = 0$ (also keine echte Drehung), gibt es den Eigenwert 1 genau einmal, folglich ist auch die Drehachse eindeutig. Als nächstes wollen wir zeigen, dass θ der Drehwinkel der Rotation ist. Dazu erinnern wir daran, dass der Winkel γ zwischen zwei normierten Vektoren a und b durch $\cos(\gamma) = \Phi(a, b)$ gegeben ist, wobei Φ das Standardskalarprodukt bezeichnet.

Lemma A.3. *Sei R wie in Lemma A.2, a sei die Drehachse. Dann gilt für normiertes $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\Phi(a, v) = 0$, dass $\Phi(Rv, v) = \cos(\theta)$.*

Beweis. Da R über \mathbb{C} diagonalisierbar ist, haben wir eine komplexe Eigenvektorbasis. Seien nun v_+, v_- die normierten Eigenvektoren zu den Eigenwerten $e^{i\theta}$ bzw. $e^{-i\theta}$. Es gibt nun $k_+, k_- \in \mathbb{C}$ mit

$$v = k_+ v_+ + k_- v_- \in \mathbb{R}^3.$$

Aus der Normierung von v folgt, dass

$$1 = \Phi(v, v) = \Phi^*(v, v) = k_+^2 \Phi^*(v_+, v_+) + k_-^2 \Phi^*(v_-, v_-) = k_+^2 + k_-^2,$$

wobei Φ^* das Standard-Hermitesche Produkt ist, welches auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt übereinstimmt.

Da $Rv \in \mathbb{R}^3$, folgt nun

$$\begin{aligned} \Phi(Rv, v) &= \Re(\Phi^*(Rv, v)) = \Re(\Phi^*(k_+ e^{i\theta} v_+ + k_- e^{-i\theta} v_-, k_+ v_+ + k_- v_-)) \\ &= \Re(k_+^2 e^{i\theta} + k_-^2 e^{-i\theta}) \\ &= \cos(\theta) \Re(k_+^2 + k_-^2) = \cos(\theta). \end{aligned} \quad \square$$

Wir sind aber noch nicht fertig. Denn Drehachse und Drehwinkel selbst genügen noch nicht, um eine Rotation eindeutig festzulegen. Was noch fehlt, ist die Drehrichtung, d. h. in welche Richtung um die Achse gedreht wird. Dazu wollen wir die Richtung des Drehachsenvektors verwenden. Zu diesem Zweck stellen wir die Drehung in einem speziellen Koordinatensystem dar:

Lemma A.4. *Sei $R \in SO(3, \mathbb{R})$ mit orientierter und normierter Drehachse a . Sei n_1 ein normierter Vektor, der orthogonal auf a steht und n_2 ein normierter Vektor, der orthogonal auf beiden steht und $\det(a, n_1, n_2) = 1$ erfüllt. Dann gibt es ein $\varphi \in \{\theta, 2\pi - \theta\}$ (wobei θ der Drehwinkel von R ist), sodass R bezüglich dieser Basis die Gestalt*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

hat.

Beweis. Da a ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist und $B := (a, n_1, n_2)$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 ist, liegt die Blockgestalt

$${}^B R^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}$$

vor. Man sieht schnell, dass $\begin{pmatrix} m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}$ selbst wieder orthogonal ist. Es ist bekannt aus [Ple08](Beispiel 6.31), dass es dann ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ gibt mit

$$\begin{pmatrix} m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Aus der Spurbedingung $\text{Spur}({}^B R^B) = 1 + 2 \cos(\theta)$ folgt nun $\varphi \in \{\theta, 2\pi - \theta\}$. \square

Bemerkung A.5. Es ist anzumerken, dass diese Darstellung völlig unabhängig von der speziellen Wahl von n_1 war. Aus diesem Grund kann man n_1 aus der Notation unterdrücken.

Mit dieser Darstellung können wir die Orientierung der Drehachse erklären.

Lemma A.6. Sei die Situation aus Lemma A.4 gegeben. Ist $0 \leq \varphi \leq \pi$, so gilt für alle $v \in \mathbb{R}^3$, dass $\det(a, v, Rv) \geq 0$. Falls aber $\pi \leq \varphi < 2\pi$ vorliegt, so ist $\det(a, v, Rv) \leq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$.

Beweis. Mit $v = (v_1, v_2, v_3)^{tr}$ folgt

$$\det(a, v, Rv) = \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_1 \\ 0 & v_2 & v_2 \cos(\varphi) - v_3 \sin(\varphi) \\ 0 & v_3 & v_2 \sin(\varphi) + v_3 \cos(\varphi) \end{pmatrix} = (v_2^2 + v_3^2) \sin(\varphi),$$

also die Behauptung. \square

Indem wir fordern, dass diese Determinante niemals negativ wird, legen wir die Richtung der Drehung fest. Wir zeigen jetzt noch, dass wir wirklich alle notwendigen Bedingungen beisammen haben.

