Geometria Analítica

Pedro H A Konzen

12 de abril de 2020

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre geometria analítica. Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capítulo 1

Estudo de retas

Observação 1.0.1. Neste capítulo, assumimos que os códigos `Python` têm o seguinte preambulo:

```
from sympy import *
from sympy.plotting import plot3d_parametric_line
```

1.1 Sistema de coordenadas no espaço

Um sistema de coordenadas no espaço é constituído de um ponto O e uma base de vetores $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ no espaço. Dado um tal sistema, temos que cada ponto P determina de forma única um vetor $\overrightarrow{OP} = (x,y,z)$ e vice-versa. Assim sendo, definimos que o ponto P tem coordenadas (x,y,z).
O ponto O é chamado de **origem** (do sistema de coordenados) e tem coordenadas $(0,0,0)$. Dado um ponto $P = (x,y,z)$, chama-se x de sua **abscissa**, y de sua **ordenada** e z de sua **cota**. As retas que passam por O e têm, respectivamente, as mesmas direções de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são chamadas de **eixo das abscissas**, **eixo das ordenadas** e **eixo das cotas**. Os planos que contém O e representantes de dois vetores da base B são chamados de **planos coordenados**.

Figura 1.1: Sistema de coordenadas ortonormal.

Salvo explicitado ao contrário, trabalharemos com **sistemas de coordenadas ortogonais**, i.e. sistema cuja base $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ seja ortonormal. Mais ainda, estaremos assumindo que a base é positiva. Veja a Figura 1.1.

Observação 1.1.1. (Relação entre pontos e vetores) Seja dado um vetor $\overrightarrow{AB}$. Sabendo as coordenadas dos pontos $A = (x_A,y_A,z_A)$ e $B = (x_B,y_B,z_B)$, temos que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são:

$$\begin{align}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \tag{1.1}\\
&= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \tag{1.2}\\
&= -(x_A,y_A,z_A) + (x_B,y_B,z_B) \tag{1.3}\\
&= (x_B - x_A,y_B - y_A,z_B - z_A). \tag{1.4}
\end{align}$$

Exemplo 1.1.1. Dados os pontos $A = (-1,1,2)$ e $B = (3,-1,0)$, temos que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-1), -1 - 1, 0 - 2) = (4,-2,-2). \tag{1.5}$$

Observação 1.1.2. (Ponto médio de um segmento) Dados os pontos $A = (x_A,y_A,z_A)$ e $B = (x_B,y_B,z_B)$, podemos calcular as coordenadas do ponto médio $M = (x_M,y_M,z_M)$ do segmento AB, do fato de que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Portanto

$$(x_M - x_A,y_M - y_A,z_M - z_A) = (x_B - x_M,y_B - y_M,z_B - z_M), \tag{1.6}$$

donde

$$\begin{align}
2x_M &= x_A + x_B \tag{1.7}\\
2y_M &= y_A + y_B \tag{1.8}\\
2z_M &= z_A + z_B. \tag{1.9}
\end{align}$$

Logo, temos $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2},\frac{y_A + y_B}{2},\frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Exemplo 1.1.2. Dados os pontos $A = (-1,1,2)$ e $B = (3,-1,0)$, temos que o ponto médio do segmento AB tem coordenadas:

$$M = \left(\frac{-1+3}{2},\frac{1+(-1)}{2},\frac{2+0}{2}\right) = (1,0,1). \tag{1.10}$$

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Sejam $A = (-1,2,1)$, $B = (1,-2,0)$ e $C = (x,2,2)$ vértices consecutivos de um triângulo isósceles, cujos lados AC e BC são congruentes. Determine o valor de x.

Solução. Sendo os lados AC e BC congruentes, temos $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$. As coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são

$$\overrightarrow{AC} = (x - (-1),2 - 2,2 - 1) = (x + 1,0,1) \tag{1.11}$$

e as coordenadas de $\overrightarrow{BC}$ são

$$\overrightarrow{BC} = (x - 1,2 - (-2),2 - 0) = (x - 1,4,2). \tag{1.12}$$

Então, temos

$$
\begin{align}
|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| &\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 4^2 + 2^2} \tag{1.13}\\
&\Rightarrow (x+1)^2 + 0^2 + 1^2 = (x-1)^2 + 4^2 + 2^2 \tag{1.14}\\
&\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 16 + 4 \tag{1.15}\\
&\Rightarrow 4x = 19 \tag{1.16}\\
&\Rightarrow x = \frac{19}{4}. \tag{1.17}
\end{align}
$$

◊

ER 1.1.2. Sejam $A = (-1,2,1)$, $B = (1,-2,0)$ e M o ponto médio do intervalo AB. Determine as coordenadas do ponto P de forma que $2AP = AM$.

