UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR
THEORETISCHE INFORMATIK

Übungszettel 10

Unentscheidbare Probleme

Abgabe bis 16. Januar 2014

Übungszettel zur Vorlesung *Theoretische Informatik* im Wintersemester 2013/2014

Maciej Liśkiewicz, Oliver Witt, Jan Heitmann, Fabian Klötzl, Karol Lassota, Florian Thaeter

Aufgabe 10.1 Reduktion, 4 Punkte

Gegeben sei eine Funktion $f\colon \{0,1,\#\}^* \to \{0,1\}^*$, für die für jedes Codewort $w \in \{0,1\}^*$ und jedes Wort $x \in \{0,1\}^*$ gilt, dass $f(w\#x) = w'$, wobei die Turing-Maschine $M_{w'}$ Folgendes tut:

1. $M_{w'}$ löscht die Eingabe,
2. schreibt dann das Wort x auf das Band und
3. simuliert dann M_w auf x.

Für alle anderen Worte $v \in \{0,1,\#\}^*$ gelte $f(v) = \lambda$. Dabei codiere $\lambda \notin \textsc{codes}$ eine Default-TM, die keinen akzeptierenden Zustand hat und nie hält.

Beweisen Sie, dass sich das Halteproblem auf das Problem
$SH = \{w \mid M_w \text{ hält bei Eingabe } w \text{ an}\}$ mittels der Funktion f reduzieren lässt.

Aufgabe 10.2 Reduktion, 6 Punkte

Beweisen Sie mittels Reduktion, dass die folgenden Sprachen nicht rekursiv sind:

1. $L_1 = \{\, w \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } \texttt{0110111} \text{ und } \texttt{11101101} \,\}$,
2. $L_2 = \{\, w \mid M_w \text{ hält auf jedem binären Palindrom} \,\}$,
3. $L_3 = \{\, w\#x \mid M_w \text{ hält auf } x \text{ nach einer geraden Anzahl von Schritten} \,\}$.

Aufgabe 10.3 Reduktion, 4 Punkte

Zeigen Sie per Reduktion, dass die folgenden Sprachen nicht rekursiv sind:

1. $L_1 = \{\, w\#w' \mid L(M_w) = L(M_{w'}) \,\}$,
2. $L_2 = \{\, w\#w' \mid L(M_w) \cap L(M_{w'}) = \emptyset \,\}$.

Aufgabe 10.4 Satz von Rice, 4 Punkte

Beweisen Sie mithilfe des Satzes von Rice, dass die folgenden Sprachen nicht rekursiv sind:

1. $L_1 = \{\, w \mid L(M_w) \text{ ist kontextsensitiv} \,\}$,
2. $L_A = \{\, w \mid L(M_w) = A \,\}$ für eine feste Sprache $A \in \textsc{re}$.

Aufgabe* 10.5 Das Halteproblem für 2DFAs, 2 Bonuspunkte

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie man jede Turing-Maschine eindeutig durch ein binäres Codewort w codieren kann. Ein analoges Vorgehen lässt sich auch bei 2DFAs anwenden. In dieser Aufgabe sei mit M_w der 2DFA gemeint, der durch das Codewort w repräsentiert wird.

Nun sei die Sprache $L = \{\, w\#x \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x \,\}$ gegeben. Dies entspricht dem Halteproblem für 2DFAs. Ist dieses Problem entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe* 10.6 Rekursive Aufzählbarkeit, 3 Bonuspunkte

Zeigen Sie, dass sowohl die Sprache $\textsc{total} = \{w \mid M_w \text{ hält bei allen Eingaben}\}$ als auch das Komplement von $\textsc{total}$ nicht rekursiv aufzählbar sind.