Løsningsforslag – Eksamen R1, høsten 2018

Laget av Sindre S.H. og Tommy O. Sist oppdatert: 3. desember 2018 Antall sider: 11

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på `https://github.com/matematikk/vgs_eksamener`.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi deriverer ledd for ledd, og får at

$$f'(x) = \underline{\underline{2x + 2 + e^x}}.$$

b) Vi bruker her produktregelen for derivasjon og får at

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(x^2\right)' \ln x + x^2 (\ln x)' \\ &= 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \\ &= 2x \ln x + x \\ &= \underline{\underline{x(2 \ln x + 1)}}. \end{aligned}$$

c) Her har vi to muligheter, og vi viser begge. **Alternativ 1 - Omskrivning til produktregelen:**
Vi omskriver $h(x)$ ved hjelp av potensregler til $h(x) = (x-1)e^{-(2x+1)}$. Videre merker vi oss at av kjerneregelen at

$$\left(e^{-(2x+1)}\right)' = -2e^{-(2x+1)}.$$

Av produktregelen ser vi da at

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x-1)'e^{-(2x+1)} + (x-1)\left(e^{-(2x+1)}\right)' \\ &= 1 \cdot e^{-(2x+1)} - 2(x-1)e^{-(2x+1)} \\ &= (1 - 2(x-1))e^{-(2x+1)} \\ &= \underline{\underline{(3-2x)e^{-(2x+1)}}}. \end{aligned}$$

Alternativ 2 - Derivasjon ved hjelp av kvotientregelen:
Vi ser at

$$\begin{aligned} &(x-1)' = 1 \\ &\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1}. && \text{(kjerneregelen)} \end{aligned}$$

Av kvotientregelen ved derivasjon har vi da at

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(x-1)'e^{2x+1} - (x-1)\left(e^{2x+1}\right)'}{\left(e^{2x+1}\right)^2} \\ &= \frac{1 \cdot e^{2x+1} - (x-1)2e^{2x+1}}{e^{2(2x+1)}} \\ &= \frac{e^{2x+1}(1-(x-2))}{e^{2(2x+1)}} \\ &= \underline{\underline{\frac{3-2x}{e^{2x+1}}}}, \end{aligned}$$

og dette er samme svar som i første alternativ. Fordelen med å skrive om til produktregelen er at vi får mindre regler å huske på, ulempen er at utregningene potensielt kan være mer krevende.

Oppgave 2

a) Vi merker oss at

$$e^{2x} + 7e^x - 8 = (e^x)^2 + 7(e^x) - 8 = 0.$$

Dette betyr at vi kan løse en andregradsligning med hensyn på e^x. Vi viser her to måter å løse ligningen på.

Alternativ 1 - ved hjelp av abc-formelen:

Ved abc-formelen ser vi at

$$e^x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-7 \pm 9}{2}.$$

Alternativ 2 - uten abc-formelen

Ettersom $8(-1) = -8$ og $8 - 1 = 7$, har vi at $(e^x + 8)(e^x - 1) = 0$.

Både **Alternativ 1** og **Alternativ 2** gir løsningene

$$e^x = 1 \quad \vee \quad e^x = -8.$$

Siden $e^x > 0$ for alle verdier av x, står vi bare igjen med løsningen $e^x = 1$:

$$\ln e^x = \ln 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}}.$$

b) Ved hjelp av logaritmeregler omskriver vi ligningen til

$$\ln\left(\frac{x^2 - 5x - 1}{3 - 2x}\right) = 0.$$

Videre har vi at

$$\begin{aligned} e^{\ln\left(\frac{x^2-5x-1}{3-2x}\right)} &= e^0 \\ \frac{x^2 - 5x - 1}{3 - 2x} &= 1 \\ x^2 - 5x - 1 &= 3 - 2x \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Vi faktoriserer uttrykket, enten ved hjelp av abc-formelen, eller ved å merke oss at $(-4)1 = -4$ og $-4 + 1 = -3$, og dette leder til

$$x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1) = 0$$

Ettersom $x = 4$ fører til at vi tar logaritmen av et negativt tall (og dette kan vi ikke gjøre[1]), står vi bare igjen med $\underline{\underline{x = -1}}$ som gyldig løsning.