Solução. As coordenadas do ponto médio são

$$M = \left(\frac{-1+1}{2},\frac{2+(-2)}{2},\frac{1+0}{2}\right) = \left(0,0,\frac{1}{2}\right). \tag{1.18}$$

Agora, denotando $P = (x_P,y_P,z_P)$, temos

$$2AP = AM \Rightarrow 2(x_P - (-1),y_P - 2,z_P - 1) = \left(0 - (-1),0 - 2,\frac{1}{2} - 1\right) \tag{1.19}$$

$$\Rightarrow (2x_p + 2,2y_P - 4,2z_P - 2) = \left(1,-2,-\frac{1}{2}\right). \tag{1.20}$$

Portanto

$$
\begin{align}
2x_P + 2 = 1 &\Rightarrow x_P = -\frac{1}{2} \tag{1.21}\\
2y_P - 4 = -2 &\Rightarrow y_P = 1 \tag{1.22}\\
2z_P - 2 = -\frac{1}{2} &\Rightarrow z_P = \frac{3}{4}. \tag{1.23}
\end{align}
$$

Logo, $P = (-1/2,1,3/4)$.

$\Diamond$

Exercícios

Em construção ...

1.2 Equações da reta

1.2.1 Equação vetorial de uma reta

Seja r uma reta dada, $\vec{v}$ um vetor paralelo a r e A um ponto de r (veja a Figura 1.2). Assim sendo, P é um ponto de r se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \tag{1.24}$$

Esta é chamada **equação vetorial da reta** r.

Figura 1.2: Equação vetorial de uma reta.

Observe que para obtermos uma equação vetorial de uma dada reta, podemos escolher qualquer ponto $A \in r$ e qualquer vetor $\vec{v} \parallel r$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. O vetor $\vec{v}$ escolhido é chamado de **vetor diretor**.

Exemplo 1.2.1. Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (-1, -1, -2)$ e $B = (2,1,3)$ (veja a Figura 1.3). O vetor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2-(-1), 1-(-1), 3-(-2)) = (3,2,5) \tag{1.25}$$

é um vetor diretor de r. Desta forma, uma equação vetorial da reta r é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \tag{1.26}$$

Figura 1.3: Esboço da reta discutida no Exemplo 1.2.1.

1.2.2 Equações paramétricas de uma reta

Seja r uma reta que passa pelo ponto $A = (x_A,y_A,z_A)$ e tenha vetor diretor $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$. Assim, $P = (x,y,z) \in r$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \tag{1.27}$$

Equivalentemente,

$$(x - x_A,y - y_A,z - z_A) = \lambda(v_1,v_2,v_3). \tag{1.28}$$

Então,

$$x - x_A = \lambda v_1, \tag{1.29}$$
$$y - y_A = \lambda v_2, \tag{1.30}$$
$$z - z_A = \lambda v_3, \tag{1.31}$$

donde

$$x = x_A + \lambda v_1, \tag{1.32}$$
$$y = y_A + \lambda v_2, \tag{1.33}$$
$$z = z_A + \lambda v_3, \tag{1.34}$$

as quais são chamadas de **equações paramétricas** da reta r.

Exemplo 1.2.2. A reta r discutida no Exemplo 1.2.1 tem equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \tag{1.35}$$
$$y = -1 + 2\lambda, \tag{1.36}$$
$$z = -2 + 5\lambda. \tag{1.37}$$

De fato, tomando $\lambda = 0$, temos $(x,y,z) = (-1,-1,-2) = A \in r$. E, tomado $\lambda = 1$, temos $(x,y,z) = (-1+3,-1+2,-2+5) = (2,1,3) = B \in r$. Ou seja, as equações paramétricas acima representam a reta que passa pelos pontos A e B.
Com o `Sympy`, podemos plotar o gráfico de r usando o seguinte código[1]:

```
var('lbda',real=True)
plot3d_parametric_line(-1+3*lbda,-1+2*lbda,-2+5*lbda,(lbda,-1,2))
```

[1] Veja a Observação 1.0.1.

1.2.3 Equações da reta na forma simétrica

Seja r uma reta que passa pelo ponto $A = (x_A, y_A, z_A)$ e tem $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ como vetor diretor. Então, r tem as equações paramétricas

$$x = x_A + v_1\lambda, \tag{1.38}$$

$$y = y_A + v_2\lambda, \tag{1.39}$$

$$z = z_A + v_3\lambda. \tag{1.40}$$

Isolando λ em cada uma das equações, obtemos

$$\frac{x - x_A}{v_1} = \frac{y - y_A}{v_2} = \frac{z - z_A}{v_3}, \tag{1.41}$$

as quais são as **equações da reta na forma simétrica**.

