第四章　初等代数与几何方法
4.2 初等几何方法

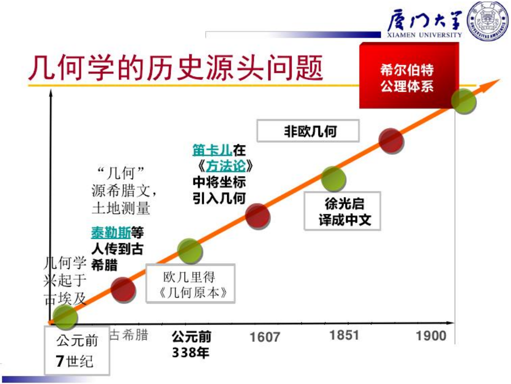
谭　忠

厦门大学数学科学学院

目录

源头问题与当今应用

1　源头问题与当今应用



2014 国赛 B 题：创意平板折叠桌

某公司生产一种可折叠的桌子，

桌子呈圆形，

桌腿随着铰链的活动

可以平摊成一张平板。

源头问题与当今应用

源头问题与当今应用

桌腿由若干根木条组成，
分成两组，
每组各用一根钢筋将木条连接，
钢筋两端分别固定在
桌腿各组最外侧的两根木条上，

源头问题与当今应用

并且沿木条有空槽

以保证滑动的自由度。

桌子外形由直纹曲面构成，造型美观。

给定长方形平板尺寸

$\boldsymbol{120cm \times 50cm \times 3cm}$，

每根木条宽 $2.5\mathrm{cm}$，

源头问题与当今应用

连接桌腿木条的钢筋

固定在桌腿最外侧木条中心位置，

折叠后桌子高度为 53cm。

源头问题与当今应用

试建立模型描述

此折叠桌的动态变化过程，

在此基础上给出此折叠桌的

设计加工参数（例如桌腿木条开槽的长度等）

和桌脚边缘线的数学描述。

源头问题与当今应用

2 几何思想与建模方法

解析几何的基本内涵和方法是坐标法，其基本思想是在空间中建立坐标系，正是坐标系的建立，空间中的点就可以用有序组，即点的坐标表示出来，也就是空间中的点被量化了。空间中的几何图形就可以用方程，即几何图形上的点的坐标所满足的定量关系-数学模型来表示。因此，建立空间中几何图形所满足方程的过程也

是数学建模的过程。于是几何问题就转化为代数问题，可以说代数方法引入到几何学的研究中，使得几何学从原有定性思维的研究方式转向了定量思维的方式。

建立空间的平面方程、直线方程、两平面的相关位置、点到平面的距离、直线、平面间的相关位置、点、直线和平面之间的度量关系、球面和旋转面方程、柱面和锥面方程、二次曲面方程、直纹面方程、曲面的交线、曲

面所围成的区域等，这些方程或数学模型的建立构成了解析几何最重要的的知识点和方法论。

在许多实际问题中，

我们可以借助

几何方法作为辅助

手段来解决问题。

它们都是非线性

代数方程模型。

下面我们将

对几个案例进行分析，

介绍几何方法的具体应用。

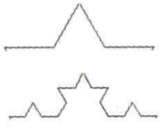
谢　谢！

3 案例分析

案例 1：从科赫雪花谈起：

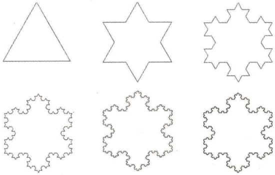
1906 年，数学家科赫（H.Von Koch）在研究构造连续而不可微函数时，提出了构造能够描述雪花形状曲线的方法：将一条线段三等分，先以中间的一段为底边作一个正三角形, 然后再去掉这个正三角形的底边

于是我们可以得到一条由 4 条长度为原线段长度三分之一的线段构成的折线. 如果我们对构成这条折线的每一条线段不断重复上述的步骤, 得到的曲线就是所谓的 "科赫曲线"



案例分析

现在, 我们作一个边长为 a 的正三角形, 然后在这个正三角形的每条边上不断重复上述的变换, 便可以得到科赫雪花图案。如下图, 给出的就是从一个正三角形开始依次进行了五次变换后所得到的结果.



若记 C_n, S_n 分别表示第 n 步变换后的科赫雪花的周长和面积, 则周长依次为

$$C_0 = 3a,$$

$$C_1 = \frac{4}{3} \cdot 3a,$$

$$C_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot 3a,$$

$$\cdots, C_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 3a, \quad \cdots$$

案例分析

面积依次为

$$S_0 = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$S_1 = S_0 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \times \frac{a}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{3} \right) = S_0 + 3 \cdot \left(\frac{1}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) = S_0 + \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} S_0$$

$$S_2 = S_1 + 3 \times 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \times \frac{a}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{9} \right) = S_0 + \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} S_0 + \frac{3}{4} \times \left(\frac{4}{9} \right)^2 S_0$$

. . . .

$$S_n = S_0 + \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} S_0 + \frac{3}{4} \times \left(\frac{4}{9} \right)^2 S_0 + \cdots + \frac{3}{4} \times \left(\frac{4}{9} \right)^n S_0$$

于是, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 3a\right] = +\infty$$

案例分析

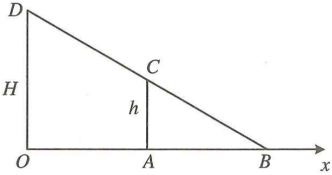
$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left[S_0+\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}S_0+\frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2 S_0+\cdots+\frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n S_0\right] \\
&= S_0+\frac{3}{4}S_0\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^n\right] \\
&= S_0+\frac{3}{4}S_0\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{9}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}{1-\frac{4}{9}} = S_0+\frac{3}{4}S_0\times\frac{4}{5}=\frac{8}{5}S_0 \\
&= \frac{8}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{2\sqrt{3}}{5}a^2
\end{aligned}
$$

案例 2：影子为什么那么长：

当人们夜晚在马路上行走时，如果身后有一盏路灯，就会看到前方的路面上留下了一条长长的身影，而且人影移动的速度明显比人行走的速度快了许多. 下面，我们就用导数来解释这种现象.

