第四章　初等代数与几何方法

4.1 初等代数方法

谭　忠

厦门大学数学科学学院

目录

1 源头问题与当今问题

有时候现象或事件中

变量之间呈现代数方程

或代数方程组的形式

比如高等代数中学习的代数方程组

源头问题与当今问题

空间解析几何中学习的

空间中的曲线、曲面方程

往往呈现成非线性代数方程或方程组

数学分析中的向量值函数等，

这些不过是最简定量关系函数的

不同表现形式而已，

空间解析几何中

熟知的映射

$$f : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \mapsto \mathrm{R}^3,$$

$$(r, \theta) \mapsto (x, y, z)$$

的具体分量形式是

$$\begin{cases} x = x(r, \theta) = r\cos\theta, \\ y = y(r, \theta) = r\sin\theta, \\ z = z(r, \theta) = r, \end{cases}$$

$$(r \in [0, +\infty), \theta \in [0, 2\pi])$$

源头问题与当今问题

这是二元三维向量值函数，

它是三维空间的一张半圆锥面，

从数学的角度看

这是一元函数的另一种推广：

多个因变量 $(x$ 和 $y)$
按某种规律,
随自变量 t 或 (r, θ)
的变化而相应变化.

一般地，设 D 是 R^n 上的点集，D 到 R^m 的映射

$f : D \to \mathrm{R}^m$， $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$

称为 n 元 m 维向量值函数 (或多元函数组)，

记为 $\mathrm{z}=\mathrm{f}(\mathrm{x})$.

D 称为 $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ 的定义域,

$$\Re=\{\mathrm{z}\in\mathrm{R}^m|\mathrm{z}=\mathrm{f}(\mathrm{x}),\mathrm{x}\in D\}$$

称为 f 的值域.

多元函数是 $m=1$ 的特殊情形.

显然，每个 $z_i(i=1,2,\cdots,m)$
都是 x 的函数

$$z_i = f_i(\mathrm{x}),$$

它称为 (f) 的
第 i 个坐标（或分量）函数.

于是，(f) 可以表达为分量形式

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = f_1(\mathrm{x}), \\ z_2 = f_2(\mathrm{x}), \\ \cdots\cdots \\ z_m = f_m(\mathrm{x}), \end{array}\right. \quad \mathrm{x} \in D$$

因此 f 又可表示为

$$\mathrm{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m).$$

2　线性代数方法

源头问题:

线性代数中有几个最基本的概念:

线性方程组、行列式、矩阵、二次型.

大量的科学技术问题，最终往往归结为解线性方程组.

大约 4000 年前，巴比伦人能求解两个未知数的线性方程组.

公元前 200 年，中国出版的“九章算术”表明已经能求解 3×3 的方程组了.

简单方程 $\boldsymbol{Ax+B=0}$

是一个古老的问题，

莱布尼兹、拉格朗日、

凯利 (Cayley) 和欧拉都有贡献.

十九世纪，高斯提出了消去法，

1848，J.J. Sylvester

提出的“矩阵”概念，

1855 年亚瑟凯莱

引进了矩阵乘法和矩阵代数.

但在很长一段时间里，

研究线性代数的兴趣放缓，

直到第二次

世界大战结束

计算机的发展,

才使得线性代数

向前更迅速

更有效的发展.

最著名的例子是

哈佛大学的

列昂惕夫教授.

1949 年，他用计算机算出了

由美国统计局的 25 万条

经济数据所组成的

42 个未知数的

42 个方程组，

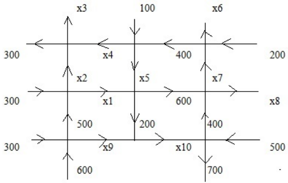
这些模型是用
线性方程组来描述的,
被称为列昂惕夫
“投入- 产出”模型.
列昂惕夫因此获得了
1973 年的诺贝尔经济学奖.

