Zahlensysteme

Auf der Welt gibt es unzählige Sprachen, von denen jede ihren eigenen Wortschatz, ihre eigene Grammatik und ihre eigenen Symbole, zur bildlichen Darstellung dessen, was man ausdrücken will, mitbringt.

Die deutsche Sprache verwendet neben einigen Sonderzeichen (z.B. Ä, Ü, Ö) beispielsweise die Symbole A bis Z bzw. a bis z, um daraus Wörter zusammenzusetzen. Chinesisch verwendet wiederum völlig andere Symbole, ebenso wie Sprachen aus dem arabischen Raum.

Sprachen verwenden wir, um Worte auszudrücken, z.B. "Hallo", "Computer" oder "Country"

Zahlensysteme werden im Gegensatz dazu verwendet, um Zahlenwerte auszudrücken.

Auch hier gibt es "Sprachen", die jeweils ihre eigenen Symbole (Ziffern) mitbringen, um einen Zahlenwert auszudrücken.

Das Dezimalsystem beispielsweise, welches wir Menschen hauptsächlich verwenden, bringt 10 Ziffern mit, um einen Zahlenwert auszudrücken. Diese lauten 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9

Außerdem bringt es noch das Symbol "-" zur Darstellung von negativen Zahlen mit.

Das Binärsystem wiederum bringt nur zwei Ziffern mit, nämlich 0 und 1.

Im Hexadezimalsystem gibt es sogar 16 Ziffern, nämlich neben den Ziffern 0 bis 9 noch die Buchstaben A-F.

Es gibt auch noch andere Zahlensysteme, z.B. das Oktalsystem welches die Ziffern 0 bis 7 mitbringt.

Diese Ziffern ergeben zusammengesetzt einen bestimmten Zahlenwert, so wie man Buchstaben zu einem Wort zusammensetzt.

Und ebenso wie ein bestimmtes Wort in unterschiedlichen Sprachen unterschiedlich dargestellt wird, wird ein Zahlenwert von einem Zahlensystem zum anderen ebenfalls unterschiedlich dargestellt.

Das deutsche Wort "wo" beispielsweise lautet in englischer Sprache "where".

Übertragen auf Zahlensysteme würde ein Zahlenwert, der im dezimalen Zahlensystem als 200 dargestellt wird, im binären Zahlensystem als %11001000 und im hexadezimalen Zahlensystem als $C8 dargestellt werden.

Hinweis:

In den folgenden Ausführungen werde ich klarerweise sehr oft Darstellungen von Werten in unterschiedlichen Zahlensystem verwenden.

Damit ich die Schreibweisen nicht immer extra erwähnen muss, gebe ich ab jetzt Binärzahlen mit führendem "%", Hexadezimalzahlen mit führendem "$" und Dezimalzahlen ohne führendes Symbol an.

Keine Sorge, wir kommen auf die "Übersetzungen" zwischen den einzelnen Zahlensystemen noch genau zu sprechen, der soeben genannte binäre Zahlenwert %11001000 und hexadezimale Zahlenwert $C8 sollten nur mal als Beispiel für unterschiedliche Darstellungen in unterschiedlichen Zahlensystemen dienen.

Nichtsdestotrotz muss ich ein wenig vorgreifen und die Übersetzungen der Ziffern zwischen dem Dezimalsystem, dem Binärsystem und dem Hexadezimalsystem gegenüberstellen.

Nehmen Sie diese Übersetzungen für den Moment bitte mal so hin. Wie man eine Zahl von einem Zahlensystem ins andere übersetzt, werde ich noch im Detail erklären.

dezimal	**hexadezimal**	**binär**
0	0	0
1	1	1
2	2	10
3	3	11
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Die farbig markierten Bereiche stellen die Ziffern in dem jeweiligen Zahlensystem dar.

Wie bereits erwähnt, bestehen Zahlenwerte, unabhängig vom Zahlensystem, aus einer oder mehreren Ziffern. Die Positionen an denen sich die Ziffern innerhalb des Zahlenwertes befinden, möchte ich ab jetzt als Stellen bezeichnen, welche ich für die nachfolgenden Ausführungen von rechts und mit 0 beginnend aufsteigend durchnummerieren möchte.

