Graphische Datenverarbeitung WS17/18
Theorieübung 1

Salmah Ahmad (2880011) Markus Höhn (1683303)
Tobias Mertz (2274355) Steven Lamarr Reynolds (1620638)
Sascha Zenglein (2487032)

18. November 2017

Aufgabe 1: Pipeline

a) Aus was besteht der Input der Pipeline?

Der Input der Pipeline besteht aus einer gegebenen Szenenbeschreibung.

b) Zum Input gehören unter anderem „Objekte“. In welcher Form sind konkrete „Objekte“ im Input gegeben?

- (virtuelle) Kamera
- Dreidimensionale Objekte
- Lichtquellen
- Beleuchtungsalgorithmen
- Texturen

c) Was ist der Output der Pipeline?

Der Output der Pipeline ist ein 2D Bild der gegeben Szenenbeschreibung.

d) Weshalb ist eine Pipeline die aus n Abschnitten besteht (theoretisch) n-mal schneller als eine Pipeline mit nur einem Abschnitt?

Bei einer Pipeline mit n Abschnitten kann eine n-fache parallele Verarbeitung durchgeführt werden.

e) Weshalb ist die Pipeline Geschwindigkeit vom Bottleneck abhängig? Wieso warten die anderen Pipeline-Abschnitte bis der Bottleneck-Abschnitt fertig ist?

Der Bottleneck-Abschnitt ist der langsamste der Pipeline. Die Berechnung eines Frames basiert auf den Ergebnissen der vorausgegangenen Pipeline-Abschnitte. Daher ist die Geschwindigkeit der Pipeline abhängig vom langsamsten Verarbeitungsschritt.

Aufgabe 2: Model & View Transformation

a) Stellen Sie die Gleichung $(x,z)^T = f(u,v)$ auf, die die u,v Koordinaten in das Weltkoordinatensystem transformiert. Bestimmen Sie nun die Position der Szenenobjekte bezüglich des Weltkoordinatensystems.

Um die Koordinaten des Planetenkoordinatensystems in das Weltkoordinatensystem zu transformieren, sind die folgenden Schritte notwendig:

1. Das Planetenkoordinatensystem muss so gedreht werden, dass die v-Achse entgegengesetzt zur z-Achse verläuft, also nach oben zeigt. Hierzu müssen Koordinaten um $270° - \alpha$ im Uhrzeigersinn oder $\alpha + 90°$ gegen den Uhrzeigersinn rotiert werden.
2. Danach müssen die Koordinaten an der u-Achse gespiegelt werden, sodass die v-Achse nun in Richtung der z-Achse zeigt.
3. Als letztes muss jeder Punkt um die aktuelle Position des Planeten im Weltkoordinatensystem verschoben werden.

1. Die Rotationsmatrix für die beschriebene Rotation ist folgende:
$$R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+90°) & -\sin(\alpha+90°) \\ \sin(\alpha+90°) & \cos(\alpha+90°) \end{pmatrix}$$
2. Die Spiegelung an der x-Achse wird beschrieben durch die Multiplikation mit:
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
3. Die Translation wird durch die Addition mit
$$t = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot r \\ -\sin\alpha \cdot r \end{pmatrix}$$
beschrieben.

Diese Operationen in der genannten Reihenfolge beschreiben die gesuchte Funktion $f(u,v)$, die folgendermaßen aussieht:

$$\begin{aligned} f(u,v) &= t + M \cdot R \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot r \\ -\sin\alpha \cdot r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha+90°) & -\sin(\alpha+90°) \\ \sin(\alpha+90°) & \cos(\alpha+90°) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot r \\ -\sin\alpha \cdot r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha+90°) & -\sin(\alpha+90°) \\ -\sin(\alpha+90°) & -\cos(\alpha+90°) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Ergebnisse für die genannten Objekte sind:

- Sonne: Position: $(u,v)^T = (0,4)^T$
$$\begin{aligned} f(0,4) &= \begin{pmatrix} \cos 150° \cdot 4 \\ -\sin 150° \cdot 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 240° & -\sin 240° \\ -\sin 240° & -\cos 240° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
- Planet: Position: $(u,v)^T = (0,0)^T$
$$\begin{aligned} f(0,0) &= \begin{pmatrix} \cos 150° \cdot 4 \\ -\sin 150° \cdot 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 240° & -\sin 240° \\ -\sin 240° & -\cos 240° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Mond: Position: $(u, v)^T = (\cos\beta \cdot r_M, \sin\beta \cdot r_M)^T = (-\sqrt{3}, 1)^T$