例题 1：某地区有三个重要产业，一个煤矿、一个发电厂和一条地方铁路．开采一元钱的煤，煤矿要支付 0.25 元的电费及 0.25 元的运输费；生产一元钱的电力，发电厂要支付 0.65 元的煤费，0.05 元的电费及 0.05 元的运输费；创收一元钱的运输费，铁路要支付 0.55 元的煤费及 0.10 元的电费．在某一周内，煤矿接到外地金

额为 50000 元的定货，发电厂接到外地金额为 25000 元的定货，外界对地方铁路没有需求．问三个企业在这一周内总产值多少才能满足自身及外界的需求？

例题 2:

交通流量问题


x3
100
x6
300
x4
400
200
x2
x5
x7
300
x1
600
x8
500
200
400
300
x9
x10
500
600
700

图中给出了某城市
部分单行街道的
交通流量 (每小时过车数)

假设：

(1) 全部流入网络的流量

等于全部流出网络的流量；

(2) 全部流入一个节点的流量
等于全部流出此节点的流量。
试建立数学模型确定
该交通网络未知部分
的具体流量。

3 建模方法

现象或事件中变量之间

呈现 n 元线性方程组的关系

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

在数学建模中,
矩阵的使用相当广泛,
如数学规划、
投入产出、
马氏链模型等

建模方法

主要运用矩阵分析
来解决问题。
自然科学和工程实践中
很多问题的解决
都归纳为线性方程组
求解和矩阵运算。

4 案例分析

案例一、Hill 密码

问题背景：

Hill 密码是运用矩阵论原理的替换密码，由 Hill 在 1929 年发明的，每个字母当作 26 进制数字：

A=0,B=1,C=2...

一串字母当成 n 唯向量，跟一个 $n \times n$ 的矩阵相乘，得到的结果就是加密后的密文。

Hill 密码是基于矩阵的运算和可逆矩阵。明文被分成大小相同的几个分组。密钥是一个可逆的方阵。如果把密钥矩阵成为 K，

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mm} \end{pmatrix}$$

把明文中第 i 个分组中的

m 个字符

记为 $p_{i1} \cdots p_{im}$，

相应的密文字符为

$$c_{i1}\cdots c_{im},$$

加密算法为

$$c_{il}=p_{i1}k_{1l}+\cdots+p_{im}k_{ml}$$

这实际上就是矩阵相乘的结果

若已知密钥矩阵为

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

案例分析

要对明文

battle on Tuesday

加密．那么密文为多少？

【问题分析】

首先，要对明文设置对应关系。

例如可以在 26 个

英文字母与数字间

建立一一对应关系：

案例分析

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J & K & L & M & N & O & P & Q & R \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S & T & U & V & W & X & Y & Z \\ 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$$

【模型构建】

由于明文共 15 个字符，

可以分为 5 个分组，

每个分组有三个字符。

即记成这样的形式:

$$M = \begin{pmatrix} b & a & t \\ t & l & e \\ o & n & T \\ u & e & s \\ d & a & y \end{pmatrix}$$

根据对应关系,

明文矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 19 \\ 19 & 11 & 4 \\ 14 & 13 & 19 \\ 20 & 4 & 18 \\ 3 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

【模型求解】

所以加密后矩阵为 N，

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} \mathbf{18} & \mathbf{19} & \mathbf{20} \\ \mathbf{11} & \mathbf{15} & \mathbf{8} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{20} \\ \mathbf{24} & \mathbf{22} & \mathbf{16} \\ \mathbf{21} & \mathbf{24} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

密文为 stulpifguywavyb。

案例二、循环比赛名次的确定

矩阵是线性代数的主要内容, 也是线性代数中解决问题的主要工具. 许多实际应用问题可以用矩阵来描述，通过矩阵的运算来解决应用问题.

例 1： 若有 5 个球队进行单循环赛, 已知它们的比赛结果为: 1 队胜 2,3 队; 2 队胜 **3, 4, 5** 队; 4 队胜 **1, 3, 5** 队;

5 队胜 1,3 队. 按获胜的次数排名次, 若两队胜的次数相同, 则按直接胜与间接胜的次数之和排名次. 所谓间接胜, 即若 1 队胜 2 队, 2 队胜 3 队, 则称 1 队间接胜 3 队. 试为这 5 个队排名次.

按照上述排名次的原则, 不难排出 2 队为冠军, 4 队为亚军, 1 队第 3 名, 5 队第 4 名, 3 队垫底. 问题是: 如果参加比赛的队数比较多, 应如何解决这个问题? 有没有

案例分析

解决这类问题的一般方法?

