Marlon Sousa

Derivação da Equação de Einstein E=mc²

Marlon Sousa Sep 17, 2020 · 7 min read

Na física clássica, sabemos que uma partícula m movendo-se com velocidade v tem um momento p=mv e uma energia cinética.

$$T = \frac{m_0 v^2}{2}$$

Na física relativística, o momento e a massa relativística de uma partícula são:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{\quad}} = mv\,, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{\quad}} = \gamma m_0$$

Considerando que sua energia cinética é:

$$T = mc^2 - m_0 c^2$$

Como vemos, m0 representa a massa restante. Este m0 é responsável por a inércia da partícula no momento em que começa sua aceleração de um estado de repouso. Os relativistas também introduzem o conceito de descanso da energia E = mc².

$$E = T + E_0 = mc^2 .$$

Derivação da equação de Einstein — Força de Lorentz

Uma única partícula se move ao longo de uma determinada direção. As expressões relativísticas podem então ser derivadas a partir da relatividade e o princípio e a lei de Lorentz clássica.

$$F = q(E + v \times B)$$

Agora vamos supor que uma partícula carregada q movendo-se com velocidade v no quadro s, sujeito a um campo elétrico E e um fluxo magnético de densidade B, então os componentes cartesianos no quadro S são:

$$F_x = q(E_x + v_y B_z - v_z B_y)$$

$$F_y = q(E_y + v_z B_x - v_x B_z)$$

$$F_z = q(E_z + v_x B_y - v_y B_x)$$

$$F'_y = q(E'_y + v'_z B'_x - v'_x B'_z)$$

$$F'_z = q(E'_z + v'_x B'_y - v'_y B'_x)$$

Podemos obter a equação de transformação relativística para velocidade:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \text{(a)}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} \text{(b)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2} v_x\right)} \text{(c)}$$

Onde o fator escalar foi fixado pela aplicação da relatividade:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Isso nos permite construir as seguintes identidades relativísticas:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{(a)},$$

$$\frac{v'_x}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{v_x - u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (b)$$

$$\frac{v'_y}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{c}), \quad \frac{v'_z}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{d})$$

Combinado com todas as equações

$$p_x = mv_x \quad (a), \quad p_y = mv_y \quad (b), p_z = mv_z \quad (c)$$

Visto de S' o momento é p'=mv' tendo como componente:

$$p'_x = m'v'_x \quad (a), \quad p'_y = m'v'_y \quad (b), \quad p'_z = m'v'_z \quad (c)$$

Combinando:

$$\frac{p'_x}{m'} = \frac{p_x - um}{m(1-\frac{uv_x}{c^2})},$$

Então obtemos:

Onde k representa uma constante desconhecida e este fator escalar k pode ser corrigido aplicando o princípio da relatividade.

$$\frac{p_x}{m} = \frac{p'_x + um'}{m'(1 + \frac{uv'_x}{c^2})}$$

Logo

$$p_x = k(p'_x + um') \quad (a), \qquad m = m'k(1 + \frac{uv'_x}{c^2})$$

Obtemos:

$$1 = k^2(1 - \frac{uv_x}{c^2})(1 + \frac{uv'_x}{c^2})$$

E como vimos na equação de identidades relativísticas:

$$k^2(1 - \frac{u^2}{c^2}) = 1$$

$$k = \gamma = \frac{1}{\sqrt{\ldots u^2}}$$

A constante k é igual ao fator escalar na equação. Para simplificar, considere o caso especial em que a partícula carregada está em descansar:

$$v_x = 0, \quad v'_x = -u$$

Substituindo temos:

$$m' = \gamma m_0$$

Agora podemos assumir que a partícula carregada está em repouso no quadro S', então:

$$v'_x = 0 \quad , \qquad v_x = u$$

Substituindo novamente obtemos:

$$m = \gamma m_0$$

Combinando as equações obtemos:

$$p'_y = m'v'_y = mv_y = p_y$$

E de forma semelhante, obtemos:

$$p'_z = m'v'_z = mv_z = p_z$$

$$m' = \gamma m(1 - \frac{uv_x}{c^2}) \quad , \quad p'_x = \gamma\left(p_x - um\right)$$

$$p'_y = p_y \ , \quad p'_z = p_z$$

A massa relativística em ambos os quadros:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ , \ m' = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$$

