

**Optimización de la Trayectoria de Ascenso de Aeronaves A320
mediante Reducción de Dimensionalidad y Computación
Cuántica**

*Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Física*



Marco A. Erazo

Director:

Dr. Leonardo A. Pachón

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Medellín, Colombia
Diciembre 2024

Abstract

This work explores the optimization of the ascent trajectories of the A320 aircraft, addressing the challenge posed by Airbus in the document "AIRBUS QUANTUM COMPUTING CHALLENGE." The problem, characterized by a high-dimensional nonlinear cost function and numerous operational constraints, is approached through dimensionality reduction and optimization via quantum computing. An analysis of the Jacobian matrix of the system's dynamic equations reveals linear dependencies, allowing a significant reduction in the number of independent variables from 364 to 104. This simplification enables a more efficient exploration of the solution space. Initially, a complete optimization process for low dimensionality is explored, and various sampling methods are analyzed to approximate the cost function, including hyperspace hexagons, random Gaussian perturbations, adjacent point searches, and Sobol sequences. A binary quadratic function is fitted to the sampled data points, serving as a simplified representation of the cost function for evaluation through simulated quantum annealing. The performance of this quantum approach is compared with classical optimization algorithms, such as Nelder-Mead and Differential Evolution, considering both runtime and solution quality. Although the complete optimization of the 53-segment trajectory presents computational challenges for current quantum annealing systems, the problem reduced to 10 variables is successfully optimized. The research provides a framework for future studies, paving the way for large-scale quantum optimization of aircraft ascent trajectories, contributing to fuel-efficient and environmentally friendly air transport.

Resumen

Este trabajo explora la optimización de trayectorias de ascenso de la aeronave A320, abordando el desafío planteado por el Airbus en el documento “AIRBUS QUANTUM COMPUTING CHALLENGE”. El problema, caracterizado por una función de costo no lineal de alta dimensionalidad y numerosas restricciones operacionales, se aborda mediante una reducción de dimensionalidad y enfoque de optimización mediante computación cuántica. Un análisis de la matriz Jacobiana de las ecuaciones dinámicas del sistema revela dependencias lineales, lo que permite una reducción significativa en el número de variables independientes de 364 a 104. Esta simplificación posibilita una exploración más eficiente del espacio de soluciones. Se explora inicialmente un proceso de optimización completo para baja dimensionalidad, se analizan diferentes métodos de muestreo para aproximar la función de coste, incluyendo hexágonos hiperespaciales, perturbaciones gaussianas aleatorias, búsqueda de puntos adyacentes y secuencias Sobol. Se ajusta una función cuadrática binaria a los puntos de datos muestreados, sirviendo como una representación simplificada de la función de costo para su evaluación mediante recocido cuántico simulado. El rendimiento de este enfoque cuántico se compara con algoritmos de optimización clásicos, como Nelder-Mead y Evolución Diferencial, considerando tanto el tiempo de ejecución como la calidad de la solución. Si bien la optimización completa de la trayectoria de 53 segmentos presenta desafíos computacionales para los sistemas de recocido cuántico actuales, el problema reducido a 10 variables se optimiza con éxito. La investigación proporciona un marco para estudios futuros, allanando el camino para la optimización cuántica a mayor escala de trayectorias de ascenso de aeronaves que contribuiría a un transporte aéreo eficiente en cuanto al consumo de combustible y más respetuoso con el medio ambiente.

Índice general

Abstract	I
Resumen	II
Lista de Símbolos y Abreviaturas	v
1 Introducción	1
2 Mecánica de Vuelo y Aerodinámica	7
2.1 Conceptos Fundamentales de Aerodinámica	7
2.2 Mecánica de Vuelo: Ecuaciones del Movimiento	9
2.3 Variables de Estado y Control en la Mecánica de Vuelo	11
2.4 Limitaciones y Restricciones Operacionales	11
2.5 Estructura de Problemas de Optimización en Mecánica de Vuelo	12
2.6 Cálculo del Consumo y Tiempo	12
2.7 Consideraciones Aerodinámicas Avanzadas	14
2.8 Unificación de Conceptos	14
2.9 Ejemplo de Ecuaciones y Cálculos de Rendimiento	15
2.10 Estrategias de Optimización y Herramientas Matemáticas	16
2.11 Importancia Práctica	17
3 Teorema de la Función Implícita	18
3.1 Funciones Implícitas	18
3.2 El Teorema de la Función Implícita	19
3.3 Análisis de las Condiciones	20
3.4 El rol del Jacobiano	20
3.5 Generalización a Múltiples Variables y Ecuaciones	21
3.6 Aplicaciones e Importancia	22
4 Optimización y Métodos de muestreo	24
4.1 Métodos de Optimización	25
4.2 Métodos de Muestreo	31
5 Optimización cuántica	41
5.1 Principios Básicos de Computación Cuántica	41
5.2 Algoritmos Cuánticos para Optimización	43
5.3 Aplicacion	46
6 Optimización de la trayectoria del Airbus A320 (Transcribiendo)	48
6.1 Formulación y Reducción del Modelo de Ascenso	48
6.2 Muestreo del Espacio de existencia y Ajuste de la Función Objetivo	48

6.3 Optimización y Análisis	48
Bibliografía	49
Apéndices	50
.1 Apéndice A: Código de ϕ	50
.2 Apéndice B: Datos Adicionales	50

Lista de Símbolos y Abreviaturas

α : Alfa - Ángulo de incidencia

β : Beta - Ángulo de reflexión

λ : Lambda - Longitud de onda

E: Energía

c: Velocidad de la luz

etc.: Etcétera

Capítulo 1

Introducción

Contexto y Explicación del Problema

La optimización de trayectorias de vuelo representa un problema crucial en la industria aeronáutica moderna con implicaciones significativas en la eficiencia operativa, el impacto ambiental y la rentabilidad de las aerolíneas. La creciente demanda de transporte aéreo, junto con la necesidad de reducir las emisiones de gases de efecto invernadero y el consumo de combustible, ha impulsado una intensa actividad de investigación y desarrollo en este campo. Un ejemplo de este esfuerzo es el concurso “AIRBUS Quantum Computing Challenge” del fabricante de aeronaves Airbus [1]. Este concurso internacional planteó, entre otros desafíos, el problema específico de optimizar la fase de ascenso de las aeronaves de la familia A320, un problema que ha sido abordado en este trabajo como base para su estudio académico.

En términos generales, la optimización de trayectorias de vuelo busca determinar una configuración de variables que finalmente optimicen un objetivo determinado, como el consumo de combustible, el tiempo de vuelo, o una combinación de ambos, mientras se satisfacen una serie de restricciones operativas y de seguridad [2]. Estas restricciones pueden incluir límites en la velocidad, la altitud, el ángulo de ascenso, la aceleración, la potencia del motor, y otras variables que definen el estado y el comportamiento de la aeronave [3].

La fase de ascenso, en particular, es de especial interés por su alto consumo de combustible en comparación con otras fases del vuelo, como el crucero [4]. La optimización de esta fase puede conducir a reducciones sustanciales en el consumo total de combustible y, en

consecuencia, en las emisiones contaminantes [5]. Además, optimizar el ascenso puede resultar en una menor duración del vuelo, lo que a su vez puede mejorar la eficiencia de la red de rutas de una aerolínea y reducir los costos operativos [6].

El problema de optimizar la trayectoria de ascenso de una aeronave es complejo debido a la naturaleza no lineal de las ecuaciones que gobiernan la dinámica del vuelo [7], la gran cantidad de variables involucradas [8], y las múltiples restricciones operativas y de seguridad que deben ser consideradas [9]. Los métodos clásicos de optimización, como la programación lineal y no lineal, a menudo encuentran dificultades para resolver este tipo de problemas de manera eficiente, especialmente cuando se trata de un gran número de variables y restricciones [10].

En este contexto, el concurso de Airbus expone un planteamiento matemático, en términos de expresiones no están cohesionadas en una expresión final, para la optimización de la fase de ascenso de las aeronaves A320. Este modelo, que se describe en detalle en la sección de Análisis del Problema Original, considera una serie de variables que definen el estado de la aeronave en cada punto de una trayectoria discretizada en N partes, incluyendo la velocidad, el ángulo de ascenso, la masa, la distancia recorrida, el coeficiente de sustentación y la fracción del empuje máximo de ascenso [11]. El objetivo es minimizar una función de costo que combina el consumo de combustible y el tiempo de vuelo, ponderados por un "Índice de Costo" (Cost Index, CI) [12], sujeto a las ecuaciones de movimiento de la aeronave y a un conjunto de restricciones operativas que incluyen límites en la velocidad calibrada del aire (CAS), el número de Mach, la velocidad vertical, el coeficiente de sustentación y la configuración de empuje [13], este trabajo estará enfocado en el tratamiento matemático a partir del planteamiento original no en el modelo físico. El concurso de Airbus estableció, además, una serie de "Key Performance Indicators" (KPI) para evaluar las soluciones propuestas. Estos KPI incluyen la provisión de un método cuántico o híbrido para el problema de optimización, una estimación de los recursos de computación cuántica requeridos para ejecutar el algoritmo, y una comparación del tiempo de cálculo entre el algoritmo cuántico y una implementación clásica del método de optimización propuesto [14].

El problema de investigación que se plantea en esta trabajo es el desarrollo y la evaluación de un método eficiente para la optimización de la trayectoria de ascenso de aeronaves A320, basado en la reducción de dimensionalidad y la computación cuántica, que permita

minimizar el consumo de combustible y el tiempo de vuelo, sujeto a las restricciones operativas y de seguridad relevantes. Se busca, en particular, explorar cómo la reducción de dimensionalidad del problema original de Airbus, a través del análisis del Jacobiano y la identificación de variables independientes, puede simplificar el problema de optimización y hacerlo más tratable tanto para métodos de optimización clásicos como para algoritmos cuánticos.

La computación cuántica, un campo emergente con el potencial de revolucionar la capacidad de cómputo [15], ofrece nuevas posibilidades para resolver problemas de optimización complejos que son difíciles de abordar con métodos clásicos [16]. En particular, algoritmos como el "Quantum Approximate Optimization Algorithm" (QAOA) [17] y el "Variational Quantum Eigensolver" (VQE) [18] han mostrado resultados prometedores en la resolución de problemas de optimización combinatoria [19]. Si bien la tecnología de computación cuántica aún se encuentra en sus primeras etapas de desarrollo, con limitaciones en el número de cúbits y la coherencia [20], este trabajo explora cómo se puede preparar el problema de optimización de la trayectoria de ascenso para su eventual resolución en futuras computadoras cuánticas.

Para lograr los objetivos de esta investigación, se ha seguido un enfoque metódico que incluye la simplificación del modelo matemático original de Airbus, la verificación del modelo simplificado, la formulación simbólica de la función objetivo, la exploración de diferentes métodos de muestreo para la búsqueda de puntos en el espacio de soluciones, y finalmente, la aproximación de la función objetivo mediante una función cuadrática binaria que pueda ser optimizada mediante computación cuántica.

La reducción de dimensionalidad, en particular, juega un papel crucial en este trabajo. Al reducir el número de variables independientes de 364 a 104, se simplifica significativamente la complejidad del problema de optimización. Esto no solo facilita la aplicación de métodos de optimización clásicos, sino que también hace que el problema sea más adecuado para su eventual resolución en computadoras cuánticas, que actualmente tienen un número muy restringido de cúbits disponibles [21].

