Markus Tripp

This is my thesis

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

Studium
Technische Mathematik

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt
Fakultät für Technische Wissenschaften

Betreuerin
Univ.-Prof.in Dr.in Alexandra Musterfrau
Institut für Mathematik
Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

Klagenfurt, 25. Februar 2024

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere an Eides statt, dass ich

- die eingereichte wissenschaftliche Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe,
- die während des Arbeitsvorganges von dritter Seite erfahrene Unterstützung, einschließlich signifikanter Betreuungshinweise, vollständig offengelegt habe,
- die Inhalte, die ich aus Werken Dritter oder eigenen Werken wortwörtlich oder sinngemäß übernommen habe, in geeigneter Form gekennzeichnet und den Ursprung der Information durch möglichst exakte Quellenangaben (z.B. in Fußnoten)ersichtlich gemacht habe,
- den Einsatz von generativen Modellen (Künstliche Intelligenz wie z.B. ChatGPT, Grammarly Go, Midjourney) vollständig und wahrheitsgetreu inkl. Produktversion ausgewiesen habe,
- die eingereichte wissenschaftliche Arbeit bisher weder im Inland noch im Ausland einer Prüfungsbehörde vorgelegt habe und
- bei der Weitergabe jedes Exemplars (z.B. in ausgedruckter oder digitaler Form) der wissenschaftlichen Arbeit sicherstelle, dass diese mit der eingereichten digitalen Version übereinstimmt.

Ich bin mir bewusst, dass eine tatsachenwidrige Erklärung rechtliche Folgen haben wird.

Markus Tripp, e.h.

Klagenfurt, 25. Februar 2024

Acknowledgments

This is a brief section to express gratitude to people who have contributed to the completion of this thesis.

Thank you!

Abstract

This is a short summary of the contents of this thesis.

Zusammenfassung

Das ist eine kurze Zusammenfassung des Inhalt dieser Arbeit.

Contents

Introduction

This is short chapter to introduce the research topic, outline the research objectives and give an overview of this thesis.

1 Preliminaries

All sorts of things are explained and introduced here.

Definition 1.1 (Group action)**.**
Let G be a group and X a set. A mapping $\alpha : G \times X \to X$ that satisfies

(A1) $\alpha(e, x) = x$,

(A2) $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$

for all $g, h \in G$ and $x \in X$ is called a *group action* of G on X.

Remark.
It is very common that one replaces α with a dot. Then the two above axioms read as $e \cdot x = x$ and $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

1.1 Digression on finite Kakeya sets

Example 1.2 (Kakeya set in $\mathbb{F}_3^2$)**.**
We consider the finite field $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0 + 3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}\}$. For the sake of readability, we will denote the representative for each residue class in the following discussion. Our goal is to find a non-trivial Kakeya set, denoted as $K \subseteq \mathbb{F}_3^2$, which contains a line in each direction. The directions we are considering are as follows: $[(1,0)] = \{(1,0), (2,0)\}$, $[(0,1)] = \{(0,1), (0,2)\}$, $[(1,1)] = \{(1,1), (2,2)\}$, and $[(1,-1)] = \{(1,2), (2,1)\}$ (note: $(1,-1) = (1,2)$). As an example, we select the following lines:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{(1,0),(0,0)} &= \{(0,0) + t(1,0) : t \in \{0, 1, 2\}\} = \{(0,0), (1,0), (2,0)\}, \\ \mathscr{L}_{(0,1),(2,0)} &= \{(2,0), (2,1), (2,2)\}, \quad \mathscr{L}_{(1,1),(0,0)} = \{(0,0), (1,1), (2,2)\} \\ \mathscr{L}_{(1,-1),(1,2)} &= \{(1,2), (2,1), (0,0)\}, \end{aligned}$$

resulting in the Kakeya set $K \subseteq \mathbb{F}_3^2$:

$$\begin{aligned} K &:= \mathscr{L}_{(1,0),(0,0)} \cup \mathscr{L}_{(0,1),(2,0)} \cup \mathscr{L}_{(1,1),(0,0)} \cup \mathscr{L}_{(1,-1),(1,2)} \\ &= \{(0,0), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}. \end{aligned}$$

△

1.2 Improvements?

Feel free to adapt/polish this template in any way you like. I am happy to discuss ideas and suggestions for general improvement of this template!

A

Implementations

A.1 Computations, Simulations and Algorithms

```
sage: print("Hello world!")
Hello world!
```

Listing A.1: Simple computer program

Bibliography

[1] T.W. Hungerford. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2003. ISBN: 9780387905181.

[2] Johannes Schmucker. Personal communications. 2022–2023.

[3] ———. “Faktorisierung von 2×2 Matrizen über $\mathbb{N}$”. Bachelor’s thesis. Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, 2023.