

Preguntas para el análisis de población universitaria

Ejercicio introductorio

Una universidad desea analizar la evolución de su población estudiantil a lo largo del tiempo. Sabe que cada año ingresan nuevos estudiantes, pero también ocurre un fenómeno de deserción que depende del tamaño actual de la población. En algunos casos, los estudiantes se gradúan después de un periodo fijo, y en otros, los ingresos no logran compensar la salida de estudiantes. Se desea modelar esta dinámica usando ecuaciones diferenciales y explorar diversos escenarios para prever el comportamiento de la población en el futuro. A partir de este contexto, resuelva las siguientes preguntas.

Parte técnica común 1.

- encuentre la solución analítica de la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2$$

- ¿Qué representa el equilibrio poblacional? ¿Se alcanza un valor estable?
- ¿Cómo se comporta la solución cuando $t \rightarrow \infty$?
- ¿La solución simbólica coincide con el comportamiento gráfico?
- ¿Cómo afecta el valor de a o b al crecimiento o decrecimiento poblacional?

Escenario 1: Ingresos y deserción

- ¿Cuál es el comportamiento para diferentes condiciones iniciales $x(0)$?
- ¿En qué tiempo se estabiliza la población?
- ¿Qué ocurre si duplicamos el valor de a ?
- ¿Qué poblaciones iniciales tienden al mismo equilibrio?

Escenario 2: Ingresos constantes y graduación a los 5 años

Explicación para el cálculo de la función por tramos (Escenario 2)

En este escenario, los estudiantes ingresan a razón constante de r estudiantes por año y permanecen en la universidad exactamente 5 años. Supondremos que la población acumulada crece linealmente hasta que los primeros estudiantes comienzan a graduarse. Podemos modelar esta situación con una función por tramos:

$$x(t) = \begin{cases} r \cdot t, & 0 \leq t < 5 \\ 5r, & t \geq 5 \end{cases}$$

Esto significa que:

- Durante los primeros 5 años, nadie se gradúa, por lo que la población crece linealmente.
- A partir del quinto año, cada año se gradúa la misma cantidad que ingresa, manteniendo una población constante.
- ¿Qué función representa el crecimiento por tramos?
- ¿Qué ocurre si el valor de ingreso anual r cambia?
- ¿Cuándo alcanza la población su valor máximo?
- ¿Qué pasa si no hay graduación (retención infinita)?

Escenario 3: Ingresos menores que deserción

- ¿Qué valor límite tiene la población si $a < 0$?
- ¿Cómo varía el tiempo de desaparición según $x(0)$?
- ¿Puede mantenerse alguna población en equilibrio?
- ¿Qué políticas se podrían proponer para revertir el descenso?