Beispiel 1:

Beginnen wir mit unserem vertrauten Dezimalsystem und nehmen als Beispiel die Zahl 5376.

Diese Zahl besteht aus 4 Ziffern.

An Stelle Nr. 0 haben wir hier die Ziffer 6, an Stelle Nr. 1 die Ziffer 7, an Stelle Nr. 2 die Ziffer 3 und an Stelle Nr. 3 die Ziffer 5.

Beispiel 2:

Die binäre Zahl %10110

Diese Zahl besteht aus 5 Ziffern welche von 0 bis 4 nummeriert sind.
An Stelle Nr. 0 haben wir hier die Ziffer %0, an Stelle Nr. 1 die Ziffer %1, an Stelle Nr. 2 die Ziffer %1, an Stelle Nr. 3 die Ziffer %0 und an Stelle Nr. 4 die Ziffer %1.

Beispiel 3:

Die hexadezimale Zahl $C8

An Stelle Nr. 0 haben wir die Ziffer $8 und an Stelle Nr. 1 die Ziffer $C.

Doch was unterscheidet nun die Zahlensysteme voneinander wenn man mal von der unterschiedlichen Anzahl und Art der Ziffern absieht?

Der Unterschied liegt in der Wertigkeit der einzelnen Stellen. Jedes Zahlensystem hat einen bestimmten Basiswert, auf dem die Wertigkeit der einzelnen Stellen basieren.

Im Dezimalsystem ist dies die Zahl 10, im Binärsystem die Zahl 2 und im hexadezimalen System die Zahl 16. Im angesprochenen Oktalsystem wäre das die Zahl 8, man kann also mit jedem Basiswert ein neues Zahlensystem bilden, z.B. auch mit dem Basiswert 3 wenn man will.

Die Wertigkeiten der einzelnen Stellen ergeben sich aus der Potenz:

Basiszahl des Zahlensystems hoch Nummer der Stelle

Wertigkeiten im Dezimalsystem:

10 hoch 0 = 1
10 hoch 1 = 10
10 hoch 2 = 100
10 hoch 3 = 1000
10 hoch 4 = 10000
...

Wertigkeiten im Binärsystem:

2 hoch 0 = 1
2 hoch 1 = 2
2 hoch 2 = 4
2 hoch 3 = 8
2 hoch 4 = 16
…

Wertigkeiten im Hexadezimalsystem:

16 hoch 0 = 1
16 hoch 1 = 16
16 hoch 2 = 256
16 hoch 3 = 4096
16 hoch 4 = 65536
…

Ok, was haben wir bis jetzt? Wir haben eine Reihe aus Ziffern vor uns, wir wissen aus der obigen Tabelle welchen dezimalen Wert jede Ziffer hat.

Im Falle einer Binärzahl entweder den dezimalen Wert 0 oder 1 und im Falle einer Hexadezimalzahl ein dezimalen Wert zwischen 0 und 15. Die hexadezimale Ziffer $D würde laut der Tabelle dem dezimalen Wert 13 entsprechen.

Wir wissen außerdem, welche dezimale Wertigkeit eine bestimmte Stelle im jeweiligen Zahlensystem hat (siehe oben)

Wie kommen wir nun zum dezimalen Gesamtwert einer Zahl die uns als Zahl aus einem anderen Zahlensystem vorliegt?

Um den dezimalen Wert einer Zahl zu erhalten, geht man die Zahl Stelle für Stelle durch, multipliziert die dezimale Wertigkeit an dieser Stelle mit der dezimalen Ziffer an dieser Stelle und am Ende summiert man diese Produkte auf, um den dezimalen Wert zu erhalten, den die Zahl darstellt.

Spielen wir die Sache mal anhand der oben genannten dezimalen Zahl 5376 durch. Klar, wir wissen natürlich was rauskommt, nämlich 5376, aber nehmen wir mal an, wir sehen nur die dezimalen Ziffern 5, 3, 7 und 6 vor uns und wollen den Gesamtwert ausrechnen.