如图所示, H 表示路灯与地面的距离, h 表示人的身高, 人沿着 x 轴的正向前进. 如果人在 t 时刻由灯下的 O 点前进至 A 点, 那么人的影子则从 O 点 “前进” 至 B 点, 换句话说, t 时刻影子移动的距离 S 即为线段 OB 的长度. 由导数的物理意义知, $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ 就表示影子移动的速度.

案例分析



由于 $\triangle ABC \sim \triangle OBD$, 所以 $\frac{h}{H} = \frac{S-OA}{S}$, 由此可求得

$$S = \frac{OA}{1 - \frac{h}{H}} = \frac{H \cdot OA}{H - h}$$

假设人以匀速行走, 速度为 v_0, 则 t 时刻行走的距离 $OA = v_0 t$,

于是

$$S=\frac{H\cdot v_0t}{H-h}$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{H\cdot v_0}{H-h}$$

如果我们以灯高 $H=5$ 米, 身高 $h=1.8$ 米,

速度 $v_0 = 1.6$ 米/秒计算, 即可求得影子移动的速度为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{5 \times 1.6}{5 - 1.8} = 2.5\ (\text{米/秒})$$

这比人行走的速度要快多了.

案例 3：通过定点的曲线与曲面方程

线性方程组的理论中有一个基本结论：含有 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是其系数行列式等于零．利用这个结论，我们可以建立用行列式表示的直线、平面、圆和其他一些曲面的方程，也可以求出一般多项式的表达式．如果平面上有

两个不同的已知点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 通过这两点存在唯一的直线, 设直线方程为: $ax + by + c = 0$, 且 a, b, c 不全为零. 由于 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 在这条直线上, 所以它们满足上述直线方程, 则: $ax_1 + by_1 + c =$

$0, ax_2 + by_2 + c = 0$. 因此有

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

这是一个以 a, b, c 为未知量的齐次线性方程组，且 a, b, c 不全为零，说明该齐次线性方程组必有非零解.

案例分析

于是, 系数行列式等于零. 即

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

这就是用行列式表示的通过已知两点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 的直线方程.

例如, 通过两点 $(-1,2),(3,-4)$ 的直线方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ 即} 3x+2y-1=0$$

同理, 通过空间中三点 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3$

的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

例如，通过空间中三点 $(7,6,7),(5,10,5),(-1,8,9)$

的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 1 \\ 5 & 10 & 5 & 1 \\ -1 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ 即} 3x + 5y + 7z - 100 = 0$$

同理, 用行列式表示的通过平面上三点 (x_1, y_1), (x_2, y_2)

的圆的方程为

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

对于 n 次多项式 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 可由其图像上的 $n+1$ 个横坐标互不相同的点

案例分析

$\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right),\cdots,\left(x_n,y_n\right),\left(x_{n+1},y_{n+1}\right)$ 所唯一确定. 这是因为, 这 $n+1$ 个点均满足这个 n 次多项

式, 则有

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_2^n = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n \\ a_0 + a_1x_{n+1} + a_2x_{n+1}^2 + \cdots + a_nx_{n+1}^n = y_{n+1} \end{cases}$$

这是一个含有 $n+1$ 个方程、以 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为

$n+1$ 个未知量的线性方程组, 其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

是一个范德蒙 (Vandermonde) 行列式, 当 $x_1, x_2, \cdots, x_n,$

案例分析

互不相同时，$D \neq 0$，由克莱姆 (Cramer) 法则，可以唯一地解出 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$. 所以，$n$ 次多项式

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

可由其图像上的 $n+1$ 个横坐标互不相同的点 (x_1, y_1)，$($
(x_{n+1}, y_{n+1}) 所唯一确定. 该多项式方程的行列式形

式为

$$
\begin{vmatrix}
1 & x & x^2 & \cdots & x^n & y \\
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & y_1 \\
1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n & y_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n & y_n \\
1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n & y_{n+1}
\end{vmatrix} = 0
$$

平行四边形的面积与平行体的体积在平面或空间直角坐标系下，平行四边形的面积 S 与平行六面体的体积 V 可由行列式给出设平行四边形的两条边由向量 α 与

β 确定，则其面积 S 的平方为

$$S^2 = \begin{vmatrix} (\alpha,\alpha) & (\alpha,\beta) \\ (\beta,\alpha) & (\beta,\beta) \end{vmatrix} = (\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta) - (\alpha,\beta)^2$$

$$= ||\alpha||^2 \cdot ||\beta||^2 - ||\alpha||^2 \cdot ||\beta||^2 \cos^2\theta$$

$$= ||\alpha||^2 \cdot ||\beta||^2 \sin^2\theta$$ 其中 θ 为 α 与 β 的夹角

当平行六面体的 3 条棱由 3 个向量 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T$ β $(b_1, b_2, b_3)^T$ $\gamma = (c_1, c_2, c_3)^T$ 给出时，其体积 V 的

案例分析

平方为

$$V^2 = \begin{vmatrix} (\alpha,\alpha) & (\alpha,\beta) & (\alpha,\gamma) \\ (\beta,\alpha) & (\beta,\beta) & (\beta,\gamma) \\ (\gamma,\alpha) & (\gamma,\beta) & (\gamma,\gamma) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$$

所以,体积 $V = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\|$ (注：行列式的绝对值)

案例分析

当 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 R^3 的一组标准正交基，由 R^3 中的任意 3 个向量 $\alpha_i = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + a_{i3}\xi_3 (i = 1, 2, 3)$

案例分析

为棱的平行六面体的体积 V 的平方为

$$V^2 = \begin{vmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & (\alpha_1,\alpha_3) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & (\alpha_2,\alpha_3) \\ (\alpha_3,\alpha_1) & (\alpha_3,\alpha_2) & (\alpha_3,\alpha_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^3 a_{1i}^2 \\ \sum_{i=1}^3 a_{2i}a_1 \\ \sum_{i=1}^3 a_{3i}a_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

