

差分 and 常微分作业

Arson

2023 年 8 月 10 日

1 差分方程

1. 依照下列利率: 1%, 2%, 5%, 7%, 9%, 13% 按年结算利息, 使一笔存款达到本金的两倍, 分别计算所用时间 (取三位小数).

$$P = A(1+r)^t$$

$$\Delta P = A(1+r)^t - A = A$$

$$\Rightarrow (1+r)^t = 2, t \ln(1+r) = \ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)} = \begin{cases} 69.661 & r = 1\% \\ 35.003 & r = 2\% \\ 14.207 & r = 5\% \\ 10.245 & r = 7\% \\ 8.043 & r = 9\% \\ 5.671 & r = 13\% \end{cases}$$

2. 分别以 r 和 $2r$ 计息, 钱数在 n 年、 m 年翻一番, $\frac{2}{m}$ 是多少? 是小于 2 还是大于 2? (剑桥大学 B.A 1807.)

$$(1+r)^n = 2, \quad (1+2r)^m = 2$$

$$r = 2^{1/n} - 1$$

$$(2^{1/n+1}) = 2^{1/m}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{n} + 1 > 1 \Rightarrow m < 1 \Rightarrow \frac{2}{m} > 2$$

3. 证明 Malthus 模型中, $P(0)$ 翻一番所花的时间 τ 是 $\frac{\ln 2}{\ln k}$. 在 1990 年, 世界人口至少是 50 亿, 用 Malthus 模型, 假设 k 取 1.05, 1.03, 和 1.01, 试估计 2050 年的人口总数。

$$P(t) = k^t P(0) = 2P(0)$$

$$k^t = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln k}$$

$$P(t) = 50 \times k^{60} = \begin{cases} 934 & k = 1.05 \\ 295 & k = 1.03 \\ 91 & k = 1.01 \end{cases}$$

4. 解方程 $x(n+1) = kx(n) + n$

$$x(n+1) = n + kn + k^2n + \cdots + k^nn + k^{n+1}x(0)$$

2 常微分方程

1. $v^2 = 2ax$

$$a = \frac{(45/3.6)^2}{20} = \frac{12.5^2}{20}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{12.5^2}{20} \cdot 21} = 12.5\sqrt{2.1} \approx 18.1142$$

2. 设购买量为 x , 广告量 A , 需求量 D , 广告限度 G , 广告逆反系数为 R , 在时间 t 内可列如下方程

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A(D-x)}{1+R(G-A)}$$

3. 麻药

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

$$\ln x = -kt + c$$

$$x = Ae^{-kt}, \quad \frac{1}{2}x = Ae^{-5k}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{5} \ln 2$$

$$x = Ae^{-\frac{1}{5} \ln 2} = 45 \times 10^{-3} \times 50 \times 10^3 = 2250g$$

$$A = 2250 \times \sqrt[5]{2} = 2.58 \times 10^3 g = 2.58kg$$

4. 不会