Wir gehen vor wie vorhin beschrieben, d.h. wir bilden jeweils das Produkt der Ziffer und der Wertigkeit an dieser Stelle und am Ende summieren wir diese Produkte zum Gesamtwert auf.

6 * (10 hoch 0) = 6 * 1 = 6
7 * (10 hoch 1) = 7 * 10 = 70
3 * (10 hoch 2) = 3 * 100 = 300
5 * (10 hoch 3) = 5 * 1000 = 5000

Nun summieren wir diese Einzelwerte:

6 + 70 + 300 + 5000 = 5376

Nun wenden wir dasselbe Schema auf die oben genannte Binärzahl %10110 an.

%0 * (2 hoch 0) = 0 * 1 = 0
%1 * (2 hoch 1) = 1 * 2 = 2
%1 * (2 hoch 2) = 1 * 4 = 4
%0 * (2 hoch 3) = 0 * 8 = 0
%1 * (2 hoch 4) = 1 * 16 = 16

Nun summieren wir wieder die Einzelwerte:

0 + 2 + 4 + 0 + 16 = 22

Wenden wir das Schema nun auch auf die hexadezimale Zahl $C8 an.

$8 * (16 hoch 0) = 8 * 1 = 8
$C * (16 hoch 1) = 12 * 16 = 192

Summe der Einzelwerte:

8 + 192 = 200

Jetzt haben wir gelernt wie wir eine Binärzahl oder eine Hexadezimalzahl ins Dezimalsystem umrechnen können.

Spielen wir das zur Übung nochmal anhand zweier Beispiele durch:

Beispiel 1:

Binärzahl %1001111000101

%1 * (2 hoch 0) = 1 * 1 = 1
%0 * (2 hoch 1) = 0 * 2 = 0
%1 * (2 hoch 2) = 1 * 4 = 4
%0 * (2 hoch 3) = 0 * 8 = 0
%0 * (2 hoch 4) = 0 * 16 = 0
%0 * (2 hoch 5) = 0 * 32 = 0
%1 * (2 hoch 6) = 1 * 64 = 64
%1 * (2 hoch 7) = 1 * 128 = 128
%1 * (2 hoch 8) = 1 * 256 = 256
%1 * (2 hoch 9) = 1 * 512 = 512
%0 * (2 hoch 10) = 0 * 1024 = 0
%0 * (2 hoch 11) = 0 * 2048 = 0
%1 * (2 hoch 12) = 1 * 4096 = 4096

1 + 0 + 4 + 0 + 0 + 0 + 64 + 128 + 256 + 512 + 0 + 0 + 4096 = 5061

Beispiel 2:

Hexadezimalzahl $FA37

$7 * (16 hoch 0) = 7 * 1 = 7
$3 * (16 hoch 1) = 3 * 16 = 48
$A * (16 hoch 2) = 10 * 256 = 2560
$F * (16 hoch 3) = 15 * 4096 = 61440

7 + 48 + 2560 + 61440 = 64055

Doch wie sieht der umgekehrte Weg aus? Wie kann man eine Dezimalzahl in eine Binärzahl oder eine Hexadezimalzahl umrechnen?

Kurzbeschreibung die für jedes gewünschte Ziel-Zahlensystem gilt:

Man dividiert die Dezimalzahl laufend durch die Basis des gewünschten Ziel-Zahlensystems und schreibt den Rest, der bei der Division bleibt auf (in der Darstellung des Ziel-Zahlensystems).

Das Ergebnis der Division nimmt man als Ausgangsbasis für die nächste Division. Man dividiert so lange, bis das Ergebnis der Division gleich 0 ist. Dann schreibt man die Restwerte von unten beginnend nebeneinander und hat das gewünschte Ergebnis.

Beispiel 1:

Umrechnen der Dezimalzahl 2348 in das Binärsystem.

