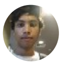
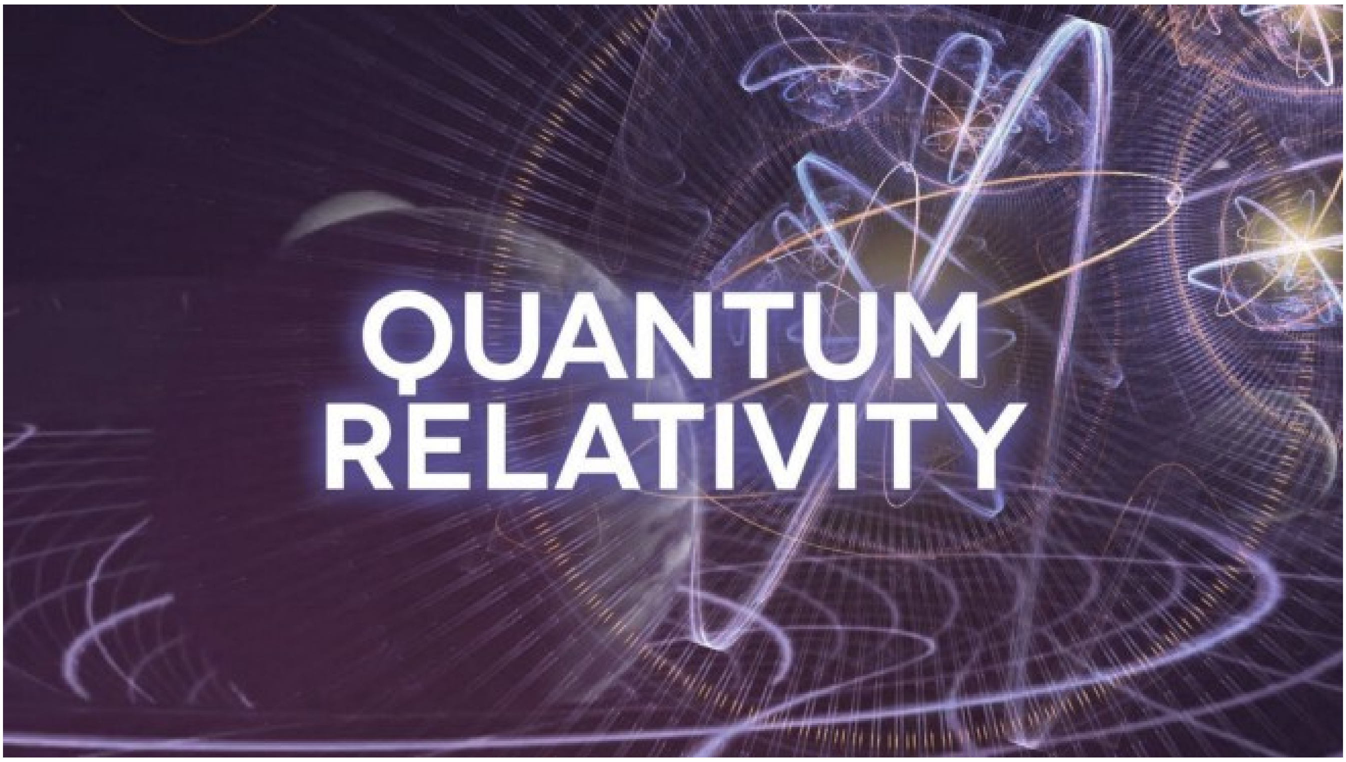
Marlon Sousa

Relatividade Quântica — Quantização do Campo Escalar



Marlon Sousa Oct 28, 2020 · 5 min read

Um campo escalar livre consegue ser descrito pela Lagrangiana



$$L = \int \mathrm{d}^3x \, \mathscr{L}$$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\nabla_i\phi\,\nabla_i\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \ .$$

Com isso em mão vamos quantizar isto, no sentido de desenvolver uma teoria quântica que corresponde à teoria clássica descrito pela lagrangiana acima.

Quantização

Dado um Lagrangiano com número discreto de variáveis dinâmicas q:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Os momentos canônicos seriam então definidos por:

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

e o Hamiltoniano é dado por:

$$H = \sum_i p_i\, \dot{q}_i - L$$

Uma teoria quântica que corresponde a esta teoria clássica poderia então ser construída.

$$[q_i\ ,\ p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$$

O Hamiltoniano H(p, q) é também um operador no espaço de Hilbert. Os estados físicos evoluem de acordo com a equação de Schrödinger.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left|\psi(t)\right\rangle = H \left|\psi(t)\right\rangle$$

O H é independente do tempo

$$\left|\psi(t)\right\rangle = e^{-iHt/\hbar} \left|\psi(0)\right\rangle$$

Dado um valor de operador, seu valor esperado no estado x é então dado por:

$$\left\langle \psi(t) \left| \mathcal{O} \right| \psi(t) \right\rangle = \left\langle \psi(0) \left| e^{iHt/\hbar} \mathcal{O} e^{-iHt/\hbar} \right| \psi(0) \right\rangle$$

Esta equação tem à descrição da imagem de Heisenberg, na qual os estados são tratados como independentes do tempo, e toda a dependência do tempo é incorporada a evolução dos operadores.

$$\mathcal{O}(t) = e^{iHt/\hbar} \mathcal{O} e^{-iHt/\hbar}$$

O em relação a t

Aproximação de Lattice

Para continuarmos, podemos começar quantizando uma rede da versão da teoria anterior. Ou seja, podemos substituir o espaço contínuo por uma rede cúbica de pontos de grade espaçados próximos, com um espaçamento de rede a, e podemos truncar o espaço para uma região finita. O sistema então se reduz com um número discreto de variáveis, exatamente como os sistemas que já sabemos quantizar. Então, se podemos tomar o limite conforme o espaçamento da rede a se aproxima para as teorias que interagem, mas vemos aqui que este programa pode ser realizado facilmente para a teoria do campo livre.

