Abgabemodalitäten

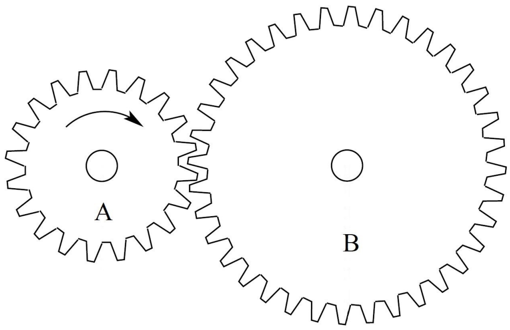
Deadline: 05.12.2017 um 9:50

Es wird eine Lösung pro Gruppe abgegeben. Die Lösung kann auf Moodle hochgeladen werden oder sie kann handschriftlich in der Übung abgegeben werden. Bitte die **Gruppennummer** auf allen Blättern angeben.

Aufgabe 1 Transformationen (2 Punkte)

Gegeben sei eine Szene mit zwei Zahnrädern A und B. Zahnrad A hat 20 Zähne, Zahnrad B hat 50 Zähne. Der Mittelpunkt des Zahnrades A befindet sich bei $(x, y, z)^\mathsf{T} = (5, 7, 5)^\mathsf{T}$ Der Mittelpunkt des Zahnrades B befindet sich bei $(x, y, z)^\mathsf{T} = (5, 7, 2)^\mathsf{T}$.

Es handelt sich hier um ein rechtshändiges Koordinatensystem und die x-Achse steht orthogonal auf der Vorderseite der Zahnräder (Das heißt die x-Achse zeigt in der folgenden Skizze in Richtung des Betrachters).



Nun soll die Szene animiert werden, indem sich Zahnrad A um seine Rotationsachse mit Winkel α in Pfeilrichtung dreht. Das Zahnrad B muss der Anzahl der Zähne entsprechend in entgegengesetzter Richtung rotiert werden.

Das Zahnrad A ist ein Objekt, dass als Polygonnetz (Mesh) gespeichert ist. Eine transformation eines Objekts wird durchgeführt indem alle vertices $v_i^a \in A$ des Polygonnetzes mit einer Transformationsmatrix multipliziert werden.

Das Zahnrad B hat entsprechend vertices $v_i^b \in B$.

Berechnen Sie die vollständigen 4x4 Transformationsmatrizen $M^A(\alpha)$ und $M^B(\alpha)$ für die Zahnräder A und B in abhängigkeit von α. Aus der Multiplikation mit der Transformationsmatrix ergibt sich also jeweils die neue Position $\tilde{v}$ eines Vertex:

$$\tilde{v}_i^a = M^A(\alpha) \cdot v_i^a$$
$$\tilde{v}_i^b = M^B(\alpha) \cdot v_i^b$$

Hinweis: Die Transformationsmatrix besteht **nicht** nur aus einer Rotationsmatrix! Diese Transformationsmatrix ist eine Kombination aus elementaren Transformationen (Deshalb verwenden wir ja auch die homogenen 4x4 Matrizen).

Bemerkung: Die Matrizen müssen in homogener 4x4 Form vorliegen. Die Vertices werden natürlich ebenfalls in homogener 4D Form verwendet.

2 Punkte

Prof. Dr. Dieter W. Fellner
M.Sc. Roman Getto
Julian Zobel

Aufgabe 2 Baryzentrische Koordinaten (5 Punkte)

Um Baryzentrische Koordinaten zu berechnen benötigen wir die Flächeninhalte $A(\Delta(...))$ eines Gesamtdreiecks (p_0, p_1, p_2), sowie der 3 Teildreiecke (Siehe Folie 9, Vorlesung 04).

Alternativ kann man aber auch die Determinante der folgenden Matrix verwenden:

$$M := \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \text{ und } p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$$

Nimmt man $p_i = (x_i, y_i)^\top$ und $\hat{p}_i = (x_i, y_i, 0)^\top$ Dann kann man zeigen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|M| &= \frac{1}{2}(x_0y_1 + x_1y_2 + x_2y_0 - x_0y_2 - x_1y_0 - x_2y_1) \\ &= \frac{1}{2}|(\hat{p}_1 - \hat{p}_0) \times (\hat{p}_2 - \hat{p}_0)| \\ &= A(\Delta(p_0, p_1, p_2)) \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt $A(\Delta(p_0, p_1, p_2))$ entspricht also der Hälfte der Determinanten der Matrix M.

Bemerkung: $\hat{p}_i = (x_i, y_i, 0)^\top$ wurde hier als Einbettung ins $\mathbb{R}^3$ verwendet da das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^2$ nicht definiert ist.

a) Gegeben sei ein Tetraeder $T = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3]$ mit $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)^\top, \mathbf{p}_1 = (-2, 1, 0)^\top, \mathbf{p}_2 = (0, 5, 1)^\top$ und $\mathbf{p}_3 = (-1, 2, 4)^\top$.

