Contents

1 Постановка задачи (Вариант 2)

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$
$u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$ – просто состояние системы в момент времени $t = 0$
$\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0$ – т.е. фактически начальная скорость
Однородные граничные условия 1-го рода:
$u(0, y, z, t) = 0$
$u(x, 0, z, t) = 0$
$u(L_x, y, z, t) = 0$
$u(x, L_y, z, t) = 0$
Периодические граничные условия:
$u(x, y, 0, t) = u(x, y, L_z, t)$
$\frac{\partial u(x,y,0,t)}{\partial z} = \frac{\partial u(x,y,L_z,t)}{\partial z}$
Аналитическое решение:
$u_{\text{analytical}} = \sin(\frac{\pi x}{L_x}) \cdot \sin(\frac{\pi y}{L_y}) \cdot \sin(\frac{2\pi z}{L_z}) \cdot \cos(a_t \cdot t + 2\pi)$
$a_t = \sqrt{\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{4}{L_z^2}}$
$a^2 = \frac{1}{\pi^2}$

2 Численное решение

2.1 Шаги сетки

Для численного решения задачи используем метод конечных разностей, который аппроксимирует производные на сетке.

В пространстве мы делаем разбиение области на равномерные ячейки.

Пусть h_x, h_y, h_z, τ – шаги по осям x, y, z, t.

$$\omega_h = \{(x_i, y_j, z_k) | i = 0, 1, \ldots, N, j = 0, 1, \ldots, N, k = 0, 1, \ldots, N\}$$

$$\omega_\tau = \{t_n | n = 0, 1, \ldots, K\}$$

где $x_i = ih_x, y_j = jh_y, t_n = n\tau$

2.2 Апроксимация производных

Для 2й производной используем разностную схему 2го порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u^{n+1}_{i,j,k} - 2u^n_{i,j,k} + u^{n-1}_{i,j,k}}{\tau^2}$$

Для оператора Лапласа то же для каждой из переменных:

$$\Delta u^n \approx \frac{u^n_{i+1,j,k} - 2u^n_{i,j,k} + u^n_{i-1,j,k}}{h_x^2} + \frac{u^n_{i,j+1,k} - 2u^n_{i,j,k} + u^n_{i,j-1,k}}{h_y^2} + \frac{u^n_{i,j,k+1} - 2u^n_{i,j,k} + u^n_{i,j,k-1}}{h_z^2}$$

Итоговая разностная схема:

$$\frac{u_{i,j,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n} + u_{i,j,k}^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \left[\frac{u_{i+1,j,k}^{n} - 2u_{i,j,k}^{n} + u_{i-1,j,k}^{n}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1,k}^{n} - 2u_{i,j,k}^{n} + u_{i,j-1,k}^{n}}{h_y^2} + \frac{u_{i,j,k+1}^{n} - 2u_{i,j,k}^{n} + u_{i,j,k-1}^{n}}{h_z^2} \right]$$

По условию

$$u_{i,j,k}^0 = \varphi(x_i, y_j, z_k), (x_i, y_j, z_k) \in \omega_h$$

Тогда

$$u_{i,j,k}^1 = u_{i,j,k}^0 + a^2 \frac{\tau^2}{2} \Delta_h \varphi(x_i, y_j, z_k)$$

Схема является явной, т.к. решение на следующем шаге $n+1$ выражется через значения на текущем шаге n и предыдущем шаге $n-1$

$$u_{i,j,k}^{n+1} = 2u_{i,j,k}^{n} - u_{i,j,k}^{n-1} + a^2 \tau^2 \left[\frac{u_{i+1,j,k}^{n} - 2u_{i,j,k}^{n} + u_{i-1,j,k}^{n}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1,k}^{n} - 2u_{i,j,k}^{n} + u_{i,j-1,k}^{n}}{h_y^2} + \frac{u_{i,j,k+1}^{n} - 2u_{i,j,k}^{n} + u_{i,j,k-1}^{n}}{h_z^2} \right]$$

3 Параллелизация по блокам

Параллелизация задачи будет осуществляться на основе блочного разбиения области.

3.1 Принцип разбиения

Область $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ разбивается на подобласти-блоки. Каждый поток OpenMP обрабатывает свой блок сетки.

Пусть N_p – число потоков OpenMP. Тогда область разбивается на блоки по каждому из трех измерений:

- По оси x: n_x блоков
- По оси y: n_y блоков
- По оси z: n_z блоков

где $n_x \cdot n_y \cdot n_z = N_p$