Multiplicando ambos os lados obtemos:

$$\gamma^2 - \frac{u^2}{c^2}\gamma^2 = 1 \, ,$$

Agora multiplicamos ambos os lados por m02c4 obtemos:

$$c^4\gamma^2 m_0^2 - c^2\gamma^2 m_0^2 u^2 = m_0^2 c^4$$

O termo:

$$p^2 = \gamma^2 m_0^2 u^2 = m^2 v^2 \ , \qquad u = v$$

$$E = m_0 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \gamma m_0 c^2$$

$$= mc^2$$

Isso refere-se a energia relativística. A massa de uma partícula é acompanhada por uma mudança de sua energia.

Reescrevendo a equação podemos obter:

$$E^2 = c^2 p^2 + m_o^2 c^4$$

Multiplicando os dois lados por c2 nós obtemos a equação para transformação da energia e do momento.

$$E' = \gamma(E - up_x), \quad p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{u}{c^2} E\right)$$

Derivação da equação de Einstein usando a segunda lei de Newton.

A energia relativística de uma única partícula massiva contém um termo relacionado à sua massa de repouso em além de sua energia cinética de movimento.

No limite da energia cinética zero ou de forma equivalente no quadro de repouso da partícula massiva, a energia está relacionada com sua massa de repouso através da famosa equação de einstein: E=mc2.

Como foi falado, a força de Lorentz e a relatividade, são mais naturais para descrever a física da relativística eletrodinâmica.

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{Fv} \text{ (b)}$$

Além disso, podemos obter resultados utilizando Mecânica Clássica.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{Fv}$$

Vamos considerar dois sistemas inerciais S e S' com velocidade relativa. Considere uma partícula que tem o momento p=mv.

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x \text{ (a)}$$

$$\frac{dp_y}{dt} = F_y$$

$$\frac{dp_z}{dt} = F_z$$

$$\frac{dE}{dt} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$$

Aplicando o princípio da relatividade obtemos:

$$\frac{dp'_x}{dt'} = F'_x \quad \frac{dp'_y}{dt'} = F'_y \quad \frac{dp'_z}{dt'} = F'_z$$

e

$$\frac{dE'}{dt'} = F'_x v'_x + F'_y v'_y + F'_z v'_z$$

Podemos transformar a equação de transformação relativística para momento, energia e velocidade:

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{u}{c^2}E\right)\text{(a)},\ p'_y = p_y\ \text{(b)},\ p'_z = p_z$$

$$E' = \gamma(E - up_x)\,\text{(d)}$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$\gamma\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)}$$

Podemos escrever como:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{(1-\frac{uv_x}{c^2})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m' = \gamma m(1-\frac{uv_x}{c^2})$$

Multiplicando por m0, deduzimos:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Open in app

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$$

A energia total é dada por:

$$\begin{aligned} dE = Fvdt &= d\left(mv\right)v \\ &= v^2 dm + mvdv \end{aligned}$$

E podemos obter:

$$dm = \frac{mvdv}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$m\,v\,dv = c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)dm$$

Substituindo podemos obter:

$$dE = c^2 dm$$

E por integração de v1 para v2 podemos deduzir:

Quando v1=0 e v2=v então E pode ser igual a energia cinética T.

$$T = mc^2 \Big|_1^2 = mc^2 - m_0 c^2$$

Assim mc² e m'c² são a energia total E e E' em quadros E e E' em quadros S e S', respectivamente. Podemos provar a equação:

$$E'^2 - c^2(p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2) = E^2 - c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = m_0^2 c^4$$

ou

$$E^2 = c^2 \boldsymbol{P}^2 + m_0{}^2 c^4 = m^2 c^4 \quad , \quad E'^2 = c^2 \boldsymbol{P}'^2 + m_0{}^2 c^4 = m'^2 c^4$$

Aqui provei que a fórmula de Einstein E=mc² pode ser alcançado usando leis de conservação.

Conclusão

Aqui vimos que mesmo, partindo das leis clássica podemos reconstruir a teoria da relatividade especial.

Referências

1- Einstein, A. 1905. On the electrodynamics of moving bodies. Ann. Phys. 17:891

2- Einstein, A. 1905. Does the inertia of a body depend on its energy content?, Ann. Phys. 18: 639–641