Exemplo 1.2.3. No Exemplo 1.2.2, consideramos a reta r de equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \tag{1.42}$$

$$y = -1 + 2\lambda, \tag{1.43}$$

$$z = -2 + 5\lambda. \tag{1.44}$$

Para obtermos as equações de r na forma simétrica, basta isolarmos λ em cada equação. Com isso, obtemos

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z + 2}{5}. \tag{1.45}$$

1.2.4 Exercícios resolvidos

ER 1.2.1. Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (-1, -1, -2)$ e tem $\vec{v} = (3,2,5)$ como vetor diretor. Determine o valor de x de forma que $P = (x,0,1/2)$ seja um ponto de r.

Solução. $P = (x,0,1/2)$ é um ponto de r se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \tag{1.46}$$

Ou seja,

$$\left(x - (-1), 0 - (-1), \frac{1}{2} - (-2)\right) = \lambda(3,2,5). \tag{1.47}$$

Ou, equivalentemente,

$$\left(x+1,1,\frac{5}{2}\right)=\lambda(3,2,5). \tag{1.48}$$

Usando a segunda coordenada destes vetores, temos

$$1=\lambda\cdot 2\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}. \tag{1.49}$$

Assim, da primeira coordenada dos vetores, temos

$$x+1=\lambda 3\Rightarrow x+1=\frac{3}{2} \tag{1.50}$$

$$\Rightarrow x=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}. \tag{1.51}$$

◊

ER 1.2.2. Seja r a reta de equações paramétricas

$$x=1-\lambda, \tag{1.52}$$

$$y=\lambda, \tag{1.53}$$

$$z=-3. \tag{1.54}$$

Determine uma equação vetorial de r.

Solução. Nas equações paramétricas de uma reta, temos que os coeficientes constantes estão associados a um ponto da reta. Os coeficientes de λ estão associados a um vetor diretor. Assim sendo, das equações paramétricas da reta r, temos que $A=(1,0,-3)\in r$ e $\vec{v}=(-1,1,0)$ é um vetor diretor. Logo, temos que a reta r tem equação vetorial

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{v}, \tag{1.55}$$

com $A=(1,0,3)$ e $\vec{v}=(-1,1,0)$.

◊

ER 1.2.3. Sabendo que r é uma reta que passa pelos pontos $A=(2,-3,1)$ e $B=(-1,1,0)$, determine o valor de t tal que

$$x=2+t\lambda, \tag{1.56}$$

$$y=-2+4\lambda, \tag{1.57}$$

$$z=1-\lambda, \tag{1.58}$$

sejam equação paramétricas de r.

Solução. Para que estas sejam equações paramétricas de r, é necessário que $\vec{v} = (t,4,-1)$ seja um vetor diretor de r. Em particular, $\vec{v} \parallel \overrightarrow{AB}$. Logo, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$(t,4,-1) = \beta(-1-2,1-(-3),0-1) = \beta(-3,4,-1). \tag{1.59}$$

Das segunda e terceira coordenadas, temos $\beta = 1$. Daí, comparando pela primeira coordenada, temos

$$t = -3\beta \Rightarrow t = -3. \tag{1.60}$$

◊

ER 1.2.4. Seja r uma reta, cujas equações na forma simétrica são

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{1-z}{2}. \tag{1.61}$$

Determine equações paramétricas desta reta e faça um esboço de seu gráfico.

Solução. Podemos obter equações paramétricas desta reta a partir de suas equações na forma simétrica. Para tanto, basta tomar o parâmetro λ tal que

$$\lambda = \frac{x+1}{2}, \tag{1.62}$$

$$\lambda = \frac{y-2}{3}, \tag{1.63}$$

$$\lambda = \frac{1-z}{2}. \tag{1.64}$$

Daí, isolando x, y e z em cada uma destas equações, obtemos

$$x = -1 + 2\lambda, \tag{1.65}$$

$$y = 2 + 3\lambda, \tag{1.66}$$

$$z = 1 - 2\lambda. \tag{1.67}$$

Para fazermos um esboço do gráfico desta reta, basta traçarmos a reta que passa por dois de seus pontos. Por exemplo, tomando $\lambda = 0$, temos $A = (-1,2,1) \in r$. Agora, tomando $\lambda = 1$, temos $B = (1,5,-1) \in r$. Desta forma, obtemos o esboço dado na Figura 1.4.

Figura 1.4: Esboço do gráfico da reta r do Exercício Resolvido 1.2.4.

◊

Resposta dos Exercícios

Referências Bibliográficas

[1] D.A. de Mello and R.G. Watanabe. *Vetores e uma iniciação à geometria analítica*. Livraria da Física, 2. edition, 2011.