Oppgave 3

a) Vi bruker regelene for addisjon og multiplikasjon av vektorer med skalarer og får at

$$\begin{aligned} 2\vec{b} - 3\vec{a} &= 2[-5,3] - 3[2,3] \\ &= [-10,6] - [6,9] = \underline{\underline{[-16,-3]}}. \end{aligned}$$

b) Vi bruker formelen for lengden av en vektor og ser at

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Ettersom $\sqrt{13} < \sqrt{16} = 4$ er $|\vec{a}|$ mindre enn 4.

c) En stump vinkel har negativ cosinusverdi, en rett vinkel har cosinusverdien 0 og en spiss vinkel har positiv cosinusverdi. Cosinus av vinkelen θ mellom to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er gitt av formelen

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

og gitt vektorene i oppgaven ser vi at

$$|\vec{a}|, |\vec{b}| > 0 \quad , \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2(-5) + 3 \cdot 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) < 0.$$

Ettersom telleren er negativ og telleren er positiv, må cosinus av vinkelen være negativ—da er θ en $\underline{\underline{\text{stump vinkel}}}$.

Oppgave 4

a) Vi bruker polynomdivisjon og ser at

$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^3 + 6x^2 \quad - x - 30\big) : \big(x - 2\big) = x^2 + 8x + 15 \\ \underline{\;-x^3 + 2x^2\;} \\ \qquad\quad 8x^2 \quad - x \\ \qquad \underline{-8x^2 + 16x} \\ \qquad\qquad\quad 15x - 30 \\ \qquad\qquad \underline{-15x + 30} \\ \qquad\qquad\qquad\quad\;\; 0 \end{array}$$

[1] Vi kan ikke ta logaritmen av et negativt tall x, fordi logaritmen er invers av eksponentialfunksjonen og svarer på spørsmålet "Hva må e opphøyes i for å få x?". Med andre ord: vi kan ikke ta logaritmen av et negativt tall x, fordi det finnes ingen y som løser $e^y = x$ når $x \leq 0$.

b) Vi faktoriserer ved hjelp av abc-formelen eller ved å merke oss at $3 \cdot 5 = 15$ og $3 + 5 = 8$. Da har vi at

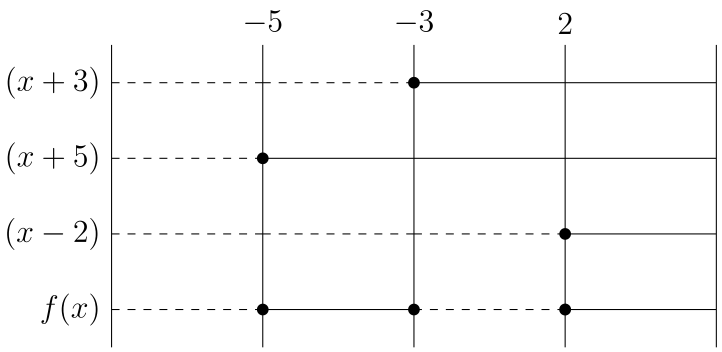
$$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5),$$

og dermed får vi at

$$x^3 + 6x^2 - x - 30 = \underline{\underline{(x + 3)(x + 5)(x - 2)}},$$

og vi har dermed faktorisert $f(x)$ i lineære faktorer.

c) At $-2f(x) \geq 0$ er ekvivalent med at $f(x) \leq 0$, dette ser vi dersom vi ganger begge sider med -2. Vi setter opp et fortegnsskjema for å løse denne ulikheten:



Av figuren ser vi at $f(x) \leq 0$ når $\underline{\underline{x \leq -5 \ \vee \ -3 \leq x \leq 2}}$.

