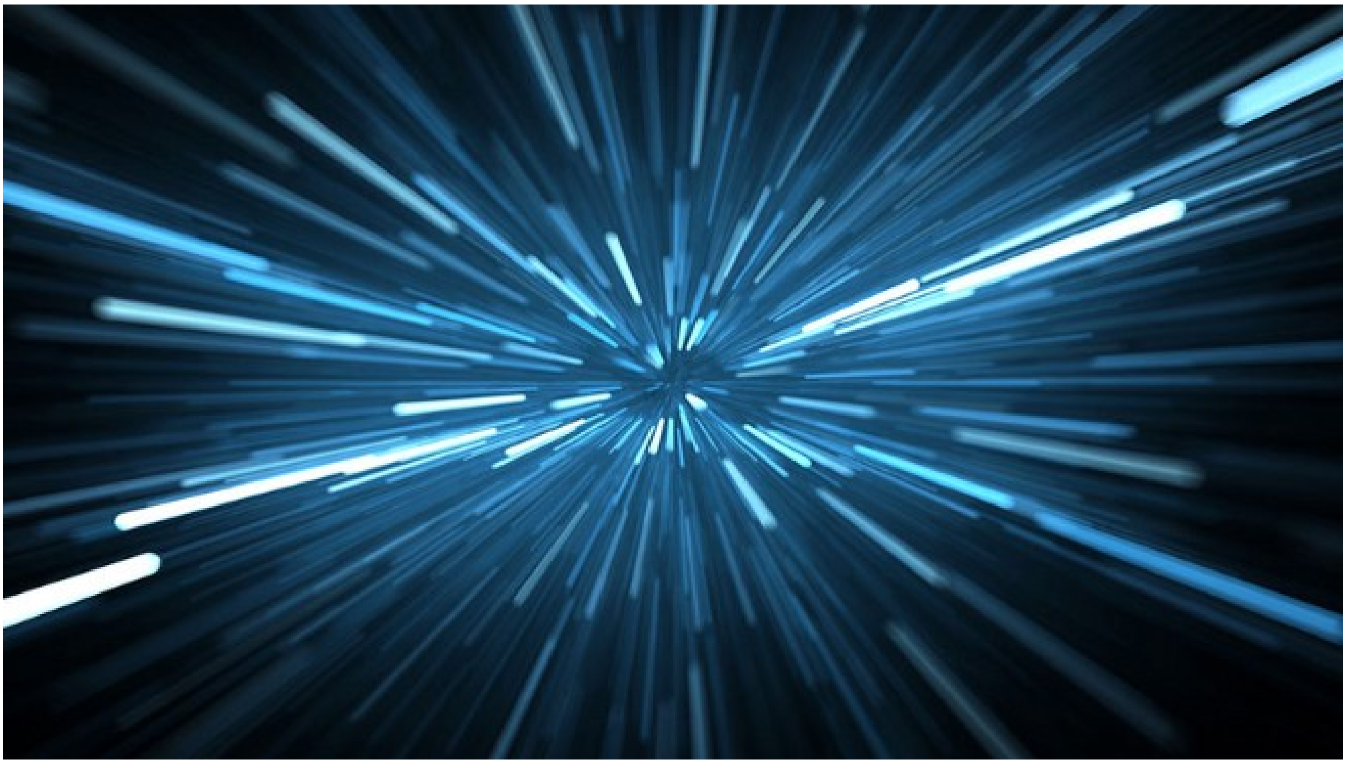
Marlon Sousa



# Partículas Físicas do Mundo Clássico

Marlon Sousa Oct 4, 2020 · 13 min read



## Relatividade Geral

### Introdução a Relatividade Geral

### Métricas e Transformações

Equações invariantes sob reparametrizações suaves.

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x)$$

Para fazer física loca precisamos derivar.

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$$
$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \equiv R^{\mu}{}_{\nu} \in GL(4)$$

O que faremos é introduzir um campo de tensor simétrico e não singular

$$g_{\mu\nu}(x)$$

Para que possamos definir intervalos.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

Pitágoras

Para que seja invariante:

$$(g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu})$$

Precisamos:

$$g'_{\mu\nu}(x') = (R^{-1})^{\alpha}{}_{\mu} (R^{-1})^{\beta}{}_{\nu} g_{\alpha\beta}(x)$$

Desde de que

$$R^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}},\ (R^{-1})^{\rho}{}_{\sigma} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}}$$

Podemos escrever a lei transformada para gμv na forma de matriz:

$$G' = R^{-1} G (R^{-1})^T$$

Da álgebra linear, nós podemos garantir G' na digonal com ±1(ou 0) entradas. A assinatura, e.g

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

É determinada.

