Graphische Datenverarbeitung WS17/18
Theorieübung 4

Salmah Ahmad (2880011) Markus Höhn (1683303)
Tobias Mertz (2274355) Steven Lamarr Reynolds (1620638)
Sascha Zenglein (2487032)

30. Januar 2018

Aufgabe 1: Beleuchtung (4 Punkte)

a) (1 Punkt)

i

Umrechnung von RGB in HSV:

$R' = R/255$
$G' = G/255$
$B' = B/255$
$max = max((R', G', B'))$
$min = min((R', G', B'))$
$\Delta = max - min$

$$tdiH = \begin{cases} 0^\circ & \Delta = 0 \\ 60^\circ \times (\frac{G'-B'}{\Delta}) & , max = R' \\ 60^\circ \times (\frac{B'-R'}{\Delta} + 2) & , max = G' \\ 60^\circ \times (\frac{R'-G'}{\Delta} + 4) & , max = B' \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} 0 & max = 0 \\ \frac{\Delta}{max}, & max \neq 0 \end{cases}$$

$V = max$

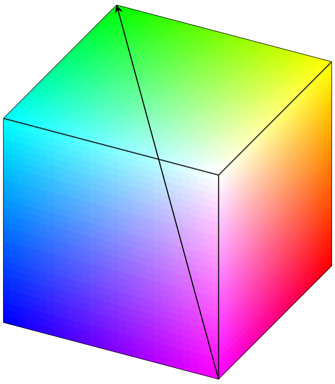
$$\text{Grün}_{HSV} = (120^\circ, 1, 1)$$
$$\text{Magenta}_{HSV} = (300^\circ, 1, 1)$$

ii

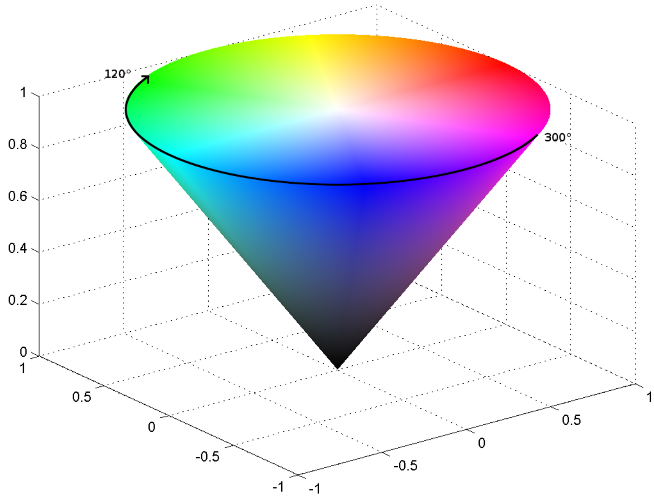
$f_{RGB}(x) = ((1-x) \cdot 255,\ x \cdot 255,\ (1-x) \cdot 255)$
$f_{HSV} = ((1-x) \cdot 300^\circ + x \cdot 120^\circ,\ 1,\ 1)$

iii

RGB Cube:



HSV Cone:



iv

$x_1 = 0.2$
$x_2 = 0.4$
$x_3 = 0.5$
$x_4 = 0.6$
$x_5 = 0.8$

$f_{RGB}(x_1) = (204, 51, 204)$
$f_{RGB}(x_2) = (153, 102, 153)$
$f_{RGB}(x_3) = (127.5, 127.5, 127.5)$
$f_{RGB}(x_4) = (102, 153, 102)$
$f_{RGB}(x_5) = (51, 204, 51)$

$f_{HSV}(x_1) = (264°, 1, 1)$

$f_{HSV}(x_2) = (228°, 1, 1)$
$f_{HSV}(x_3) = (210°, 1, 1)$
$f_{HSV}(x_4) = (192°, 1, 1)$
$f_{HSV}(x_5) = (156°, 1, 1)$

Der Farbverlauf im RGB-Cube geht von der unteren rechten pinken Ecke durch den Cube zu der oberen linken grünen Ecke. Dadurch entsteht ein Farbverlauf durch den Grauwert RGB(127.5, 127.5, 127.5). Die Rot-, Grün- und Blauwerte verändern sich entsprechend des Eingabewertes.
Im HSV-Raum bleiben Saturation und Value konstant, während der Hue-Wert sich ändert. So entsteht ein Farbverlauf von pink bei Hue=300° über die Blauwerte des Cones bis zu grün bei Hue=120°.

b) (1 Punkt)

Isotropic BRDF

Ist invariant bezüglich Rotation um die Normale. Kann vielleicht local berrechnet werden? Das Isotropische Material (z.B Plastik)

BRDF

Reflexioneigenschaften sind unabähngig von der Position. Daher kann BRDF local berrechnet werden. Das Homogene Material (z.B gebürstetes Metall) kann auch local berrechnet werden.