Oppgave 5

Vi definerer følgende hendelser.

$$A = \text{Mann} \qquad \bar{A} = \text{Kvinne}$$
$$B = \text{Kjøper edelgran} \qquad \bar{B} = \text{Kjøper vanlig gran}$$

Basert på oppgaveteksten har vi at

$$P(A) = 70\,\% \qquad P(\bar{A}) = 30\,\%$$
$$P(B \mid A) = 60\,\% \qquad P(B \mid \bar{A}) = 40\,\%$$

a) Av formelen for total sannsynlighet har vi at

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P(B \mid A) + P(\bar{A})P(B \mid \bar{A}) \\ &= 0.7 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4 = \underline{\underline{0.54}}. \end{aligned}$$

Det er altså 54 % sannsynlighet for at første solgte tre er en edelgran.

b) Spørsmålet i oppgaven er det samme som å spørre hva sannsynligheten er for at kjøperen av et tre er en kvinne, gitt at treet er en edelgran. Av Bayes' setning har vi at

$$P(\bar{A} \mid B) = \frac{P(B \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A})}{P(B)} = \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.54} = \frac{12}{54} = \frac{2}{9}$$

Sannsynligheten er altså $\underline{\underline{2/9 \approx 22.2\,\%}}$ for at lotterivinneren er en kvinne.

Oppgave 6

Skal $f(x)$ være kontinuerlig, må $\lim_{x^{\pm} \to a} f(x) = f(a)$. Sagt med ord må funksjonen $f(x)$ gå mot samme verdi når x nærmer seg a, både fra venstre, fra høyre og i selve punktet a. I vårt tilfelle er det tilstrekkelig å sørge for at $f(a)$ får samme verdi ved begge tilfeller av funksjonsuttrykkene for $f(x)$. Vi ser at

$$\begin{aligned} &2a^2 - 3a - 2 = a^2 + a + 3 = (a-5)(a+1) = 0 \\ &a^2 - 4a - 5 = 0 \end{aligned}$$

Derfor er funksjonen$f(x)$ kontinuerlig når $\underline{\underline{a = 5 \vee a = -1}}$.

Oppgave 7

a) Vi bruker kjerneregelen på andre ledd, og deriverer $g'(x)$ slik at vi får

$$g'(x) = 1 - \big(2\ln(x^2+3)\big)' = 1 - \frac{4x}{x^2+3} = \frac{x^2+3}{x^2+3} - \frac{4x}{x^2+3} = \underline{\underline{\frac{x^2-4x+3}{x^2+3}}}.$$

b) I ett toppunkt eller bunnpunkt må vi ha $g'(x) = 0$. Vi faktoriserer telleren og løser $g'(x) = 0$:

$$\frac{(x-1)(x+3)}{x^2+3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \vee x = 3$$

Ved å sette opp et fortegnsskjema (ikke vist her, se gjerne oppgave 4c for en påminnelse) finner vi at $\underline{\underline{x = 1 \text{ er } x\text{-verdien til et maksimalpunkt}}}$, og at $\underline{\underline{x = 3 \text{ er } x\text{-verdien til et minimumspunkt}}}$.

c) Et vendepunkt oppstår når $g''(x)$ endrer fortegn, altså når $g''(x)$ går fra å være positiv til negativ, eller motsatt[2]. Vi finner den dobbelderiverte ved hjelp av kvotientregelen.

$$g'(x) = \frac{(x^2-4x+3)'\,(x^2+3) - (x^2-4x+3)\,(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$$

[2]Funksjonen $f(x) = x^4$ har ingen vendepunkter, selv om $f''(x) = 0$ når $x = 0$. Dette er fordi $f''(x) = 0$ ikke endrer fortegn. Funksjonen er alltid konveks.

Nevneren er aldri negativ, så $g''(x)$ endrer ikke fortegn på grunn av endring i fortegn i nevneren. Vi forenkler telleren og ser at

$$\begin{gathered}(2x-4)(x^2+3)-2x(x^2-4x+3)= \\ 2x^3+6x-4x^2-12-2x^3+8x^2-6x= \\ 4x^2-12\end{gathered}$$

Telleren endrer fortegn når $4x^2-12=4(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ endrer fortegn. Altså har $g(x)$ vendepunkter, eller infleksjonspunkter, når

$$\underline{\underline{x=\sqrt{3} \quad \vee \quad x=-\sqrt{3}}}.$$

Oppgave 8

a) TODO :)

b) TODO :)

c) TODO :)

Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

La X være antall gule blomster. Da er X binomisk fordelt, fordi fargen til hver blomst er uavhengig av de andre, sannsynligheten for gul er alltid $p = 0.4$, og det er kun to utfall per blomst—enten gul eller rød.

a) Vi lar X være antall gule blomster, da er X binomisk fordelt med $n = 10$ og $p = 0.4$. Sannsynligheten for at $X = 5$ blir da

$$P(X = 5) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{10}{5} 0.4^5 0.6^5 \approx 0.2007 = \underline{\underline{20.1\,\%}},$$

der vi henter svaret fra Geogebras sannsynlighetskalkulator i praksis.

b) Dette er $P(X > 5)$, og fra sannsynlighetskalkulatoren i Geogebra får vi

$$P(X > 5) \approx 0.1662 = \underline{\underline{16.6\,\%}}.$$

c) Her kan det være nyttig å snu litt på problemstillingen. Vi har 10 plasser $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$ totalt, og vi må trekke ut fire plasser til de gule blomstene. Da er plasseringen til de andre blomstene også bestemt. Rekkefølgen har ikke noe å si, fordi $\{P_3, P_5, P_6, P_9\}$ eksempelvis er det samme som $\{P_6, P_5, P_3, P_9\}$. Spørsmålet er med andre ord "På hvor mange måter kan vi velge 4 plasser for de gule blomstene, nå rekkefølgen er uviktig?". Dette er antall kombinasjoner, og svaret blir $\binom{10}{4} = \underline{\underline{210}}$. I Geogebra skriver man `nCr(10, 4)` i CAS.

Legg også merke til at dette spørsmålet er det samme som å spørre "På hvor mange måter kan vi velge 6 plasser for de røde blomstene, nå rekkefølgen er uviktig?", og at svaret da blir $\binom{10}{6} = \underline{\underline{210}}$.

Oppgave 2

a) Siden $CB||AE$ og $\angle BCD$ og $\angle AED$ er på motsatt side av AE, har vi at $\angle BCD = \angle AED$.

b) Vi argumenterer punkt for punkt:

- Vi har forklart i oppgave a) at $\angle BCD = \angle AED$
- Siden $\angle ADE$ og $\angle BDC$ er på motsatt side av AE, og begge vinklene deler linja AB, er $\angle BCD = \angle AED$
- Fordi trekantene har to samsvarende vinkler, er $\triangle DBC \sim \triangle AED$ (formlike).

c) $\triangle AEC$ består blant annet av vinklene ACD og AED. Siden

$$\angle AED = \angle BCD = \alpha = ACD,$$

har $\triangle AEC$ to like vinkler og er derfor likebeint.

d) Siden $\triangle DBC \sim \triangle AED$ er forholdet mellom to samsvarande sider i trekantene likt. Vinkel $\angle AED$ og $\angle BCD$ utspenner respektivt linjene AD og DB, mens $\angle ADE$ og $\angle CDB$ utspenner respektivt linjene AE og a. Da har vi at

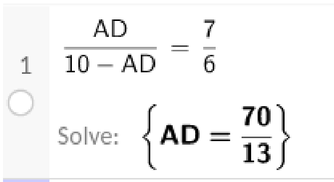
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{a}$$

Siden $\triangle ACE$ er likebeint er $AE = b$:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}$$

Som var det vi skulle vise.

e) Siden $c = 10$, har vi at $DB = 10 - AD$. Dermed kan vi bruke forholdet fra opg. d) til å løse en ligning med hensyn på AD. Likningen er løst i CAS:



Figur 1: Ligning for AD løst i CAS i Geogebra.

Oppgave 3

a) Linjen ℓ er gitt av

$$\ell(k) = A + \vec{AB}k = (3,0) + [(5,5) - (3,0)]\, k = (2k+3, 5k).$$

b) Se figur 2 for en tegning av grafen, utført med kommandoen
Kurve(<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>), samt linjen $\ell(k)$.