Quando substituímos o espaço contínuo por uma rede finita de pontos, podemos rotular cada "site" de rede com um índice k. Em uma descrição de rede totalmente detalhada, provavelmente rotularíamos cada site de rede com um trio de inteiros que representam as coordenadas x, y e z do local, mas para os propósitos presentes, será suficiente imaginar simplesmente numerar toda a estrutura sites de 1 a N, onde N é o número total de sites. O campo φ (x, t) é então substituído por um conjunto de variáveis dinâmicas φk (t), onde se pode pensar em φk (t) como representando o valor médio de φ (x, t) em um cubo de tamanho a circundando o local da rede k.

$$L = \sum_k \mathfrak{L}_k \, \Delta V$$

Onde

$$\Delta V = a^3$$

e

$$\mathfrak{L}_k = \frac{1}{2}\dot{\phi}_k^2 - \frac{1}{2}\nabla_i\phi_k \, \nabla_i\phi_k - \frac{1}{2}m^2\phi_k^2$$

Aqui, a derivada de rede ∇iφk é definida por

$$\nabla_i\phi_k \equiv \frac{\phi_{k'(k,i)} - \phi_k}{a}$$

Os momentos canônicos são então dados por:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_k} = \frac{\partial \mathfrak{L}_k}{\partial \dot{\phi}_k} \Delta V = \dot{\phi}_k \Delta V$$

Uma vez que os momentos canônicos são proporcionais a ∆V, é natural definir um canônico densidade de momento πk por:

$$\pi_k \equiv \frac{p_k}{\Delta V} = \frac{\partial \mathfrak{L}_k}{\partial \dot{\phi}_k} = \dot{\phi}_k$$

O Hamiltoniano é então:

$$H = \sum_k p_k \dot{\phi}_k - L = \sum_k \left[\pi_k \dot{\phi}_k - \mathfrak{L}_k \right] \Delta V$$

As relações de comutação canônicas tornam-se:

$$[\phi_{k'}\ ,\ \phi_k] = 0\ ,\ \ [p_{k'}\ ,\ p_k] = 0$$

e

$$[\phi_{k'}\ ,\ p_k] = i\hbar\, \delta_{k'k}$$

Nos temos de densidade de momento canônico,

$$[\phi_{k'}\ ,\ \phi_k] = 0\ ,\ \ [\pi_{k'}\ ,\ \pi_k] = 0$$

$$[\phi_{k'}\ ,\ \pi_k] = \frac{i\hbar\ \delta_{k'k}}{\Delta V}$$

O momento canônico do contínuo de densidade torna-se

$$\pi(\vec{x},t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\vec{x},t)} = \dot{\phi}(\vec{x},t)$$

E o Hamiltoniano se torna:

$$H = \int \mathrm{d}^3x\ \left[\pi\dot{\phi} - \mathcal{L}\right]$$

As relações de comutação canônicas triviais são transportadas trivialmente:

$$[\phi(\vec{x}',t)\ ,\ \phi(\vec{x},t)] = 0$$

e

$$[\pi(\vec{x}',t)\ ,\ \pi(\vec{x},t)] = 0$$

Reescreva a última equação como uma soma que se tornará uma integral no limite.

$$\sum_{k\in\mathcal{R}}\ [\phi_{k'}\ ,\ \pi_k]\ \Delta V = i\hbar \sum_{k\in\mathcal{R}}\ \delta_{k',k} = i\hbar$$

No limite contínuo

$$\sum_{k \in \mathcal{R}} [\phi_{k'}\,,\, \pi_k]\; \Delta V$$

Que nada mais é do que uma simples integral

Se aproxima de:

$$\int_{\vec{x} \in \mathcal{R}} \mathrm{d}^3 x\; [\phi(\vec{x}', t)\,,\, \pi(\vec{x}, t)]$$

Então vemos que:

$$\int_{\vec{x} \in \mathcal{R}} \mathrm{d}^3 x\; [\phi(\vec{x}', t)\,,\, \pi(\vec{x}, t)] = i\hbar$$

1 se x pertence aos reais | 0 se outro

Esta relação pode ser expressa de forma mais conveniente, introduzindo a função delta de Dirac δ3(x) que é definida pela integral:

$$\int_{\vec{x} \in \mathcal{R}} \mathrm{d}^3 x\, f(\vec{x})\, \delta(\vec{x} - \vec{x}') \equiv$$

f(x) se x' pertence aos Reais | 0 caso outro

Uma das equações feitas anteriormente pode ser reescrita como:

$$[\phi(\vec{x}', t)\,,\, \pi(\vec{x}, t)] = i\hbar\, \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \delta(\vec{x}' - \vec{x})$$

Referências

Relativistic Quantum Field Theory I, Spring 2008 — MIT
https://www.mit.edu/

Selected Solutions of Einstein's Field Equations: Their Role in General Relativity and Astrophysics. Charles Universitys

Bernard F. Schutz Gravitational waves on the back of an envelope Am. J. Phys. 52, 412 (1984)

Physics Physicians Quantum Physics Quantum Computing Relativity