El análisis del Jacobiano [22], ha permitido identificar las dependencias lineales entre las ecuaciones de actualización de estado del modelo de Airbus y, en consecuencia, reducir el número de variables independientes. Este análisis, junto con la implementación de un método iterativo para calcular la masa y otras variables, ha sido clave para la

simplificación del modelo.

La búsqueda de puntos que cumplan con las restricciones del problema ha sido otro aspecto importante de esta investigación. Se han explorado diferentes métodos de muestreo, incluyendo la generación de puntos en una grilla hexaédrica, el muestreo aleatorio con perturbaciones gaussianas, la búsqueda de puntos adyacentes y finalmente, el uso de secuencias de Sobol [23]. Cada uno de estos métodos tiene sus propias ventajas y desventajas en términos de eficiencia computacional, uniformidad del muestreo y capacidad para cubrir el espacio de soluciones [24]. La elección de un método u otro tiene implicaciones importantes para la calidad de la aproximación de la función objetivo y, en última instancia, para la eficiencia de la optimización.

La aproximación de la función objetivo mediante muestreo de la función original, específicamente una función cuadrática binaria, es determinante para la aplicación de la computación cuántica. Se intentó inicialmente utilizar polinomios de Chebyshev [25], que son conocidos por su precisión en la aproximación de funciones, sin embargo, la complejidad de la función objetivo y el gran número de variables involucradas (incluso después de la reducción de dimensionalidad) hicieron que este enfoque fuera computacionalmente inviable. Como alternativa, se optó por ajustar una función cuadrática binaria a un conjunto de puntos válidos obtenidos mediante la búsqueda con secuencias de Sobol. Esta función cuadrática, que puede ser expresada en la forma de un problema de optimización cuadrática sin restricciones binarias (QUBO) [26], es adecuada para su resolución en plataformas de computación cuántica como D-Wave [27].

Este trabajo contribuye al campo de la optimización de trayectorias de vuelo al proponer un método que combina la reducción de dimensionalidad, la búsqueda eficiente de puntos y la aproximación de la función objetivo para hacer que el problema sea tratable mediante computación cuántica. Si bien la optimización cuántica para el problema completo con $N=53$ está fuera del alcance de las capacidades de sistemas actuales, los resultados obtenidos para $N=3$ y $N=6$ o sea el trabajo en 10 dimensiones, proporcionan información sobre la estructura del problema y sugieren que la computación cuántica podría ofrecer ventajas significativas para mayores dimensiones.

Justificación de la Investigación

La optimización de trayectorias de vuelo es un área de vital importancia en la industria

aeronáutica, impulsada por la creciente demanda de transporte aéreo y la necesidad imperante de mitigar el impacto ambiental asociado. Este trabajo se centra en la optimización de la trayectoria de ascenso de aeronaves, una fase crítica del vuelo que consume una cantidad significativa de combustible y, por lo tanto, contribuye de manera importante a las emisiones de gases de efecto invernadero. La investigación se fundamenta en el problema planteado en el concurso "Airbus Quantum Computing Challenge" [1], que busca soluciones innovadoras para este desafío utilizando enfoques de computación cuántica. Si bien el presente estudio se enmarca en un contexto académico, su relevancia se extiende a la industria aeronáutica al abordar un problema real con implicaciones prácticas directas. La justificación de esta investigación se basa en tres pilares fundamentales: la necesidad de eficiencia en la aviación, el potencial de la computación cuántica para la optimización, y la contribución al conocimiento científico en la intersección de estas dos disciplinas.

Necesidad de Eficiencia en la Aviación:

El consumo de combustible es uno de los principales costos operativos para las aerolíneas, representando una porción sustancial de sus gastos totales. Además del aspecto económico, la quema de combustible genera emisiones de gases de efecto invernadero, contribuyendo al cambio climático. La optimización de la trayectoria de ascenso, al minimizar el consumo de combustible, impacta directamente en la rentabilidad de las aerolíneas y en la sostenibilidad ambiental del sector. Una reducción, incluso marginal, en el consumo de combustible durante esta fase del vuelo, multiplicada por la cantidad de vuelos diarios a nivel global, se traduce en ahorros económicos significativos y en una disminución sustancial de la huella de carbono de la industria. La búsqueda de trayectorias de ascenso óptimas, considerando las restricciones operativas y de seguridad, es por lo tanto una necesidad apremiante para la aviación moderna. Trabajos como el de Alligier et al. [2] demuestran la aplicación de técnicas de programación lineal entera mixta para la planificación robusta de vuelos, considerando la incertidumbre en las condiciones de vuelo, lo que refuerza la importancia de la optimización en el contexto de la aviación real.

Potencial de la Computación Cuántica para la Optimización:

La complejidad del problema de optimización de trayectorias de vuelo, caracterizada por la no linealidad de las ecuaciones de movimiento, el gran número de variables involucradas, y las múltiples restricciones, limita la aplicabilidad de los métodos clásicos de

optimización. La computación cuántica emerge como una alternativa prometedora para abordar este tipo de problemas. Al aprovechar las propiedades de sistemas computacionales cuánticos, los algoritmos cuánticos pueden explorar el espacio de soluciones de manera más eficiente que los métodos clásicos, con el potencial de encontrar soluciones óptimas o cercanas a lo óptimo en tiempos significativamente menores. Si bien la tecnología de computación cuántica aún se encuentra en una etapa temprana de desarrollo, su potencial para resolver problemas de optimización complejos es considerable. Algoritmos como QAOA [17] y VQE [18] han demostrado su capacidad para abordar problemas de optimización combinatoria, abriendo nuevas posibilidades para la optimización de trayectorias de vuelo. Este trabajo explora cómo preparar el problema de optimización para su eventual ejecución en computadoras cuánticas, anticipándose al desarrollo de hardware más potente.

Contribución al Conocimiento Científico:

Este trabajo contribuye al conocimiento científico en la intersección de la optimización y la computación cuántica aplicada a la industria aeronáutica. La simplificación del modelo matemático original de Airbus, mediante el análisis del Jacobiano y la identificación de variables independientes, es una contribución significativa que reduce la complejidad del problema y lo hace más tratable tanto para métodos de optimización clásicos como cuánticos. La reducción de la dimensionalidad de 364 a 104 variables no solo simplifica el problema, sino que también facilita su adaptación a las limitaciones actuales de las computadoras cuánticas. La exploración de diferentes métodos de muestreo, incluyendo la búsqueda de puntos adyacentes y el uso de secuencias de Sobol [23], ofrece una valiosa perspectiva sobre la eficiencia y la cobertura de diferentes estrategias de búsqueda en espacios multidimensionales. La aproximación de la función objetivo mediante una función cuadrática binaria, adecuada para la optimización en D-Wave [27], representa una contribución metodológica que permite aplicar algoritmos cuánticos a un problema de la industria aeronáutica. El análisis comparativo entre los métodos de optimización clásica y cuántica para diferentes dimensiones del problema proporciona información valiosa sobre el rendimiento y la escalabilidad de cada enfoque. Este trabajo aporta una base para futuras investigaciones en la aplicación de la computación cuántica a la optimización de trayectorias de vuelo, a medida que la tecnología cuántica madura y se vuelve más accesible.

Capítulo 2

Mecánica de Vuelo y Aerodinámica

La mecánica de vuelo y la aerodinámica son disciplinas esenciales para comprender el comportamiento de las aeronaves en la atmósfera. Estas áreas de estudio proporcionan las herramientas para analizar, modelar y optimizar trayectorias, consumos de combustible, tiempos de vuelo y, en general, cualquier parámetro que influya en las prestaciones del avión. El entendimiento detallado de estas materias es fundamental para ingenieros aeronáuticos, pilotos, controladores aéreos, gestores de operaciones y otros profesionales de la industria aeronáutica.

La *aerodinámica* estudia el movimiento del aire y las fuerzas que actúan sobre cuerpos que se mueven a través de él, particularmente las aeronaves. La *mecánica de vuelo* se centra en las ecuaciones de movimiento de las aeronaves, incorporando las fuerzas aerodinámicas, la gravedad, la propulsión y las limitaciones operativas. En este capítulo se presenta una visión integral de las variables y ecuaciones clave, explicando cada una y su relación con el desempeño global del avión, así como las restricciones típicas que surgen durante una misión de vuelo.

2.1. Conceptos Fundamentales de Aerodinámica

Flujo de Aire, Densidad y Presión

La atmósfera terrestre es el fluido en el que se desplazan las aeronaves. Sus propiedades principales que afectan el vuelo son la densidad del aire ($\rho(Z, p_i)$), la presión (p) y la temperatura (T). Estas varían con la altitud y son capturadas por modelos atmosféricos

estándar, como la Atmósfera Estándar Internacional (ISA, por sus siglas en inglés).

La densidad del aire $\rho(Zp_i)$ es especialmente relevante, ya que las fuerzas aerodinámicas, como la sustentación (L) y la resistencia (D), dependen de ella. La relación típica para la densidad atmosférica a diferentes altitudes, asumiendo un gradiente térmico lineal, es:

$$\rho(Zp_i) = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\alpha_0 - 1}, \quad (2.1)$$

donde ρ_0 es la densidad del aire al nivel del mar, T_0 la temperatura a nivel del mar, y α_0 es un exponente derivado de la relación entre la gravedad, el gas constante del aire R y el gradiente térmico L_Z . Este tipo de relación se deriva en condiciones atmosféricas estándar [?].

Velocidades Características: TAS, CAS y Mach

En el estudio de aeronaves existen múltiples definiciones de velocidad, cada una diseñada para captar diferentes aspectos aerodinámicos y de medición:

- **TAS (True Airspeed):** Es la velocidad real del avión con respecto al aire que lo rodea. Afecta directamente las fuerzas aerodinámicas.
- **CAS (Calibrated Airspeed):** Es la velocidad indicada corregida por errores instrumentales y de posición. Se aproxima a la IAS (Indicated Airspeed) pero con correcciones. La CAS es útil porque al combinarse con la densidad local permite estimar las fuerzas aerodinámicas de manera consistente.
- **Número de Mach (M):** Es la razón entre la velocidad del flujo (o la velocidad del avión) y la velocidad local del sonido a :

$$M = \frac{v_i}{a} = \frac{v_i}{\sqrt{\gamma RT}}, \quad (2.2)$$

donde γ es la razón de calores específicos del aire (≈ 1.4), R es la constante del gas para el aire, y T la temperatura local.

El número de Mach es crucial para determinar el régimen de vuelo: subsónico, transónico o supersónico, ya que las características aerodinámicas cambian drásticamente según este parámetro [?].

Fuerzas Aerodinámicas: Sustentación y Resistencia

La fuerza aerodinámica total sobre un ala o aeronave se puede descomponer en sustentación (L), perpendicular a la dirección del flujo, y resistencia (D), paralela a ella.

$$L = \frac{1}{2}\rho(Zp_i)v_i^2 S_{REF} C_L, \quad D = \frac{1}{2}\rho(Zp_i)v_i^2 S_{REF} C_D, \quad (2.3)$$

donde v_i puede ser la TAS, S_{REF} es el área de referencia aerodinámica, C_L es el coeficiente de sustentación y C_D el coeficiente de resistencia. Estos coeficientes dependen del ángulo de ataque, la forma del ala, la compresibilidad, la viscosidad del aire, entre otros factores. El coeficiente de sustentación C_L generalmente se incrementa con el ángulo de ataque hasta un valor máximo ($C_{L_{max}}$), mientras que el coeficiente de resistencia C_D aumenta con el ángulo de ataque y con la formación de estelas turbulentas. A menudo se representa la resistencia en función de C_L a través de la expresión aerodinámica:

$$C_D = C_{D_0} + kC_L^2, \quad (2.4)$$

donde C_{D_0} es la resistencia parasitaria mínima y k un factor que describe el crecimiento cuadrático de la resistencia inducida por sustentación [?].

