# Algorithmendesign

Lösungen zu Übungsblatt 9
WS 13/14

Gruppe 2
Max Bannach

Markus Richter (614027)

---

## Aufgabe 9.3 Kuckucks-Hashing

### Teilaufgabe 1)

$h(x) = ((11x + 14) \mod 17) \mod 3$ $\qquad$ $h'(x) = ((x + 10) \mod 17) \mod 3$

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | |
| 1 | 3 | | | | |
| 2 | | | | | |

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | | | |
| 2 | | | | | |

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 5 | | | |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 3 | | |
| 2 | | | 2 | | |

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 5 | 5 | | |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 7 | |
| 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | |
| 2 | | | 2 | 2 | |

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 5 | 5 | 5 | |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |

Kollision!

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 7 | 7 |
| 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | | | 2 | 2 | ~~2~~ 10 |

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 7 | 7 |
| 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | | | 2 | 2 | 10 |

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 5 | 5 | 5 | ~~5~~ 2 |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 7 | 7 |
| 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | $\cancel{3}$ 5 |
| 2 | | | 2 | 2 | 10 |

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 5 | 5 | 5 | 2 |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 7 | 7 |
| 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 5 |
| 2 | | | 2 | 2 | 10 |

| | 3 | 5 | 2 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 5 | 5 | 5 | 2 |
| 1 | | | | | 3 |
| 2 | | | | | |

## Teilaufgabe 2

Sei zufällig folgendes gegeben:

$$h(x) = x \mod 11$$

| | 20 | 50 | 53 | 75 | 100 | 67 | 105 | 3 | 36 | 39 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | 100 | 67 | 67 | 67 | 67 | 100 |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | 3 | 3 | 36 |
| 4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | |
| 6 | | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 |
| 7 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | |
| 9 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 53 | 53 | 53 | 75 |
| 10 | | | | | | | | | | |

$$h'(x) = \left\lfloor \frac{k}{11} \right\rfloor \mod 11$$

| | 20 | 50 | 53 | 75 | 100 | 67 | 105 | 3 | 36 | 39 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | 3 |
| 1 | | | | | | | 20 | 20 | 20 | 20 |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | 36 | 39 |
| 4 | | | 53 | 53 | 53 | 53 | 50 | 50 | 50 | 53 |
| 5 | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | 75 | 75 | 75 | 75 | 75 | 75 | 67 |
| 7 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | 100 | 100 | 100 | 100 | 105 |
| 10 | | | | | | | | | | |

Fügt man nun eine 6 ein gerät man in einen Zyklus:

| Schlüssel | h(x) alter Wert | h(x) neuer Wert | h'(x) alter Wert | h'(x) neuer Wert |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 50 | 6 | 53 | 50 |
| 53 | 75 | 53 | 67 | 75 |
| 67 | 100 | 67 | 105 | 100 |
| 105 | 6 | 105 | 3 | 6 |
| 3 | 36 | 3 | 39 | 36 |
| 39 | 105 | 39 | 100 | 105 |
| 100 | 67 | 100 | 75 | 67 |
| 75 | 53 | 75 | 50 | 53 |
| 50 | 39 | 50 | 36 | 39 |
| 36 | 3 | 36 | 6 | 3 |
| 6 | 50 | 6 | 53 | 50 |

## Aufgabe 9.4 Wir bauen einen Flughafen!

### Teilaufgabe 1

Das Optimierungsproblem sei $\Pi$ genannt, wobei für eine Eingabe $X = x_1, \dots, x_n$ eine Folge von Aktionen $Y = y_1, \dots, y_n$ zu bestimmten ist. Sei $X$ in diesem Beispiel eine binäre Folge, die mit einem Block von Einsen beginnt, welche die Jahre repräsentieren, in denen noch gebaut wird. Wenn der Flughafen zum Zeitpunkt $x_i = 1$ fertiggestellt wird wechselt die Folge ab $x_{i+1}$ auf 0. Die Ausgabe $Y$ gibt an, ob bei einem $x_i = 1$ die Aktion KAUF durchgeführt wird, falls nicht bereits in der Vergangenheit geschehen, oder stattdessen die Aktion $y_i$ = MIET.