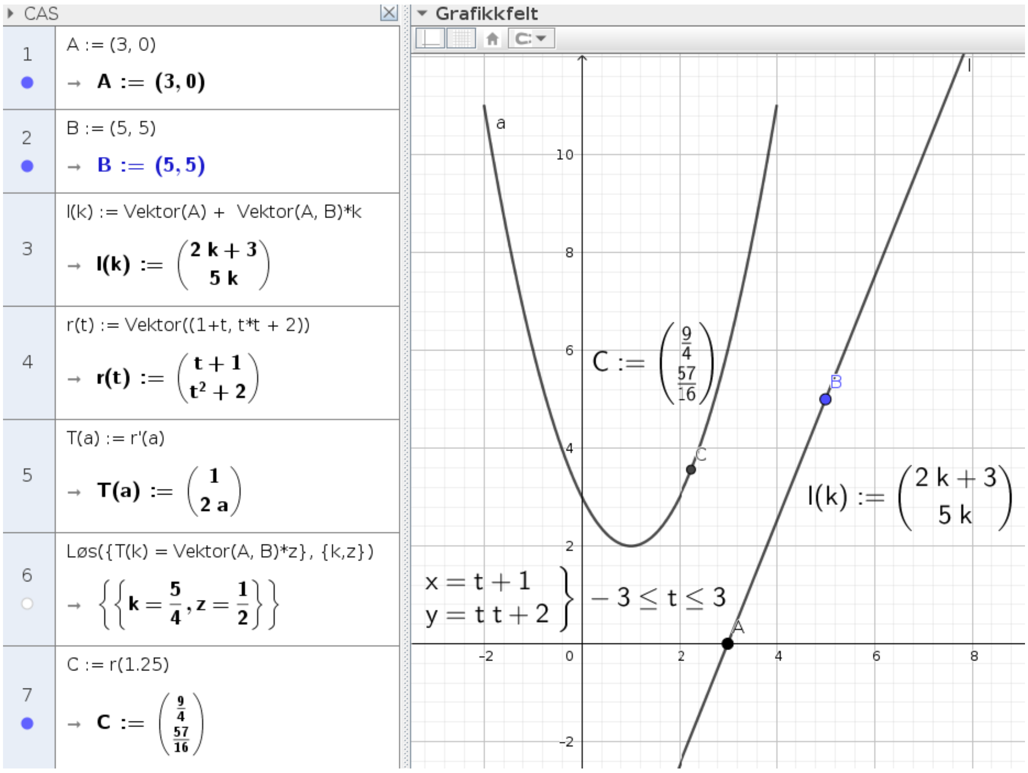
c) Linja fra A til B er gitt av $\vec{AB} = (2,5)$. Tangenten er gitt av $T(t) = r'(t) = (1, 2t)$. Disse to vektorene er parallelle dersom der finnes en z slik at

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Dette er et likningssett med 2 ukjente og 2 likninger, og løsningen er $z = 1/2$ og $t = 5/4$. Setter vi $t = 5/4$ inn i $r(t)$ får vi punktet

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 9/4 \\ 57/6 \end{pmatrix}}},$$