我们可以用邻接矩阵 M 来表示各队直接胜的情况:

$M=(m_{ij})_{5\times 5}$, 若第 i 队胜第 j 队, 则 $m_{ij}=1$, 否

案例分析

则 $m_{ij} = 0(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$. 由此可得

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

M 中各行元素之和分别为各队直接胜的次数, M^2 中各行元素之和分别为各队间接胜的次数. 那么

$$M + M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

案例分析

各行元素之和分别为 $\mathbf{5, 8, 0, 7, 4}$, 就是各队直接胜与间接胜的次数之和. 由此可得: 比赛的名次依次为 2 队、4 队、1 队、5 队、3 队. 如果参赛的队数很多, 用这种方法计算会很复杂, 甚至还无法得出确定的结论, 可根据非负矩阵的最大特征值与其对应的特征向量的性质来

确定排序问题. 根据 Matlab 中的命令:

$\mathbf{M} = [0, 1, 1, 0, 0; 0, 0, 1, 1, 1; 0, 0, 0, 0, 0; 1, 0, 1, 0, 1;$

$[\mathbf{X}, \mathbf{Q}] = \mathbf{eig}(\mathbf{M})$

可以求得 M 的最大特征值 $\lambda = 1.3953$, 对应的经过归一化的特征向量为:

$$\boldsymbol{W} = (0.2303, 0.3213, 0, 0.2833, 0.1650)^{\mathrm{T}}$$

将这个特征向量的各个分量按照从大到小的顺序排序,

所以 5 个球队按照名次的排序依次为 2 队、4 队、1 队、5 队、3 队.

例 2: 若有 5 个垒球队进行单循环比赛, 其结果是: 1 队胜 3,4 队; 2 队胜 1,3,5 队; 3 队胜 4 队; 4 队胜 2 队; 5 队胜 1,3,4 队. 按直接胜与间接胜次数之和排名次.

用以表示各个队直接胜和间接胜的情况的邻接矩阵分

别为:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, M$$

那么, $M + M^2$ 各行元素之和分别为 4、9、2、4、7,

所以各队的名次为: 第 1 名 2 队, 第 2 名 5 队, 第 3 名 1、4 队 (并列), 第 5 名 3 队. 1 队和 4 队无法确定顺序, 是否一定并列呢? 还要再计算 $M^3, M^4, \cdots$ 但是, 用 Matlab 计算:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}; \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}; \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}; \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}; \mathbf{1}$$

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Q}] = \mathbf{eig}(\mathbf{M})$$

可以求得 M 的最大特征值 $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1.7194}$, 对应的经过

归一化的特征向量为:

$$\boldsymbol{W} = (\mathbf{0.1621}, \mathbf{0.3029}, \mathbf{0.1025}, \mathbf{0.1762}, \mathbf{0.2563})^{\mathbf{T}}$$

所以各队的名次为: 第 1 名 2 队, 第 2 名 5 队, 第 3 名 4 队, 第 4 名 1 队, 第 5 名 3 队, 1 队与 4 队不是并列. 这样排序才是最准确的.

不同地（城市）之间的交通问题

矩阵的运算还可以表示不同地点（城市）的通达情况.

案例分析

在国际象棋里，马在棋盘上是走“L”步的，它可以水平走 2 格，垂直走 1 格；或者垂直走 2 格，水平走 1 格．假设马被限制在如下图所示的 9 个编号的格子里，马可以从第 i 格走到第 j 格中去，则 $m_{i,j}$=1，否则 $m_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$．由于马步既可前进，又可后退，

则 M 是对称矩阵. 所以

1	2	3
4	5	6
7	8	9

案例分析

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 M^2 表示马可经 2 步间接到达的情况, M^3 表示马可经 3 步间接到达的情况 $\cdots\cdots$. 则 $M+M^2+M^3+\cdots+M^k$ 表示马在 k 步可以直接和间接到达的情况, 其中位于第 i 行第 j 列的数字表示在 k 步内马可以从

第 i 格到第 j 格的不同 (直接和间接) 走法. 经计算

$$M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

这说明, 在 3 步内, 除了格子 5 之外, 还有格子之间不可

案例分析

互相达到. 但是

$$M+M^2+M^3+M^4=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 & 1 & 0 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 1 & 5 & 0 & 5 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 8 & 4 & 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 8 & 0 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 0 & 8 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 0 & 4 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