Spatially Varying BRDF

Verwendet eine 2d Location über dem Object Surface. Kann daher local berrechnet werden.

BSSRDF

Licht verlässt die Oberfläche eventuell an anderer Stelle. Daher kann es nicht Local berrechnet werden. Dadurch kann Licht von durchlässigen Materialien an andere abgegeben werden. Dadurch kann kein Material mehr local berrechnet werden.

Scattering Function

Abhängig von der Wellenlänge. Wellenlänge nicht mehr diskretisiert, Fluoreszenz. Daher nicht local berrechenbar. Wie bei BSSRDF kann kein Material mehr Local berrechnet werden.

allgemeines Reflexionsmodell

Kann nicht Local berrechnet werden. Wie bei BSSRDF kann kein Material mehr Local berrechnet werden.

c) (1 Punkt)

Gegeben:

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} \\ 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \|L + V\| = \sqrt{3}, k = 1, I_{BP} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$
\begin{aligned}
I_p &= f_p(\gamma) = (R(L)^T \cdot V)^k \cdot E = cos^k(\gamma) \cdot E \\
I_{BP} &= f_{BP}(\phi) = (H^T \cdot N)^k \cdot E = cos^k(\phi) \cdot E = \frac{\sqrt{6}}{3} \\
\phi &= \arccos(H^T \cdot N) = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 0.615
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{(H^T \cdot N)^k} = \frac{\sqrt{6} \cdot (H^T \cdot N)^k}{3} \\
&= \frac{\sqrt{6} \cdot \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^1}{3} = \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{L+V}{\|L+V\|} = \frac{L+V}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} = \frac{L+V}{\sqrt{3}} \\
L &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{3} - \begin{pmatrix} \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{0.5} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R(L) &= -L + 2\,(L \cdot N)\,N \\
&= -\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{0.5} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + 2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{0.5} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{0.5} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + 2 \left(\sqrt{0.5} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{0.5} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \arccos(R(L)^T \cdot V) \\
&= \arccos\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{0.5} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \arccos(0.5) \approx 1.047
\end{aligned}
$$

$$
I_p = cos(\gamma) \cdot E = 0.5 \cdot E = \frac{1}{3}
$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
I_p &= \frac{1}{3} \\
E &= \frac{2}{3} \\
\gamma &= \arccos(0.5) \approx 1.047 \\
\phi &= \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 0.615 \\
L &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{0.5} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\
R(L) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{0.5} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

d) (0.5 Punkte)

Im Falle $\gamma = \phi = 0$ ergeben sich:

$$
\begin{aligned}
I_P &= cos^k(\gamma) \cdot E = E \\
I_{BP} &= cos^k(\phi) \cdot E = E
\end{aligned}
$$

Damit sind sowohl $I_P \neq 0$ und $I_{BP} \neq 0$ als auch $\gamma = \phi$ erfüllt.

e) (0.5 Punkte)

Unter der Bedingung $cos^k(\gamma) > 0$ kann die Formel $I_P = cos(\gamma)^k \cdot E$ nur dann 0 ergeben, wenn $E = 0$ gilt.
Unter diesen Umständen würde allerdings auch $I_{BP} = cos(\phi)^k \cdot E = 0$ gelten.
Daher ist es niemals möglich, dass $I_P = 0$ und $I_{BP} > 0$ gleichzeitig gelten.

Aufgabe 2: Texturierung (2 Punkte)

a) (1 Punkt)

Zu berrechnen ist die Umkehrfunktion $(u, v) = F_{\text{inv map}}(x, y, z)$.

Gegeben sei $u, v \in [0, 1]$, r, h sowie x, y, z.