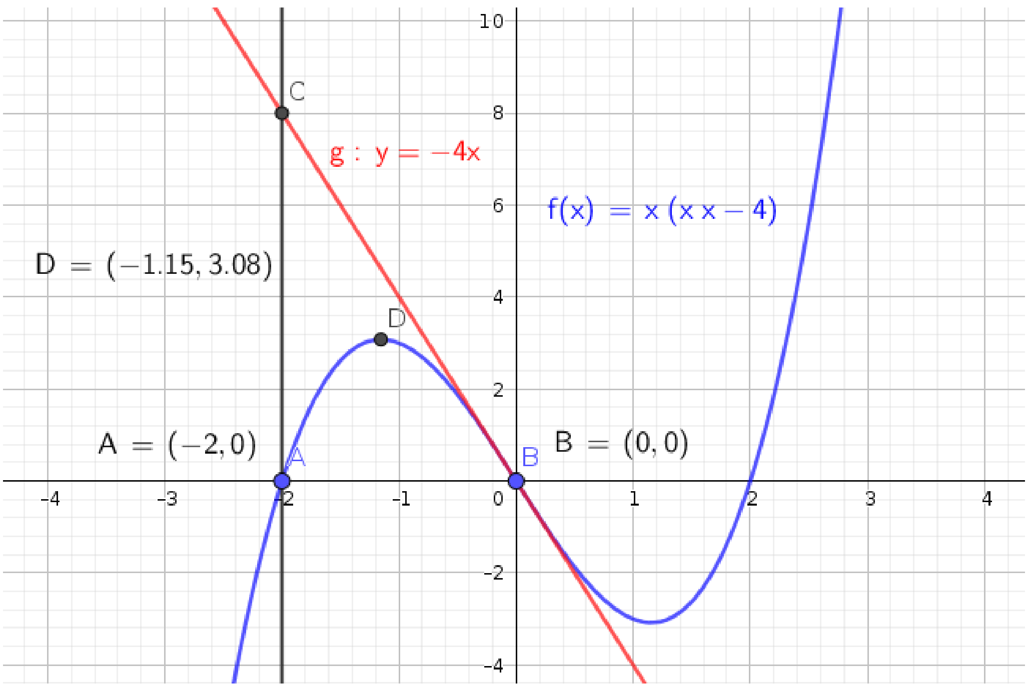
og dette er punktet på $r(t)$ som er nærmest ℓ.



Figur 2: Løsning på oppgave 3, del 2.

Oppgave 4

a) Se figur 3.



Figur 3: Løsning på oppgave 4a, del 2.

b) Der bruker vi `Mangekant(A, B, C) / Mangekant(A, B, D)` og får $2.5981 \approx \underline{\underline{2.6}}$ som svar.

c) Vi argumenterer punkt for punkt. Se figur 4.

- I celle 1 finner vi nullpunktene til $g(x)$. Siden $r > 0$, er $x = -r$ nullpunktet lengst til venstre.
- I celle 5-7 finner og definerer vi punktet G.
- I celle 8 finner vi ekstremalpunktene til $g(x)$. Siden $\left|\frac{\sqrt{3}}{3}r\right| < r$, ser vi av uttrykket til $g(x)$ at $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}r$ er maksimusverdien til $g(x)$. Denne kaller vi xm i celle 9.
- I celle 10 finner vi koordinatene til H.
- Vi velger EF som grunnlinje for begge trekanter, som da får høydene $t(-r)$ og $g(xm)$. Siden grunnlinjen er den samme, er forholdet mellom arealene til trekantene det samme som forholdet mellom høydene. I celle 11 ser vi at dette forholdet er uavhengig av r, som var det vi skulle vise.

1. $g(x) := x\left(x^2 - r^2\right)$

   $\rightarrow \; \mathbf{g(x) := -r^2\, x + x^3}$

2. $g(x) = 0$

   Løs: $\{x = r, x = -r, x = 0\}$

3. $E := (-r, 0)$

   $\rightarrow \; \mathbf{E := (-r, 0)}$

4. $F := (0, 0)$

   $\rightarrow \; \mathbf{F := (0, 0)}$

5. Vendepunkt(g)

   $\rightarrow \; \{(0, 0)\}$

6. $t(x) := \text{Tangent}(F, g)$

   $\rightarrow \; \mathbf{t(x) := -r^2\, x}$

7. $G := (-r, t(-r))$

   $\rightarrow \; \mathbf{G := \left(-r, r^3\right)}$

8. $\text{Løs}(g'(x) = 0)$

   $\rightarrow \; \left\{x = -\frac{\sqrt{3}}{3}\, r, x = \frac{\sqrt{3}}{3}\, r\right\}$

9. $xm := -\frac{\sqrt{3}}{3}\, r$

   $\rightarrow \; \mathbf{xm := -\frac{1}{3}\sqrt{3}\, r}$

10. $H := (xm, g(xm))$

    $\rightarrow \; \mathbf{H := \left(-r\,\frac{\sqrt{3}}{3}, 2\, r^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9}\right)}$

11. $\frac{t(-r)}{g(xm)}$

    $\rightarrow \; \frac{3}{2}\sqrt{3}$

Figur 4: Løsning på oppgave 4c, del 2.