Para deixar a forma intacta podemos utilizar as Transformações de Lorentz.

Generalizando gμv , dxμ, podemos definir os tensores dos tipos gerais.

$$T_{\mu_1 \ldots \mu_m}{}^{\nu_1 \ldots \nu_n}(x)$$

Pela lei de transformação obtemos:

$$T'_{\mu_1 \ldots \mu_m}{}^{\nu_1 \ldots \nu_n}(x') = (R^{-1})^{\alpha_1}{}_{\mu_1} \cdots (R^{-1})^{\alpha_m}{}_{\mu_m} R^{\nu_1}{}_{\beta_1} \cdots R^{\nu_n}{}_{\beta_n} \cdot T_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}^{\beta_1 \ldots \beta_n}(x)$$

## Derivados Covariantes: Estrutura afim

Campo escalar

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

Vetor

$$A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} A_\alpha(x) \qquad \left((R^{-1})^\alpha{}_\mu A_\alpha\right)$$

Operadores

$$\partial'_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Derivada variante

$$\partial'_\nu A'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}A_\beta\right)$$

$$= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\partial_\alpha A_\beta + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu}A_\beta$$

Boa — Ruim

Ao adicionar termo de correção:

$$\nabla_\nu A_\mu \equiv \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}A_\lambda$$

$$\nabla'_\nu A'_\mu = S^\alpha{}_\nu S^\beta{}_\mu \partial_\alpha A_\beta + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}A_\sigma - \Gamma'^\lambda_{\nu\mu}S^\sigma{}_\lambda A_\sigma$$

$$\stackrel{?}{=} S^\alpha{}_\nu S^\beta{}_\mu \left(\partial_\alpha A_\beta - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}A_\sigma\right)$$

Onde

$$S^\alpha{}_\nu \equiv (R^{-1})^\alpha{}_\nu = \tfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}.$$

Isto irá trabalhar se

$$\Gamma'^\lambda_{\nu\mu}S^\sigma{}_\lambda = S^\alpha{}_\nu S^\beta{}_\mu \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x' \nu \partial x'^\mu}$$

Isto é

$$\Gamma'^\lambda_{\nu\mu} = R^\lambda{}_\sigma S^\alpha{}_\nu S^\beta{}_\mu \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x' \nu \partial x'^\mu}$$

Grande parte não homogênea é simétrica em μ→v. Portanto, podemos assumir

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}$$

Dado Γ, podemos assumir as derivadas covariantes como:

$$\nabla_\alpha T_{\mu_1\ldots\mu_m}{}^{\nu_1\ldots\nu_n} = \partial_\alpha T_{\mu_1\ldots\mu_m}{}^{\nu_1\ldots\nu_n} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu_1} T_{\lambda\mu_2\ldots\mu_m}{}^{\nu_1\ldots\nu_n} - \ldots - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu_m} T_{\mu_1\ldots\lambda}{}^{\nu_1\ldots\nu_n} + \Gamma^{\nu_1}_{\alpha\lambda} T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}{}^{\lambda\nu_2\ldots\nu_n}$$

Aqui usamos a regra Leibniz em produtos

## Derivadas Covariantes: Métricas

Dada uma métrica, há uma conexão preferencial única Γ demanda λgμν = 0.

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} g_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} g_{\alpha\mu} \\
0 &= \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} g_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} g_{\alpha\lambda} \\
0 &= \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} g_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} g_{\alpha\lambda}
\end{aligned}$$

Subtraímos a primeira lina pela soma da segunda e da terceira:

$$2\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} g_{\alpha\lambda} = \partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}$$

$$\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\beta} \left( \partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right)$$

Termo extra em Γ:

$$\frac{1}{2} g^{\lambda\beta} \left[ \cancel{\left( \partial'_\mu \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \right) g_{\sigma\nu}} + \boxed{\left( \partial'_\mu \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \right) g_{\lambda\sigma}} \right.$$

$$\left. + \cancel{\left( \partial'_\nu \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \right) g_{\sigma\mu}} + \boxed{\left( \partial'_\nu \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \right) g_{\lambda\sigma}} - \cancel{\left( \partial'_\lambda \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \right) g_{\sigma\nu}} - \cancel{\left( \partial'_\lambda \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \right) g_{\sigma\mu}} \right]$$

Cancelamos os Termos

## Medida Invariante

$$d^4x' = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) d^4x$$

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}$$

$$G' = R^{-1}G(R^-1)^T$$

$$\det g'_{\mu\nu} = \frac{1}{(\det R)^2}\det g_{\mu\nu}$$

Escrevendo g ≡ det(gμν ); temos

$$\sqrt{g'}d^4x' = \sqrt{g}d^4x$$

## Curvatura

Talvez possamos transformar gμν em variáveis dinâmicas, queremos que apareçam com derivadas Lagrangianas.

$$(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)\, A_\beta \equiv -\ R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \cdot \quad A_\alpha$$

= não derivadas

Logo todas as derivadas em A se cancelam, então obtemos:

$$\nabla_\mu A_\beta = \partial_\mu A_\beta - \Gamma^\lambda_{\nu\beta} A_\lambda$$

$$\nabla_\mu(\nabla_\nu A_\beta) = \partial_\mu(\nabla_\nu A_\beta) - \quad \cancel{\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\nabla_\sigma A_\beta} \quad -\Gamma^\sigma_{\mu\beta}\nabla_\nu A_\sigma$$

$$\begin{aligned} &= \cancel{\partial_\mu\partial_\nu A_\beta} - \partial_\mu\left(\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}A_\sigma\right) - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\partial_\nu A_\sigma + \Gamma^\rho_{\mu\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}A_\sigma \\ &\quad - \partial_\mu\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}A_\sigma - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\partial_\mu A_\sigma - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\partial_\nu A_\sigma + \Gamma^\rho_{\mu\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}A_\sigma \end{aligned}$$

Apenas temos:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\beta}$$

## Propriedades Simétricas de R

Podemos ir a um quadro onde

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = 0$$

Estas são coordenas geodésicas. Conhecemos como :

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$$

Entre tudo isto não é derivável, Então

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu \left(g^{\alpha\sigma}\left(\partial_\nu g_{\sigma\beta} - \partial_\beta g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\beta\nu}\right) - (\mu \leftrightarrow \nu)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left[\partial_\mu \partial_\beta g_{\nu\beta} - \partial_\mu \partial_\sigma g_{\beta\nu} - \partial_\nu \partial_\beta g_{\mu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\beta\mu}\right]$$

$$= g^{\alpha\sigma} R_{\sigma\beta\gamma\delta}$$

Com R:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left[\partial_\alpha \partial_\delta g_{\beta\gamma} + \partial_\beta \partial_\gamma g_{\alpha\delta} - \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\beta\delta} - \partial_\beta \partial_\delta g_{\alpha\gamma}\right]$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0$$

Identidades tensoriais se mantêm em qualquer quadro. Também é notável a identidade de Bianchi.

$$\nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\gamma} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\gamma\alpha} + \nabla_\gamma R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$$

Decorre de:

$$[\nabla_\alpha, [\nabla_\beta, \nabla_\gamma]] + [\nabla_\beta, [\nabla_\gamma, \nabla_\alpha]] + [\nabla_\gamma, [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]] =$$

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\gamma - \nabla_\alpha \nabla_\gamma \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\gamma \nabla_\alpha + \nabla_\gamma \nabla_\beta \nabla_\alpha +$$

$$\nabla_\beta \nabla_\gamma \nabla_\alpha - \nabla_\beta \nabla_\alpha \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_\alpha \nabla_\beta + \nabla_\alpha \nabla_\gamma \nabla_\beta +$$

$$\nabla_\gamma \nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\gamma \nabla_\beta \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\gamma + \nabla_\beta \nabla_\alpha \nabla_\gamma = 0$$

$$\nabla_\alpha [\nabla_\beta, \nabla_\gamma] A_\mu = -\nabla_\alpha \left( R^\nu{}_{\mu\beta\gamma} A_\nu \right) = -\nabla_\alpha R^\nu{}_{\mu\beta\gamma} A_\nu - R^\nu{}_{\mu\beta\gamma} \nabla_\alpha A_\nu$$

$$-[\nabla_\beta, \nabla_\gamma] \nabla_\alpha A_\mu = R^\nu{}_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\nu A_\mu + R^\nu{}_{\mu\beta\gamma} \nabla_\alpha A_\nu$$