2.2. Mecánica de Vuelo: Ecuaciones del Movimiento

Ecuación Básica de la Trayectoria

El movimiento de la aeronave en un plano vertical puede analizarse considerando un ángulo de ascenso γ_i , definido como el ángulo entre la trayectoria de vuelo y el eje horizontal. Si se asume simetría y vuelo coordinado, las fuerzas principales sobre el avión son: tracción o empuje ($F_{N_{MCL_i}}$), peso ($m_i g_0$), sustentación (L) y resistencia (D).

Para la componente de fuerzas a lo largo de la trayectoria, tenemos:

$$F_{N_{MCL_i}} \cos \alpha - D - m_i g_0 \sin \gamma_i = m_i \frac{dv_i}{dt}, \quad (2.5)$$

donde α es el ángulo entre el vector empuje y la trayectoria. Para la dirección perpendi-

cular a la trayectoria:

$$L + F_{N_{MCL_i}} \sin \alpha - m_i g_0 \cos \gamma_i = m_i v_i \frac{d\gamma_i}{dt}. \quad (2.6)$$

Cuando el empuje se alinea aproximadamente con la dirección de vuelo, $\alpha \approx 0$, y simplificando las condiciones de ascenso, por ejemplo en régimen estable, las ecuaciones se simplifican [?, ?].

Masa y Consumo de Combustible

La masa de la aeronave (m_i) cambia durante el vuelo debido al consumo de combustible.

A una razón de consumo \dot{m}_f , la masa total del avión disminuye con el tiempo:

$$\frac{dm_i}{dt} = -\eta \lambda_i F_{N_{MCL_i}}, \quad (2.7)$$

donde η es el consumo específico de combustible y λ_i es el factor de empuje entre 0 y 1. Esta relación lineal es una primera aproximación. El impacto de la masa en la dinámica es crucial, ya que influye en la sustentación requerida y en la aceleración disponible.

Altitud, Velocidad Vertical y Alcance

A medida que el avión asciende a mayores altitudes (Zp_i), disminuye la densidad del aire $\rho(Zp_i)$. Esto afecta la sustentación y la resistencia, así como también el empuje disponible en motores turbofan. Una ecuación típica para el incremento de altitud en función de la velocidad vertical $Vz_i = v_i \sin \gamma_i$ es:

$$\frac{dZp_i}{dt} = v_i \sin \gamma_i. \quad (2.8)$$

El alcance horizontal durante un segmento de vuelo se obtiene de:

$$\frac{ds_i}{dt} = v_i \cos \gamma_i. \quad (2.9)$$

2.3. Variables de Estado y Control en la Mecánica de Vuelo

En mecánica de vuelo, las variables se dividen a menudo en:

- **Variables de Estado:** Aquellas que describen completamente el estado del sistema en un momento dado. Por ejemplo, la altitud (Zp_i), la velocidad (v_i), la masa (m_i), la distancia recorrida (s_i), el tiempo (t_i) y el ángulo de ascenso (γ_i).
- **Variables de Control:** Estas son las variables que el piloto o el sistema de control automático puede modificar. Por ejemplo, el empuje ($F_{N_{MCL_i}}$) o el factor de empuje (λ_i) que varía entre 0 y 1.

2.4. Limitaciones y Restricciones Operacionales

Límites de Velocidad

Las aeronaves tienen restricciones de velocidad para garantizar la seguridad estructural y el confort de los pasajeros. Dos restricciones comunes son:

- **VMO (Maximum Operating Velocity):** Límite máximo de velocidad calibrada. Por ejemplo:

$$CAS(v_i, Zp_i) \leq VMO. \quad (2.10)$$

- **MMO (Maximum Operating Mach):** Límite máximo de número de Mach:

$$M(v_i, Zp_i) \leq MMO. \quad (2.11)$$

Estos límites garantizan que el avión no sufra problemas estructurales o aerodinámicos como la aparición de ondas de choque intensas al superar el régimen de diseño.

Tasa Mínima de Ascenso

La aviación comercial exige tasas mínimas de ascenso, ya sea por estándares de seguridad o por requisitos operacionales. Por ejemplo:

$$v_i \sin \gamma_i \geq Vz_{\min}, \quad (2.12)$$

donde $V_{z_{\min}}$ es la tasa mínima de ascenso requerida.

Límite en Coeficiente de Sustentación

El coeficiente de sustentación no puede superar un valor máximo antes de que el ala entre en pérdida:

$$Cz_i \leq Cz_{\max}. \quad (2.13)$$

Este límite impone restricciones en el ángulo de ataque y, en consecuencia, en la maniobrabilidad y capacidad de ascenso de la aeronave.

2.5. Estructura de Problemas de Optimización en Mecánica de Vuelo

Cuando se aborda la planificación del perfil de ascenso, se plantea un problema de optimización multivariable con restricciones. Los objetivos pueden incluir la minimización del consumo de combustible, la minimización del tiempo o una combinación de ambos mediante un índice de costo (CI , *Cost Index*), que es la relación entre el coste en combustible y el coste en tiempo.

El problema aquí tratado tiene la forma:

$$\min_{\text{control}} \phi = \text{consumo} + CI \times \text{tiempo}, \quad (2.14)$$

sujeto a las ecuaciones de movimiento, las limitaciones aerodinámicas y las restricciones operativas. Este tipo de problema es altamente no lineal.

2.6. Cálculo del Consumo y Tiempo

El cálculo del consumo total y del tiempo total de vuelo se realiza integrando las tasas correspondientes a lo largo de la trayectoria de ascenso. Utilizando las variables de estado y control definidas, se pueden establecer las siguientes relaciones:

Consumo de Combustible

El consumo de combustible se modela a través de la disminución de la masa de la aeronave

(m_i) debido al consumo específico de combustible (η) y al empuje aplicado $(\lambda_i F_{N_{MCL_i}})$.

La relación diferencial es:

$$\frac{dm_i}{dt} = -\eta \lambda_i F_{N_{MCL_i}}. \quad (2.15)$$

Integrando esta ecuación a lo largo de la trayectoria, se obtiene el consumo total de combustible:

$$\Delta m = \int_{t_0}^{t_F} \eta \lambda_i F_{N_{MCL_i}} dt. \quad (2.16)$$

Cálculo del Tiempo de Vuelo

El tiempo total de vuelo (t_F) se obtiene integrando la tasa de cambio del tiempo a lo largo de la trayectoria de ascenso. Dado que t_i representa el tiempo acumulado hasta el punto i , la relación diferencial es:

$$\frac{dt_i}{dt} = 1, \quad (2.17)$$

lo que implica:

$$t_F = t_0 + \int_0^{N-1} \frac{dt_i}{ds_i} ds_i. \quad (2.18)$$

Sin embargo, debido a la discretización del problema, el tiempo se puede aproximar mediante:

$$t_F = \sum_{i=0}^{N-2} \frac{t_{i+1} - t_i}{Zp_{i+1} - Zp_i} \Delta Zp_i, \quad (2.19)$$

donde $\Delta Zp_i = Zp_{i+1} - Zp_i$.

Integración en la Trayectoria

Dado que el problema está discretizado en N puntos, los consumos y tiempos se suman a lo largo de cada segmento de ascenso:

$$\text{Consumo Total} = \sum_{i=0}^{N-2} \eta \lambda_i F_{N_{MCL_i}} \Delta t_i, \quad (2.20)$$

$$\text{Tiempo Total} = \sum_{i=0}^{N-2} \Delta t_i. \quad (2.21)$$

Donde Δt_i es el tiempo transcurrido en el segmento i -ésimo, calculado a partir de la velocidad y el cambio de altitud.

2.7. Consideraciones Aerodinámicas Avanzadas

Compresibilidad y Número de Mach

A medida que el avión aumenta su altitud (Zp_i), la temperatura desciende y la velocidad del sonido disminuye. Si la aeronave vuela a velocidad constante en TAS (v_i), el número de Mach ($M(v_i, Zp_i)$) puede aumentar, llegando a regímenes transónicos. Esto induce cambios significativos en la distribución de presiones alrededor del ala, incrementando la resistencia de onda. Por ello, en vuelos a gran altitud, el límite de Mach suele ser más restrictivo que el límite de CAS.

Polar Aerodinámica y Eficiencia

La diferencia entre el coeficiente de resistencia y el coeficiente de sustentación determina la eficiencia aerodinámica. La relación L/D indica cuán eficaz es el ala en generar sustentación con respecto a la resistencia. Una alta eficiencia (L/D elevado) es deseable ya que reduce el consumo de combustible para una sustentación dada. Múltiples diseños de alas, perfiles aerodinámicos y dispositivos hipersustentadores buscan optimizar esta relación.

Empuje del Motor y su Variación con la Altitud

El empuje máximo disponible ($F_{NMCL_i}(Zp_i)$), especialmente en motores turbofan, disminuye con la altitud debido a la menor densidad del aire y la menor masa de aire que ingresa en el motor. A su vez, el régimen de revoluciones y ajustes del motor permiten variar el empuje mediante el factor de empuje (λ_i) entre un valor mínimo y el máximo disponible. Conociendo la curva de empuje máximo ($F_{NMCL_i}(Zp_i)$), se puede modelar la reducción de empuje disponible al ascender.

2.8. Unificación de Conceptos

La mecánica de vuelo y la aerodinámica se combinan para formar un conjunto complejo de ecuaciones y restricciones. Un perfil de ascenso implica:

1. Iniciar a una altitud y velocidad iniciales conocidas ($Zp_I, v_0 = TAS(CAS_I, Zp_I)$).
2. Aumentar la altitud, ajustando el empuje y el ángulo de ascenso (λ_i, γ_i).

3. Mantenerse dentro de los límites de velocidad (CAS y Mach).
4. Asegurar una tasa mínima de ascenso ($V_{z_{\min}}$).
5. Controlar el coeficiente de sustentación para mantenerse dentro de $C_{z_{\max}}$.
6. Minimizar una función de coste que combina tiempo y consumo de combustible mediante el Cost Index (CI).

Este es el problema que se abordará en capítulos posteriores.

2.9. Ejemplo de Ecuaciones y Cálculos de Rendimiento

Consideremos un ejemplo simplificado: un avión a una altitud Zp_i con velocidad TAS v_i . El número de Mach vendrá dado por:

$$M(v_i, Zp_i) = \frac{v_i}{\sqrt{\gamma R(Ts_0 + L_Z Zp_i)}}, \quad (2.22)$$

donde Ts_0 es la temperatura al nivel del mar y L_Z el gradiente térmico. La densidad a esa altitud:

$$\rho(Zp_i) = \rho_0 \left(\frac{Ts_0 + L_Z Zp_i}{Ts_0} \right)^{\alpha_0 - 1}. \quad (2.23)$$

La sustentación requerida para equilibrar el peso en vuelo nivelado (ignorando empuje vertical):

$$L = m_i g_0 \approx \frac{1}{2} \rho(Zp_i) v_i^2 S_{REF} C_{z_i}. \quad (2.24)$$

De esto se puede resolver para el coeficiente de sustentación:

$$C_{z_i} = \frac{2m_i g_0}{\rho(Zp_i) v_i^2 S_{REF}}. \quad (2.25)$$

Si se conoce C_{z_i} , el C_D se deduce a partir de la polar aerodinámica:

$$C_D = C_{D_0} + k C_{z_i}^2. \quad (2.26)$$

La resistencia resultante es:

$$D = \frac{1}{2}\rho(Zp_i)v_i^2 S_{REF} C_D. \quad (2.27)$$

Finalmente, el empuje requerido para vuelo recto y nivelado es igual a la resistencia:

$$F_{N_{MCL_i}} = D. \quad (2.28)$$

Si se desea ascender, se debe tener un exceso de potencia:

$$F_{N_{MCL_i}} - D = m_i g_0 \sin \gamma_i. \quad (2.29)$$

Al incorporar el consumo de combustible:

$$\frac{dm_i}{dt} = -\eta \lambda_i F_{N_{MCL_i}}. \quad (2.30)$$

Con estas ecuaciones, se forman sistemas diferenciales que describen la evolución de v_i , m_i , Zp_i , s_i y γ_i con el tiempo, sujetos a las restricciones de velocidad, coeficientes y empuje máximo.

