1 通过定点的曲线与曲面方程

线性方程组的理论中有一个基本结论: 含有 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是其系数行列式等于零. 利用这个结论, 我们可以建立用行列式表示的直线、平面、圆和其他一些曲面的方程, 也可以求出一般多项式的表达式. 如果平面上有两个不同的已知点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 通过这两点存在唯一的直线, 设直线方程为: $ax + by + c = 0$, 且 a, b, c 不全为零. 由于 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 在这条直线上, 所以它们满足上述直线方程, 则: $ax_1 + by_1 + c = 0, ax_2 + by_2 + c = 0$. 因此有

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

这是一个以 a, b, c 为未知量的齐次线性方程组, 且 a, b, c 不全为零, 说明该齐次线性方程组必有非零解. 于是, 系数行列式等于零. 即

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

这就是用行列式表示的通过已知两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的直线方程.

例如, 通过两点 $(-1, 2), (3, -4)$ 的直线方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ 即} 3x + 2y - 1 = 0$$

同理, 通过空间中三点 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

例如, 通过空间中三点 $(7, 6, 7), (5, 10, 5), (-1, 8, 9)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 1 \\ 5 & 10 & 5 & 1 \\ -1 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ 即} 3x + 5y + 7z - 100 = 0$$

同理, 用行列式表示的通过平面上三点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 的圆的方程为

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

对于 n 次多项式 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, 可由其图像上的 $n+1$ 个横坐标互不相同的点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n),(x_{n+1},y_{n+1})$ 所唯一确定. 这是因为, 这 $n+1$ 个点均满足这个 n 次多项式, 则有

$$\begin{cases} a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_2^n=y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n \\ a_0+a_1x_{n+1}+a_2x_{n+1}^2+\cdots+a_nx_{n+1}^n=y_{n+1} \end{cases}$$

这是一个含有 $n+1$ 个方程、以 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $n+1$ 个未知量的线性方程组, 其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

是一个范德蒙 (Vandermonde) 行列式, 当 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}$ 互不相同时, $D\neq 0$, 由克莱姆 (Cramer) 法则, 可以唯一地解出 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$. 所以, n 次多项式

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

可由其图像上的 $n+1$ 个横坐标互不相同的点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$, (x_{n+1},y_{n+1}) 所唯一确定. 该多项式方程的行列式形式为

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n & y \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n & y_n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n & y_{n+1} \end{vmatrix}=0$$

1.1 评注

1. 理论依据

求解线性方程组的克莱姆 (Cramer) 法则, 范德蒙 (Vandermonde) 行列式的直接应用。

2. 应用与推广

求过定点的曲线或曲面的方程, 一般多项式的拟合问题, 应用这些方法还可以解决多项式插值问题.

1.2 参考文献

[1] 归行茂, 等. 线性代数的应用 [M]. 上海: 上海科学普及出版社, 1994.

[2] 杨桂元, 用行列式求通过定点的曲线与曲面方程 [J], 高等数学研究,2003(1) : $42-43$

2 循环比赛名次的确定

矩阵是线性代数的主要内容, 也是线性代数中解决问题的主要工具. 许多实际应用问题可以用矩阵来描述，通过矩阵的运算来解决应用问题.

例 1 : 若有 5 个球队进行单循环赛, 已知它们的比赛结果为: 1 队胜 2,3 队; 2 队胜 3, 4, 5 队; 4 队胜 1, 3, 5 队; 5 队胜 1,3 队. 按获胜的次数排名次, 若两队胜的次数相同, 则按直接胜与间接胜的次数之和排名次. 所谓间接胜, 即若 1 队胜 2 队, 2 队胜 3 队, 则称 1 队间接胜 3 队. 试为这 5 个队排名次.

按照上述排名次的原则, 不难排出 2 队为冠军, 4 队为亚军, 1 队第 3 名, 5 队第 4 名, 3 队垫底. 问题是: 如果参加比赛的队数比较多, 应如何解决这个问题? 有没有解决这类问题的一般方法?