Esta identidade é análogo da gravidade de

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

No eletro magnetismo,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

## Ações Invariantes

Uma vez que temos uma medida invariante,

$$\int \sqrt{g} d^4x \, (\mathscr{L})$$

Obtemos teorias de campo invariante ao colocar expressões variantes dentro de L.

$$\begin{aligned} d^4x &\rightarrow \sqrt{g} d^4x \\ \eta_{\mu\nu} &\rightarrow g_{\mu\nu} \\ \partial_\mu &\rightarrow \nabla_\mu \end{aligned}$$

Para fazer uma teoria invariante relativística geral. Este é o procedimento de "acoplamento mínimo".

Exemplo:

Campo Escalar.

$$\mathscr{L} = \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \, \partial_\nu \phi - V(\phi)$$

Campo vetorial Transversal.

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma - \partial_\nu A_\mu + \Gamma^\sigma_{\nu\mu} A_\sigma$$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}$$

Suporta a simetria de medidor:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$$

Campo vetorial Longitudinal

$$\nabla_\mu A^\mu = \partial_\mu A^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} A^\alpha$$

$$\Gamma^\mu_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left( \partial_\alpha g_{\sigma\mu} + \cancel{\partial_\mu g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\alpha}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \partial_\alpha g_{\sigma\mu}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\alpha \sqrt{g}$$

Para provar isso usamos a expansão para matriz inversa.

Apenas

$$\nabla_\mu A^\mu \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \left( \sqrt{g} A^\mu \right)$$

Portanto

$$\int d^4x \, \sqrt{g} \, \nabla_\mu A^\mu \;=\; \int d^4x \, \partial_\mu (\sqrt{g} a^\mu)$$

É semi trivial: É um termo de fronteira.

$$\int d^4x \nabla_\mu A^\mu \nabla_\nu A^\nu$$

da dinâmica

Isto suporta uma transformação de medidor.

$$\sqrt{g} A^\mu \to \sqrt{g} A^\mu + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \Lambda_{\rho\sigma}$$

$$\Lambda_{\rho\sigma} = -\Lambda_{\sigma\rho}$$

Gravidade em Si

$$R = g^{\beta\gamma} R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\gamma}$$

E 1 é invariante

Este último não é trivial, devido ao fator de medida.

$$\int d^4x \sqrt{g}$$

Os Spinors são fundamentais, mas relegados ao apêndice.

## Equações de Campo

Campo Escalar

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right)$$

$$\partial_\mu \frac{\delta \Lambda}{\delta \partial_\mu \phi} = \frac{\delta \Lambda}{\delta \phi}$$

$$\partial_\mu \left( \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right) = -\sqrt{g} V'(\phi)$$

Ou

$$\nabla_\mu \left( g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right) = -V'(\phi)$$

Campo vetorial transverso

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{g} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \left( \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \right) \left( \partial_\gamma A_\delta - \partial_\delta A_\gamma \right) - \int d^4x \sqrt{g} j^\mu A_\mu$$

Acoplamento a corrente

$$\partial_\mu \frac{\delta \sqrt{g} \mathscr{L}}{\delta \partial_\mu A_\nu} = -\partial_\mu \left( \sqrt{g} g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta} \left( \partial_\gamma A_\delta - \partial_\delta A_\gamma \right) \right)$$

$$= -\partial_\mu \left(\sqrt{g} F^{\mu\nu}\right) \doteq -\sqrt{g}\,\nabla_\mu F^{\mu\nu}$$

$$\frac{\delta\sqrt{g}\mathscr{L}}{\delta\partial_\mu A_\nu} = -\sqrt{g} j^\nu$$

Equação do Movimento

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

Ou

$$\partial_\mu \left(\sqrt{g} g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta} F_{\gamma\delta}\right) = \sqrt{g} j^\nu$$

Como condição de consistência temos:

$$\partial_\nu \left(\sqrt{g} j^\nu\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{g}\,\nabla_\nu j^\nu$$