2.10. Estrategias de Optimización y Herramientas Matemáticas

El proceso de encontrar una trayectoria óptima que minimice el consumo más el coste en tiempo es complejo. Algunas estrategias incluyen:

- Métodos de control óptimo, como el principio del máximo de Pontryagin [?], que introducen funciones costo y multiplicadores de Lagrange.
- Métodos numéricos de programación no lineal (NLP), que resuelven sistemas de ecuaciones con restricciones.
- Técnicas metaheurísticas (algoritmos genéticos, enjambre de partículas) cuando los problemas son demasiado complejos para métodos convencionales.

- Métodos híbridos o potencialmente cuánticos a futuro, aprovechando la capacidad de la computación cuántica para acelerar partes de la optimización.

2.11. Importancia Práctica

Comprender estas variables y ecuaciones no es meramente académico. En la aviación real, los pilotos y sistemas de gestión de vuelo (FMS) necesitan calcular perfiles de ascenso óptimos para minimizar el gasto de combustible y reducir costos, o para cumplir con restricciones de control de tráfico aéreo (ATC) y procedimientos medioambientales.

La gestión eficiente de la trayectoria ascendente es particularmente relevante en operaciones de corto alcance, donde el porcentaje del vuelo dedicado a ascenso y descenso es mayor en comparación con vuelos de largo alcance. Por lo tanto, la reducción del consumo en estas fases se convierte en un factor significativo en la economía global del operador aéreo.

Capítulo 3

Teorema de la Función Implícita

En el análisis matemático, a menudo encontramos ecuaciones que relacionan dos o más variables. Algunas veces, estas ecuaciones pueden ser manipuladas algebraicamente para expresar una variable explícitamente como función de las otras. Sin embargo, hay situaciones donde tal manipulación resulta impráctica, o incluso imposible. En estos casos, surge la noción de función implícita, y con ella, la necesidad de herramientas que permitan comprender y trabajar con estas relaciones indirectas. Entre estas herramientas, el Teorema de la Función Implícita ocupa un lugar central [?].

El Teorema proporciona un conjunto de condiciones bajo las cuales una ecuación que involucra múltiples variables define, al menos localmente, una o más de esas variables como función implícita de las restantes. Su importancia radica no solo en su capacidad para establecer la existencia de estas funciones implícitas, sino también en la información que proporciona sobre sus propiedades, como la diferenciabilidad [?].

3.1. Funciones Implícitas

Conceptos:

Antes de tratar el Teorema, es crucial establecer una comprensión sólida del concepto fundamental: la función implícita.

Consideremos una ecuación que involucra dos variables, x e y , expresada en la forma general $F(x, y) = 0$. Aquí, F representa una función con dos variables. En ciertos casos, es posible despejar y en términos de x , obteniendo una expresión explícita como $y = g(x)$. Esta expresión define a y como función explícita de x [?].

No obstante, la realidad matemática frecuentemente presenta ecuaciones donde tal despeje no es factible. Imaginemos, por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Si bien podemos obtener dos soluciones explícitas para y ($y = \sqrt{1 - x^2}$ e $y = -\sqrt{1 - x^2}$), estas soluciones solo capturan partes del círculo unitario que la ecuación original representa.

Aquí es donde la noción de función implícita se vuelve esencial. Aunque no podamos expresar y como una única función explícita de x para todos los puntos que satisfacen la ecuación, podemos considerar que la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como función de x , al menos en un entorno local alrededor de un punto dado (x_0, y_0) que satisface la ecuación.

Intuitivamente, podemos pensar que, cerca del punto (x_0, y_0) , existe una función $y = g(x)$ cuya gráfica coincide con la curva definida por la ecuación $F(x, y) = 0$. Esta función $g(x)$ es la función implícita que la ecuación define localmente [?].

3.2. El Teorema de la Función Implícita

El Teorema proporciona las condiciones precisas bajo las cuales podemos afirmar la existencia de esta función implícita $g(x)$. Formalmente, el teorema puede presentarse así:

Teorema de la Función Implícita (caso de dos variables):

Sea $F(x, y)$ una función con dos variables, y sea (x_0, y_0) un punto tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Supongamos que:

1. F es continuamente diferenciable en una vecindad del punto (x_0, y_0) . Esto significa que las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ existen y son continuas en un entorno del punto [?].
2. La derivada parcial de F con respecto a y evaluada en (x_0, y_0) es no nula, es decir, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Entonces, existen intervalos abiertos I y J que contienen a x_0 e y_0 , respectivamente, y una única función $g : I \rightarrow J$ tal que:

- $g(x_0) = y_0$
- $F(x, g(x)) = 0$ para todo x en el intervalo I .

Además, la función g es diferenciable en I , y su derivada puede calcularse como:

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}$$

[?].

3.3. Análisis de las Condiciones

Las condiciones del Teorema no son arbitrarias; cada una juega un papel crucial para garantizar la existencia y unicidad de la función implícita $g(x)$. Examinemos su significado con mayor detalle:

1. Continuidad de las Derivadas Parciales:

La condición de que F sea continuamente diferenciable en una vecindad de (x_0, y_0) asegura que la superficie definida por $F(x, y)$ sea suave cerca de ese punto. Esta suavidad es esencial para poder aproximar localmente la superficie mediante un plano tangente, concepto fundamental para la diferenciación implícita [?].

2. Derivada Parcial con respecto a y no nula:

Esta condición es el corazón del Teorema. Intuitivamente, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ implica que la superficie definida por $F(x, y)$ no es "vertical" en el punto (x_0, y_0) con respecto al eje y . Si fuera vertical, un pequeño cambio en x podría corresponder a múltiples valores de y , violando la unicidad de la función implícita.

Geométricamente, esta condición garantiza que el plano tangente a la superficie en (x_0, y_0) no es paralelo al eje y . Esto permite "proyectar" la curva definida por $F(x, y) = 0$ sobre el eje x en una vecindad de (x_0, y_0) , obteniendo así la gráfica de una función $y = g(x)$ [?].

3.4. El rol del Jacobiano

Aunque en el caso de dos variables el jacobiano se reduce a la derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial y}$, su importancia se manifiesta plenamente cuando extendemos el Teorema a funciones con más variables.

El jacobiano, en general, es una matriz formada por las derivadas parciales de una función vectorial. En nuestro contexto, si consideramos una función $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$, el jacobiano de interés es el determinante de la matriz formada por las derivadas parciales de F con respecto a las variables que queremos considerar como implícitas (en este caso, solo y).

El requisito de que este jacobiano sea no nulo en el punto en cuestión generaliza la

condición $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ al caso de múltiples variables. Asegura que, localmente, la ecuación $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ define a y como una función implícita de las variables x_1, x_2, \dots, x_n [?].

3.5. Generalización a Múltiples Variables y Ecuaciones

El Teorema puede generalizarse a sistemas de ecuaciones y funciones con múltiples variables. Supongamos que tenemos un sistema de m ecuaciones con $n + m$ variables:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

Queremos saber si este sistema define implícitamente a las variables y_1, \dots, y_m como funciones de las variables x_1, \dots, x_n en una vecindad de un punto $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$ que satisface el sistema.

En este caso, el jacobiano relevante es el determinante de la matriz $m \times m$ formada por las derivadas parciales de las funciones F_1, \dots, F_m con respecto a las variables y_1, \dots, y_m :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

El Teorema de la Función Implícita para este caso generalizado establece que si todas las funciones F_i son continuamente diferenciables en una vecindad del punto, y el jacobiano J evaluado en el punto es no nulo, entonces el sistema define implícitamente a y_1, \dots, y_m como funciones de x_1, \dots, x_n en una vecindad del punto. Además, estas funciones implícitas son diferenciables, y sus derivadas pueden calcularse usando la regla de la cadena y la inversa del jacobiano [?].

Ejemplo Ilustrativo

Para anclar ideas, volvamos a la ecuación que define un círculo unitario:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Tomemos el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ que satisface la ecuación.

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

Evaluyendo en el punto, tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \neq 0$$

Como la derivada parcial con respecto a y es no nula, el Teorema garantiza existencia de una función $y = g(x)$ definida implícitamente por la ecuación en una vecindad de $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Además, podemos calcular la derivada de $g(x)$:

$$g'(x) = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Evaluyendo en el punto $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y considerando que $y_0 = g(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, obtenemos:

$$g' \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

3.6. Aplicaciones e Importancia

El Teorema Función Implícita posee una amplia gama de aplicaciones en diversas áreas. Algunas de ellas incluyen:

- **Cálculo de Derivadas:** Permite calcular derivadas de funciones definidas implícitamente, sin necesidad de despejar explícitamente [?].

- **Análisis de Curvas y Superficies:** Facilita el estudio de curvas y superficies definidas por ecuaciones, proporcionando información sobre tangentes, normales y curvatura.
- **Optimización:** Es fundamental en problemas de optimización con restricciones, donde las restricciones a menudo se expresan como ecuaciones implícitas [?].
- **Economía:** Se utiliza en modelos económicos para analizar relaciones implícitas entre variables, como en la teoría del equilibrio general.
- **Ingeniería:** Aparece en el análisis de sistemas mecánicos, eléctricos y de control, donde las relaciones entre variables a menudo se describen mediante ecuaciones implícitas.

Capítulo 4

Optimización y Métodos de muestreo

En este capítulo, se describen los métodos de optimización y muestreo empleados en este trabajo para abordar el problema de la optimización de la trayectoria de ascenso de aeronaves. La optimización es una rama fundamental de las matemáticas y la informática [?, ?] que busca encontrar la mejor solución a un problema, generalmente minimizando o maximizando una función objetivo sujeta a ciertas restricciones [?]. El muestreo, por otro lado, se refiere a las técnicas utilizadas para seleccionar un subconjunto de puntos de un espacio de búsqueda, con el objetivo de obtener información representativa sobre la función objetivo en ese espacio [?, ?].

El problema de optimización de la trayectoria de ascenso, tal como se plantea en este estudio, es complejo debido a la no linealidad de las ecuaciones de movimiento, la alta dimensionalidad del espacio de búsqueda y la presencia de múltiples restricciones [?]. Para enfrentar estos desafíos, se han explorado varios métodos de optimización y muestreo.

En las siguientes secciones, se describen en detalle tres métodos de optimización: Nelder-Mead, Evolución Diferencial y `gp_minimize` de la biblioteca `skopt`. Además, se exponen los métodos de muestreo utilizados en este trabajo: muestreo basado en hexágonos, muestreo aleatorio con perturbaciones gaussianas, búsqueda de puntos adyacentes y muestreo basado en secuencias de Sobol. Para cada método, se describen sus fundamentos, ventajas y desventajas, y su aplicabilidad al problema de optimización de la trayectoria de ascenso.