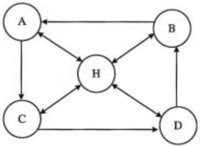
这说明, 在 4 步内, 除了格子 5 之外, 其余格子均可互相达到, 对应的数字为达到的通路数目. 由于 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{M}^4$ 中第 5 行与第 5 列的元素全为零, 再计算下去, $\boldsymbol{M}^5$ 中第 5 行与第 5 列的元素也全为零, 因此格子 5 与其他格子不能通达; 其实由 $\boldsymbol{M}$ 中第 5 行与第 5 列的元素全为零, 可以推得对任意整数 $\boldsymbol{k} \geq \mathbf{0}$, 都有 $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{k}}$ 中第 5 行与第 5 列的元素全为零, 格子 5 与其他格子不能通达.

因此, 这种方法也可以用来研究一般交通路线的通达情况.

下图是某个航空公司关于 **A, B, C, D** 和 **H** 五个城市的航线图, 其中 **H** 是中心城市, 它和其他每个城市之间都有往返航线, 而其他城市之间只有从 A 到 C, 从 C 到 **D**, 从 D 到 **B**, 从 B 到 **A** 四条航线.

假定我们要从城市 **A** 到 **B** 旅行, 那么至少需要 2 条航

案例分析



线才能完成这次旅行, 其中 $\mathbf{A} \to \mathbf{H}$ 和 $\mathbf{H} \to \mathbf{B}$ 两条航线连接起来的路线所需要的航线数最少, 否则至少需要 3 条航线. 于是, 我们要问, 共有多少条从城市 **A** 到城市 **B** 的路线恰好是由 3 条航线连接起来的? 有多少

条路线所需的航线不超过 4 条? 由于一共只有五个城市, 我们从图上观察, 就能回答上述问题. 在城市数多和航线图复杂的情况下, 用观察方法一般就难以解决问题了. 为此, 可以利用连接矩阵来解决这个问题. 设 $\mathbf{C} = (c_{ij})_{5\times 5}$, 其中

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若城市} i \text{ 到城市} j \text{ 有一航,} \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

案例分析

这里 C 称为邻接矩阵, 这五个城市的邻接矩阵为

$$C = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ H \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

从邻接矩阵 C 以及它的幂 $C^2, C^3, \cdots, C^m, \cdots$ 我们可以获得航线图的一些信息，从而解决上述航线问题．因此，恰好由 3 条航线连接起来的从城市 **A** 到城市 **B** 的路线总数是位于 C^3 第一行第二列的元素 $\left(C^3\right)_{12} = \mathbf{3}$；恰好由 4 条航线连接起来的从城市 **A** 到城市 **B** 的路线总数是 $(C^4)_{12} = \mathbf{7}$．从城市 **A** 到城市 **B** 所需的航线不超过 4 条的路线总数是：

$(C + C^2 + C^3 + C^4)_{12} = 11$ 条.

本问题的矩阵计算用 Matlab 计算更方便.

交通模型

问题背景：

设某航空公司

在四个城市之间

有航行情况：

案例分析

从城市 1 到城市 2、城市 3 有航线；

城市 2 到城市 1、城市 3 有航线；

城市 3 到城市 1、城市 4 有航线；

城市 4 到城市 2、城市 3 有航线。

试考虑城市间航线到达情况。

首先考虑如何来表示
城市之间航线的情形。
在这里用邻接矩阵来表示。

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}),$$

若城市 i 到城市 j 有航线，

则 $\boldsymbol{a_{ij} = 1}$,

否则 $\boldsymbol{a_{ij} = 0}$

$\boldsymbol{(i, j = 1, 2, 3, 4)}$,

由此可得

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

案例分析

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

表示可以乘坐 2 次航班到达的城市。为什么？

所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

表明在 2 次航线内城市之间可以相互到达。

投入产出分析

一个城镇有 3 个主要生产企业——煤矿、电厂和地方铁路作为它的经济系统. 已知生产价值 1 元的煤，需要消耗 0.25 元的电和 0.35 元的运输费; 生产价值 1 元的电，需要消耗 0.40 元的煤、0.05 元的电和 0.10 元的运输费；而提供价值 1 元的铁路运输服务，则需要消耗

0.45 元的煤、0.10 元的电和 0.10 元的铁路运输服务费. 假设在某个星期内，除了这 3 个企业间的彼此需求，煤矿得到 50000 元的订单, 电厂得到 25000 元的电量供应需求, 而地方铁路得到价值 30000 元的运输需求. 试问: 这 3 个企业在这个星期各生产多少产值才能满足内外需求？除了外部需求，试求这星期各企业之间的消耗需求，同时求出各企业的新创造价值（即产值中去掉各

企业的消耗所剩部分）.

这是一个小型的经济投入产出模型. 在一个国家或地区的经济系统中, 各部门 (或企业) 既有消耗又有生产, 或者说既有“投入”, 又有“产出”, 生产的产品供给各部门和系统以外的需求, 同时也要消耗系统内各部门所提供的产品. 消耗的目的是为了生产, 生产的结果必然要创造新价值, 以支付工资、税收和获取利润. 显然对

于每一个部门, 物质消耗 (生产资料转移价值) 和新创造价值之和应该等于它的生产总值. 这就是“投入”和“产出”之间的平衡关系 (见下表).

小型的经访投入产出表

案例分析

地点 / 年份	消耗系数 (单位产品的消耗)			最终产品
	煤矿	电厂	铁路	
煤矿	0	0.40	0.45	50000
电厂	0.25	0.05	0.10	25000
铁路	0.35	0.10	0,10	30000
新创造价值	z_1	z_2	z_3	
总产值	x_1	x_2	x_3	

设煤矿、电厂和地方铁路在这星期的总产值分别为 x_1, x_2, x_3 (元), 那么就有分配平衡方程组 (表示产出情况)

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0.40x_2 + 0.45x_3 + 50000 = x_1 \\ 0.25x_1 + 0.05x_2 + 0.10x_3 + 25000 = x_2 \\ 0.35x_1 + 0.10x_2 + 0.10x_3 + 30000 = x_3 \end{cases}$$

该方程组说明各企业的产品按其经济用途的使用分配

情况, 即

总产品 (值) = 中间产品 (作为系统内部的消耗) + 最终产品 (外部需求)

记 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0.40 & 0.45 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.35 & 0.10 & 0.10 \end{pmatrix}$ 称为直接消耗系数矩阵, A 中的元素 a_{ij} 表示 (单位: 元) 第 j 部门单位

案例分析

产品在生产过程中对第 i 部门产品的消耗量 $(i,j=1,2,3)$. $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ 称为总产品列向量 (矩阵), $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$ 称为最终产品列向量 (矩阵), 则分配平衡方程

组可以表示成

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}\text{ 或}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$$

从而其解为

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{Y}$$

案例分析

对于我们的问题，可得

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -0.40 & -0.45 \\ -0.25 & 0.95 & -0.10 \\ -0.35 & -0.10 & 0.90 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.4566 & 0.6981 & 0.8059 \\ 0.4482 & 1.2799 & 0.3663 \\ 0.6162 & 0.4137 & 1.4652 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50000 \\ 25000 \\ 30000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

即这个星期煤矿总产值是 114458 元, 电厂总产值是 65375 元, 铁路服务产值是 85111 元.

用 Matlab 求解:

$$\mathbf{A} = [0, 0.4, 0.45; 0.25, 0.05, 0.1; 0.35, 0.1, 0.1]$$

$$\mathbf{Y} = [50000, 25000, 30000]$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{inv(eye(3) - A) * Y}$$

值得指出的是, A 是直接消耗系数矩阵, 可以证明: A

的所有特征值的模全小于 1; 因此, 满足条件 $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}$, 这是直接消耗系数矩阵特有的性质. 则 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^3+\cdots$ 是收敛的, 称为完全需要系数矩阵; 同时 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^3+\cdots$ 称为完全消耗系数矩阵, 它等于直接消耗加上各次间接消耗.

在求出 $\boldsymbol{X}$ 以后, 3 个企业为煤矿提供的中间产品 (煤矿

的消耗) 列向量为

$$x_1\begin{pmatrix}0\\0.25\\0.35\end{pmatrix}=114458\begin{pmatrix}0\\0.25\\0.35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\28614\\40060\end{pmatrix}$$

3 个企业为电厂提供的中间产品 (电厂的消耗) 列向量

为

$$x_2\begin{pmatrix}0.40\\0.05\\0.10\end{pmatrix}=65395\begin{pmatrix}0.40\\0.05\\0.10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26158\\3270\\6540\end{pmatrix}$$

3 个企业为铁路提供的中间产品 (铁路的消耗) 列向量

为

$$x_3\begin{pmatrix}0.45\\0.10\\0.10\end{pmatrix}=85111\begin{pmatrix}0.45\\0.10\\0.10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}38300\\8511\\8511\end{pmatrix}$$

另一方面, 若设煤矿、电厂和地方铁路在这星期的新创造价值 (工资、税收、利润等) 分别为 z_1, z_2, z_3 (元),

则可得到消耗平衡方程组

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0.25x_1 + 0.35x_1 + z_1 = x_1 \\ 0.40x_2 + 0.05x_2 + 0.10x_2 + z_2 = x_2 \\ 0.45x_3 + 0.10x_3 + 0.10x_3 + z_3 = x_3 \end{cases}$$

这个方程组说明了各部门总产值的价值构成情况, 即

$$\text{生产资料转移价值} + \text{新创造价值} = \text{总产值}$$

由于 x_1, x_2, x_3 已经求得, 代人消耗平衡方程组, 可以

解得 $\boldsymbol{z_1 = 45784}$ 元, $\boldsymbol{z_2} = 29427$ 元, $\boldsymbol{z_3 = 29789}$ 元.
所以, 可以得到这 3 个部门的投人产出表, 如下表所示.

3 个部门的投入产出表

案例分析

产出 / 投入	中间产品			最终产品	总产值
	煤矿	电厂	铁路		
煤矿	0	26158	38300	50000	114458
电厂	28614	3270	8511	25000	65395
铁路	40061	6540	8511	30000	85111
新创造价值	45784	29427	29789		
总产值	114458	65395	85111		

案例三、动物数量按年龄段预测问题

问题背景：

某农场饲养的某种动物所能达到的最大年龄为 15 岁，将其分成三个年龄组：

第一组，0-5 岁；

第二组，6-10 岁；

第三组，11-15 岁。

案例分析

动物从第二年龄组起
开始繁殖后代，
经过长期统计，
第二组和第三组的
繁殖率分别为 4 和 3。

案例分析

第一年龄和第二
年龄组的动物
能顺利进入
下一个年龄组的存活率
分别为 0.5 和 0.25,

案例分析

假设农场现有三个
年龄段的动物各 1000 头，
问 15 年后农场三个
年龄段的动物
各有多少头？

案例分析

【问题分析】

因年龄分组为 5 岁一段，

故将时间周期也取为 5 年。

15 年后就经过了

3 个时间周期。

案例分析

设 $\boldsymbol{x_i^k}$ 表示

第 k 个时间周期的

第 i 组年龄阶段动物的数量

(k=1,2,3;i=1,2,3).

案例分析

因为某一时间周期
第二年龄组和第三年龄组
动物数量是由
上一时间周期
上一年龄组
存活下来的动物数量，

所以对时间周期

$k = 1, 2, 3$ 有

$x_2^k = \frac{1}{2} x_1^{k-1}$

$x_3^k = \frac{1}{4} x_2^{k-1}$

案例分析

又因为某一时间周期，
第一年龄组动物的数量
是由上一时间周期
各年龄组出生的
动物的数量，

所以对时间周期

$k = 1, 2, 3$ 有

$$x_1^k = 4x_2^{k-1} + 3x_3^{k-1}$$

【模型构建】

于是我们得到递推关系式;

$$\begin{cases} x_1^k = 4x_2^{k-1} + 3x_3^{k-1} \\ x_2^k = \frac{1}{2}x_1^{k-1} \\ x_3^k = \frac{1}{4}x_2^{k-1} \end{cases}$$

用矩阵表示

$$\begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k-1} \\ x_2^{k-1} \\ x_3^{k-1} \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{k-1}$

其中

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix},$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

则有

案例分析

$$\boldsymbol{x}^{0} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^{0} \\ \boldsymbol{x}_2^{0} \\ \boldsymbol{x}_3^{0} \end{pmatrix}$$