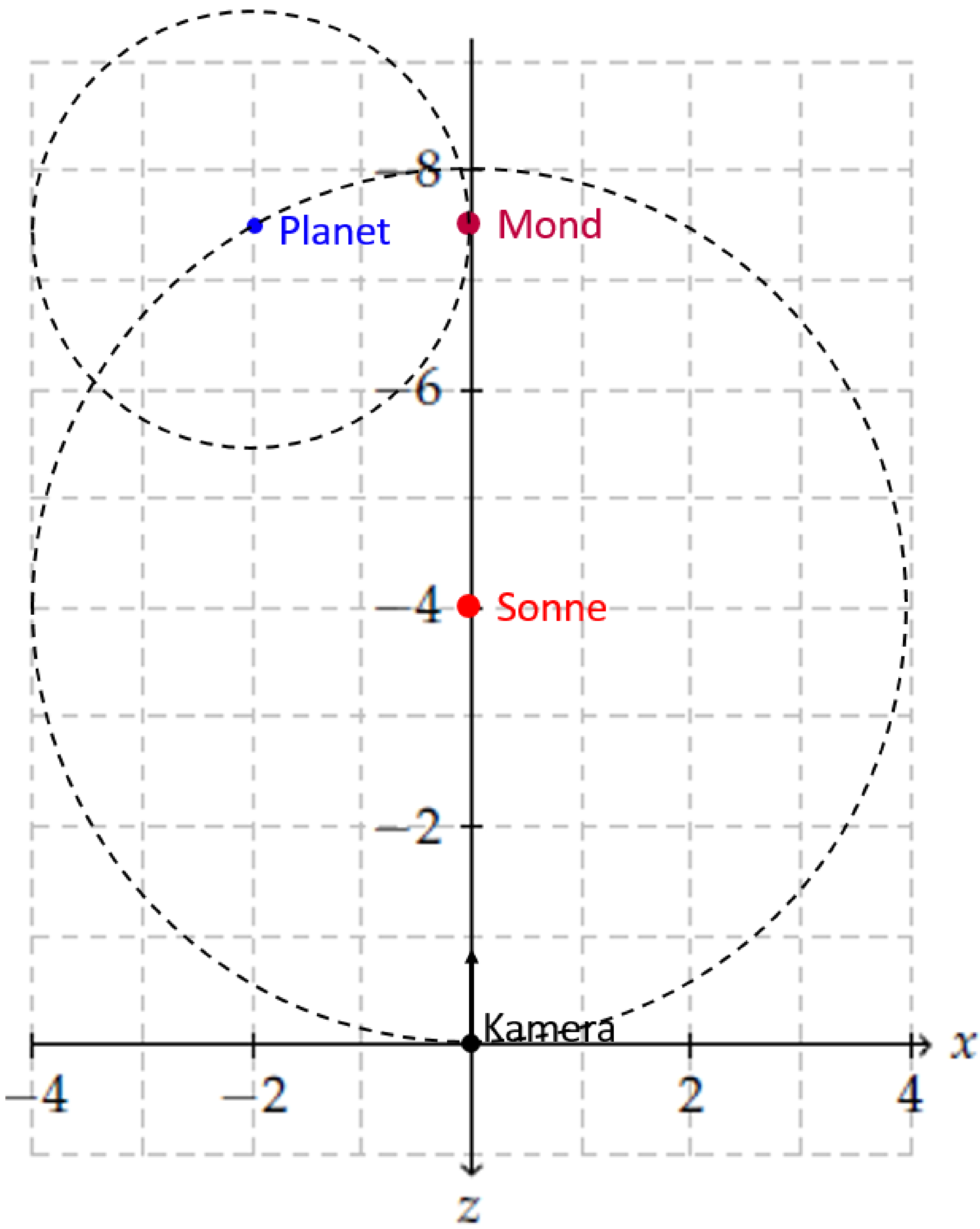
$$
\begin{aligned}
f(-\sqrt{3}, 1) &= \begin{pmatrix} \cos 150° \cdot 4 \\ -\sin 150° \cdot 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 240° & -\sin 240° \\ -\sin 240° & -\cos 240° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b) Bestimmen Sie, welche Translation und welche Rotation auf die Szene ausgeübt werden müssen, um die Kamera in den Ursprung zu verschieben und anschließend die Blickrichtung nach -z zu rotieren.