4.1. Métodos de Optimización

Nelder-Mead

El método Nelder-Mead, también conocido como método simplex, es un algoritmo de optimización numérica que no requiere el cálculo de gradientes. Fue propuesto por John Nelder y Roger Mead en 1965 [?]. Este método es particularmente útil para problemas donde la función objetivo no es diferenciable o su gradiente es difícil de calcular.

Fundamento Teórico

Nelder-Mead opera en un espacio de búsqueda n-dimensional utilizando un simplex, que es un politopo con n+1 vértices. En cada iteración, el algoritmo evalúa la función objetivo en los vértices del simplex y realiza una serie de transformaciones geométricas para reemplazar el peor vértice por uno mejor. Estas transformaciones incluyen:

- **Reflexión:** Se refleja el peor vértice a través del centroide de los vértices restantes. Matemáticamente, si x_{worst} es el peor vértice y x_{centroid} es el centroide, la reflexión se define como:

$$x_{\text{reflected}} = x_{\text{centroid}} + \alpha(x_{\text{centroid}} - x_{\text{worst}})$$

donde α es el factor de reflexión, típicamente $\alpha = 1$.

- **Expansión:** Si la reflexión produce un punto mejor que el mejor vértice actual, se expande el simplex en esa dirección. La expansión se calcula como:

$$x_{\text{expanded}} = x_{\text{centroid}} + \gamma(x_{\text{reflected}} - x_{\text{centroid}})$$

donde $\gamma > 1$ es el factor de expansión.

- **Contracción:** Si la reflexión produce un punto peor que el segundo peor vértice, se contrae el simplex en esa dirección. La contracción se define como:

$$x_{\text{contracted}} = x_{\text{centroid}} + \beta(x_{\text{worst}} - x_{\text{centroid}})$$

donde $0 < \beta < 1$ es el factor de contracción.

- **Reducción:** Si ninguno de los pasos anteriores mejora la solución, se reduce el simplex hacia el mejor vértice. La reducción se realiza mediante:

$$x'_i = x_{\text{best}} + \delta(x_i - x_{\text{best}}) \quad \forall i \neq \text{best}$$

donde $0 < \delta < 1$ es el factor de reducción.

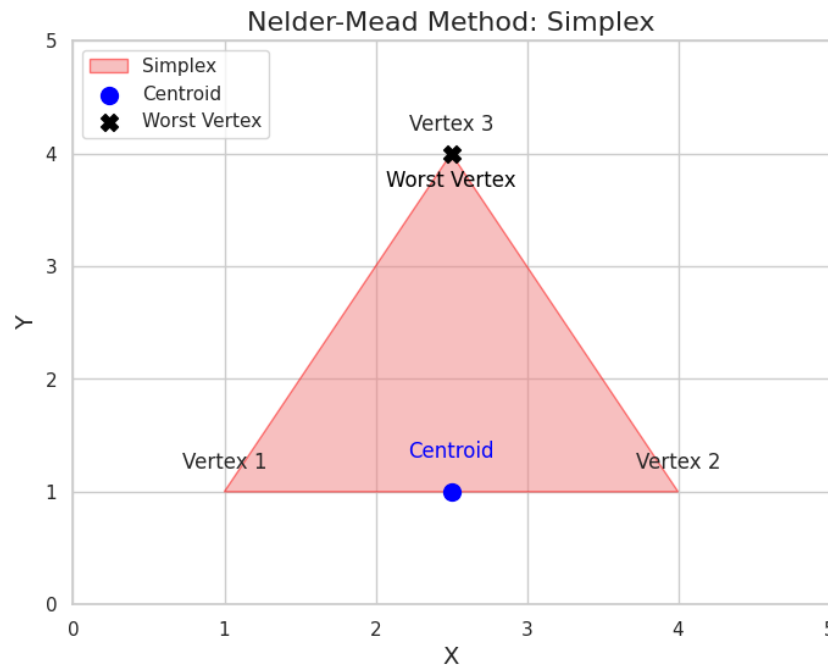


Figura 4.1: Representación gráfica del método Nelder-Mead utilizando un simplex en un espacio bidimensional.

El algoritmo continúa iterando hasta que se cumple un criterio de convergencia, como un tamaño de simplex suficientemente pequeño o una diferencia suficientemente pequeña entre los valores de la función objetivo en los vértices [?].

Ventajas y Desventajas

Las principales ventajas de Nelder-Mead son:

- **Simplicidad:** Es fácil de implementar y entender.
- **No requiere gradientes:** Es aplicable a funciones no diferenciables o con gradientes costosos de calcular.
- **Robustez:** Es relativamente robusto a la presencia de ruido en la función objetivo.

Sin embargo, Nelder-Mead también tiene algunas desventajas:

- **Convergencia lenta:** Puede ser lento para converger, especialmente en problemas de alta dimensionalidad.
- **Sensibilidad a la configuración inicial:** El rendimiento puede depender de la forma y tamaño del simplex inicial.
- **Atrapamiento en mínimos locales:** Como otros métodos de optimización local, puede quedar atrapado en mínimos locales.

Evolución Diferencial

La Evolución Diferencial (DE) es un algoritmo de optimización global basado en poblaciones, propuesto por Rainer Storn y Kenneth Price en 1997 [?]. Pertenece a la familia de los algoritmos evolutivos y es conocido por su eficiencia y robustez en la resolución de problemas de optimización no lineales y no convexos.

Fundamento Teórico

DE opera sobre una población de individuos, donde cada individuo representa una solución candidata. En cada generación, el algoritmo realiza los siguientes pasos:

1. **Mutación:** Para cada individuo (llamado "individuo objetivo"), se genera un individuo mutante mediante la combinación lineal de otros individuos seleccionados aleatoriamente de la población. La mutación se realiza según la fórmula:

$$v_i = x_{r1} + F \cdot (x_{r2} - x_{r3}) \quad (4.1)$$

donde v_i es el individuo mutante, x_{r1} , x_{r2} y x_{r3} son individuos seleccionados aleatoriamente, y F es un factor de escala que controla la amplitud de la mutación.

2. **Cruce:** Se combina el individuo mutante con el individuo objetivo para generar un individuo de prueba. El cruce se realiza generalmente mediante un operador de cruce binomial, donde cada componente del individuo de prueba se hereda del individuo mutante con una cierta probabilidad CR , y del individuo objetivo con

probabilidad $1 - CR$.

$$u_{i,j} = \begin{cases} v_{i,j} & \text{si } \text{rand}_j(0,1) \leq CR \\ x_{i,j} & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

donde $u_{i,j}$ es el j -ésimo componente del individuo de prueba, $v_{i,j}$ es el j -ésimo componente del individuo mutante, y $x_{i,j}$ es el j -ésimo componente del individuo objetivo.

3. **Selección:** Se evalúa la función objetivo para el individuo de prueba y se compara con el individuo objetivo. Si el individuo de prueba tiene un mejor valor de la función objetivo, reemplaza al individuo objetivo en la siguiente generación. De lo contrario, el individuo objetivo se mantiene.

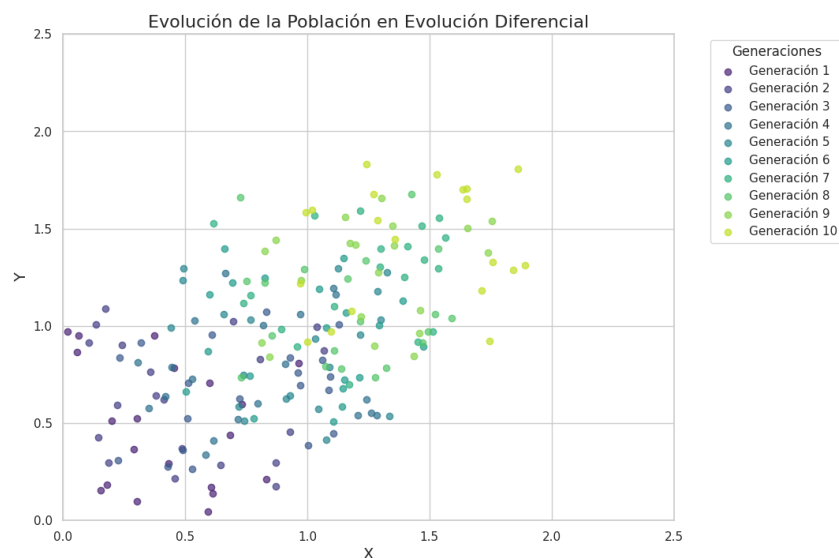


Figura 4.2: Evolución de la población en el algoritmo de Evolución Diferencial.

El proceso se repite hasta que se alcanza un número máximo de generaciones o se cumple un criterio de convergencia [?].

Ventajas y Desventajas

Las principales ventajas de la Evolución Diferencial son:

- **Eficiencia:** Es un algoritmo relativamente rápido y eficiente, especialmente en problemas de alta dimensionalidad.

- **Robustez:** Es robusto a la presencia de ruido y a la forma de la función objetivo.
- **Facilidad de implementación:** Es relativamente fácil de implementar y tiene pocos parámetros de ajuste.

Sin embargo, DE también presenta algunas desventajas:

- **Dependencia de parámetros:** El rendimiento puede depender de la elección de los parámetros F y CR .
- **Convergencia prematura:** En algunos casos, puede converger prematuramente a un mínimo local.

Aplicabilidad al Problema de Optimización de la Trayectoria de Ascenso

La Evolución Diferencial se ha utilizado en este trabajo como un método de optimización global para el problema de la trayectoria de ascenso. Su eficiencia y robustez lo hacen adecuado para explorar el espacio de soluciones de alta dimensionalidad y encontrar soluciones de alta calidad. Los resultados experimentales han demostrado que DE puede encontrar soluciones competitivas en un tiempo razonable, incluso para instancias del problema con un número elevado de variables.

`gp_minimize` de `skopt`

`gp_minimize` es una función de la biblioteca “skopt” (Scikit-Optimize) [?] que implementa la optimización bayesiana utilizando modelos de procesos gaussianos. La optimización bayesiana es un enfoque secuencial para la optimización global de funciones de caja negra, que es particularmente útil cuando la función objetivo es costosa de evaluar.

Fundamento Teórico

La optimización bayesiana se basa en la construcción de un modelo probabilístico de la función objetivo y su uso para guiar la búsqueda de la solución óptima. En `gp_minimize`, se utiliza un proceso gaussiano (GP) como modelo subrogado de la función objetivo. Un GP es una distribución de probabilidad sobre funciones, que se define por una función de media y una función de covarianza (kernel).

El proceso de optimización se realiza en los siguientes pasos:

1. Se evalúa la función objetivo en un conjunto inicial de puntos, generalmente muestreados aleatoriamente o mediante un diseño de experimentos.
2. Se ajusta un GP a los datos observados (puntos y valores de la función objetivo).
3. Se utiliza una función de adquisición para seleccionar el siguiente punto a evaluar. La función de adquisición equilibra la exploración (muestreo en regiones con alta incertidumbre) y la explotación (muestreo en regiones con valores prometedores de la función objetivo). Ejemplos de funciones de adquisición incluyen la probabilidad de mejora (PI), la mejora esperada (EI) y el límite superior de confianza (UCB). Por ejemplo, la Mejora Esperada se define como:

$$EI(x) = \mathbb{E} [\max(f(x^*) - f(x), 0)]$$

donde $f(x^*)$ es el mejor valor observado hasta el momento.