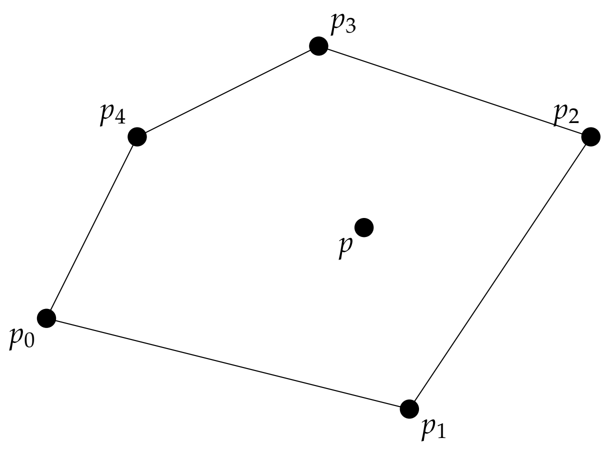
Berechnen Sie die baryzentrischen Koordinaten λ_i , $i = 0, 1, 2, 3$ für den Punkt $\mathbf{p} = (-1, 2, 2)^\top$. Verwenden sie dafür die Determinanten der Matrizen folgender Form:

$$M = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5 Punkte

b) *Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten* sind nicht hinsichtlich eines $k + 1$ Simplexes des $\mathbb{R}^k$ (Linien im $\mathbb{R}^1$, Dreiecke im $\mathbb{R}^2$, Tetraeder im $\mathbb{R}^3$, ...) definiert, sondern hinsichtlich allgemeiner Polygone $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$ mit $n + 1$ Eckpunkten.

Gegeben Sei ein Pentagon:



mit $p_0 = (0, 1)^\top$, $p_1 = (4, 0)^\top$, $p_2 = (6, 3)^\top$, $p_3 = (3, 4)^\top$, $p_4 = (1, 3)^\top$.

Berechnen sie **zwei** Tupel $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ der verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten für den Punkt $p = (3.5, 2)^\top$, wobei gelten soll: $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$.

Für das **erste** Tupel soll gelten: $\lambda_i \geq 0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Es ist also erlaubt dass ein oder mehrere Lambdas gleich null sind.

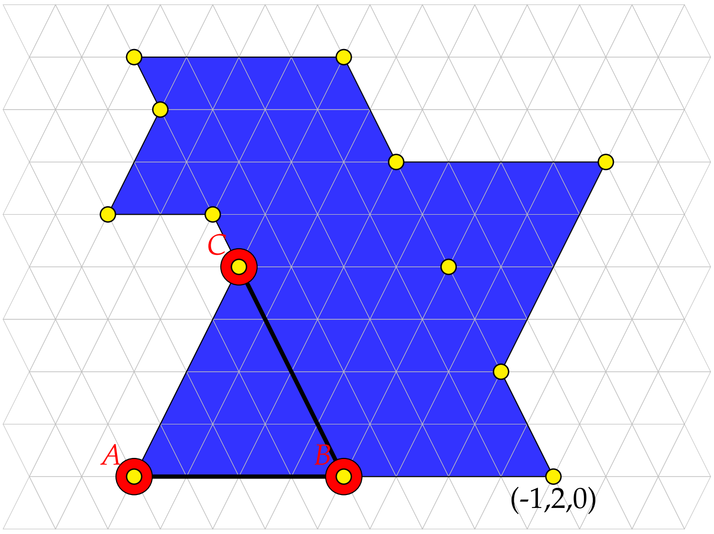
Für das **zweite** Tupel soll die strengere Annahme $\lambda_i > 0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ gelten.

Bemerkung: Die beiden Tupel müssen unterschiedlich sein!

2 Punkte

c) Tragen Sie in den folgenden Zeichnungen für alle gelb markierten Punkte die baryzentrischen Koordinaten bezogen auf die jeweiligen drei Punkte A, B und $C \in \mathbb{R}^2$ ein. Für einen Punkt p mit den baryzentrischen Koordinaten $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ soll also $p = \lambda_0 \cdot A + \lambda_1 \cdot B + \lambda_2 \cdot C$ gelten. Als Hilfestellung ist das Ergebnis für einen gelb markierten Punkt bereits eingetragen.

Hinweis: Es sind absichtlich keine Koordinaten für A, B und C angegeben. Diese brauchen Sie auch nicht! Die jeweiligen Werte für $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ an den Punkten A, B und C sind eindeutig definiert. Überlegen Sie sich wie diese Werte sich von A nach B und von B nach C ändern und wie man dadurch den Wert jedes anderen Punktes bestimmen kann.



1.5 Punkte

Aufgabe 3 Räumliche Datenstrukturen (3 Punkte)

a) Für Hüllkörperhierarchien, Reguläre Gitter und Octrees seien folgende naiven Ansätze vorgegeben welche beschreiben welche Anpassungen vorgenommen werden sobald ein Objekt im Raum bewegt wird (d.h. seine Position verändert).

