

Einführung in die Programmierung mit C++

Übungsblatt 6

Funktionen

Sebastian Christodoulou, Alexander Fleming und Uwe Naumann

Informatik 12:
Software and Tools for Computational Engineering (STCE)
RWTH Aachen

Das Integral der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 12, & \text{für } x \leq 4 \\ -4 \cdot \cos\left(\frac{3}{4}x \cdot \pi\right) + 8, & \text{für } 4 < x \leq 8 \\ 4 \cdot \sin((x - 8) \cdot \pi) + 4, & \text{für } 8 < x \leq 12 \\ (x - 13)^2 + 3, & \text{für } 12 < x \end{cases}$$

soll numerisch auf dem Intervall $[0, 16]$ berechnet werden.

Die Abschätzung der Fläche unter dem Funktionsgraph von f auf dem Intervall $[0, 16]$ ist möglich indem wir gleichverteilt zufällig Punkte würfeln und *zählen*, wie viele davon über und wie viele unter dem Funktionsgraph liegen (siehe Abbildung 1). Der Anteil der Punkte unter dem Funktionsgraphen gibt uns den Anteil des Integrals an der Gesamtfläche.

Für die Aufgabe sollen in einer Schleife n Punkte (x, y) mit $x \in [0, 16]$ und $y \in [0, 16]$ gewürfelt werden. Dazu soll der Zufallszahlen-Generator vom Typ `default_random_engine` aus der Standardbibliothek (`#include <random>`) verwendet werden. Um gleichverteilte reelle Zufallszahlen zwischen a und b zu generieren, muss man den Generator mit einer Zufallszahlen-Verteilung vom Typ `uniform_real_distribution<double>` kombinieren:

```
std::default_random_engine generator;  
std::uniform_real_distribution<double> distribution(a,b);  
double random_number = distribution(generator);
```

Zähle in einer Schleife die Anzahl m der gewürfelten Werte y unter dem Funktionswert $f(x)$. Dafür soll für jedes Paar überprüft werden, ob der y -Wert größer als der Funktionswert an der Stelle x ist. Der Anteil der Punkte unter dem Funktionsgraph m/n multipliziert mit der Fläche, aus der die Punkte gewürfelt wurden, ist eine Schätzung des Integrals.

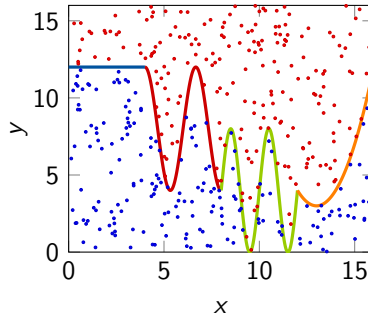


Figure: gleichverteilte Punkte über und unter dem Funktionsgraph von f

Bei der Rechteckregel wird das Integral durch Aufsummieren von rechteckigen Flächen angenähert. Seitenlängen jedes Rechtecks sind durch Intervalllänge und den Funktionswert in der Mitte des Intervalls bestimmt (siehe Abbildung 2). In einer Schleife soll der Funktionswert $f(x)$ an n Intervallen x berechnet werden. Die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke ergibt eine Schätzung des Integrals von f auf dem Intervall $[0, 16]$.

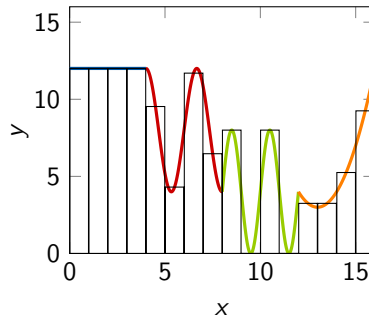


Figure: Rechtecke aus abstandsgleichen Intervallen als Näherung des Integrals von f

1. Schreibe eine Funktion, die den exakten Wert für das Integral der angegebenen Funktion zurückgibt. **Hinweis:** Der exakte Wert A für das Integral kann wie folgt berechnet werden:

$$A = \int_0^{16} f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx + \int_4^8 f(x) dx + \int_8^{12} f(x) dx + \int_{12}^{16} f(x) dx .$$

2. Schreibe eine Funktion, die das Integral \tilde{A} der angegebenen Funktion mit der oben beschriebenen Monte-Carlo Methode annähert.
3. Schreibe eine Funktion, die das Integral \tilde{A} der angegebenen Funktion mit der oben beschriebenen Rechteckabschätzung annähert.
4. Schreibe eine Funktion, die den relativen Fehler eines angenäherten Wertes bestimmt und zurückgibt. **Hinweis:** Der relative Fehler wird mittels $|\frac{\tilde{A}-A}{A}|$ berechnet.

5. Der Nutzer deines Programms soll zu Beginn die Möglichkeit haben zu entscheiden, mit welchen Methoden das numerische Integral bestimmt werden soll. Die Methode sowie dessen relativen Fehler zur exakten Lösung sollen dann für $n = 10, 100, 1000, 10000, 100000$ in einem `std::vector` gespeichert werden. Am Ende des Programms, sollen die Ergebnisse in einer Tabelle ausgegeben werden.

Beispielausgabe:

Integral mit Monte Carlo Methode berechnen? (0: N, 1: Y): 1

Integral mit Rechteckverfahren berechnen? (0: N, 1: Y): 1

Berechnung mit Monte Carlo Methode abgeschlossen

Berechnung mit Rechteckverfahren abgeschlossen

n	SYMB	MC	RR	MC(err)	RR(err)
10	117.3	128	107.8	0.09091	0.08152
100	117.3	112.6	115.4	0.04	0.01644
1000	117.3	120.3	117.1	0.02545	0.001637
10000	117.3	118.9	117.3	0.01324	0.0001636
100000	117.3	117.4	117.3	0.0001455	1.636e-05

Abgabe:

► 6.cpp