4. Se evalúa la función objetivo en el nuevo punto seleccionado y se actualiza el GP con la nueva observación.
5. Se repiten los pasos 3 y 4 hasta que se alcanza un presupuesto de evaluación o se cumple un criterio de convergencia.

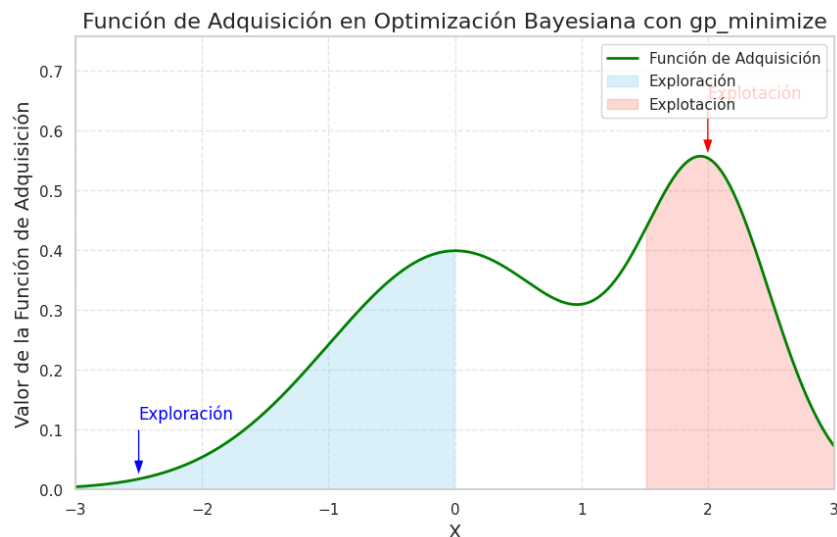


Figura 4.3: Representación de la función de adquisición en la optimización bayesiana con `gp_minimize`.

Ventajas y Desventajas

Las principales ventajas de `gp_minimize` son:

- **Eficiencia de muestreo:** Es eficiente en términos del número de evaluaciones de la función objetivo requeridas para encontrar una buena solución.
- **Manejo de funciones de caja negra:** Es adecuado para optimizar funciones costosas de evaluar, ruidosas o no diferenciables.
- **Incorporación de conocimiento previo:** Permite incorporar conocimiento previo sobre la función objetivo a través de la elección del kernel del GP.

Sin embargo, `gp_minimize` también tiene algunas desventajas:

- **Costo computacional:** El ajuste del GP puede ser costoso computacionalmente, especialmente para un gran número de puntos observados.
- **Dependencia del kernel:** El rendimiento puede depender de la elección del kernel del GP.
- **Escalabilidad limitada:** La escalabilidad a problemas de muy alta dimensionalidad puede ser limitada debido al costo computacional del ajuste del GP.

4.2. Métodos de Muestreo

El muestreo es una parte esencial del proceso de optimización, especialmente cuando se trata de funciones complejas o de alta dimensionalidad. Un buen método de muestreo debe ser capaz de explorar el espacio de soluciones de manera eficiente y de proporcionar una representación precisa de la función objetivo. En esta sección, se describen cuatro métodos de muestreo utilizados en este trabajo.

Muestreo Basado en Hexágonos

El muestreo basado en hexágonos es un método determinista que busca cubrir el espacio de búsqueda de manera uniforme utilizando una grilla hexagonal. Este enfoque se inspiró en la observación de que los hexágonos son la forma geométrica que permite el empaquetamiento más denso de círculos en un plano, lo que sugiere una mayor eficiencia en la cobertura del espacio en comparación con una grilla cuadrada tradicional.

Fundamento Teórico

En un espacio bidimensional, los puntos de muestreo se generan en los vértices y centros de hexágonos regulares que cubren el área de interés. Cada hexágono está definido por sus coordenadas axiales (q, r) , que pueden ser convertidas a coordenadas cartesianas (x, y) utilizando las siguientes fórmulas:

$$x = width \cdot (q \cdot 1,5) \quad (4.2)$$

$$y = height \cdot (r \cdot 2 + q) \quad (4.3)$$

donde *width* y *height* son el ancho y alto del hexágono, respectivamente.

Para generar una grilla hexagonal, se parte de un hexágono inicial y se generan iterativamente sus vecinos en todas las direcciones. Los vecinos de un hexágono con coordenadas (q, r) se pueden obtener añadiendo los siguientes desplazamientos:

$$(1, 0), (1, -1), (0, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 1) \quad (4.4)$$

Este proceso se repite hasta que se cubre el área de interés o se alcanza un número máximo de puntos de muestreo.

Ventajas y Desventajas

Las principales ventajas del muestreo basado en hexágonos son:

- **Uniformidad:** Proporciona una cobertura uniforme del espacio de búsqueda.
- **Eficiencia:** Es más eficiente que una grilla cuadrada en términos de la densidad de puntos de muestreo.
- **Estructura regular:** La estructura regular de la grilla hexagonal puede ser ventajosa para ciertos algoritmos de optimización o análisis.

Sin embargo, este método también tiene algunas desventajas:

- **Complejidad de implementación:** La generación de la grilla hexagonal y la gestión de los vecinos puede ser más compleja que en una grilla cuadrada.

- **Limitado a dos dimensiones:** La extensión a dimensiones superiores no es trivial y puede no ser tan eficiente como en el caso bidimensional.
- **Bordes irregulares:** La cobertura del espacio de búsqueda puede ser irregular en los bordes, dependiendo de la forma del área de interés.

Aplicabilidad al Problema de Optimización de la Trayectoria de Ascenso

El muestreo basado en hexágonos se utilizó en las etapas iniciales de este trabajo para explorar el espacio de existencia de la función en dos dimensiones (por ejemplo, velocidad y ángulo de ascenso). Proporcionó una buena visualización de la función objetivo y permitió identificar regiones promisorias para la optimización. Sin embargo, su aplicabilidad a dimensiones superiores es limitada, y su complejidad de implementación motivó la exploración de otros métodos de muestreo más versátiles.

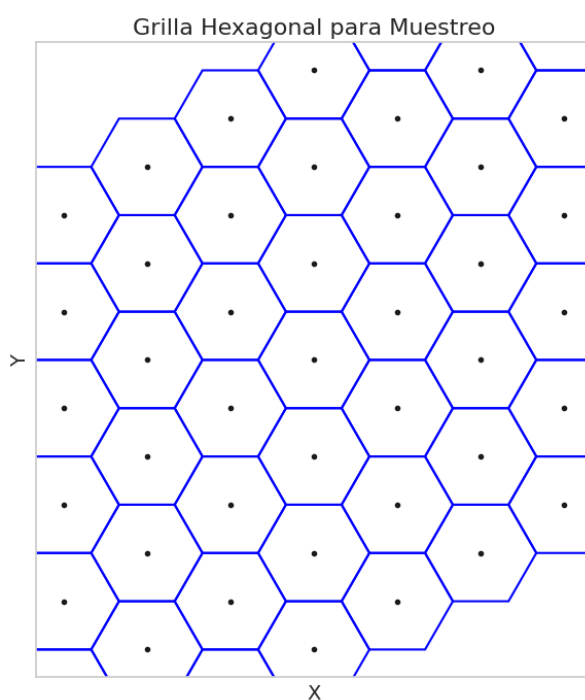


Figura 4.4: Grilla hexagonal utilizada para el muestreo basado en hexágonos.

Muestreo Aleatorio con Perturbaciones Gaussianas

El muestreo aleatorio con perturbaciones gaussianas es un método estocástico que genera nuevos puntos de muestreo a partir de un punto existente, añadiendo perturbaciones aleatorias que siguen una distribución normal (gaussiana).

Fundamento Teórico

Dado un punto x en un espacio n -dimensional, se genera un nuevo punto x' mediante la siguiente fórmula:

$$x' = x + \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (4.5)$$

donde $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ representa una distribución normal con media μ y varianza σ^2 . Generalmente, se utiliza una media de cero ($\mu = 0$) y una desviación estándar σ que controla la magnitud de las perturbaciones.

El proceso de generación de nuevos puntos se puede repetir múltiples veces, partiendo de un punto inicial o de un conjunto de puntos previamente muestreados. Además, se pueden introducir criterios de aceptación o rechazo de los nuevos puntos basados en el valor de la función objetivo o en restricciones del problema.

Ventajas y Desventajas

Las principales ventajas del muestreo aleatorio con perturbaciones gaussianas son:

- **Simplicidad:** Es un método muy simple de implementar y entender.
- **Flexibilidad:** Se puede adaptar fácilmente a diferentes espacios de búsqueda y restricciones.
- **Eficiencia computacional:** La generación de nuevos puntos es computacionalmente económica.

Sin embargo, este método también tiene algunas desventajas:

- **No uniformidad:** El muestreo no es uniforme y puede resultar en una cobertura desigual del espacio de búsqueda.
- **Dependencia del punto inicial:** La exploración puede estar sesgada hacia la región donde se encuentra el punto inicial.
- **Dificultad para escapar de mínimos locales:** Si la desviación estándar de las perturbaciones es pequeña, el método puede tener dificultades para escapar de mínimos locales.

Aplicabilidad al Problema de Optimización de la Trayectoria de Ascenso

El muestreo aleatorio con perturbaciones gaussianas se utilizó en este trabajo como una forma rápida de generar puntos de prueba alrededor de soluciones prometedoras. Su simplicidad y eficiencia computacional lo hacen adecuado para una exploración inicial. Sin embargo, su falta de uniformidad y su dependencia del punto inicial limitan su efectividad como método principal de muestreo, especialmente para la aproximación de la función objetivo en altas dimensiones.

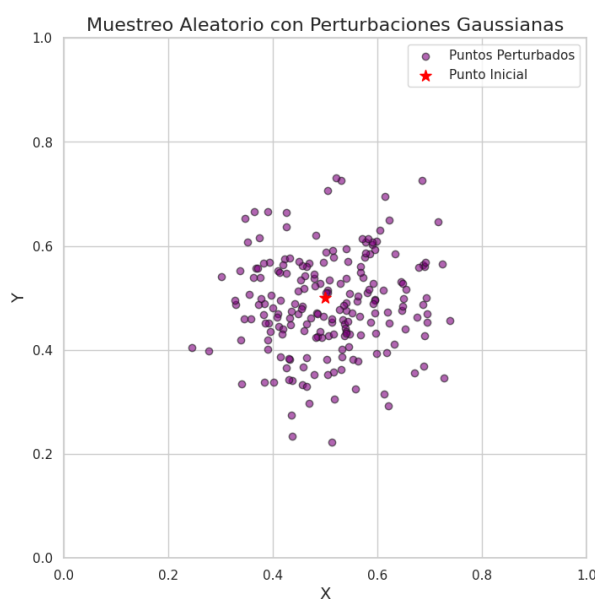


Figura 4.5: Muestreo aleatorio con perturbaciones gaussianas alrededor de un punto inicial.

Búsqueda de Puntos Adyacentes

La búsqueda de puntos adyacentes es un método iterativo que explora el espacio de soluciones generando y evaluando puntos vecinos a un conjunto de puntos previamente seleccionados. Este método se basa en la idea de que los puntos cercanos a una solución válida tienen una mayor probabilidad de ser también soluciones válidas o de proporcionar información útil sobre la función objetivo.