- Translation: $\left(-2, -2\sqrt{3}\right)^T$
- Winkel: $\arctan\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = 30°$
- Rotation: $\begin{pmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) \\ \sin(30°) & cos(30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

c) Berechnen Sie die Position der Szenenobjekte nach der Model- und View-Transformation. Fertigen Sie eine Skizze an.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} &= R \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + T \right) \\
R &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\
T &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
Sonne: \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{3} + \sqrt{3} \\ -1 - 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \\
Planet: \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} - 2 \\ -2\sqrt{3} - 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 - 3 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{3} - 4 \end{pmatrix} \\
Mond: \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} - 2 \\ -3 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \sqrt{3} + \frac{3}{2} + \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} - 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} - 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$



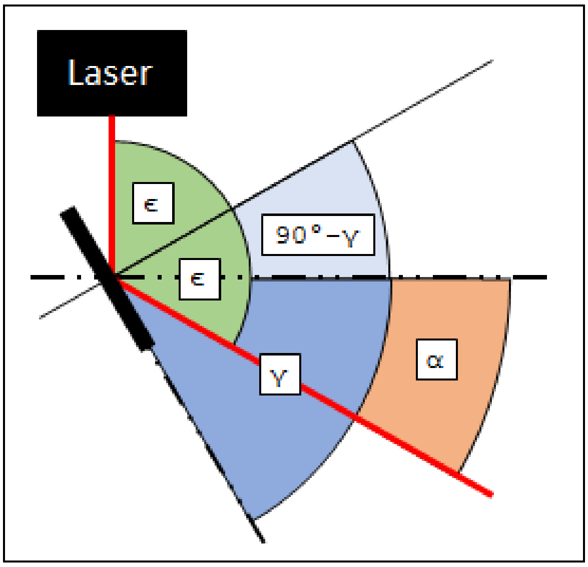
−8
Planet
Mond
−6
−4
Sonne
−2
Kamera
x
−4
−2
2
4
z

Aufgabe 3: Optische Triangulation

a) Stellen Sie die Gleichung $\beta = f_1(p)$ auf, um aus einer Pixelposition p den Winkel β zu berechnen. Verwenden Sie dabei die Koordinate des Pixelmittelpunktes!
Wie groß ist β, wenn der Laserpunkt in der Mitte von Pixel 5223 registriert wird?

$$\begin{aligned}\beta = f_1(p) &= \arctan\left(\frac{(\frac{p+0.5}{8192})\cdot 48mm - 24mm}{24mm}\right)\\ f_1(p) &= \arctan\left(\left(\frac{p+0.5}{8192}\right)\cdot 2 - 1\right)\\ f_1(p) &= \arctan\left(\frac{p+0.5}{4096} - 1\right)\\ f_1(5223) &= 15.3906^\circ\end{aligned}$$

b) Stellen Sie die Gleichung $\alpha = f_2(\gamma)$ auf, um aus dem Spiegelwinkel γ den Winkel α zu berechnen.
Berechnen Sie $f_2(45^\circ)$ und $f_2(77^\circ)$.

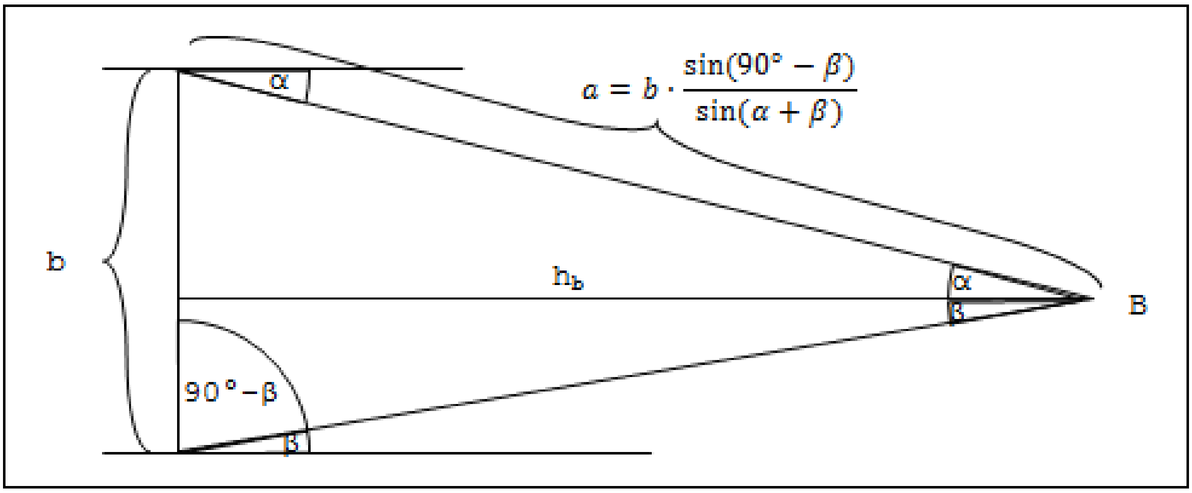


$$\begin{aligned}\alpha = f_2(\gamma) &= \epsilon - (90^\circ - \gamma) \qquad mit \quad \epsilon = 90^\circ - (90^\circ - \gamma)\\ &= (90^\circ - (90^\circ - \gamma)) - (90^\circ - \gamma)\\ &= 90^\circ - 90^\circ + \gamma - 90^\circ + \gamma\\ &= 2\gamma - 90^\circ\end{aligned}$$