2348 : 2 = 1174	Rest %0
1174 : 2 = 587	Rest %0
587 : 2 = 293	Rest %1
293 : 2 = 146	Rest %1
146 : 2 = 73	Rest %0
73 : 2 = 36	Rest %1
36 : 2 = 18	Rest %0
18 : 2 = 9	Rest %0
9 : 2 = 4	Rest %1
4 : 2 = 2	Rest %0
2 : 2 = 1	Rest %0
1 : 2 = 0	Rest %1

Nun schreiben wir von unten beginnen die Restwerte nebeneinander und kommen auf das Ergebnis:

%100100101100

Beispiel 2:

Umrechnen der Dezimalzahl 55327 in das Hexadezimalsystem.

55327 : 16 = 3457	Rest $F (dezimal 15)
3457 : 16 = 216	Rest $1 (dezimal 1)
216 : 16 = 13	Rest $8 (dezimal 8)
13 : 16 = 0	Rest $D (dezimal 13)

Nun schreiben wir wie vorhin die Restwerte von unten beginnend nebeneinander und kommen auf das Ergebnis:

$D81F

Beispiel 3:

Umrechnen der Dezimalzahl 12 in das Binärsystem.

12 : 2 = 6	Rest %0
6 : 2 = 3	Rest %0
3 : 2 = 1	Rest %1
1 : 2 = 0	Rest %1

Das Ergebnis ist %1100 und wenn Sie einen kurzen Blick in die Tabelle werfen, in der die Ziffern der Zahlensysteme gegenübergestellt wurden, werden Sie sehen, dass dies korrekt ist:

12	C	1100

Beispiel 4:

Umrechnen der Dezimalzahl 1024 in das Hexadezimalsystem.

1024 : 16 = 64	Rest $0 (dezimal 0)
64 : 16 = 4	Rest $0 (dezimal 0)
4 : 16 = 0	Rest $4 (dezimal 4)

Nun wieder die Restwerte von unten beginnend nebeneinander schreiben und wir kommen auf das Ergebnis:

$400

Eine Hexadezimalzahl in eine Binärzahl umzuwandeln und umgekehrt ist recht einfach wie Sie gleich sehen werden.

Das Hexadezimalsystem besitzt wir wir nun wissen 16 Ziffern, 0-9 und A-F.

Wieviele Werte kann man mit einer Ziffer im Hexadezimalsystem darstellen? Richtig, 16.

Wieviele Ziffern braucht man dafür im Binärsystem? Richtig, 4, denn $F entspricht %1111
Um den höchsten Wert, welchen man mit einer hexadezimalen Ziffer darstellen kann ($F), binär darzustellen, braucht es also eine vierstellige Binärzahl.

Um also eine Hexadezimalzahl in eine Binärzahl umzuwandeln, braucht man nur die binären Gegenstücke ihrer Ziffern aus der Tabelle nebeneinander aufschreiben.

Dabei gilt es jedoch folgendes zu beachten:

Sollte das binäre Gegenstück der jeweiligen hexadezimalen Ziffer weniger als 4 Stellen haben, dann muss diese mit 0-Stellen auf diese Länge von 4 Stellen aufgefüllt werden, damit die Reihenfolge der entsprechenden Stellen wieder zusammenpasst.

Hier ein Beispiel:

Wir wollen die Hexadezimalzahl $AFDE ins Binärsystem umwandeln.

$A = binär %1010
$F = binär %1111
$D = binär %1101
$E = binär %1110

Nun schreiben wir binären Gegenstücke der Ziffern nebeneinander.

$A	$F	$D	$E
1010	1111	1101	1110

Das binäre Gegenstück zu $AFDE lautet also %1010111111011110

Nun ein Beispiel bei dem die binären Gegenstücke der hexadezimalen Ziffern teilweise weniger als 4 Stellen haben.

Wir wollen die Hexadezimalzahl $3D7F ins Binärsystem umwandeln.