Fundamento Teórico

El algoritmo de búsqueda de puntos adyacentes se puede describir de la siguiente manera:

1. Se parte de un conjunto inicial de puntos, que pueden ser generados aleatoriamente o mediante algún otro método de muestreo.
2. Para cada punto en el conjunto actual, se generan sus vecinos. Los vecinos se definen como aquellos puntos que se encuentran a una cierta distancia del punto original, generalmente a lo largo de las direcciones de los ejes coordenados.
3. Se evalúa la función objetivo en cada uno de los puntos vecinos generados.
4. Los puntos vecinos que cumplen con los criterios de aceptación (por ejemplo, que el valor de la función objetivo esté dentro de un rango determinado o que satisfagan las restricciones del problema) se añaden a un nuevo conjunto de puntos.
5. Se repiten los pasos 2-4 utilizando el nuevo conjunto de puntos como punto de partida, hasta que se alcanza un número máximo de iteraciones o se cumple algún otro criterio de parada.

En este trabajo, se introdujeron dos parámetros adicionales para controlar la búsqueda:

- **mp (Preferencia Marginal):** Controla la preferencia por explorar puntos vecinos de aquellos puntos que han sido previamente rechazados. Un valor de $mp = 0$ indica que no hay preferencia, mientras que un valor de $mp = 1$ indica una preferencia absoluta por los vecinos de puntos rechazados. Valores intermedios de mp permiten un balance entre la exploración de nuevas regiones y la explotación de regiones cercanas a puntos rechazados.
- **mr (Preferencia de Radio):** Controla la preferencia por explorar puntos más alejados de un punto de referencia. Un valor de $mr = 0$ indica que no hay preferencia, mientras que un valor de $mr = 1$ indica una preferencia absoluta por los puntos más alejados. Valores intermedios de mr permiten un balance entre la exploración local y la exploración global.

Ventajas y Desventajas

Las principales ventajas de la búsqueda de puntos adyacentes son:

- **Simplicidad:** Es un método conceptualmente simple y fácil de implementar.

- **Adaptabilidad:** Se puede adaptar a diferentes espacios de búsqueda y restricciones mediante la definición adecuada de la vecindad y los criterios de aceptación.
- **Control sobre la exploración:** Los parámetros mp y mr permiten controlar el balance entre la exploración local y global.

Sin embargo, este método también tiene algunas desventajas:

- **Costo computacional:** El número de vecinos a evaluar puede crecer exponencialmente con la dimensión del espacio de búsqueda.
- **Dependencia de la definición de vecindad:** La eficiencia y efectividad del método pueden depender fuertemente de la definición de la vecindad y de los parámetros mp y mr .
- **Limitaciones en la cobertura:** A pesar de la introducción de los parámetros mp y mr , el método puede tener dificultades para cubrir uniformemente todo el espacio de búsqueda, especialmente en altas dimensiones.

Aplicabilidad al Problema de Optimización de la Trayectoria de Ascenso

La búsqueda de puntos adyacentes se utilizó en este trabajo como un método para generar un conjunto de puntos válidos para la aproximación de la función objetivo. Su simplicidad y adaptabilidad permitieron explorar eficientemente el espacio de soluciones en torno a puntos iniciales prometedores. Los parámetros mp y mr se ajustaron para equilibrar la exploración local y global, y se encontró que una combinación de valores extremos ($mp = 0, mr = 0$ y $mp = 1, mr = 1$) producía los mejores resultados en términos de cobertura y eficiencia.

Sin embargo, el costo computacional de generar y evaluar todos los vecinos se volvió prohibitivo al aumentar la dimensionalidad del problema. Para $N=53$, el número de vecinos a evaluar en cada iteración sería del orden de 3^{104} , lo que hace que el método sea inviable para este caso.

Muestreo basado en secuencias de Sobol

El muestreo basado en secuencias de Sobol es un método cuasi-aleatorio que genera puntos de muestreo de baja discrepancia, lo que significa que están distribuidos de manera más

uniforme en el espacio de búsqueda en comparación con un muestreo aleatorio simple. Las secuencias de Sobol son un tipo específico de secuencias de baja discrepancia que se construyen utilizando una base de 2 y permutaciones cuidadosamente elegidas de los bits de los enteros.

Fundamento Teórico

Las secuencias de Sobol se basan en la idea de generar una secuencia de puntos en un hipercubo unitario $[0, 1]^d$ de tal manera que la discrepancia entre la distribución empírica de los puntos y la distribución uniforme sea lo más baja posible. La discrepancia es una medida de la uniformidad de una distribución de puntos y se define como la máxima diferencia absoluta entre el volumen de una región rectangular y la fracción de puntos que caen en esa región.

La construcción de las secuencias de Sobol se realiza de forma recursiva, utilizando una serie de números de dirección v_i que se generan a partir de polinomios primitivos sobre el cuerpo finito \mathbb{F}_2 . Para generar el i -ésimo punto x_i en una secuencia de Sobol de dimensión d , se utiliza la siguiente fórmula:

$$x_i = i_1 v_1 \oplus i_2 v_2 \oplus \cdots \oplus i_k v_k \quad (4.6)$$

donde i_j son los bits de la representación binaria del entero i , \oplus es la operación XOR bit a bit, y k es el número de bits necesarios para representar i .

Los números de dirección v_i se calculan a partir de los coeficientes de un polinomio primitivo $p(x)$ de grado s sobre \mathbb{F}_2 :

$$p(x) = x^s + a_1 x^{s-1} + \cdots + a_{s-1} x + 1 \quad (4.7)$$

donde $a_i \in \{0, 1\}$. Los primeros s números de dirección se eligen arbitrariamente, y los siguientes se calculan recursivamente utilizando la relación:

$$v_i = a_1 v_{i-1} \oplus a_2 v_{i-2} \oplus \cdots \oplus a_{s-1} v_{i-s+1} \oplus v_{i-s} \oplus \frac{v_{i-s}}{2^s} \quad (4.8)$$

para $i > s$.

Ventajas y Desventajas

Las principales ventajas del muestreo basado en secuencias de Sobol son:

- **Baja discrepancia:** Las secuencias de Sobol tienen una discrepancia muy baja, lo que significa que los puntos de muestreo están distribuidos de manera muy uniforme en el espacio de búsqueda.
- **Eficiencia:** Son computacionalmente eficientes de generar, especialmente en comparación con otros métodos de muestreo de baja discrepancia.
- **Determinismo:** Son secuencias deterministas, lo que significa que la misma secuencia se generará siempre que se utilice la misma semilla. Esto facilita la reproducibilidad de los resultados.

Desventaja

- **Limitaciones en altas dimensiones:** En comparación con los otros métodos estudiados no encontramos desventajas aparte de la limitación computacional a alta dimensiones, pero esto sería independiente del método.

Aplicabilidad al Problema de Optimización de la Trayectoria de Ascenso

El muestreo basado en secuencias de Sobol se utilizó en este trabajo como el método principal para generar puntos de muestreo para la aproximación de la función objetivo en altas dimensiones ($N=53$). Su baja discrepancia y eficiencia computacional lo hacen adecuado para generar un gran número de puntos distribuidos uniformemente en el espacio de búsqueda.

Para el problema de la trayectoria de ascenso, se utilizó una implementación de las secuencias de Sobol disponible en la biblioteca 'scipy.stats.qmc'. Los puntos generados se escalaron y desplazaron para ajustarse a los rangos de las variables del problema. Además, se implementó un mecanismo de expansión iterativa del espacio de búsqueda para mejorar la cobertura y adaptarse a la forma de la función objetivo.

Los resultados experimentales mostraron que el muestreo basado en secuencias de Sobol permitió generar un conjunto de puntos válidos de alta calidad para la aproximación de la función objetivo, incluso en el caso de alta dimensionalidad ($N=53$). La uniformidad

del muestreo y la eficiencia del algoritmo permitieron obtener una buena representación de la función objetivo con un número relativamente pequeño de puntos.

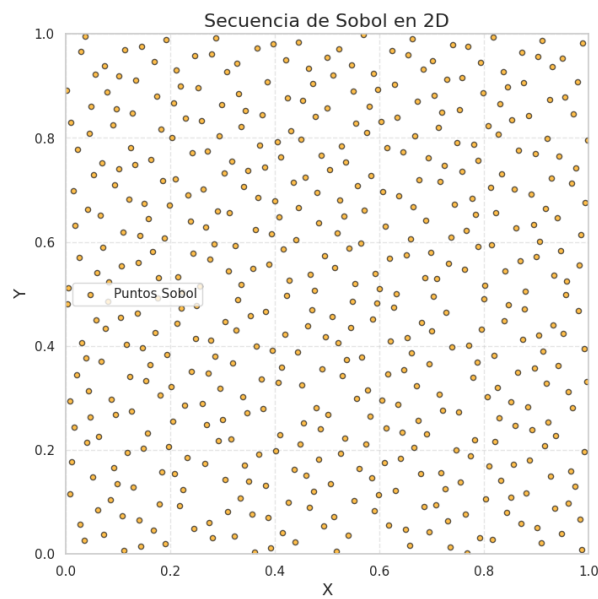


Figura 4.6: Distribución de puntos generados mediante secuencias de Sobol en un espacio bidimensional.

Capítulo 5

Optimización cuántica

El campo emergente de la computación cuántica promete revolucionar la forma en que abordamos problemas computacionales complejos. Un área de particular interés es la optimización, donde los algoritmos cuánticos podrían ofrecer ventajas significativas sobre los métodos clásicos. Este capítulo explora el fundamento teórico de la optimización cuántica, examinando los principios subyacentes, algoritmos clave y potenciales aplicaciones.

5.1. Principios Básicos de Computación Cuántica

Antes de adentrarnos en la optimización, es crucial comprender los conceptos fundamentales de la computación cuántica. A diferencia de los bits clásicos, que representan 0 o 1, los qubits (bits cuánticos) pueden existir en una superposición de ambos estados simultáneamente. Esta propiedad, junto con otros fenómenos cuánticos como el entrelazamiento y la interferencia, permite a las computadoras cuánticas realizar cálculos que son inalcanzables para las computadoras clásicas.

Superposición

Un qubit puede representarse matemáticamente como una combinación lineal de los estados base $|0\rangle$ y $|1\rangle$:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

donde α y β son amplitudes de probabilidad complejas que satisfacen $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. La superposición permite explorar múltiples posibilidades simultáneamente, lo que

constituye la base para muchos algoritmos cuánticos.

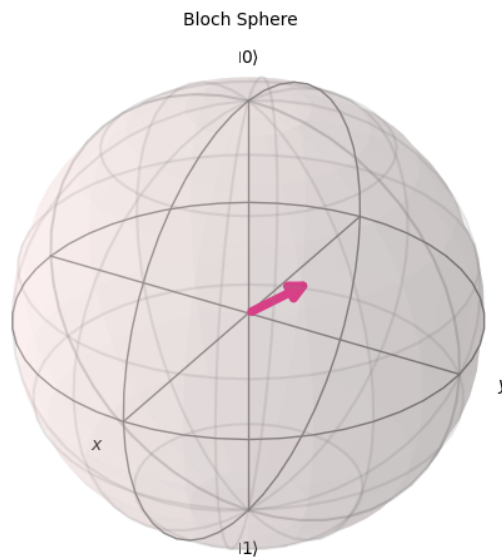


Figura 5.1: Representación de un qubit en la esfera de Bloch.

Como se describe en el libro de Sakurai [?], la esfera de Bloch es una representación geométrica útil para visualizar el estado de un qubit.