Satz A.7. Seien $a \in \mathbb{R}^3$ und $\theta \in [0, \pi]$. Dann gibt es genau ein Element R aus $SO(3, \mathbb{R})$ mit den Eigenschaften

1. a ist Eigenvektor zum Eigenwert 1.
2. $\text{Spur}(R) = 1 + 2 \cos(\theta)$.
3. $\det(a, v, Rv) \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$.

Wir nennen dieses Element $R(a, \theta)$.

Beweis. Wir verwenden die Orthonormalbasis aus Lemma A.4. Die Existenz einer solchen Abbildung wird durch Lemma A.4 geliefert, wenn man φ durch θ ersetzt. Die Eindeutigkeit folgt ebenso: Aus Lemma A.4 erhalten wir eine Abbildung, in der es für φ höchstens zwei Möglichkeiten gibt. Mit der Determinantenbedingung erzwingen wir $\varphi = \theta$, machen die Abbildung also eindeutig. \square

Bemerkung A.8. Beachte, dass eine gegebene Beschreibung eine Drehung zwar eindeutig festlegt, aber dass die Umkehrung nicht richtig ist. Es kann zu einer festen Drehung verschiedene Darstellungen geben. Das tritt bei den Drehwinkeln 0 und π auf.

Wir wollen nun exemplarisch vormachen, wie man eine konkrete Drehmatrix aufstellt.

Beispiel A.9. Sei $(0, 1, 0)^{tr}$ die orientierte Drehachse und $\theta \in [0, \pi]$ der Drehwinkel. Dann lautet die Drehmatrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für $\varphi \in \{\theta, 2\pi - \theta\}$. Wir müssen jetzt noch die Orientierung überprüfen. Dazu betrachte

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}\right) = -\sin(\varphi).$$

Folglich ist $\varphi = 2\pi - \theta$ und die korrekte Drehmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Um dynamische Faltmuster aufzustellen, ist es häufig nützlich, eine Gesamtdrehung in mehrere kleinere Drehungen zu unterteilen. Dabei ist dieses Lemma nützlich:

Lemma A.10. Für $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$ gilt

$$R(a_2, \theta_2) \cdot R(a_1, \theta_1) = R(a'_1, \theta_1) \cdot R(a_2, \theta_2), \quad (59)$$

wobei $a'_1 = R(a_2, \theta_2) \cdot a_1$.

Beweis. Wir betrachten die Drehung

$$R := R(a_2, \theta_2) \cdot R(a_1, \theta_1) \cdot R(a_2, \theta_2)^{-1}$$

und wenden Satz A.7 an, um eine mögliche Wahl für a'_1 und θ'_1 zu erhalten.

1. Es gilt

$$\begin{aligned} R \cdot (R(a_2, \theta_2) \cdot a_1) &= R(a_2, \theta_2) \cdot R(a_1, \theta_1) \cdot R(a_2, \theta_2)^{-1} \cdot R(a_2, \theta_2) \cdot a_1 \\ &= R(a_2, \theta_2) \cdot R(a_1, \theta_1) \cdot a_1 \\ &= R(a_2, \theta_2) \cdot a_1. \end{aligned}$$

Folglich ist $R(a_2, \theta_2) \cdot a_1$ die Drehachse.

2. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Spur}(R) &= \text{Spur}(R(a_2, \theta_2) \cdot R(a_1, \theta_1) \cdot R(a_2, \theta_2)^{-1}) \\ &= \text{Spur}(R(a_2, \theta_2)^{-1} \cdot R(a_2, \theta_2) \cdot R(a_1, \theta_1)) \\ &= \text{Spur}(R(a_1, \theta_1)) \\ &= 1 + 2 \cos(\theta), \end{aligned}$$

also ist θ der Drehwinkel von R .

3. Sei $v \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Da $R(a_2, \theta_2)^{-1} \in SO(3, \mathbb{R})$, folgt mit Lemma A.11, dass

$$\det(R(a_2, \theta_2)a_1, v, Rv) = \det(a_1, R(a_2, \theta_2)^{-1}v, R(a_1, \theta_1) \cdot R(a_2, \theta_2)^{-1}v).$$

Da $R(a_2, \theta_2)^{-1}v \in \mathbb{R}^3$, folgt mit der Determinanteneigenschaft von $R(a_1, \theta_1)$, dass diese Determinante nicht negativ wird.