我们可以用邻接矩阵 M 来表示各队直接胜的情况: $M = (m_{ij})_{5\times5}$, 若第 i 队胜第 j 队, 则 $m_{ij} = 1$, 否则 $m_{ij} = 0(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$. 由此可得

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M 中各行元素之和分别为各队直接胜的次数, M^2 中各行元素之和分别为各队间接胜的次数. 那么

$$\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

各行元素之和分别为 $5, 8, 0, 7, 4$, 就是各队直接胜与间接胜的次数之和. 由此可得: 比赛的名次依次为 2 队、4 队、1 队、5 队、3 队. 如果参赛的队数很多, 用这种方法计算会很复杂, 甚至还无法得出确定的结论, 可根据非负矩阵的最大特征值与其对应的特征向量的性质来确定排序问题. 根据 Matlab 中的命令:

$$\mathrm{M} = [0, 1, 1, 0, 0; 0, 0, 1, 1, 1; 0, 0, 0, 0, 0; 1, 0, 1, 0, 1; 1, 0, 1, 0, 0]$$
$$[\mathrm{X}, \mathrm{Q}] = \mathrm{eig}(\mathrm{M})$$

可以求得 M 的最大特征值 $\lambda = 1.3953$, 对应的经过归一化的特征向量为:

$$W = (0.2303, 0.3213, 0, 0.2833, 0.1650)^{\mathrm{T}}$$

将这个特征向量的各个分量按照从大到小的顺序排序, 所以 5 个球队按照名次的排序依次为 2 队、4 队、1 队、5 队、3 队.

例 2: 若有 5 个垒球队进行单循环比赛, 其结果是: 1 队胜 3,4 队; 2 队胜 1,3,5 队; 3 队胜 4 队; 4 队胜 2 队; 5 队胜 1,3,4 队. 按直接胜与间接胜次数之和排名次.

用以表示各个队直接胜和间接胜的情况的邻接矩阵分别为:

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&0&1&1&0\\1&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{M}^2=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&2&3&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&1\\0&1&1&2&0\end{pmatrix},\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^2=\begin{pmatrix}0&1&1&2&0\\2&0&3&3&1\\0&1&0&1&0\\1&1&1&0&1\\1&1&2&3&0\end{pmatrix}$$

那么, $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^2$ 各行元素之和分别为 4、9、2、4、7, 所以各队的名次为: 第 1 名 2 队, 第 2 名 5 队, 第 3 名 1、4 队 (并列), 第 5 名 3 队. 1 队和 4 队无法确定顺序, 是否一定并列呢? 还要再计算 $\boldsymbol{M}^3,\boldsymbol{M}^4,\cdots$ 但是, 用 Matlab 计算:

$$\mathrm{M}=[0,0,1,1,0;1,0,1,0,1;0,0,0,1,0;0,1,0,0,0;1,0,1,1,0]$$
$$[\mathrm{X},\mathrm{Q}]=\mathrm{eig}(\mathrm{M})$$

可以求得 $\boldsymbol{M}$ 的最大特征值 $\lambda=1.7194$, 对应的经过归一化的特征向量为:

$$W=(0.1621,0.3029,0.1025,0.1762,0.2563)^{\mathrm{T}}$$

所以各队的名次为: 第 1 名 2 队, 第 2 名 5 队, 第 3 名 4 队, 第 4 名 1 队, 第 5 名 3 队, 1 队与 4 队不是并列. 这样排序才是最准确的.

2.1 评注

1. 理论依据

邻接矩阵的性质, 矩阵的最大特征值及其所对应的特征向量的性质 (PerroFrobenius 定理).

2. 应用与推广

根据循环比赛的邻接矩阵, 利用不可分矩阵的最大特征值及其对应的特征向量的性质, 对循环比赛的名次进行排序是非常合理的. 应用 Matlab 计算矩阵的最大特征值及其特征向量是非常方便的.

2.2 参考文献

[1] 姜启源, 等, 数学模型 [M].3 版. 北京: 高等教育出版社, 2003 .

3 不同地（城市）之间的交通问题

矩阵的运算还可以表示不同地点（城市）的通达情况. 在国际象棋里，马在棋盘上是走“L”步的, 它可以水平走 2 格, 垂直走 1 格; 或者垂直走 2 格, 水平走 1 格. 假设马被限制在如下图所示的 9 个编号的格子里，马可以从第 i 格走到第 j 格中去，则 $m_{i,j}$=1, 否则 $m_{ij}=0(i,j=1,2,3,4,5)$.

由于马步既可前进，又可后退，则 $\boldsymbol{M}$ 是对称矩阵. 所以

1	2	3
4	5	6
7	8	9

$$M=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{M}^2$ 表示马可经 2 步间接到达的情况, $\boldsymbol{M}^3$ 表示马可经 3 步间接到达的情况 $\cdots\cdots$. 则 $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^2+\boldsymbol{M}^3+\cdots+\boldsymbol{M}^k$ 表示马在 k 步可以直接和间接到达的情况, 其中位于第 i 行第 j 列的数字表示在 k 步内马可以从第 i 格到第 j 格的不同 (直接和间接) 走法. 经计算

$$\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^2+\boldsymbol{M}^3=\begin{pmatrix} 2&1&1&1&0&4&1&4&0\\ 1&2&1&1&0&1&4&0&4\\ 1&1&2&4&0&1&0&4&1\\ 1&1&4&2&0&0&1&1&4\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 4&1&1&0&0&2&4&1&1\\ 1&4&0&1&0&4&2&1&1\\ 4&0&4&1&0&1&1&2&1\\ 0&4&1&4&0&1&1&1&2 \end{pmatrix}$$

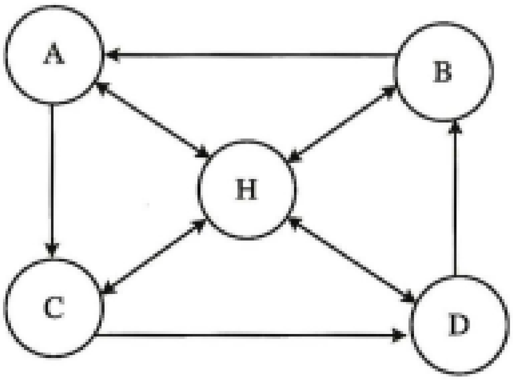
这说明, 在 3 步内, 除了格子 5 之外, 还有格子之间不可互相达到. 但是

$$\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^2+\boldsymbol{M}^3+\boldsymbol{M}^4=\begin{pmatrix} 8&1&5&1&0&4&5&4&2\\ 1&8&1&5&0&5&4&2&4\\ 5&1&8&4&0&1&2&4&5\\ 1&5&4&8&0&2&1&5&4\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 4&5&1&2&0&8&4&5&1\\ 5&4&2&1&0&4&8&1&5\\ 4&2&4&5&0&5&1&8&1\\ 2&4&5&4&0&1&5&1&8 \end{pmatrix}$$

这说明, 在 4 步内, 除了格子 5 之外, 其余格子均可互相达到, 对应的数字为达到的通路数目. 由于 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{M}^4$ 中第 5 行与第 5 列的元素全为零, 再计算下去, $\boldsymbol{M}^5$ 中第 5 行与第 5 列的元素也全为零, 因此格子 5 与其他格子不能通达; 其实由 $\boldsymbol{M}$ 中第 5 行与第 5 列的元素全为零, 可以推得

对任意整数 $k \geqslant 0$, 都有 $\boldsymbol{M}^k$ 中第 5 行与第 5 列的元素全为零, 格子 5 与其他格子不能通达. 因此, 这种方法也可以用来研究一般交通路线的通达情况.

下图是某个航空公司关于 $\mathrm{A,B,C,D}$ 和 H 五个城市的航线图, 其中 H 是中心城市, 它和其他每个城市之间都有往返航线, 而其他城市之间只有从 A 到 C, 从 C 到 D, 从 D 到 B, 从 B 到 A 四条航线.



假定我们要从城市 A 到 B 旅行, 那么至少需要 2 条航线才能完成这次旅行, 其中 $\mathrm{A} \to \mathrm{H}$ 和 $\mathrm{H} \to \mathrm{B}$ 两条航线连接起来的路线所需要的航线数最少, 否则至少需要 3 条航线. 于是, 我们要问, 共有多少条从城市 A 到城市 B 的路线恰好是由 3 条航线连接起来的? 有多少条路线所需的航线不超过 4 条? 由于一共只有五个城市, 我们从图上观察, 就能回答上述问题. 在城市数多和航线图复杂的情况下, 用观察方法一般就难以解决问题了. 为此, 可以利用连接矩阵来解决这个问题. 设 $\mathbf{C} = (c_{ij})_{5\times 5}$, 其中

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若城市} i \text{ 到城市} j \text{ 有一航}, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases} \qquad i,j = 1,2,3,4,5$$

这里 $\mathbf{C}$ 称为邻接矩阵, 这五个城市的邻接矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{H} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{H} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \boldsymbol{C}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C^4 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 8 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 7 & 8 & 7 & 9 \\ 7 & 7 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 20 \end{pmatrix}, C + C^2 + C^3 + C^4 = \begin{pmatrix} 11 & 11 & 11 & 11 & 16 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 16 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 16 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 & 28 \end{pmatrix}$$

从邻接矩阵 C 以及它的幂 $C^2, C^3, \cdots, C^m, \cdots$ 我们可以获得航线图的一些信息, 从而解决上述航线问题. 因此, 恰好由 3 条航线连接起来的从城市 A 到城市 B 的路线总数是位于 $\boldsymbol{C}^3$ 第一行第二

列的元素 $\left(\boldsymbol{C}^3\right)_{12}=3$; 恰好由 4 条航线连接起来的从城市 A 到城市 B 的路线总数是 $\left(C^4\right)_{12}=7$. 从城市 A 到城市 B 所需的航线不超过 4 条的路线总数是: $\left(C+C^2+C^3+C^4\right)_{12}=11$ 条.

本问题的矩阵计算用 Matlab 计算更方便.

3.1 评注

1. 理论依据

邻接矩阵的性质，根据矩阵的运算来解决通达问题。

2. 应用与推广

两点之间的关联可以通过邻接矩阵来反映. 邻接矩阵的基本原理可以应用到图论与网络优化问题之中.

3.2 参考文献

[1] 归行茂, 等. 线性代数的应用 [M]. 上海: 上海科学普及出版社, 1994 .

[2] 邱森. 线性代数探究性课题精编 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2011 .

4 调整气象观测站问题

某地区有 12 个气象观测站, 10 年来各观测站的年降水量如下表所示. 为了节省开支, 想要适当减少气象观测站. 问题: 减少哪些气象观测站可以使所得的降水量的信息量仍然足够大?

某地区 12 个气象站 1981-1990 年降水量 (单位: mm)

地点 / 年份	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
1981	276.2	324.5	158.6	412.5	292.8	258.4	334.1	303.2	292.9	243.2	159.7	331.2
1982	251.6	287.3	349.5	297.4	227.8	453.6	321.5	451	466.2	307.5	421.1	455.1
1983	192.7	436.2	289.9	366.3	466.2	239.1	357.4	219.7	245.7	411.1	357	353.2
1984	246.2	232.4	243.7	372.5	460.4	158.9	298.7	314.5	256.6	327	296.5	423
1985	291.7	311	502.4	254	245.6	324.8	401	266.5	251.3	289.9	255.4	362.1
1986	466.5	158.9	223.5	425.1	251.4	321	315.4	317.4	246.2	277.5	304.2	410.7
1987	258.6	327.4	432.1	403.9	256.6	282.9	389.7	413.2	466.5	199.3	282.1	387.6
1988	453.4	365.5	357.6	258.1	278.8	467.2	355.2	228.5	453.6	315.6	456.3	407.2
1989	158.5	271	410.2	344.2	250	360.7	376.4	179.4	159.2	342.4	331.2	377.7
1990	324.8	406.5	235.7	288.8	192.6	284.9	290.5	343.7	283.4	281.2	243.7	411.1

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{12}$ 分别表示气象观测站 $x_1,x_2,\cdots,x_{12}$ 在 1981 ~ 1990 年内的降水量的列向量, 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{12}$ 是含有 12 个向量的 10 维向量组, 该向量组必定线性相关. 若能求出它的一个极大线性无关组, 则其极大线性无关组所对应的气象观测站就可将其他的气象观测站的气象资料表示出来, 因而其他气象观测站就是可以减少的. 因此, 最多只需要 10 个气象观测站.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{12}$ 为列向量组作矩阵 $\boldsymbol{A}$, 我们可以求出向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{12}$ 的一个极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5, \boldsymbol{\alpha}_6, \boldsymbol{\alpha}_7, \boldsymbol{\alpha}_8, \boldsymbol{\alpha}_9, \boldsymbol{\alpha}_{10}$ (可由 Matlab 软件中的命令, 输入矩阵 $\boldsymbol{A}, \mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$ 求出来) (事实上, 该问题中任意 10 个向量都是极大线性无关组), 且有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{11} =& -0.0275\boldsymbol{\alpha}_1 - 1.078\boldsymbol{\alpha}_2 - 0.1256\boldsymbol{\alpha}_3 + 0.1383\boldsymbol{\alpha}_4 - 1.8927\boldsymbol{\alpha}_5 - 1.6552\boldsymbol{\alpha}_6 \\
& + 0.6391\boldsymbol{\alpha}_7 - 1.0134\boldsymbol{\alpha}_8 + 2.1608\boldsymbol{\alpha}_9 + 3.794\boldsymbol{\alpha}_{10} \\
\boldsymbol{\alpha}_{12} =& 2.0152\boldsymbol{\alpha}_1 + 15.1202\boldsymbol{\alpha}_2 + 13.8396\boldsymbol{\alpha}_3 + 8.8652\boldsymbol{\alpha}_4 + 27.102\boldsymbol{\alpha}_5 + 28.325\boldsymbol{\alpha}_6 \\
& - 38.2279\boldsymbol{\alpha}_7 + 8.2923\boldsymbol{\alpha}_8 - 22.2767\boldsymbol{\alpha}_9 - 38.878\boldsymbol{\alpha}_{10}
\end{aligned}$$

故可以减少第 11 与第 12 个观测站, 可以使得到的降水量的信息仍然足够大. 当然, 也可以减少另外两个观测站, 只要这两个列向量可以由其他列向量线性表示.

如果确定只需要 8 个气象观测站, 那么我们可以从上表数据中取某 8 年的数据 (比如, 最近 8 年的数据), 组成含有 12 个 8 维向量的向量组, 然后求其极大线性无关组, 则必有 4 个向量可由其余向量 (就是极大线性无关组) 线性表示.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_9 =& 2.085\boldsymbol{\alpha}_1 + 2.712\boldsymbol{\alpha}_2 + 7.801\boldsymbol{\alpha}_3 + 5.446\boldsymbol{\alpha}_4 + 0.737\boldsymbol{\alpha}_5 + 0.144\boldsymbol{\alpha}_6 \\
& - 15.838\boldsymbol{\alpha}_7 - 1.426\boldsymbol{\alpha}_8 \\
\boldsymbol{\alpha}_{10} =& -1.108\boldsymbol{\alpha}_1 - 1.127\boldsymbol{\alpha}_2 - 4.0172\boldsymbol{\alpha}_3 - 2.816\boldsymbol{\alpha}_4 + 0.265\boldsymbol{\alpha}_5 + 0.611\boldsymbol{\alpha}_6 \\
& + 7.915\boldsymbol{\alpha}_7 + 0.975\boldsymbol{\alpha}_8 \\
\boldsymbol{\alpha}_{11} =& 0.274\boldsymbol{\alpha}_1 + 0.505\boldsymbol{\alpha}_2 + 1.491\boldsymbol{\alpha}_3 + 1.221\boldsymbol{\alpha}_4 + 0.704\boldsymbol{\alpha}_5 + 0.975\boldsymbol{\alpha}_6 \\
& - 3.554\boldsymbol{\alpha}_7 - 0.394\boldsymbol{\alpha}_8 \\
\boldsymbol{\alpha}_{12} =& -1.357\boldsymbol{\alpha}_1 - 1.463\boldsymbol{\alpha}_2 - 3.768\boldsymbol{\alpha}_3 - 2.957\boldsymbol{\alpha}_4 + 0.393\boldsymbol{\alpha}_5 + 1.356\boldsymbol{\alpha}_6 \\
& + 6.862\boldsymbol{\alpha}_7 + 2.134\boldsymbol{\alpha}_8
\end{aligned}$$

这 4 个向量所对应的气象观测站就可以减少, 可以使所得到的降水量的信息仍然足够大. 可以证明, 对于该问题的任意 8 个列向量都是线性无关的, 因此, 也可以减少其他 4 个气象观测站仍然可以使得到的降水量的信息足够大. (注: 本问题为西安市第一届大学生数学建模竞赛题目.)

4.1 评注

1. 理论依据

任意 m 个 n 维向量 $(m > n)$ 必然线性相关, 求出它的一个极大线性无关组, 其余的向量一定可以用所求的极大线性无关组线性表示.

2. 应用与推广

向量组的任意一个极大线性无关组都与整个向量组等价, 因此包含的信息量相同. 所以, 只要从列向量组中找出它的一个极大线性无关组, 就可以表示其余的向量, 这个极大线性无关组就包含足够的信息量. 这只是解决问题的一个途径, 当然也可以用其他方法 (如相关系数法、聚类分析法等) 进行解决.

4.2 参考文献

[1] 叶其孝. 数学建模教育与国际数学建模竞赛 [M]. 合肥:《工科数学》杂志社，1994.

5 投入产出分析

一个城镇有 3 个主要生产企业——煤矿、电厂和地方铁路作为它的经济系统. 已知生产价值 1 元的煤，需要消耗 0.25 元的电和 0.35 元的运输费; 生产价值 1 元的电，需要消耗 0.40 元的煤、0.05 元的电和 0.10 元的运输费；而提供价值 1 元的铁路运输服务，则需要消耗 0.45 元的煤、0.10 元的电和 0.10 元的铁路运输服务费. 假设在某个星期内，除了这 3 个企业间的彼此需求，煤矿得到 50000 元的订单, 电厂得到 25000 元的电量供应需求, 而地方铁路得到价值 30000 元的运输需求. 试问: 这 3 个企业在这个星期各生产多少产值才能满足内外需求？除了外部需求，试求这星期各企业之间的消耗需求，同时求出各企业的新创造价值（即产值中去掉各企业的消耗所剩部分）.

这是一个小型的经济投入产出模型. 在一个国家或地区的经济系统中, 各部门 (或企业) 既有消耗又有生产, 或者说既有“投入”, 又有“产出”, 生产的产品供给各部门和系统以外的需求, 同时也要消耗系统内各部门所提供的产品. 消耗的目的是为了生产, 生产的结果必然要创造新价值, 以支付工资、税收和获取利润. 显然对于每一个部门, 物质消耗 (生产资料转移价值) 和新创造价值之和应该等于它的生产总值. 这就是“投入”和“产出”之间的平衡关系 (见下表).

小型的经访投入产出表

地点 年份	消耗系数 (单位产品的消耗)			最终产品	总产值
	煤矿	电厂	铁路		
煤矿	0	0.40	0.45	50000	x_1
电厂	0.25	0.05	0.10	25000	x_2
铁路	0.35	0.10	0,10	30000	x_3
新创造价值	z_1	z_2	z_3		
总产值	x_1	x_2	x_3		

设煤矿、电厂和地方铁路在这星期的总产值分别为 x_1, x_2, x_3 (元), 那么就有分配平衡方程组 (表示产出情况)

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0.40x_2 + 0.45x_3 + 50000 = x_1 \\ 0.25x_1 + 0.05x_2 + 0.10x_3 + 25000 = x_2 \\ 0.35x_1 + 0.10x_2 + 0.10x_3 + 30000 = x_3 \end{cases}$$

该方程组说明各企业的产品按其经济用途的使用分配情况, 即

总产品 (值) = 中间产品 (作为系统内部的消耗) + 最终产品 (外部需求)

记 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0.40 & 0.45 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.35 & 0.10 & 0.10 \end{pmatrix}$ 称为直接消耗系数矩阵, $\boldsymbol{A}$ 中的元素 a_{ij} 表示 (单位: 元) 第 j 部门单位产品在生产过程中对第 i 部门产品的消耗量 $(i, j = 1, 2, 3)$. $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 称为总产品列向量 (矩阵), $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 称为最终产品列向量 (矩阵), 则分配平衡方程组可以表示成

$$AX + Y = X \text{ 或} (E - A)X = Y$$

从而其解为

$$\boldsymbol{X}=(E-A)^{-1}Y$$

对于我们的问题, 可得

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}Y=\begin{pmatrix}1&-0.40&-0.45\\-0.25&0.95&-0.10\\-0.35&-0.10&0.90\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}50000\\25000\\30000\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1.4566&0.6981&0.8059\\0.4482&1.2799&0.3663\\0.6162&0.4137&1.4652\end{pmatrix}\begin{pmatrix}50000\\25000\\30000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}114458\\65395\\85111\end{pmatrix}$$

即这个星期煤矿总产值是 114458 元, 电厂总产值是 65375 元, 铁路服务产值是 85111 元.