Das Zylinder-Mapping gibt an:
$x = r \cdot sin(u)$
$y = v$
$z = r \cdot cos(u)$

Daraus ergibt sich folgende Funktionen für v:

$$v = \frac{y}{h}$$

Falls $x \geq 0 \Leftrightarrow u \in [0, 0.5]$

$$u = \cos^{-1}(\frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}) \cdot \frac{1}{2\pi}$$

Sonst $x < 0 \Leftrightarrow u \in [0.5, 1]$

$$u = (2\pi - \cos^{-1}(\frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}})) \cdot \frac{1}{2\pi}$$

Alternativ ohne Fallunterscheidung:

$$u = \frac{1}{2\pi} \cdot atan2(x, z) + 0.5$$

b) (1 Punkt)

Rechteck

5	1	2	4	2
2	3	4	1	1
2	1	1	3	1
2	2	1	3	5
0	2	2	3	1

C_{sat}

5	6	8	12	14
7	11	17	22	25
9	14	21	29	33
11	18	26	37	46
11	20	30	44	54

schraffiertes Rechteck

1	2	4	2
3	4	1	1

$$c_{avg}(i_0, j_0, i_1, j_1) = \frac{\sum_{i=i_0}^{i_1} \sum_{j=j_0}^{j_1} C[i,j]}{(i_1 - i_0 + 1)(j_1 - j_0 + 1)}$$

$$c_{avg}(0,1,1,4) = \frac{25 - 0 - 7 + 0}{(1 - 0 + 1)(4 - 1 + 1)} = 2.125$$

Demnach benötigen wir 2 Zugriffe (1 Zugriff für $C_{sat}[i_1, j_1]$, 1 für $C_{sat}[i_1, j_0 - 1]$) wenn man C_{sat} verwendet.
Für die normale Berrechnung benötigen wir dagegen 8 Zugriffe (jeweils 1 Zugriff für jeden Grau-Textur-Wert).
Wir sparen dadurch 8 Zugriffe durch die Verwendung von C_{sat}.

Aufgabe 3: Perspektivisch korrekte Texturierung (4 Punkte)

a) (1 Punkt)

$l_1(s) = (3, -12)^T + s(-6, 6)^T \qquad s \in [0, 1]$

Berechnung von p und q:

$l_2(t) = p + t(q - p) \qquad t \in [0, 1]$

$\lambda \cdot (3, -12)^T = (x_1, -4)^T$
$-12\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$
$3\lambda = x_1 \Rightarrow x_1 = 1$
$\Rightarrow p = (1, -4)^T$

$\phi \cdot (-3, -6)^T = (x_2, -4)^T$
$-6\phi = -4 \Rightarrow \phi = \frac{2}{3}$
$-3\phi = x_2 \Rightarrow x_2 = -2$
$\Rightarrow q = (-2, -4)^T$

$l_2(t) = (1, -4) + t(-3, 0)$

Bei dem Liniensegment l_2 werden durch die Interpolation die unterschiedlichen z-Koordinaten von P und Q vernachlässigt, wodurch die Textur möglicherweise verzerrt dargestellt wird.

b) (1 Punkt)

$$l_3 = -4 \cdot \left(\frac{x_1 + s(x_2 - x_1)}{z_1 + s(z_2 - z_1)}, 1 \right)^T$$
$$l_3 = -4 \cdot \left(\frac{3 - 6s}{-12 + 6s}, 1 \right)^T$$

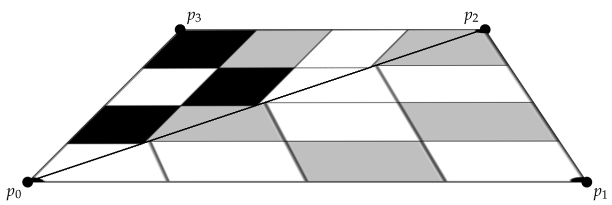
c) (1 Punkt)

$$l_2 = l_3$$
$$-4 \cdot \left(\tfrac{x_1}{x_2} + t(\tfrac{x_2}{z_2} - \tfrac{x_1}{z_1}) \right) = -4 \cdot \left(\frac{x_1 + s(x_2 - x_1)}{z_1 + s(z_2 - z_1)} \right)$$
$$-4 \cdot \left(\tfrac{3}{-3} + t(\tfrac{-3}{-6} - \tfrac{3}{-12}) \right) = -4 \cdot \left(\frac{3 - 6s}{-12 + 6s} \right)$$
$$\Rightarrow s = \frac{-12t}{-6 - 6t}$$

Durch die Umstellung auf s können wir aus der einfachen Interpolation $l_2(t)$ die perspektivisch projezierte Interpolation $l_3(s)$ berechnen. Damit können aus den perspektivisch verzerrten Texturkoordinaten die perspektivisch korrekten Koordinaten errechnet werden.

d) (1 Punkt)

ohne perspektivische Korrektur:



mit perspektivischer Korrektur: