Série 01: Zoologie du mouvement uniformément accéléré

Saut du saumon

1. Montrer que la solution générale de l'équation du mouvement rectiligne uniformément accéléré, le long d'un axe x,
$$\ddot{x} = a,$$
où a est une constante, est donnée par $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ quelles que soient les constantes v_0 et x_0. Interpréter ces constantes.

2. Un saumon saute hors d'un lac avec une vitesse initiale v_0 dirigée verticalement vers le haut. Il subit une accélération constante égale à $-g$, due à la pesanteur. Représenter graphiquement la position verticale du poisson en fonction du temps, ainsi que sa vitesse en fonction du temps.

3. Quelle hauteur maximale le saumon atteindra-t-il ? Combien de temps passera-t-il en l'air ?

   Application numérique: $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$ et $g = 10\,\mathrm{m/s}^2$.

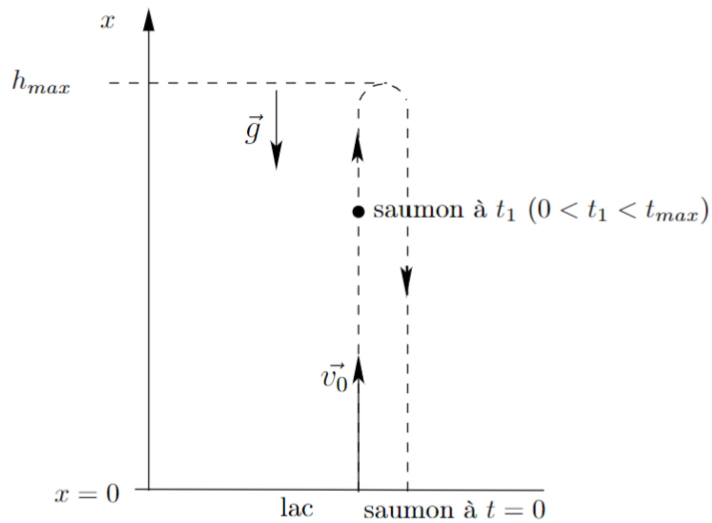
Solution

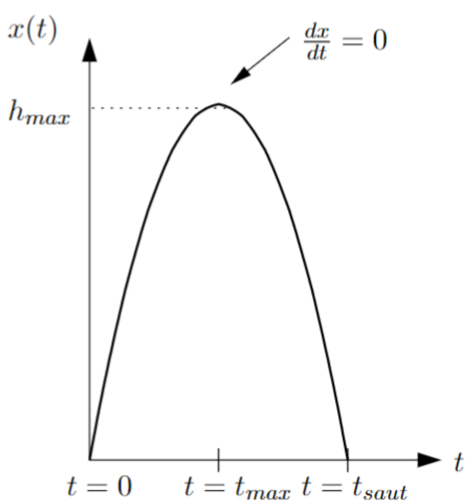
Saut du saumon

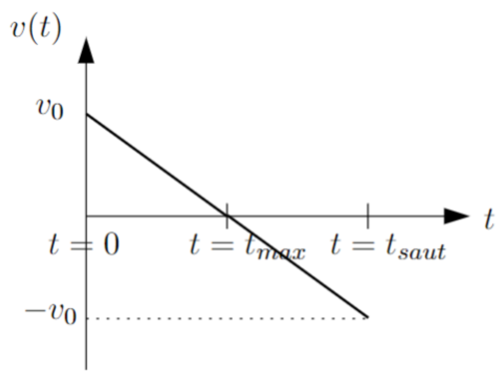
1. On part de l'équation du mouvement
$$\ddot{x}(t) = a,$$
que l'on l'intègre une fois pour trouver la vitesse au cours du temps
$$\dot{x}(t) = at + cte. \tag{1}$$
Pour déterminer à quoi correspond la constante d'intégration, on évalue l'expression (**??**) à l'instant $t = 0$:
$$\dot{x}(t=0) = 0 + cte.$$
La constante est donc égale à la vitesse évaluée à l'instant $t = 0$. On notera cette vitesse initiale v_0. On intègre une deuxième fois pour trouver la position au cours du temps
$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + cte'. \tag{2}$$
On évalue ici encore cette expression en $t = 0$ pour trouver à quoi correspond la constante d'intégration
$$x(t=0) = 0 + 0 + cte'.$$
La constante est égale à la position évaluée en $t = 0$. Il s'agit de la position initiale, notée x_0. Au final, la solution de l'équation du mouvement $\ddot{x}(t) = a$ s'écrit bien $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ où v_0 et x_0 représentent respectivement la vitesse et la position initiales.
Pour vérifier que la solution $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ satisfait bien l'équation $\ddot{x} = a$ on calcule
$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}a2t + v_0\right) = \frac{d}{dt}\left(at + v_0\right) = a.\end{aligned}$$
L'équation du mouvement rectiligne uniformément accéléré est donc bien vérifiée.

2. **Compréhension de l'énoncé:** La manière la plus efficace de comprendre le problème est de représenter la donnée dans un *grand* dessin comprenant toutes les indications de la donnée (voir ci-dessous). Le système que l'on considère est le saumon, et on l'observe

depuis la bord du lac (référentiel). On choisit un axe x vertical dirigé vers le haut, ayant son origine à la surface de l'eau. A l'instant $t = 0$, le saumon sort du lac en $x_0 = 0$ avec une vitesse v_0 verticale, dirigée vers le haut. Tout au long du saut, il subit une accélération $-g$ due à la pesanteur. Sa position au cours du temps est donnée par l'équation ((**??**)) et sa vitesse au cours du temps par l'équation ((**??**)) dans lesquelles on pose $a = -g$.







Graphiquement, la position et la vitesse au cours du temps sont données dans les deux figures ci-dessus. On peut remarquer que:

- La position au cours du temps est donnée par un polynôme du deuxième degré. Graphiquement, on a donc une parabole.
- Le sommet de la parabole correspond à l'altitude maximale atteinte par le saumon, à un instant que l'on nomme $t = t_{\mathrm{max}}$.
- La vitesse diminue linéairement. Graphiquement, elle est représentée par une droite. La pente de cette droite est égale à l'accélération du saumon.
- A l'instant t_{max}, la droite croise l'abscisse: la vitesse du saumon est nulle au sommet de la trajectoire. En tout point, la vitesse correspond à la dérivée de la position par rapport au temps. A l'instant t_{max}, une vitesse nulle correspond donc au sommet de la parabole, de pente nulle.
- La parabole est symétrique. Soit t_{saut} l'instant où le saumon retombe dans l'eau. On a $x(t_{\mathrm{saut}}) = 0$ et $t_{\mathrm{max}} = \frac{1}{2} t_{\mathrm{saut}}$.

3. - **Démarche(s) de résolution:** On cherche à déterminer la hauteur maximale atteinte par le saumon et le temps qu'il passera en l'air. Pour y arriver, la démarche consiste à:
     - Intégrer une première fois l'équation du mouvement $\ddot{x}(t) = a$ pour trouver la vitesse au cours du temps, puis une deuxième fois pour trouver la position au cours du temps.
     - Utiliser les conditions aux limites pour résoudre ces équations.

   - **Choix d'une démarche et résolution:** La première partie de la démarche a été effectuée dans la question a) de cet exercice. On utilise donc les équations ((**??**)) et ((**??**)) pour lesquelles $a = -g$ et $x_0 = 0$:

     $$x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \quad \text{et} \quad v(t) = -gt + v_0.$$

     Au sommet de la trajectoire (condition finale), le saumon atteint une hauteur $x(t_{\mathrm{max}}) = h_{\mathrm{max}}$ au temps t_{max}. A cet instant, sa vitesse est nulle: $v(t_{\mathrm{max}}) = 0$.

     $$-g t_{\mathrm{max}} + v_0 = 0 \Rightarrow t_{\mathrm{max}} = \frac{v_0}{g}.$$

     En injectant ce résultat dans l'équation de la position au cours du temps, on obtient

     $$h_{\mathrm{max}} = -\frac{1}{2} g t_{\mathrm{max}}^2 + v_0 t_{\mathrm{max}} = -\frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} + v_0 \frac{v_0}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}.$$

On calcule t_{saut} en utilisant la condition finale $x(t_{\text{saut}}) = 0$:

$$-\frac{1}{2}gt_{\text{saut}}^2 + v_0 t_{\text{saut}} = 0 \Rightarrow t_{\text{saut}} = 0(\text{solution à éviter}) \text{ ou } t_{\text{saut}} = \frac{2v_0}{g}.$$

Ce résultat confirme que $t_{\max} = \frac{1}{2}t_{\text{saut}}$, comme on s'y attendait.

Application numérique:
$v_0 = 3\text{m/s}$ et $g = 10\text{m/s}^2$ donc $t_{\text{saut}} = \frac{2v_0}{g} = \frac{2\times 3}{10} = 0.6\,\text{s}$ et $h_{\max} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{3^2}{2\times 10} = 0.45\,\text{m}$.

- **Discussion des solutions:** La solution trouvée…

  - …a les bonnes unités: pour t_{saut}, on s'attend à un résultat en secondes. $\frac{2v_0}{g} \to \frac{m/s}{m/s^2} = \frac{m}{s}\frac{s^2}{m} = s$.
    Pour $h_{\max}$, on s'attend à un résultat en mètres. $\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \to \frac{(m/s)^2}{m/s^2} = \frac{m^2}{s^2}\frac{s^2}{m} = m$.

  - …a le bon ordre de grandeur: $v_0 \simeq 10^0$ m/s et $g \simeq 10^1$ m/s^2. On a donc $t_{\text{saut}} = \frac{2v_0}{g} \simeq \frac{10^0}{10^1} \simeq 10^{-1}$ s et $h_{\max} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \simeq \frac{10^0}{10^1} \simeq 10^{-1}$ m. Il paraît effectivement raisonnable que le saumon saute à quelques dizaines de centimètres et que ce saut dure quelques dixièmes de secondes.

  - …a les bons signes: $h_{\max}$ doit être positif, car il se situe à une valeur positive sur l'axe vertical (voir dessin). On a bien $\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} > 0$. De plus, t_{saut} doit être positif, car le saumon retombe dans l'eau après avoir sauté. On a bien $\frac{2v_0}{g}$ ¿ 0.

  - …est cohérente avec les cas limites. Si $v_0 \to \infty$ (le saumon saute avec une très grande vitesse) on a $h_{\max} \to \infty$ (il atteint une hauteur très importante) et $t_{\text{saut}} \to \infty$ (ce saut dure un temps très long). On peut faire un raisonnement similaire avec $v_0 \to 0$.

test changes

Soumis par: F. Blanc, O. Schneider, J.-Ph. Brantut , J.-M. Fürbringer