用 Matlab 求解:

$$\mathrm{A}=[0,0.4,0.45;0.25,0.05,0.1;0.35,0.1,0.1]$$

$$\mathrm{Y}=[50000,25000,30000]$$

$$\mathrm{X}=\mathrm{inv}(\mathrm{eye}(3)-\mathrm{A})*\mathrm{Y}$$

值得指出的是, $\boldsymbol{A}$ 是直接消耗系数矩阵, 可以证明: A 的所有特征值的模全小于 1 ; 因此, 满足条件 $\lim_{k\to\infty}A^k=0$, 这是直接消耗系数矩阵特有的性质. 则 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+A^3+\cdots$ 是收敛的, 称为完全需要系数矩阵; 同时 $(E-A)^{-1}-E=A+A^2+A^3+\cdots$ 称为完全消耗系数矩阵, 它等于直接消耗加上各次间接消耗.

在求出 $\boldsymbol{X}$ 以后, 3 个企业为煤矿提供的中间产品 (煤矿的消耗) 列向量为

$$x_1\begin{pmatrix}0\\0.25\\0.35\end{pmatrix}=114458\begin{pmatrix}0\\0.25\\0.35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\28614\\40060\end{pmatrix}$$

3 个企业为电厂提供的中间产品 (电厂的消耗) 列向量为

$$x_2\begin{pmatrix}0.40\\0.05\\0.10\end{pmatrix}=65395\begin{pmatrix}0.40\\0.05\\0.10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26158\\3270\\6540\end{pmatrix}$$

3 个企业为铁路提供的中间产品 (铁路的消耗) 列向量为

$$x_3\begin{pmatrix}0.45\\0.10\\0.10\end{pmatrix}=85111\begin{pmatrix}0.45\\0.10\\0.10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}38300\\8511\\8511\end{pmatrix}$$

另一方面, 若设煤矿、电厂和地方铁路在这星期的新创造价值 (工资、税收、利润等) 分别为 z_1,z_2,z_3 (元), 则可得到消耗平衡方程组

$$\begin{cases}0\cdot x_1+0.25x_1+0.35x_1+z_1=x_1\\0.40x_2+0.05x_2+0.10x_2+z_2=x_2\\0.45x_3+0.10x_3+0.10x_3+z_3=x_3\end{cases}$$

这个方程组说明了各部门总产值的价值构成情况, 即

$$\text{生产资料转移价值} + \text{新创造价值} = \text{总产值}$$

由于 x_1, x_2, x_3 已经求得, 代人消耗平衡方程组, 可以解得 $z_1 = 45784$ 元, $z_2 = 29427$ 元, $z_3 = 29789$ 元. 所以, 可以得到这 3 个部门的投人产出表, 如下表所示.

3 个部门的投入产出表

产出 / 投入	中间产品			最终产品	总产值
	煤矿	电厂	铁路		
煤矿	0	26158	38300	50000	114458
电厂	28614	3270	8511	25000	65395
铁路	40061	6540	8511	30000	85111
新创造价值	45784	29427	29789		
总产值	114458	65395	85111		

5.1 评注

1. 理论依据

根据线性方程组的理论, 列出价值型投入产出表的两组平衡方程组并求解.

2. 应用与推广

投入产出综合平衡模型是宏观的经济模型, 用于为经济系统 (小到一家公司, 大到整个国家乃至国际共同体) 编制经济计划并研究各种相关的经济政策和问题. 这种模型由美国经济学家里昂节夫 (Wassily W. Leortief) 于 1931 年开始研究, 并于 1936 年首先发表第一篇研究成果, 此后数十年间被愈来愈多的国家采用并取得良好的效果, 里昂节夫本人也因此而获得 1973 年度的诺贝尔经济学奖.

5.2 参考文献

[1] 郝志峰, 等, 线性代数 [M] .2 版, 北京: 高等教育出版社, 2003 .