Damit ist gezeigt, dass $R = R(R(a_2, \theta_2) \cdot a_1, \theta_1)$. □

Im Beweis von Lemma A.10 haben wir genutzt, dass Drehungen die Determinante nicht ändern. Das liefern wir kurz nach:

Lemma A.11. *Sei $M \in SO(3, \mathbb{R})$ und seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$. Dann ist $\det(a_1, a_2, a_3) = \det(Ma_1, Ma_2, Ma_3)$.*

Beweis. Sei A die Matrix mit Spalten a_1, a_2, a_3 , dann gilt wegen $\det(M) = 1$

$$\det(Ma_1, Ma_2, Ma_3) = \det(M \cdot A) = \det(M) \det(A) = \det(A) = \det(a_1, a_2, a_3). \quad \square$$

In Rechnungen ist es nicht immer nützlich, schon von Anfang an festlegen zu müssen, in welche Richtung die Drehachse orientiert wird. Wir würden also gerne Lemma A.10 auf größere Winkel verallgemeinern. Dafür müssen wir zunächst unsere Notation erweitern.

Definition A.12. Sei $a \in \mathbb{R}^3$ und $\theta \in [\pi, 2\pi)$. Dann definiere $R(a, \theta) := R(-a, 2\pi - \theta)$.

Folgerung A.13. *Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$, $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$. Dann folgt*

$$R(a_2, \theta_2) \cdot R(a_1, \theta_1) = R(a'_1, \theta_1) \cdot R(a_2, \theta_2), \quad (60)$$

wobei $a'_1 = R(a_2, \theta_2) \cdot a_1$.

Beweis. Falls $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$, ist dies genau die Aussage von Lemma A.10. Sei nun $\theta_1 > \pi$ und $\theta_2 \leq \pi$, dann folgt

$$\begin{aligned} R(a_2, \theta_2) \cdot R(a_1, \theta_1) &= R(a_2, \theta_2) \cdot R(-a_1, 2\pi - \theta_1) \\ &= R(-R(a_2, \theta_2) \cdot a_1, 2\pi - \theta_1) \cdot R(a_2, \theta_2) \\ &= R(a'_1, \theta_1) \cdot R(a_2, \theta_2). \end{aligned}$$

Falls $\theta_2 > \pi$ und $\theta_1 \leq \pi$, folgt

$$\begin{aligned} R(a_2, \theta_2) \cdot R(a_1, \theta_1) &= R(-a_2, 2\pi - \theta_2) \cdot R(a_1, \theta_1) \\ &= R(R(-a_2, 2\pi - \theta_2)a_1, \theta_1) \cdot R(-a_2, 2\pi - \theta_2) \\ &= R(R(a_2, \theta_2)a_1, \theta_1) \cdot R(a_2, \theta_2). \end{aligned}$$

Falls beide Winkel größer als π sind, folgt die Behauptung ebenso. □

B. Geometrie in Zylinderkoordinaten

Wir schreiben die euklidische Norm des Vektors a als $\|a\|_2$. Der Abstand zwischen zwei Punkten p und q ist $d(p, q) := \|\vec{pq}\|_2$. Wir schreiben $\|p\|_2$ auch als Kurzform für $\|\vec{0p}\|_2$, wobei 0 der Nullpunkt ist.

Lemma B.1. Seien $p_1 := [r_1 e^{i\varphi_1}, h_1], p_2 := [r_2 e^{i\varphi_2}, h_2] \in \mathbb{R}^3$, dann gilt

$$d(p_1, p_2)^2 = \|p_1\|_2^2 + \|p_2\|_2^2 - 2h_1 h_2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (61)$$

Beweis. Simples Nachrechnen:

$$\begin{aligned} d(p_1, p_2)^2 &= \|r_1 e^{i\varphi_1} - r_2 e^{i\varphi_2}\|_2^2 + (h_1 - h_2)^2 \\ &= \|r_1 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} - r_2\|_2^2 + (h_1 - h_2)^2 \\ &= (r_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - r_2)^2 + r_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (h_1 - h_2)^2 \\ &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_2^2 \\ &= \|p_1\|_2^2 + \|p_2\|_2^2 - 2h_1 h_2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \quad \square$$

Da wir nun Abstände in Zylinderkoordinaten bestimmen können, sind wir in der Lage, die folgende Definition konkret zu verwenden:

Definition B.2. Seien $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ heißt **Punkt gleichen Abstandes** von p_1, \dots, p_k , wenn er zu jedem dieser Punkte den gleichen Abstand hat.