案例分析

同样，由 R^n 中任意 $k(k \quad n)$ 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 为棱的 k 维平行体体积 V 的平方为

$$V^2 = \begin{vmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_k) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_k, \alpha_1) & (\alpha_k, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_k, \alpha_k) \end{vmatrix}$$

它称为由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 构成的格拉姆 (Gram) 行列

式. 另一方面，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 线性无关的充分必要条件是格拉姆行列式

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_k) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_k, \alpha_1) & (\alpha_k, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_k, \alpha_k) \end{vmatrix} \neq 0$$

所以，R^n 中的任意 k 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 线性无

关 (线性相关) 的充分必要条件是: 以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 为棱的 k 维平行体体积不等于零 (等于零). 当然，如果 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 R^n 的一组标准正交基,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha$ 的表达式为

$$\alpha_i = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{in}\xi_n, i = 1, 2, \cdots, k$$

则有，格拉姆行列式

案例分析

$$V^2 = \begin{vmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_k) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\alpha_k, \alpha_1) & (\alpha_k, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_k, \alpha_k) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n a_{1i}a_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1i}a_{ki} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}a_{1i} & \sum_{i=1}^n a_{2i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{2i}a_{ki} \end{vmatrix}$$

案例 4：小行星的轨道问题

一位天文学家要确定一颗小行星绕太阳运行的轨道，他在轨道平面内建立以太阳为原点的直角坐标系，在两坐标轴上取天文单位 (一天文单位等于地球到太阳的平均距离:$\mathbf{14959787 * 10^{11}} m$) 在 5 个不同的时间对小行星作了 5 次观察，测得 5 个点的坐标数据如下表所示

小行星绕太阳运行 5 个点的坐标数据

案例分析

坐标 \ 编号	1	2	3	4	5
X 坐标	5.764	6.286	6.759	7.168	7.480
Y 坐标	0.648	1.202	1.823	2.526	3.360

由开普勒第一定律知，小行星轨道为一椭圆，现建立椭圆的标准方程以供研究. 首先假设椭圆的一般方程为 $a_1x^2 + 2a_2xy_1 + a_3y^2 + 2a_4x + 2a_5y + 1 = 0$，那

么满足上述 5 个点的椭圆是唯一的. 将上述 5 个点的坐标代人椭圆的一般方程，得线性方程组

案例分析

$$\begin{cases} a_1x_1^2+2a_2x_1y_1+a_3y_1^2+2a_4x_1+2a_5y_1=-1 \\ a_1x_2^2+2a_2x_2y_2+a_3y_2^2+2a_4x_2+2a_5y_2=-1 \\ a_1x_3^2+2a_2x_3y_3+a_3y_3^2+2a_4x_3+2a_5y_3=-1 \\ a_1x_4^2+2a_2x_4y_4+a_3y_4^2+2a_4x_4+2a_5y_4=-1 \\ a_1x_5^2+2a_2x_5y_5+a_3y_5^2+2a_4x_5+2a_5y_5=-1 \end{cases}$$

则以 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 为未知量的线性方程组的系数

矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 33.2237 & 7.4701 & 0.4199 & 11.5280 & 1.2960 \\ 39.5138 & 15.1115 & 1.4448 & 12.5720 & 2.4040 \\ 45.6841 & 24.6433 & 3.3233 & 13.5180 & 3.6460 \\ 51.3802 & 36.2127 & 6.3807 & 14.3360 & 5.0250 \\ 55.9504 & 50.2656 & 11.2896 & 14.9600 & 6.7200 \end{bmatrix}$$

由于矩阵 A 可逆，线性方程组有唯一的解，解得 (可以

案例分析

用 Matlab 求解):$\boldsymbol{a_1 = 0.6143, a_2 = -0.3440, a_3 = 0.6942, a_4 = -1.6351\ a_5 = -0.2165}$. 因此，椭圆的 y 一般方程为

$$\boldsymbol{0.6143x^2-0.688xy+0.6942y^2-3.2702x-0.433y =}$$

由于前 3 项 $\boldsymbol{0.6143x^2 - 0.688xy + 0.6942y^2}$ 是二次

型，系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0.6143 & -0.344 \\ -0.344 & 0.6942 \end{bmatrix}$$

它的特征值分别为 $\lambda_1 = 0.3079, \lambda_2 = 1.0006$, 两个相互正交的单位特征向量分别为

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0.7468 \\ 0.6651 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -0.6651 \\ 0.7468 \end{bmatrix}$$

因此可利用正交变换 $\begin{cases} x = 0.7468x' - 0.6651' \\ y = 0.6651x' + 0.7468y' \end{cases}$，将椭圆的一般方程标准化为

$$0.3079x'^2 + 1.0006y'^2 - 2.7301x' + 1.8516y' = -1$$

再配方，即可得到小行星轨道椭圆的标准形式

$$\frac{(x' - 4.4334)^2}{4.3805^2} + \frac{(y' + 0.9252)^2}{2.43^2} = 1$$

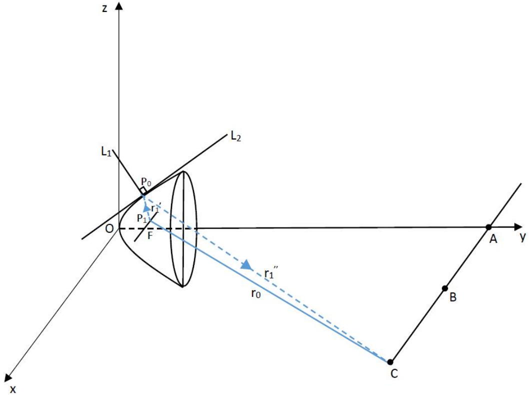
由此可得, 小行星运行轨道椭圆的长半轴 $a = 4.3805$, 短半轴 $b = 2.43$, 半焦距 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3.6447$, 近日点距 $h = a - c = 0.7358$, 远日点距 $H = a + c = 8.0253$ 和椭圆周长的近似值 $l = \pi[\frac{3}{2}(a+b)-\sqrt{ab}] = 13.4784\pi = 42.3437$(天文单位).

4 案例二：车灯线光源设计问题

问题背景：

安装在汽车头部的车灯的形状为一旋转抛物面，车灯的对称轴水平地指向正前方，其开口半径 36 毫米，深度 21.6 毫米．经过车灯的焦点，在与对称轴相垂直的水平方向，对称地放置一定长度的均匀分布的线光源．要求在下列设计规范标准下确定线光源的长度：在焦点 F 正前方 25 米处的 A 点放置一测试屏，屏与 FA 垂直，用以测试车灯的反射光．在屏上过 A 点引出一条与地面相平行的直线，在该直线 A 点的同侧取 B 点和 C 点，使 AC=2AB=2.6 米．要求 C 点的光强度不小于某一额定值（可取为 1 个单位），B 点的光强度不小于该额定值的两倍（只须考虑一次反射）．问题：在满足该设计规范的条件下，计算线光源长度，使线光源的功率最小．

案例二：车灯线光源设计问题



案例二：车灯线光源设计问题

【问题分析】

线光源任意一点发出的光，可直接照射在光屏上，也可以经过灯罩（旋转抛物面）一次反射（不考虑二次反射）后，间接照射在光屏上．线光源上不同位置的点发射的光线投射到抛物面上，反射后能够到达指定点的投射点的集合（称为有效投射点的集合）是不同的．因为线光源过焦点对称水平放置，线光源上点的位置分布仅与长度有关，因此在满足设计规范要求的条件下，寻求线光源功率最小，线光源长度是决定因素，而弄清线光源上各点有效投射点的情况，则是解决问题的关键所在．

【模型假设】

（1）不考虑光的二次反射；

（2）不考虑光的折射；

（3）不考虑光的干涉和衍射；

（4）光在传播过程中不吸收新的能量，仅考虑光的扩散；

（5）光在同一连续均匀介质中（例如空气）传播；

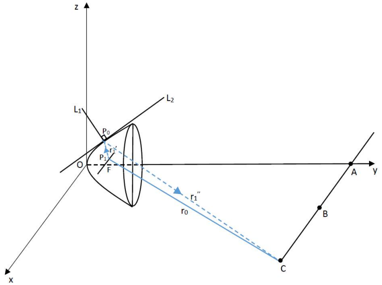
（6）灯丝为理想线光源，没有横向尺寸，不考虑灯管遮光；

案例二：车灯线光源设计问题

（7）入射光发生完全镜面反射，旋转抛物面不吸收能量.

【模型构建】

如图，按照右手螺旋准则建立空间直角坐标系（单位：mm）



为了解决这个案例，补充空间解析几何中的旋转面方程方面的知识。详细的请参考北大丘维声编的《解析几何》。

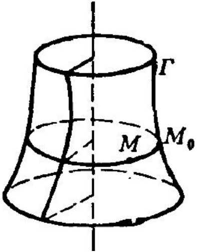
谢　　谢！

5 空间解析几何知识补充

1、旋转面　定义 3.1 一条曲线 $\boldsymbol{\Gamma}$ 绕一条直线 $\boldsymbol{l}$ 旋转所得的曲面称为旋转面。$\boldsymbol{l}$ 称为 轴，$\boldsymbol{\Gamma}$ 称为母线。母线 $\boldsymbol{\Gamma}$ 上每个点 $\boldsymbol{M_0}$ 绕 $\boldsymbol{l}$ 旋转得到一个圆，称为纬圆，纬圆与轴垂直。过 $\boldsymbol{l}$ 的半平面与旋转面的交线称为经线(或子午线)。经线可以作为母线，但母线不一定是经线。
已知轴 $\boldsymbol{l}$ 过点 $\boldsymbol{M_1(x_1, y_1, z_1)}$，方向向量为 $\boldsymbol{v(l, m, n)}$，母线 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的方程为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{F(x, y, z) = 0} \\ \boldsymbol{G(x, y, z) = 0} \end{cases}$$

我们来求旋转面的方程。
点 $\boldsymbol{M(x, y_0, z)}$ 在旋转面上的充分必要条件是 $\boldsymbol{M}$ 在经过母线 $\boldsymbol{\Gamma}$ 上某一点 $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0, z_0)}$ 的纬圆上 (如图)。



即有母线 $\mathbf{\Gamma}$ 上的一点 M_0 使得 M 和 M_0 到轴 l 的距离相等 (或到轴上一点 M_1 的距离相等); 并且 $\overrightarrow{M_0M} \perp l$。因此，有

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ G(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ |\overrightarrow{MM_1} \times v| = |\overrightarrow{M_0M_1} \times v| \\ l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0, \end{cases}$$

从这个方程组中消去参数 x_0，y_0，z_0 就得到 x，y，z 的方程，它就是所求旋转面的方程。
现在设旋转轴为 z 轴，母线 Γ 在 yOz 平面上，其方程为

$$\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

则点 $M(x, y, z)$ 在旋转面上的充分必要条件是:

$$\begin{cases} f(y_0, z_0) = 0 \\ x_0 = 0 \\ x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 \\ 1 \cdot (z - z_0) = 0 \end{cases}$$

消去参数 x_0，y_0，z_0，得

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

就是所求旋转面的方程。由此看出，为了得到 yOx 平面上的曲线 $\boldsymbol{\Gamma}$ 绕 $\boldsymbol{z}$ 轴旋转所得的旋转面方程，只要将母线 $\boldsymbol{\Gamma}$ 在 yOz 平面上的方程中 $\boldsymbol{y}$ 改成 $\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}$，$\boldsymbol{z}$ 不动。坐标平面上的曲线绕坐标轴旋转所得旋转面方程都有类似的规律。

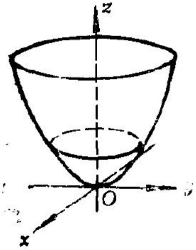
例 1　母线 $\boldsymbol{\Gamma}$

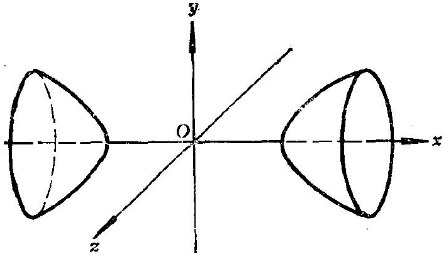
$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{2pz} \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

绕 $\boldsymbol{z}$ 轴旋转所得旋转面方程为

$$\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=\boldsymbol{2pz}$$

这个曲面称为旋转抛物面 (如下左图)，





例 2　母线 $\boldsymbol{\Gamma}$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

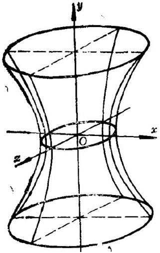
绕 x 轴旋转所得曲面方程为

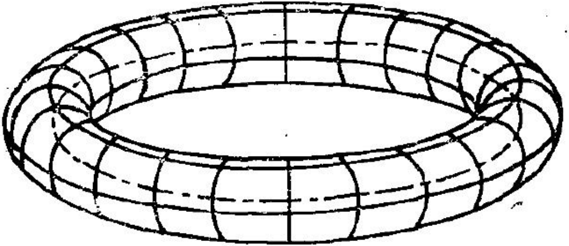
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

这个曲面称为旋转双叶双曲面 (如上右图)。$\boldsymbol{\Gamma}$ 绕 y 轴旋转所得曲面方程为

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

这个曲面称为旋转单叶双曲面 (如下左图).





例 3　圆

$$\begin{cases} (x-a)^2+z^2=r^2 \\ y=0 \end{cases}$$

绕 z 车由旋转所得曲面为

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=r^2$$

即

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-r^2)^2=4a^2(x^2+y^2)$$

这个曲面称为环面 (如上右图),

例 4　设 l_1 和 l_2 是两条异面直线，它们不垂直。求 l_2 绕 l_1 旋转所得曲面的方程。

解设 l_1 和 l_2 的距离为 a。以 l_1 为 z 轴，以 l_1 和 l_2 的公垂线为 x 轴，且使 l_2 与 x 轴的交点为 $(a,0,0)$ 。建立一个右手直角坐标系。设 l_2 的方向向量为 $v(l,m,n)$，因为 l_2 与 x 轴垂直，所以 $v\cdot e_1=0$，得 $l=0$。因为 l_2 与 l_1 异面，所以 v 不平行于 e_3，于是 $m\neq 0$。因此可设 v 的坐标为 $(0,1\ b)$。因为 l_1

与 l_2 不垂直，所以 $v \cdot e_3 \neq 0$，于是 $b \neq 0$。因此，l_2 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \\ y = t, \quad -\infty \leq t \leq \infty \\ z = bt \end{cases}$$

点 M 在旋转面上的充分必要条件是

$$\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = t \\ z_0 = bt \\ x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 \\ 1 \cdot (z - z_0) = 0 \end{cases}$$

消去参数 x_0，y_0，z_0，t，得

$$x^2 + y^2 = a^2 + \frac{z^2}{b^2}$$

这是一个旋转单叶双曲面。

练习题

1、求旋转面的方程. (1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 绕 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 旋转

(2) $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 绕 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 旋转

(3) $x-1=\frac{y}{-3}=\frac{z}{3}$ 绕 z 轴旋转

(4) $x-1=\frac{y}{-3}=\frac{z}{-3}$ 绕 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$ 旋转

(5) $\begin{cases} z=ax+b \\ z=cy+d \end{cases}$ $(a,b,c,d\neq 0)$ 绕 z 轴旋转

(6) $\begin{cases} 4x^2+9y^2=36 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转

(7) $\begin{cases} (x-2)^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转

(8) $\begin{cases} xy=a^2 \\ z=0 \end{cases}$ 绕这曲线的渐近线旋转;

(9) $\begin{cases} y = x^3 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转

(10) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x^2 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转

2、适当选取坐标系，求下列轨迹的方程。

(1) 到两定点距离之比等于常数的点的轨迹;

(2) 到两定点距离之和等于常数的点的轨迹;

(3) 到定平面和定点等距离的点的轨迹.

谢　　谢！

6 案例二：车灯线光源设计问题续

回到案例分析

在 xoy 平面内，

这个旋转抛物面是

由上开口抛物线 $x^2 = 2py$

以 y 为轴旋转得到，

而 $x = 36$，$y = 21.6$

在这个曲线上，

故得 $p = 30$

旋转抛物面的方程为

$$x^2 + z^2 = 60y,$$

这样焦点坐标为 $F(0, 15, 0)$,

$A(0, 25015, 0)$

$B(1300, 25015, 0)$

$C(2600, 25015, 0)$

案例二：车灯线光源设计问题续

线光源上的点坐标为

$P_1(x_1, 15, 0)$,

记其对称点为

$P_2(x_2, y_2, z_2)$

旋转面方程记为

$$F(x,y,z)=x^2-60y+z^2=0$$

从而在点 (x_0,y_0,z_0) 的法向量为

$$(F_x,F_y,F_z)=(2x_0,-60,2z_0)$$

即法线：

$$\overrightarrow{L_1}=\{2x_0,-60,2z_0\}.$$

案例二：车灯线光源设计问题续

因此，切平面的方程

$$2x_0(x-x_0)-60(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0.$$

P_1P_2 的中点 $P_m(x_m,y_m,z_m)$

满足切平面方程，即

$$2x_0(\frac{x_1+x_2}{2}-x_0)-60(\frac{y_1+y_2}{2}-y_0)+2z_0(\frac{z_2}{2}-z_0)=0$$

案例二：车灯线光源设计问题续

入射光线：

$$\overrightarrow{P_1P_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - 15, z_0\}.$$

反射光线：

$$\overrightarrow{P_0C} = \{2600 - x_0, 25015 - y_0, -z_0\}$$

案例二：车灯线光源设计问题续

回顾反射定律，

（1）光反射时，

反射光线、入射光线、法线

都在同一平面内。

案例二：车灯线光源设计问题续

（2）光反射时，

反射光线、入射光线分居法线两侧。

（3）光反射时，

反射角等于入射角。

入射光线 P_1P_0、

法线 L_1、

反射光线 P_0C

在同一平面 α 内

则三向量的混合积为 0，即

$$\begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - 15 & z_0 \\ 2x_0 & -60 & 2z_0 \\ 2600 - x_0 & 25015 - y_0 & -z_0 \end{vmatrix} = 0$$

整理得

$$[(24985 - y_0)x_1 + 2600y_0 + 39000]z_0 = 0.$$

又由于 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 在抛物面上，

满足 $x_0^2 + z_0^2 = 60y_0$，

所以：$-36 \le x_0 \le 36$,

$-36 \le z_0 \le 36$,

$0 \le y_0 \le 21.6$.

表明 z_0 可取 0 也可以不取 0

因此，（1）当 $z_0 \neq 0$，从而

$[(24985 - y_0)x_1 + 2600y_0 + 39000] = 0$ 时，

得到 $y_0 = \frac{24985x_1+39000}{x_1-26000}$.

由 $0 \leq y_0 \leq 21.6$，

求得 $-3.81 \leq x_1 \leq -1.56$,

案例二：车灯线光源设计问题续

即仅在线光源上

满足 $-3.81 \leq x_1 \leq -1.56$ 的点

发出的光经过抛物面上

$z_0 \neq 0$ 的点

反射后可经过 C 点.

（2）当 $z_0 = 0$ 时，
反射点位于
用 $z_0 = 0$ 平面
截旋转抛物面
所得的抛物线上.

以上分析仅是反射光线
过 C 点的必要条件，
但给出了线光源
上点的初步划分，
大大缩小了讨论范围.

案例二：车灯线光源设计问题续

为保证区域
划分的准确性，
需要再通过计算机
变步长搜索的方法.

下面，利用

虚像 P_2、

反射点 P_0、

光屏上点 C

三点共线的条件，

以 x_1 为变量分别表示出

x_0、y_0、z_0，

再利用 Matlab 对 x_1

进行变步长搜索，

找出有效投射点

集合的变化规律，

案例二：车灯线光源设计问题续

具体步骤如下：

由平面解析几何知识，

平面内垂直于同一条直线的

两条直线互相平行，

显然 $P_1P_2//L_1$，即

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{L_1} = 0,$$

得到

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - 15 & z_2 \\ 2x_0 & -60 & 2z_0 \end{vmatrix} = 0$$

即：

$$[(15-y_2)z_0-30z_2]i$$

$$-[(x_1-x_2)z_0+z_2x_0]j$$

$$+[-30(x_1-x_2)-(15-y_2)x_0]k=0$$

案例二：车灯线光源设计问题续

得到以下三式:

$$\begin{cases} (15-y_2)z_0 - 30z_2 = 0 \\ (x_1-x_2)z_0 + z_2x_0 = 0 \\ -30(x_1-x_2) - (15-y_2)x_0 = 0 \end{cases}$$

推出:

$$\begin{cases} z_2 = \frac{(15-y_2)z_0}{30} & (1) \\ x_2 = x_1 + \frac{(15-y_2)x_0}{30} & (2) \end{cases}$$

将 (1)(2) 代入切平面方程有:

$$x_0\left(\frac{x_1 + x_1 + \frac{(15-y_2)x_0}{30}}{2} - x_0\right) - 30\left(\frac{15+y_2}{2} - y_0\right) + z_0\left(\frac{(15-y_2)z_0}{60} - z_0\right) = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_0\left(\frac{60x_1 + (15-y_2)x_0}{60} - x_0\right) - 15\left(15 + y_2 - 2y_0\right) + z_0\frac{(15-y_2)z_0 - 60z_0}{60} = 0$$

案例二：车灯线光源设计问题续

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{x_0(60x_1 + (15 - y_2)x_0 - 60x_0) - 900(15 + y_2 - 2y_0) + z_0((15 - y_2)z_0 - 60z_0) = 0}$$

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{60x_0x_1 + 15x_0^2 - y_2x_0^2 - 60x_0^2 - 900 * 15 - 900y_2 + 1800y_0 + 15z_0^2 - y_2z_0^2 - 60z_0^2 = 0}$$

整理得到 $\boldsymbol{y_2}$ 表达式

$$\boldsymbol{y_2 = \frac{15(4x_0x_1 - 3x_0^2 - 900 + 120y_0 - 3z_0^2)}{x_0^2 + 900 + z_0^2}}.$$

案例二：车灯线光源设计问题续

将得到的 y_2 代入 (1) 有:

$$
\begin{aligned}
z_2 &= \frac{(15 - y_2)z_0}{30} \\
&= \frac{\left(15 - \dfrac{15(4x_0x_1 - 3x_0^2 - 900 + 120y_0 - 3z_0^2)}{x_0^2 + 900 + z_0^2}\right) z_0}{30} \\
&= \frac{z_0\left(\dfrac{x_0^2 + 900 + z_0^2 - 4x_0x_1 + 3x_0^2 + 900 - 120y_0 + 3z_0^2}{x_0^2 + 900 + z_0^2}\right)}{2} \\
&= \frac{z_0(4x_0^2 + 1800 + 4z_0^2 - 4x_0x_1 - 120y_0)}{2(x_0^2 + 900 + z_0^2)} \\
&= \frac{z_0(2x_0^2 + 900 + 2z_0^2 - 2x_0x_1 - 60y_0)}{x_0^2 + 900 + z_0^2}.
\end{aligned}
$$

案例二：车灯线光源设计问题续

将得到的 z_2 代入 (2) 有:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{x_1 z_0 + z_2 x_0}{z_0} \\
&= \frac{x_1 z_0 + x_0\left(\dfrac{z_0(2x_0^2 + 900 + 2z_0^2 - 2x_0 x_1 - 60y_0)}{x_0^2 + 900 + z_0^2}\right)}{z_0} \\
&= \frac{x_1(x_0^2 + 900 + z_0^2) + x_0(2x_0^2 + 900 + 2z_0^2 - 2x_0 x_1 - 60y_0)}{x_0^2 + 900 + z_0^2} \\
&= \frac{-x_1 x_0^2 + 900x_1 + x_1 z_0^2 + 2x_0^3 + 900x_0 + 2x_0 z_0^2 - 60x_0 y_0}{x_0^2 + 900 + z_0^2}.
\end{aligned}$$

案例二：车灯线光源设计问题续

即

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{-x_1x_0^2+900x_1+x_1z_0^2+2x_0^3+900x_0+2x_0z_0^2-60x_0y_0}{x_0^2+900+z_0^2} \\ y_2 = \dfrac{15(4x_0x_1-3x_0^2-900+120y_0-3z_0^2))}{x_0^2+900+z_0^2} \\ z_2 = \dfrac{2z_0(x_0^2+450+z_0^2-x_0x_1-30y_0)}{x_0^2+900+z_0^2} \end{cases}$$

反射光线能经过点 C 的
充分必要条件是

$\boldsymbol{P_0}$、$\boldsymbol{P_2}$ 、$\boldsymbol{C}$

三点共线，

案例二：车灯线光源设计问题续

因为

$$\overrightarrow{P_2P_0} = \{x_0 - x_2, y_0 - y_2, z_0 - z_2\}$$

$$\overrightarrow{CP_0} = \{2600 - x_0, 25015 - y_0, -z_0\}$$

所以 $\overrightarrow{P_2P_0} \times \overrightarrow{CP_0} = 0$

案例二：车灯线光源设计问题续

得

$$\begin{cases} -z_0(y_0 - y_2) - (z_0 - z_2)(25015 - y_0) = 0 \\ (x_0 - x_2)z_0 + (z_0 - z_2)(2600 - x_0) = 0 \\ (x_0 - x_2)(25015 - y_0) - (y_0 - y_2)(2600 - x_0) = 0 \end{cases}$$

案例二：车灯线光源设计问题续

由 (2) 中的第一式得

$$\boldsymbol{y_2 = \frac{z_0 y_0 + (z_0 - z_2)(25015 - y_0)}{z_0}},$$

与 (1) 中第二式的 $\boldsymbol{y_2}$ 相等, 即

$$\boldsymbol{\frac{z_0 y_0 + (z_0 - z_2)(25015 - y_0)}{z_0} = \frac{15(4x_0 x_1 - 3x_0^2 - 900 + 120y_0 - 3z_0^2)}{x_0^2 + 900 + z_0^2}}$$

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{(x_0^2 + 900 + z_0^2)[z_0 y_0 + (z_0 - z_2)(25015 - y_0)] = 15z_0(4x_0 x_1 - 3x_0^2 - 900 + 120y_0 - 3z_0^2)}$$

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{z_2 = \frac{(x_0^2 + 900 + z_0^2)[z_0 y_0 + z_0(25015 - y_0)] - 15z_0(4x_0 x_1 - 3x_0^2 - 900 + 120y_0 - 3z_0^2)}{(25015 - y_0)(x_0^2 + 900 + z_0^2)}}$$

$$= \frac{z_0(25060x_0^2 + 25060 \times 900 + 25060z_0^2 - 60x_0x_1 - 1800y_0)}{(25015 - y_0)(x_0^2 + 900 + z_0^2)}$$

这与 (1) 中的第三式的 z_2 相等. 因此有

$$z_2 = \frac{2z_0(x_0^2 + 450 + z_0^2 - x_0x_1 - 30y_0)}{x_0^2 + 900 + z_0^2}$$

$$= \frac{z_0(25060x_0^2 + 25060 \times 900 + 25060z_0^2 - 60x_0x_1 - 1800y_0)}{(25015 - y_0)(x_0^2 + 900 + z_0^2)}$$

$\Rightarrow$

$$(25015 - y_0)(x_0^2 + 450 + z_0^2 - x_0x_1 - 30y_0)$$

$$= 12530x_0^2 + 25030 \times 450 + 12530z_0^2 - 30x_0x_1 - 900y_0$$

$\Rightarrow$

$$12485x_0^2 - 15 \times 450 + 30y_0^2 + 12485z_0^2 - 24985x_0x_1 - 25000 \times 30y_0 - y_0x_0^2 - z_0^2y_0 + y_0x_0x_1 = 0$$

案例二：车灯线光源设计问题续

得到了第一组 x_1 与 x_0, y_0, z_0 的关系式.

由 (2) 中的第二式得

$$x_2 = \frac{x_0 z_0 + (z_0 - z_2)(2600 - x_0)}{z_0},$$

与 (1) 中第一式的 x_2 相等, 即

$$\frac{x_0 z_0 + (z_0 - z_2)(2600 - x_0)}{z_0}$$

$$= \frac{-x_1 x_0^2 + 900x_1 + x_1 z_0^2 + 2x_0^3 + 900x_0 + 2x_0 z_0^2 - 60x_0 y_0}{x_0^2 + 900 + z_0^2}$$

解出 z_2 得

$$z_2$$

$$= \frac{[x_0 z_0 + z_0(2600 - x_0)](x_0^2 + 900 + z_0^2) - z_0(-x_1 x_0^2 + 900x_1 + x_1 z_0^2 + 2x_0^3 + 900x_0 + 2x_0 z_0^2 - 60x_0 y_0)}{(2600 - x_0 x_0^2 + 900 + z_0^2)}$$

$$= \frac{z_0(2600x_0^2 + 2600 \times 900 + 2600z_0^2) + x_1x_0^2 - 900x_1 - x_1z_0^2 - 2x_0^3 - 900x_0 - 2x_0z_0^2 + 60x_0y_0}{(2600 - x_0)(x_0^2 + 900 + z_0^2)}$$

这与 (1) 中的第三式的 z_2 相等有

$$\frac{z_0(x_0^2 + 450 + z_0^2 - x_0x_1 - 30y_0)}{x_0^2 + 900 + z_0^2} = \frac{z_0(2600x_0^2 + 2600 \times 900 + 2600z_0^2)}{(2600 - x_0)(x_0^2 + 900 + z_0^2)}$$
$$+ \frac{x_1x_0^2 - 900x_1 - x_1z_0^2 - 2x_0^3 - 900x_0 - 2x_0z_0^2 + 60x_0y_0}{(2600 - x_0)(x_0^2 + 900 + z_0^2)}$$

整理得到

$$2600x_0^2 + 2600z_0^2 - 5200x_0x_1 - 5200 \times 30y_0 + x_0^2x_1 + 900x_1 + x_1z_0^2 = 0.$$

即得到了第二组 x_1 与 x_0, y_0, z_0 的关系式.

由 (2) 中的第三式得

$$x_2 = \frac{x_0(25015 - y_0) - (y_0 - y_2)(2600 - x_0)}{25015 - y_0},$$

案例二：车灯线光源设计问题续

这与 (1) 中第一式的 x_2 相等, 即

$$\frac{x_0(25015-y_0)-(y_0-y_2)(2600-x_0)}{25015-y_0}$$

$$=\frac{-x_1x_0^2+900x_1+x_1z_0^2+2x_0^3+900x_0+2x_0z_0^2-60x_0y_0}{x_0^2+900+z_0^2},$$

解出 y_2 得

$$y_2=\frac{[y_0(2600-x_0)-x_0(25015-y_0)](x_0^2+900+z_0^2)+(25015-y_0)(-x_1x_0^2+900x_1+x_1z_0^2+2x_0^3+900x_0+2x_0z_0^2-60x_0y_0)}{(x_0^2+900+z_0^2)(2600-x_0)}$$

这与 (1) 中的第二式的 y_2 相等有

$$\frac{15(4x_0x_1-3x_0^2-900+120y_0-3z_0^2)}{x_0^2+900+z_0^2}$$

案例二：车灯线光源设计问题续

$$= \frac{[y_0(2600 - x_0) - x_0(25015 - y_0)](x_0^2 + 900 + z_0^2) + (25015 - y_0)}{(x_0^2 + 900 + z_0^2)}$$

$$\frac{(-x_1 x_0^2 + 900x_1 + x_1 z_0^2 + 2x_0^3 + 900x_0 + 2x_0 z_0^2 - 60x_0 y_0)}{(2600 - x_0)}$$

整理得到

$$\begin{aligned}
&22513500x_1 - 2353500y_0 - 156000x_1x_0 - 900x_1y_0 - 1501800x_0y_0 - 25015x_1x_0^2 \\
&+ 25015x_1z_0^2 + 60x_0y_0^2 + 2555x_0^2y_0 - 2x_0^3y_0 + 25015x_0z_0^2 \\
&+ 2555y_0z_0^2 + 117000x_0^2 + 25015x_0^3 + 1800y_0^2 + 117000z_0^2 \\
&+ x_1x_0^2y_0 - x_1y_0z_0^2 - 2x_0y_0z_0^2 + 60x_1x_0y_0 + 35100000 = 0.
\end{aligned}$$

即得到了第三组 x_1 与 x_0, y_0, z_0 的关系式.

求出 P_0，可得到以 x_1 为变量表达的

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的值，

根据 P_0 值的有效个数

便可确定有效投射点的个数，

从而校验线光源区段

划分的正确性.

即线光源有如下划分：

当 $x_1 > -1.56$ 时，

没有反射线经过 C 点；

当 $x_1 = -1.56$ 时，

有 2 条反射线经过 C 点；

当 $-3.81 \leq x_1 \leq -1.56$,

有 4 条反射线经过 C 点；

当 $x_1 < -3.81$ 时,

有 2 条反射线经过 C 点.

同理当反射光线

经过 B 点时

亦可进行相同分析，

划分如下：

当 $x_1 > -0.78$ 时，没有反射光经过 B 点；

案例二：车灯线光源设计问题续

当 $-1.9 < x_1 < -0.78$ 时,

有 4 条反射光经过 B 点;

当 $x_1 < -1.9$ 时,

有 2 条反射光经过 B 点.

很显然，以上对线光源的分段
对应着不同的积分域，
欲求 B、C 点的光强度，
只需对点光源的功率
分段积分求和即可.

案例二：车灯线光源设计问题续

记线光源的功率 $\boldsymbol{W}$,

线光源长度 $\boldsymbol{2a}$,

设从线光源上任意一点

经过反射或直射到达指定点的

总光线条数为 $\boldsymbol{k}$,

案例二：车灯线光源设计问题续

根据光照度与

光强成正比，

与距离的平方成反比，

光通量 $F = W\times$ 光效

（其中光效为定值）

案例二：车灯线光源设计问题续

光强 $\boldsymbol{I = \frac{F}{4\pi}}$,

照度 $\boldsymbol{E = \frac{I}{\gamma^2}}$

则可以建立如下模型

案例二：车灯线光源设计问题续

$$\min W = W(a), s.t.$$

$$\begin{cases} E_B = \int_{-a\le x\le a} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{W}{4\pi\gamma_i^2 2a} dx \ge 2 \\ E_C = \int_{-a\le x\le a} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{W}{4\pi\gamma_i^2 2a} dx \ge 1 \end{cases}$$

案例二：车灯线光源设计问题续

小结：此题运用到了

立体几何、

解析几何、

大量物理知识，

尤其以几何方法为主.

案例二：车灯线光源设计问题续

可见，几何方法

在本题中的作用

还是十分重要的，

它与其它模型相辅相成，

共同构成数学建模的核心.

谢　谢！