Entrelazamiento

El entrelazamiento es un fenómeno cuántico en el que dos o más qubits se correlacionan de tal forma que sus estados están intrínsecamente ligados, incluso si están separados por grandes distancias. Esta propiedad permite realizar operaciones conjuntas sobre múltiples qubits, aumentando la capacidad de procesamiento. Un ejemplo de estado entrelazado es el estado de Bell:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Puertas Cuánticas

Las operaciones en computación cuántica se realizan mediante puertas cuánticas, que son análogas a las puertas lógicas en la computación clásica. Estas puertas manipulan los estados de los qubits y permiten implementar algoritmos cuánticos. Ejemplos de puertas cuánticas incluyen la puerta Hadamard, que crea superposiciones, y la puerta CNOT, que genera entrelazamiento.

La puerta Hadamard (H) transforma los estados base de la siguiente manera:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

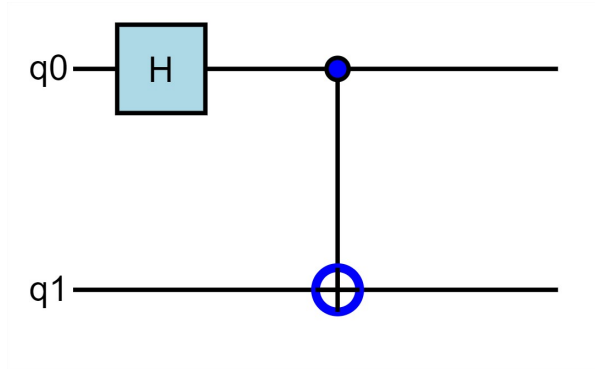


Figura 5.2: Circuito cuántico que ilustra la aplicación de una puerta Hadamard seguida de una puerta CNOT.

5.2. Algoritmos Cuánticos para Optimización

Diversos algoritmos cuánticos han sido propuestos para abordar problemas de optimización. Estos algoritmos aprovechan las propiedades únicas de la mecánica cuántica para potencialmente superar a los algoritmos clásicos en términos de eficiencia y velocidad.

Algoritmo Variacional Cuántico (VQE)

El Algoritmo Variacional Cuántico (VQE, por sus siglas en inglés) es un algoritmo híbrido cuántico-clásico diseñado para encontrar el estado fundamental de un sistema cuántico. Es ampliamente considerado como un candidato prometedor para resolver problemas de optimización. VQE opera en los siguientes pasos:

1. **Preparación de un estado prueba:** Un circuito cuántico parametrizado prepara un estado cuántico $|\psi(\theta)\rangle$, donde θ representa un conjunto de parámetros ajustables.
2. **Medición de la energía:** Se mide el valor esperado de la energía del sistema en el estado $|\psi(\theta)\rangle$.

$$\langle H \rangle = \langle \psi(\theta) | H | \psi(\theta) \rangle$$

donde H es el Hamiltoniano del sistema.

3. Optimización clásica: Un algoritmo de optimización clásico se utiliza para ajustar los parámetros θ con el objetivo de minimizar la energía.

Estos pasos se repiten iterativamente hasta que se alcanza la convergencia, produciendo una aproximación al estado fundamental y su energía asociada. La función objetivo del problema de optimización se codifica en el Hamiltoniano del sistema cuántico. VQE tiene aplicaciones en química cuántica, ciencia de materiales y optimización combinatoria.

Referencia: [?]

Recocido Cuántico (Quantum Annealing)

El Recocido Cuántico es un método de optimización que utiliza fluctuaciones cuánticas para explorar el espacio de soluciones y encontrar el mínimo global de una función objetivo. Se inspira en el proceso de recocido en metalurgia, donde un material se calienta y luego se enfría lentamente para alcanzar un estado de baja energía.

En el recocido cuántico, el problema de optimización se mapea a un Hamiltoniano de Ising, que describe un sistema de espines interactuantes:

$$H = \sum_i h_i \sigma_i^z + \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z$$

donde h_i representa el campo magnético local en el espín i , J_{ij} es la interacción entre los espines i y j , y σ_i^z es la matriz de Pauli Z actuando sobre el espín i . El sistema se inicializa en un estado de superposición y luego se somete a un campo magnético transversal que disminuye gradualmente. Durante este proceso, el sistema evoluciona adiabáticamente hacia el estado fundamental del Hamiltoniano de Ising, que corresponde a la solución óptima del problema.

Referencia: [?]

Algoritmo de Optimización Aproximada Cuántica (QAOA)

El Algoritmo de Optimización Aproximada Cuántica (QAOA) es otro algoritmo híbrido cuántico-clásico diseñado para resolver problemas de optimización combinatoria. QAOA emplea una secuencia de p capas unitarias parametrizadas, alternando entre operadores que codifican la función costo y operadores de mezcla que permiten la exploración del espacio de soluciones.

La función costo suele estar representada por un Hamiltoniano diagonal H_C , y el operador

de mezcla por un Hamiltoniano transversal $H_B = \sum_i \sigma_i^x$, donde σ_i^x es la matriz de Pauli X actuando sobre el qubit i .

El estado cuántico en QAOA se prepara aplicando alternadamente p veces las evoluciones unitarias generadas por H_C y H_B :

$$|\psi(\gamma, \beta)\rangle = U(H_B, \beta_p)U(H_C, \gamma_p) \cdots U(H_B, \beta_1)U(H_C, \gamma_1)|s\rangle$$

donde $|s\rangle$ es un estado inicial, típicamente una superposición uniforme de todos los estados posibles, y $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ son parámetros que se optimizan clásicamente para minimizar el valor esperado de la función costo:

$$F_p(\gamma, \beta) = \langle \psi(\gamma, \beta) | H_C | \psi(\gamma, \beta) \rangle$$

Cada capa i está compuesta por dos operadores unitarios:

* $U(H_C, \gamma_i) = e^{-i\gamma_i H_C}$: Evolución bajo el Hamiltoniano de costo H_C durante un tiempo γ_i .
 * $U(H_B, \beta_i) = e^{-i\beta_i H_B}$: Evolución bajo el Hamiltoniano de mezcla H_B durante un tiempo β_i .

El objetivo es encontrar los parámetros γ y β que minimizan el valor esperado de H_C en el estado $|\psi(\gamma, \beta)\rangle$. La optimización de estos parámetros se realiza mediante un algoritmo clásico, mientras que la evaluación de $F_p(\gamma, \beta)$ se realiza en un computador cuántico.

Modelo de Ising y QUBO

Muchos problemas de optimización combinatoria pueden formularse como un problema de **Optimización Cuadrática Binaria sin Restricciones (QUBO)**. En un problema QUBO, se busca minimizar una función objetivo cuadrática de variables binarias $x_i \in \{0, 1\}$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Q_{ij} x_i x_j$$

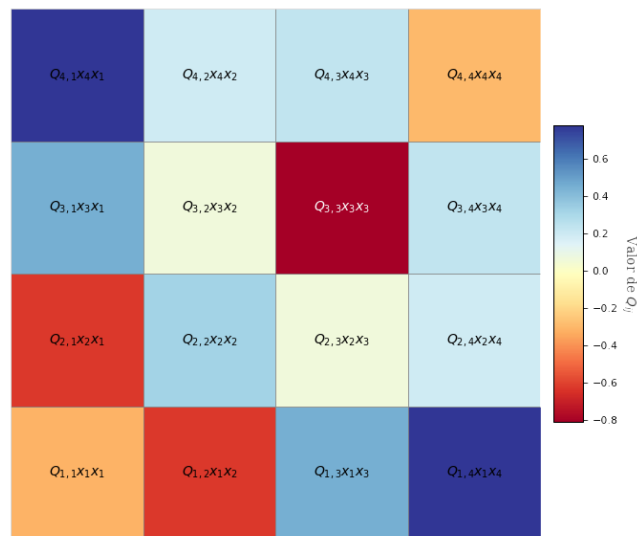
donde Q es una matriz de coeficientes reales.

El modelo de Ising, que describe un sistema de espines interactuantes, está estrechamente relacionado con QUBO. De hecho, cualquier problema QUBO puede mapearse a un problema de Ising y viceversa. La relación entre las variables binarias x_i de QUBO y las variables de espín $s_i \in \{-1, 1\}$ del modelo de Ising es:

$$s_i = 2x_i - 1$$

Esta relación permite utilizar algoritmos como QAOA para resolver problemas formulados como QUBO, aprovechando la capacidad del algoritmo para encontrar el estado fundamental de un Hamiltoniano de Ising.

Referencias: [?, ?]



Optimización Cuadrática Binaria sin Restricciones (QUBO)

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Q_{ij}x_ix_j$$

Figura 5.3: Función objetivo de un problema de Optimización Cuadrática Binaria sin Restricciones (QUBO). Donde x_i y x_j son variables binarias (0 o 1), y Q_{ij} son los coeficientes de una matriz simétrica que define las interacciones entre las variables. Cada cuadrado en la imagen representa un término cuadrático $Q_{ij}x_ix_j$ de la función objetivo. El color de cada cuadrado indica el valor del coeficiente Q .

5.3. Aplicacion

La optimización cuántica tiene el potencial de impactar significativamente en una amplia gama de áreas, incluyendo:

- **Finanzas:** Optimización de carteras, gestión de riesgos, detección de fraude. Referencia: [?]

- **Logística:** Optimización de rutas, gestión de inventarios, planificación de la cadena de suministro. Referencia: [?]
- **Aprendizaje Automático:** Entrenamiento de redes neuronales, selección de características, agrupamiento de datos. Referencia: [?]
- **Descubrimiento de Fármacos:** Diseño de moléculas, predicción de propiedades químicas, optimización de síntesis. Referencia: [?]
- **Ciencia de Materiales:** Diseño de nuevos materiales, simulación de propiedades materiales, optimización de procesos de fabricación. Referencia: [?]

Desafíos y Perspectivas Futuras

A pesar del enorme potencial, la optimización cuántica enfrenta varios desafíos. La construcción de computadoras cuánticas tolerantes a fallos es una tarea tecnológicamente compleja. Además, el desarrollo de algoritmos cuánticos eficientes y escalables requiere investigación continua.

El hardware cuántico actual es limitado en términos de tamaño y conectividad, además los algoritmos cuánticos como VQE y QAOA pueden verse afectados aumentando error por el hardware ruidoso.

No obstante, el campo de la computación cuántica está experimentando un rápido progreso. Se espera que las disponibilidades con hardware cuántico mejorado y el desarrollo de nuevos algoritmos impulsen avances significativos en la optimización cuántica en los próximos años.

Capítulo 6

Optimización de la trayectoria del Aibus A320 (En proceso)

- 6.1. Formulación y Reducción del Modelo de Ascenso
- 6.2. Muestreo del Espacio de existencia y Ajuste de la Función Objetivo
- 6.3. Optimización y Análisis

Bibliografía

- [1] Ejemplo Albert Einstein. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der Physik*, 322(10):891–921, 1905.

Apéndices

.1. Apéndice A: Código de ϕ

```
# Código de ejemplo
def funcion_ejemplo():
    print("Hola Mundoo")
```

.2. Apéndice B: Datos Adicionales

Maecenas non massa. Vestibulum pharetra nulla at lorem. Duis quis quam id lacus dapibus interdum. Nulla lorem. Donec ut ante quis dolor bibendum condimentum. Etiam egestas tortor vitae lacus. Praesent cursus. Mauris bibendum pede at elit. Morbi et felis a lectus interdum facilisis. Sed suscipit gravida turpis. Nulla at lectus. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Praesent nonummy luctus nibh. Proin turpis nunc, congue eu, egestas ut, fringilla at, tellus. In hac habitasse platea dictumst.