Wir betrachten einige Spezialfälle genauer:

Lemma B.3. Seien $[r e^{i\varphi}, h], [\bar{r} e^{i\psi}, \bar{h}] \in \mathbb{R}^3$ mit $r \neq 0$ und $\varphi \neq \psi$. Dann gilt für alle Punkte gleichen Abstandes $[\bar{r} e^{i\theta}, \bar{h}]$, dass $\bar{r} = 0$ oder $\theta \in \frac{\varphi + \psi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

Beweis. Wir fordern $d([r e^{i\varphi}, h], [\bar{r} e^{i\theta}, \bar{h}]) = d([r e^{i\psi}, h], [\bar{r} e^{i\theta}, \bar{h}])$ und folgern mit Lemma B.1, dass $\bar{r} = 0$ oder $\cos(\varphi - \theta) = \cos(\psi - \theta)$ ist.

Es folgt $\varphi - \theta = \psi - \theta + 2\pi\mathbb{Z}$ oder $\varphi - \theta = \theta - \psi + 2\pi\mathbb{Z}$. Im ersten Fall folgt $\varphi = \psi + 2\pi\mathbb{Z}$, was wir ausgeschlossen hatten. Im zweiten Fall folgt $\theta = \frac{\varphi + \psi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, wie gewünscht. \square

Lemma B.4. Sei $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $\varphi \neq \pi$. Es gibt genau dann einen Punkt mit Abstand 1 von $[0, 0], [-1, 0]$ und $[e^{i\varphi}, 0]$, wenn $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$. Falls er existiert, ist er durch

$$\left[-\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi + \varphi}{2}\right)} e^{i \frac{\pi + \varphi}{2}}, h_{\pm} \right] \quad (62)$$

mit $h_{\pm} := \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cos\left(\frac{\pi + \varphi}{2}\right)^2}}$ gegeben.

Beweis. Wir setzen den Punkt an als $[re^{i\theta}, h]$ mit $r^2 + h^2 = 1$. Mit Lemma B.1 folgt

$$\begin{aligned} 1 &= d([-1, 0], [re^{i\theta}, h])^2 = 2 + 2r \cos(\theta) \\ 1 &= d([e^{i\varphi}, 0], [re^{i\theta}, h])^2 = 2 - 2r \cos(\theta - \varphi). \end{aligned}$$

Wir erhalten daraus mit $r \leq 1$ die Ungleichungen

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{2r} \leq -\frac{1}{2} \qquad \cos(\theta - \varphi) = \frac{1}{2r} \geq \frac{1}{2}. \quad (63)$$

Mit $0 \leq \theta < 2\pi$ liefert die erste Ungleichung $\theta \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$. Die zweite Ungleichung führt auf $\theta - \varphi \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}] + 2\pi\mathbb{Z}$. Aus den Begrenzungen von θ und φ wissen wir, dass

$$\begin{aligned} \theta - \varphi &\leq \frac{4\pi}{3} - 0 = \frac{4\pi}{3} \\ \theta - \varphi &> \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3} > \frac{\pi}{3} - 2\pi, \end{aligned}$$

weswegen $\theta - \varphi \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ gilt. Es kann also nur dann eine Lösung geben, wenn der Schnitt $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}] \cap [-\frac{\pi}{3} + \varphi, \frac{\pi}{3} + \varphi]$ nicht leer ist. Dafür müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{3} &\geq -\frac{\pi}{3} + \varphi \Leftrightarrow \varphi \leq \frac{5\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} &\leq \frac{\pi}{3} + \varphi \Leftrightarrow \varphi \geq \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

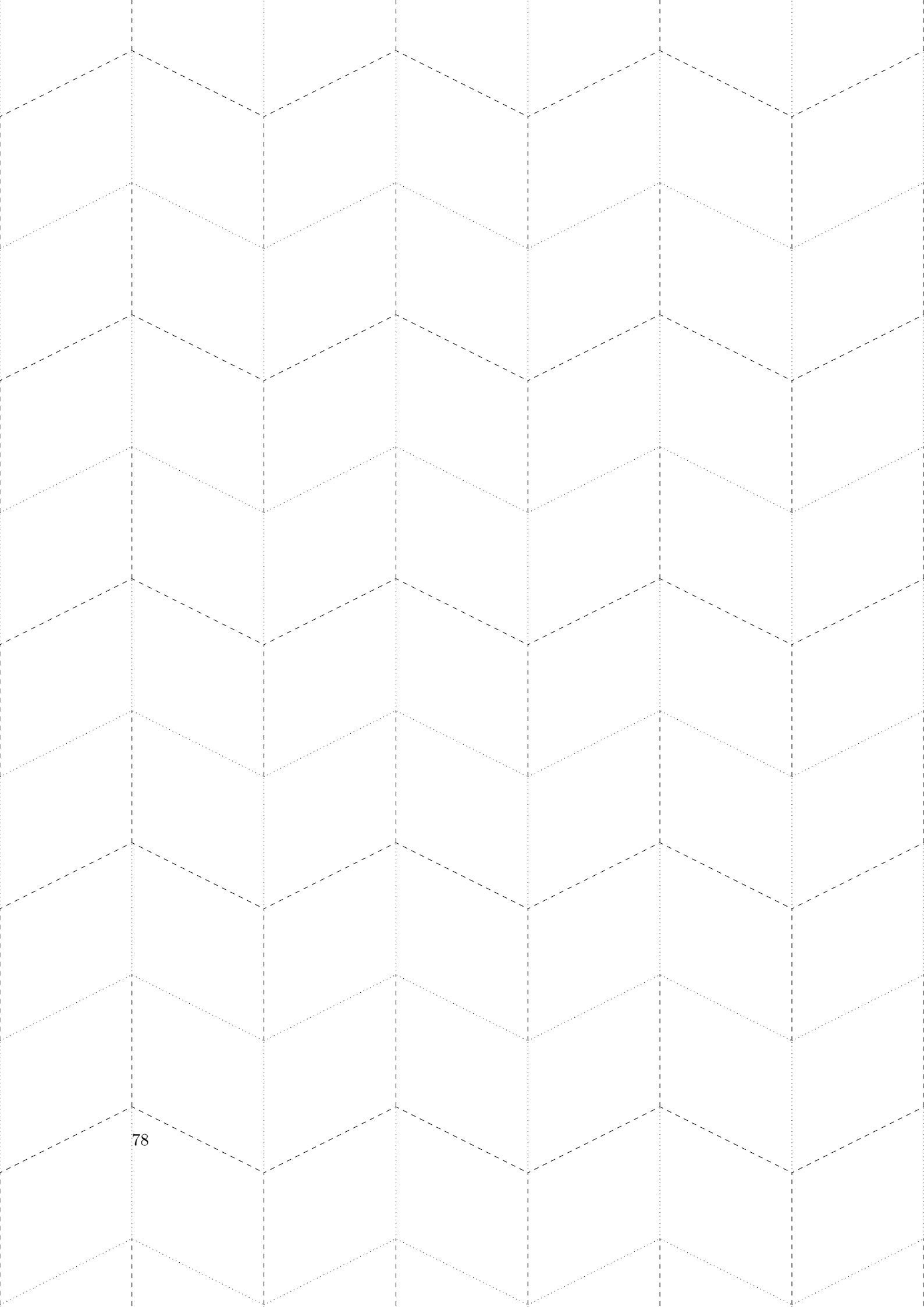
Aus Lemma B.3 folgt $\theta \in \frac{\pi+\varphi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Aus $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$ folgt $\frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi+\varphi}{2} \leq \frac{4\pi}{3}$. Da dies genau das Intervall von θ ist und die Intervalllänge geringer als π ist, folgt $\theta = \frac{\pi+\varphi}{2}$.

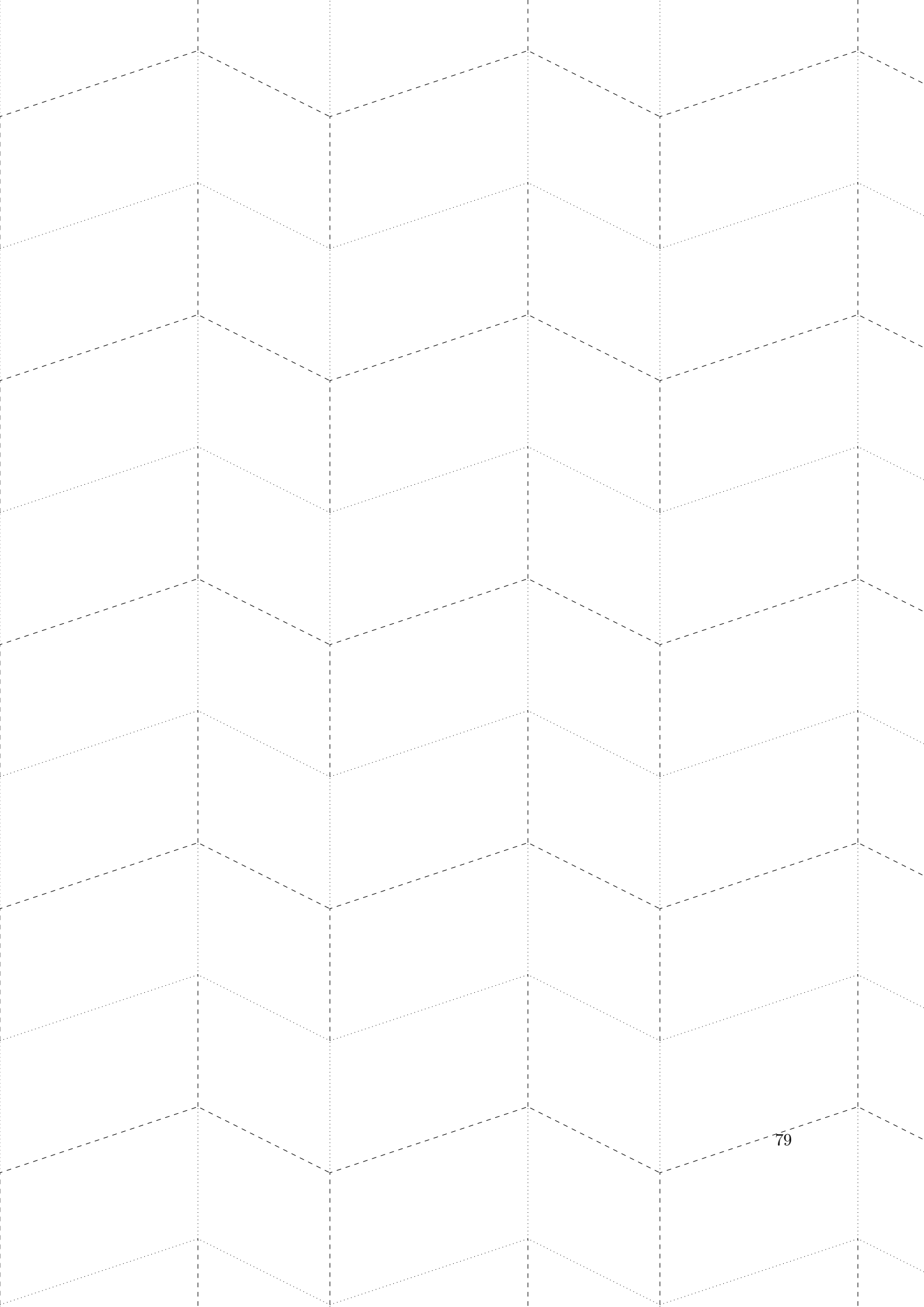
Mit der Gleichung aus (63) und $r^2 + h^2 = 1$ ergibt sich der Rest. \square