b) Berechnung α

- $f_2(45^\circ) = 2 \cdot 45^\circ - 90^\circ = 0^\circ$
- $f_2(77^\circ) = 2 \cdot 77^\circ - 90^\circ = 64^\circ$

c) Stellen Sie die Gleichung $z = f_3(\alpha, \beta)$ auf, um aus den Winkeln α und β den Tiefenwert z zu berechnen.
Welcher Tiefenwert gehört zu den Winkeln $\alpha = 15°$ und $\beta = 30°$?



c) Berechnung z

Mithilfe des Sinussatzes gilt:

$$a = b \cdot \frac{\sin(90° - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Weiter gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{h_b}{a}$$

Mit $h_b := z$ gilt:

$$z = f_3(\alpha, \beta) = \cos(\alpha) \cdot \frac{b \cdot \sin(90° - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Für $\alpha = 15°$ und $\beta = 30°$ folgt:

$$z = f_3(15°, 30°) = \cos(15°) \cdot \frac{150mm \cdot \sin(90° - 30°)}{\sin(15° + 30°)} = 177.4519mm$$

d) Stellen Sie die Gleichung $x = f_4(\beta, z)$ auf, um aus dem Winkel β und z die x-Koordinate zu berechnen
Berechnen sie $f_4(40°, 100cm)$.

$$x = f_4(\beta, z) = \tan(\beta) \cdot z$$
$$f_4(40°, 100cm) = \tan(40°) \cdot 100cm = 83,91cm$$

e) Stellen Sie nun die Gesamtgleichung $(x, z)^T = f_5(p, \gamma)$ auf, um aus der Pixelposition p und dem Winkel γ die Koordinaten $(x, z)^T$ des abgetasteten Punktes zu berechnen. Kürzen Sie sich aufhebende tan und atan Funktionen.

$$
\begin{aligned}
f_5(p,\gamma) = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_4\langle f_1(p), f_3[f_2(\gamma), f_1(p)]\rangle \\ f_3[f_2(\gamma), f_1(p)] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tan\left(f_1(p)\right) \cdot f_3(f_2(\gamma), f_1(p)) \\ \cos\left(f_2(\gamma)\right) \cdot \frac{150mm \cdot \sin(90^\circ - f_1(p))}{\sin(f_2(\gamma) + f_1(p))} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tan\left(\arctan\left(\frac{p+0.5}{4096} - 1\right)\right) \cdot \cos\left(2\gamma - 90^\circ\right) \cdot \frac{150mm \cdot \sin\left(90^\circ - \arctan\left(\frac{p+0.5}{4096} - 1\right)\right)}{\sin\left(2\gamma - 90^\circ + \arctan\left(\frac{p+0.5}{4096} - 1\right)\right)} \\ \cos\left(2\gamma - 90^\circ\right) \cdot \frac{150mm \cdot \sin\left(90^\circ - \arctan\left(\frac{p+0.5}{4096} - 1\right)\right)}{\sin\left(2\gamma - 90^\circ + \arctan\left(\frac{p+0.5}{4096} - 1\right)\right)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{p+0.5}{4096} - 1\right) \cdot \cos\left(2\gamma - 90^\circ\right) \cdot \frac{150mm \cdot \sin\left(90^\circ - \arctan\left(\frac{p+0.5}{4096} - 1\right)\right)}{\sin\left(2\gamma - 90^\circ + \arctan\left(\frac{p+0.5}{4096} - 1\right)\right)} \\ \cos\left(2\gamma - 90^\circ\right) \cdot \frac{150mm \cdot \sin\left(90^\circ - \arctan\left(\frac{p+0.5}{4096} - 1\right)\right)}{\sin\left(2\gamma - 90^\circ + \arctan\left(\frac{p+0.5}{4096} - 1\right)\right)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{p+0.5}{4096} - 1\right) \cdot f_3[f_2(\gamma), f_1(p)] \\ f_3[f_2(\gamma), f_1(p)] \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

f) Zum Spiegelwinkel $\gamma = 67^\circ$ wird ein Laserpunkt im Mittelpunkt von Pixel 5730 registriert. Welche Koordinaten hat der abgetastete Punkt mit oben beschriebenen Aufbau?

$$f_5(67^\circ, 5730) = (43.8599, 109.9113)^T$$