Um das Moor trockenzulegen, kann man die Pumpe

1. kaufen, wofür einmalig $K$ = 980.000 Euro anfallen, wovon aber sogleich $0,5 \cdot K$ also 490.000 Euro, wieder abgezogen werden, da das Gerät veräußert wird. Effektiv beträgt der Preis demnach 490.000 Euro.

2. mieten, wofür pro Jahr $L$ = 70.000 Euro anfallen.

$S_r$ beschreibt die möglichen Strategien, wobei $r = 0, 1, \dots$ die Jahre $r$ mieten bedeutet und, falls im Jahr $r + 1$ noch gebaut wird, danach einmalig kaufen.

Bezeichnet $t(X)$ die Anzahl der Einsen in $X$, so berechnen sich die Kosten von $S_r$ analog zum Beispiel aus dem Skript als:

$$cost(S_r) = \begin{cases} t(X) \cdot L & \text{falls } t(X) \leq r, \\ r \cdot L + K - 0,5 \cdot K & \text{sonst.} \end{cases}$$

### Teilaufgabe 2

Die optimale Strategie ist ebenfalls analog zum Skript – nur dass der Kaufpreis effektiv $0,5 \cdot K$ also 490.000 Euro beträgt – wie folgt

$$cost(\text{OPT}) = \begin{cases} t(X) \cdot L & \text{falls } t(X) \leq \frac{0,5 \cdot K}{L}, \\ r \cdot L + K - 0,5 \cdot K & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Verhältnis der Kosten von $S_r$ zu den minimalen Kosten beträgt

$$\frac{cost(S_r)}{cost(OPT)} = \begin{cases} \frac{t(X) \cdot L}{t(X) \cdot L} = 1 & \text{falls } t(X) \leq \min\left\{\frac{0,5 \cdot K}{L}\right\}, \\ \frac{t(X) \cdot L}{0,5 \cdot K} & \text{falls } \frac{0,5 \cdot K}{L} < t(X) \leq r, \\ \frac{r \cdot L + 0,5 \cdot K}{t(X) \cdot L} & \text{falls } r < t(X) \leq \frac{0,5 \cdot K}{L}, \\ \frac{r \cdot L + 0,5 \cdot K}{0,5 \cdot K} & \text{falls } t(X) > \min\left\{\frac{0,5 \cdot K}{L}, r\right\}. \end{cases}$$

Wir wollen nun den Parameter $r$ finden – denn nur darauf haben wir Einfluss – für den sich die Strategie $S_r$ ergibt, die den minimal schlimmen Worst-Case im Verhältnis zum optimalen Fall liefert, d. h. der Ausdruck

$\max\left\{\frac{r \cdot L}{K \cdot 0,5}, \frac{r \cdot L + K \cdot 0,5}{(r+1) \cdot L}, \frac{r \cdot L + K \cdot 0,5}{K \cdot 0,5}\right\}$ soll minimiert werden. Der dritte Term dominiert den ersten, d. h. es genügt den zweiten und dritten Term zu betrachten. Setzt man die beiden Terme gleich und rechnet nach $r$ um, so ergibt sich: $r = \frac{0,5 \cdot K}{L} - 1$

Setzt man diesen Wert in die oben genannten Terme ein ergibt sich analog zum Ski-Problem der Quotient $2 - \frac{L}{0,5 \cdot K}$. Der zweite Fall ist nicht relevant, weil hierfür 2 raus kommt, die immer größer ist als der oben genannte Quotient.

Daraus folgt, dass konkret in diesem Beispiel, $r = \frac{490.000}{70.000} - 1 = 6$ Jahre die bestmögliche Strategie ergibt, sofern man kein vorheriges Wissen bzgl. der Bauzeit hat. Diese Lösung ist maximal $2 - \frac{70.000}{490.000} = 1,8571$, also $0,8571$ mal schlechter als die optimale Strategie.