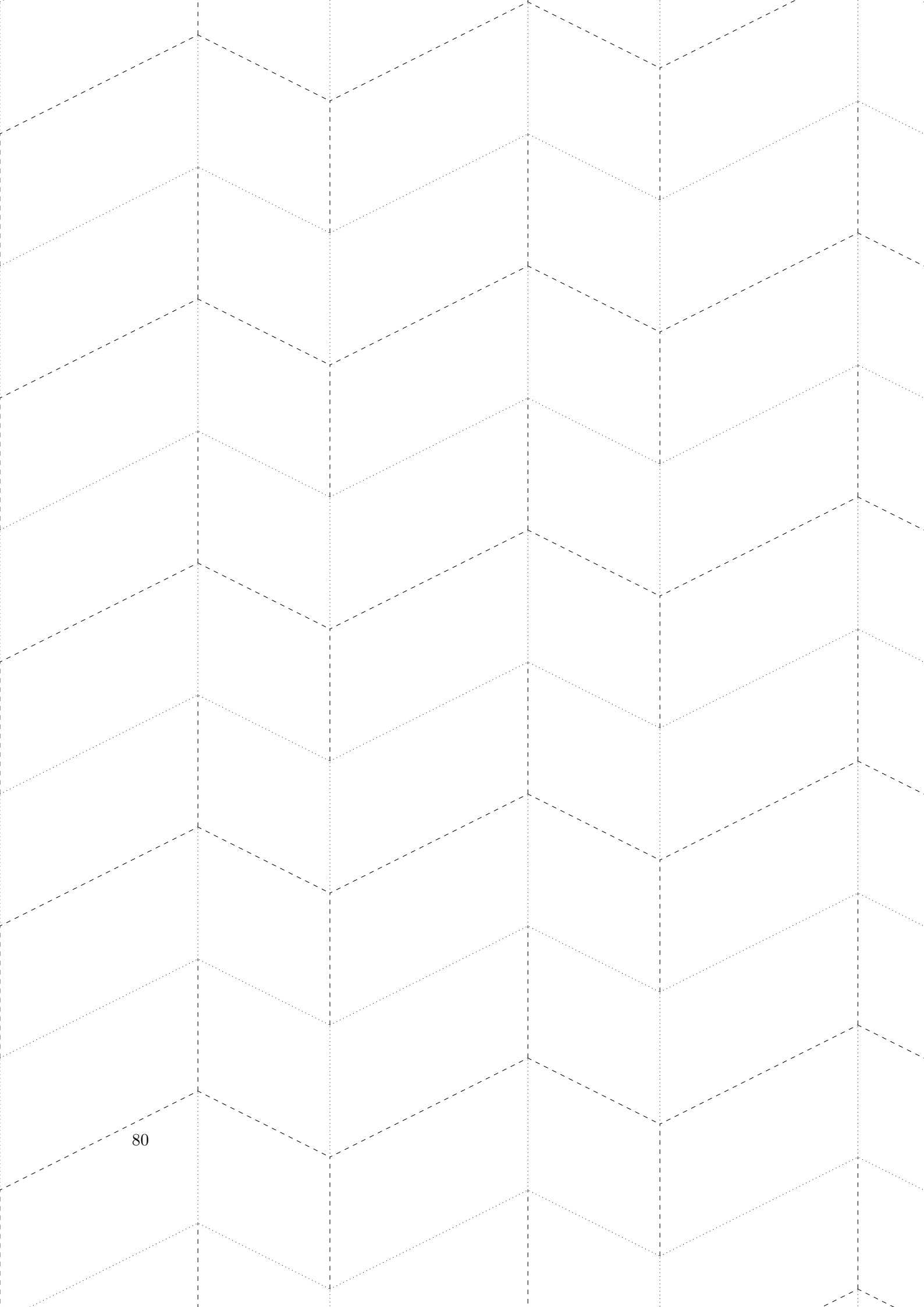
C. Faltskizzen

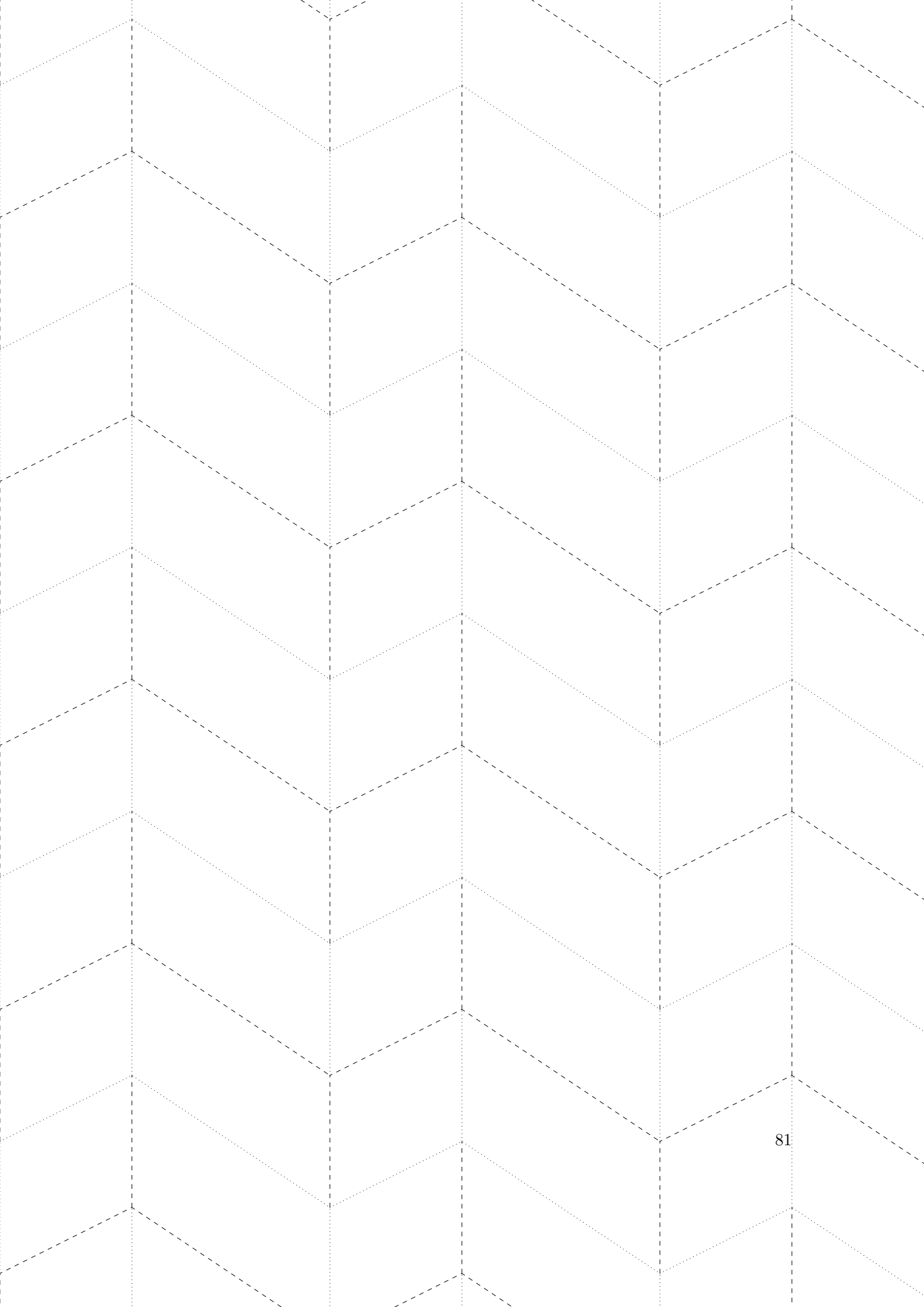
Das Thema dieser Arbeit ist sehr konkret. Man kann die Argumentationen anschaulich nachvollziehen, wenn man die Faltoobjekte selbst in die Hand nimmt. Zu diesem Zweck geben wir einige Faltskizzen an, aus denen man die Muster, über die gesprochen wird, selbst herstellen und untersuchen kann. Um zu erklären, wie man diese Skizzen falten soll, müssen wir das Konzept von **Berg-** und **Talkanten** einführen. Bei einer Bergfalte faltet man das Papier vom Faltenden weg, sodass die markierte Kante auf dem entstandenen „Berg“ liegt. Das Papier um eine Talfalte wird so zum Faltenden hingefaltet, dass die Kante im entstehenden „Tal“ liegt. Würde man das Papier drehen, so würden sich die Rollen von Berg- und Talfalten vertauschen. Bergfalten werden durch gepunktete Linien angezeigt, Talfalten durch gestrichelte. Jede eingezeichnete Faltkante soll auch gefaltet werden.

Auf Seite 78 steht die Faltskizze des Standard Miura-Ori. Eine Verallgemeinerung dieses Musters mit orthogonalen Translationsrichtungen, das nicht flach zusammenfaltbar ist, findet sich auf Seite 79. Im Gegensatz dazu ist das Muster auf Seite 80 flach zusammenfaltbar, hat aber keine orthogonalen Translationen. Ein Muster, dessen Translationen nicht orthogonal sind und das auch nicht flach zusammenfaltbar ist, kann man auf Seite 81 finden.









Literatur

- [DO10] Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke, *Geometric Folding Algorithms, Linkages, Origami, Polyhedra*, Cambridge University Press, 32 Avenue of the Americas, New York, 2010.
- [FKW12] Hartmut Führ, Aloys Krieg, and Sebastian Walcher, *Skript zu Analysis III*, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, Templergraben 64, 2012.
- [Ple08] Wilhelm Plesken, *Skript zu Lineare Algebra I*, Lehrstuhl B für Mathematik, RWTH Aachen, Templergraben 64, 2008.
- [Ple09] ———, *Skript zu Lineare Algebra II*, Lehrstuhl B für Mathematik, RWTH Aachen, Templergraben 64, 2009.
- [Ple13a] ———, *Skript zu Computeralgebra*, Lehrstuhl B für Mathematik, RWTH Aachen, Templergraben 64, 2013.
- [Ple13b] ———, *Skript zu Kristallographische Gruppen*, Lehrstuhl B für Mathematik, RWTH Aachen, Templergraben 64, 2013.

Danksagung

An dieser Stelle danke ich allen, die mir das Schreiben dieser Arbeit ermöglicht haben; sowie all jenen, die mich dabei fachlich oder moralisch unterstützt haben. Besonderer Dank gilt

- Professor Wilhelm Plesken für seine intensive Betreuung meiner Arbeit. Er stand mir bei Problemen stets mit Rat und Tat zur Seite und achtete darauf, den Anforderungsgrad auf einer konstanten Höhe zu halten.
- dem gesamten Lehrstuhl B für Mathematik für die offenen Türen und Ohren, die stets da waren, wenn ich sie brauchte.
- den Korrekturlesern dieser Arbeit, Ansgar Strzelczyk und Matthias Voit, die der Leserschaft dieser Arbeit einiges an stilistischen und inhaltlichen Ungereimtheiten erspart haben.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, Markus Baumeister, an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Aachen, den 14. September 2017