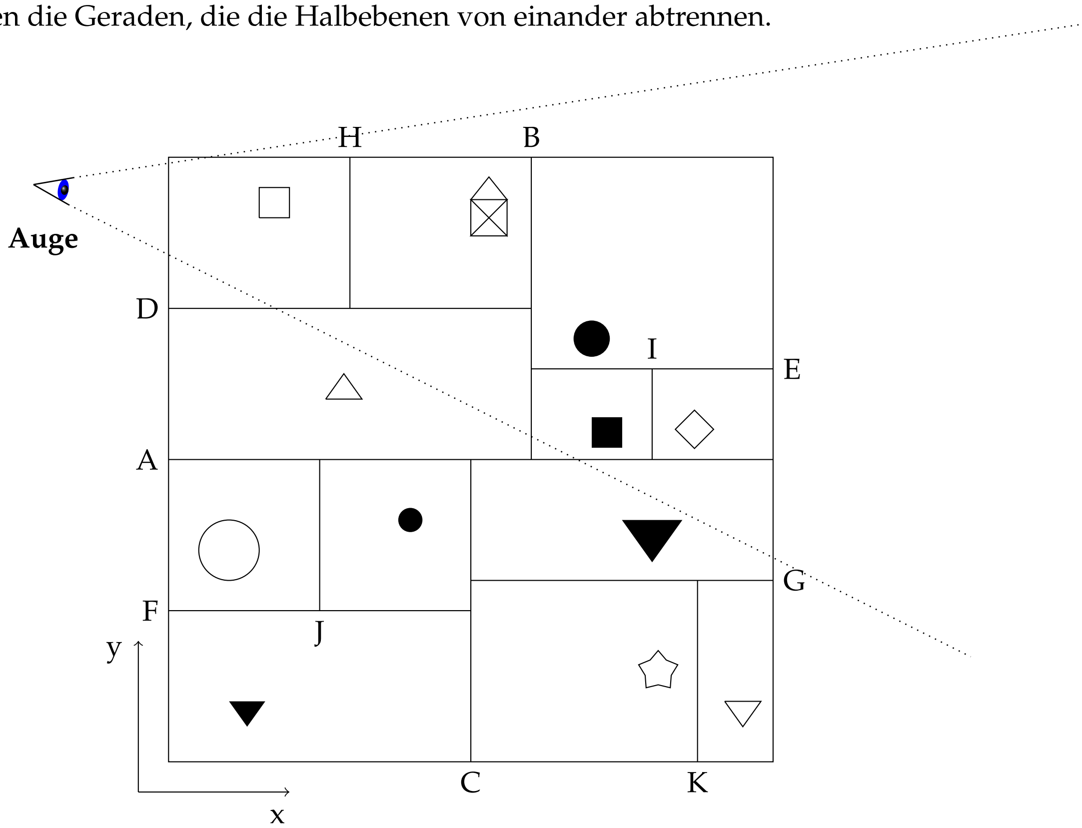
- Hüllkörperhierarchien: Das Bounding Volume (BV) des Objekts selbst wird für die neue Position neu berechnet und ersetzt das alte BV in der Hierarchie. Die in der Hierarchie übergeordneten BVs werden entsprechend vergrößert bzw. verkleinert, sodass das neue BV des verschobenen Objekts vollständig enthalten ist.
- Reguläre Gitter: Das Objekt wird aus allen Zellen entfernt in denen es nicht mehr enthalten ist und wird zu allen Zellen hinzugefügt in denen es neu enthalten ist.
- Octrees: Genauso wie bei Regulären Gittern.

Erklären Sie für alle drei Datenstrukturen ob und warum diese Änderungen für dynamische Szenen ausreichend sind. Überlegen Sie sich insbesondere inwiefern der Zweck der Datenstruktur (die beschleunigte Suche von Objekten im Raum) weiter erfüllt wird.

Hinweis: Mit dynamischen Szenen sind Szenen gemeint in denen viele Positionsänderungen von Objekten stattfinden.

1.5 Punkte

b) Gegeben ist eine 2D-Szene mit Objekten, wobei jedes Symbol ein Objekt repräsentiert. Weiterhin gegeben ist eine KD-Tree–Zerlegung dieser Szene. Die Buchstaben kennzeichnen die Geraden, die die Halbebenen von einander abtrennen.



Zeichnen sie den dazugehörigen Baum dieser Szene. Gehen sie dabei so vor, daß der linke Teilbaum den Raum mit kleineren Koordinaten enthält, der rechte Teilbaum den Raum mit größeren Koordinaten. In den Blättern soll jeweils ein Objekt enthalten sein.

1 Punkt

c) Welche Teilbäume des KD-Tree können für das in b) eingezeichnete View Frustum verworfen werden?

1 Punkt

Prof. Dr. Dieter W. Fellner
M.Sc. Roman Getto
Julian Zobel