案例分析

$$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{7000} \\ \mathbf{500} \\ \mathbf{250} \end{pmatrix}$$

案例分析

$$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7000 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} \mathbf{2750} \\ \mathbf{3500} \\ \mathbf{125} \end{pmatrix}
$$

案例分析

$$\boldsymbol{x}^3 = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2750 \\ 3500 \\ 125 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{14375} \\ \mathbf{1375} \\ \mathbf{875} \end{pmatrix}$$

结果分析

15 年后，农场饲养的动物

总数将达到 16625 头，

其中

0-5 岁的有 14375 头，占 86.47%,

6-10 岁的有 1375 头，占 8.27%,

11-15 岁的有 875 头，占 5.226%。

15 年间，动物总增长

16625-3000=13625 头，

总增长率为

13625/3000=454.16%.

案例四、配方问题

问题背景

一种佐料由四种原料

A、B、C、D 混合而成。

这种佐料

现有两种规格，

这两种规格的佐料中，

四种原料的比例分别为

2:3:1:1 和 1:2:1:2.

现在需要四种
原料比例为
4:7:3:5 的
第三种规格的佐料。

案例分析

问：第三种规格的佐料能否由前两种规格的佐料按一定比例配制而成？

【问题分析】

(1) 假设四种原料

混合在一起时

不发生化学变化。

(2) 假设四种原料的比例是按重量计算的。

(3) 假设前两种规格的佐料分装成袋，

案例分析

比如说第一种规格的

佐料每袋净重 7 克

其中 A、B、C、D 四种原料

分别为 2 克，3 克，1 克，1 克，

第二种规格的佐料

每袋净重 6 克

其中 A、B、C、D 四种原料

分别为 1 克，2 克，1 克，2 克。

【模型构建】:

根据已知数据

和上述假设,

可以进一步假设

案例分析

将 x 袋第一种规格的佐料

与 y 袋第二种规格的佐料

混合在一起，

案例分析

得到的混合物中

A、B、C、D 四种原料

分别 4 克，7 克，3 克，5 克，

则有以下线性方程组

案例分析

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \\ x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

【模型求解】:

上述线性方程组的增广矩阵

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $x=1,y=2$ 是解，

又因为第一种规格佐料

每袋净重 7 克，

第二种规格佐料

每袋净重 6 克，

所以第三种规格的佐料
能由前两种规格的佐料
按 7：12 的比例配制而成。

【模型应用】

(1) 若令

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})^{\boldsymbol{T}},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2})^{\boldsymbol{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{4}, \mathbf{7}, \mathbf{5}, \mathbf{3})^{\boldsymbol{T}},$$

则原问题等价于

线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$

是否有解，也等价于

$\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示。

(2) 若四种原料的比例
是按体积计算的，
则最好先将体积比
转换为重量比，
然后按上述方法处理。

(3) 上面的模型假设中的
第三个假设
只起到简化运算的作用。

如果直接设 x 克
第一种规格的佐料
与 y 克第二种规格
的佐料混合得
第三种规格的佐料，

案例分析

则有下表

种类	A	B	C	D
第一种	$\frac{2}{7}x$	$\frac{3}{7}x$	$\frac{1}{7}x$	$\frac{1}{7}x$
第二种	$\frac{1}{6}y$	$\frac{2}{6}y$	$\frac{1}{6}y$	$\frac{2}{6}y$
第三种	$\frac{4}{19}(x+y)$	$\frac{7}{19}(x+y)$	$\frac{3}{19}(x+y)$	$\frac{5}{19}(x+y$

因而有如下线性方程组

$$\begin{cases} \frac{2}{7}x+\frac{1}{6}y=\frac{4}{19}(x+y) \\ \frac{3}{7}x+\frac{2}{6}y=\frac{7}{19}(x+y) \\ \frac{1}{7}x+\frac{1}{6}y=\frac{3}{19}(x+y) \\ \frac{2}{7}x+\frac{2}{6}y=\frac{5}{19}(x+y) \end{cases}$$

【模型检验】

求解上述方程组，

得到 $x=7, y=12$，

可见模型假设中

第三个假设

不影响解的正确性。

谢　　谢！