$3 = %11
$D = $1101
$7 = %111
$F = %1111

$3	$D	$7	$F
11	1101	111	1111

Das ergibt nebeneinander geschrieben 1111011111111

Rechnen wir diese Binärzahl ins Dezimalsystem um:

%1 * (2 hoch 0) = 1 * 1 = 1
%1 * (2 hoch 1) = 1 * 2 = 2
%1 * (2 hoch 2) = 1 * 4 = 4
%1 * (2 hoch 3) = 1 * 8 = 8
%1 * (2 hoch 4) = 1 * 16 = 16
%1 * (2 hoch 5) = 1 * 32 = 32
%1 * (2 hoch 6) = 1 * 64 = 64
%1 * (2 hoch 7) = 1 * 128 = 128
%0 * (2 hoch 8) = 0 * 256 = 0
%1 * (2 hoch 9) = 1 * 512 = 512
%1 * (2 hoch 10) = 1 * 1024 = 1024
%1 * (2 hoch 11) = 1 * 2048 = 2048
%1 * (2 hoch 12) = 1 * 4096 = 4096

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 0 + 512 + 1024 + 2048 + 4096 = 7935 oder $1EFF

Dies entspricht jedoch nicht unserer ursprünglichen Zahl $3D7F

Daher müssen wir folgende Korrektur vornehmen:

$3	$D	$7	$F
0011	1101	0111	1111

%1 * (2 hoch 0) = 1 * 1 = 1
%1 * (2 hoch 1) = 1 * 2 = 2
%1 * (2 hoch 2) = 1 * 4 = 4
%1 * (2 hoch 3) = 1 * 8 = 8
%1 * (2 hoch 4) = 1 * 16 = 16
%1 * (2 hoch 5) = 1 * 32 = 32
%1 * (2 hoch 6) = 1 * 64 = 64
%0 * (2 hoch 7) = 0 * 128 = 0
%1 * (2 hoch 8) = 1 * 256 = 256
%0 * (2 hoch 9) = 0 * 512 = 0
%1 * (2 hoch 10) = 1 * 1024 = 1024
%1 * (2 hoch 11) = 1 * 2048 = 2048
%1 * (2 hoch 12) = 1 * 4096 = 4096
%1 * (2 hoch 13) = 1 * 8192 = 8192

%0 * (2 hoch 14) = 0 * 16384 = 0
%0 * (2 hoch 15) = 0 * 32768 = 0

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 0 + 256 + 0 + 1024 + 2048 + 4096 + 8192 + 0 + 0 = 15743 bzw. nun korrekt $3D7F.

Wie sieht es umgekehrt aus, also vom Binärsystem ins Hexadezimalsystem?

Angenommen wir wollen die Binärzahl %10011100001010 ins Hexadezimalsystem umwandeln.

Dann teilen wir die Binärzahl von rechts beginnend in Gruppen von 4 Ziffern auf.

10 0111 0000 1010

Am linken Ende reichen die Stellen nicht aus um eine Vierergruppe zu bilden, daher füllen wir sie mit Nullen auf.

0010 0111 0000 1010

Nun gehen wir den umgekehrten Weg wie vorhin bei der Umrechnung einer Hexadezimalzahl ins Binärsystem:

0010	0111	0000	1010
$2	$7	$0	$A

Das Ergebnis lautet: $270A oder dezimal 9994.

Rechnen wir nach:

$A * (16 hoch 0) = 10 * 1 = 10
$0 * (16 hoch 1) = 0 * 16 = 0
$7 * (16 hoch 2) = 7 * 256 = 1792
$2 * (16 hoch 3) = 2 * 4096 = 8192

10 + 0 + 1792 + 8192 = 9994

Und zur Übung und Kontrolle rechnen wir das gleich ins Binärsystem um:

9994 : 2 = 4997 Rest %0
4997 : 2 = 2498 Rest %1
2498 : 2 = 1249 Rest %0
1249 : 2 = 624 Rest %1
624 : 2 = 312 Rest %0
312 : 2 = 156 Rest %0
156 : 2 = 78 Rest %0
78 : 2 = 39 Rest %0
39 : 2 = 19 Rest %1
19 : 2 = 9 Rest %1
9 : 2 = 4 Rest %1
4 : 2 = 2 Rest %0
2 : 2 = 1 Rest %0

1 : 2 = 0 Rest %1

Wodurch wir dann wieder zu der Binärzahl %10011100001010 kommen.