Campo Vetorial Longitudinal

$$\int \sqrt{g}\,\nabla_\mu A^\mu \nabla_\nu A^\nu = \int \sqrt{g} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \left(\sqrt{g} A^\mu\right) \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu \left(\sqrt{g} A^\nu\right)$$

$$\equiv \int \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu p^\mu \partial_\nu p^\nu$$

$$\partial_\mu \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\partial_\mu p^\nu} = 2\partial_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \delta^\mu_\nu \partial_\sigma p^\sigma\right)$$

$$= 2\partial_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\sigma p^\sigma\right)$$

Se não houver fonte, então temos:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\sigma p^\sigma = \lambda$$

Que é constante

Apenas

$$\int \sqrt{g}\,\nabla_\mu A^\mu \nabla_\nu A^\nu \to \lambda^2 \int \sqrt{g}$$

Da o termo da cosmologia “Dinâmica”

## Equação gravitacional do Campo

A parte difícil de encontrar a equação de campo da gravidade é variar

$$\sqrt{g}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$$

Contudo, podemos usar o truque de que

$$\sqrt{g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}$$

É uma derivada total.

Para provar isso podemos adotar um sistema de coordenadas geodésicas localmente.

$$\left(\Rightarrow \partial_\alpha g_{\beta\gamma} = 0\right)$$

Então

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} &= g^{\alpha\beta}\left(\partial_\mu \delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \delta\Gamma^\mu_{\beta\mu}\right) \\ &= \partial_\mu\left(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - g^{\mu\beta}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\right) \\ &\equiv \partial_\mu \omega^\mu \end{aligned}$$

Note que δΓ não tem termos não homogêneos em sua lei de transformação — É um tensor. Então

$$g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \partial_\mu \omega^\mu \rightarrow \nabla_\mu \omega^\mu$$

Agora é válido em qualquer sistema de coordenadas.

Apenas

$$\sqrt{g} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} =$$

$$\sqrt{g} \nabla_\mu \omega^\mu = \partial_\mu \left( \sqrt{g} \omega^\mu \right)$$

é um termo de fronteira; Não contribui para as equações de Euler-Lagrange

Assim como:

$$S = \kappa \int \sqrt{g} R$$

Nos obtemos

$$\begin{aligned} \delta S &= \kappa \int \left( \delta \sqrt{g}\, \overbrace{g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}}^{R} + \sqrt{g} \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \right) \\ &= \kappa \int -\frac{1}{2} \sqrt{g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} R + \sqrt{g} R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \\ &= \kappa \int \sqrt{g} \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) \delta g^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Temos para o termo cosmológico

$$\begin{aligned} \delta S &= -\Lambda \int \delta \sqrt{g} \\ &= \Lambda \int \sqrt{g} \left( \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Importam

$$S = \int \sqrt{g}\Lambda$$
$$\delta S = \int \left( \frac{\delta \sqrt{g}\Lambda}{\delta g^{\alpha\beta}} - \partial_\mu \frac{\delta \sqrt{g}\Lambda}{\delta \partial_\mu g^{\alpha\beta}} \right) \delta g^{\alpha\beta}$$

Definimos o tensor de energia-momento por:

$$\frac{\delta \sqrt{g}\Lambda}{\delta g^{\alpha\beta}} - \partial_\mu \frac{\delta \sqrt{g}\Lambda}{\delta \partial_\mu g^{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{g}}{2} T_{\alpha\beta}$$

Veremos agora que isso faz sentido com leis de conservação

Campo escalar

$$\Lambda = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \sqrt{g}\Lambda}{\delta g^{\alpha\beta}} &= -\frac{1}{2}\sqrt{g} g_{\alpha\beta} \Lambda \\ \frac{\sqrt{g}}{2} T_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}\left( \sqrt{g} g_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)\right) + \frac{1}{2}\sqrt{g}\partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \\ T_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \end{aligned}$$

No espaço Plano temos:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \partial_0 \phi \partial_0 \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2}\left( \partial_0 \phi \partial_0 \phi - (\nabla \phi)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \overset{\checkmark}{=} WSB \end{aligned}$$

Campo de Maxwell

$$\delta\left( \sqrt{g} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \right) = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{g} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} + 2\sqrt{g} g^{\beta\delta} F_{\mu\beta} F_{\mu}$$

$$T \;=\; \frac{2}{\ldots} \left( \ldots \frac{1}{\ldots} \right) \delta \left( \sqrt{g} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F \;\; F \right)$$

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= \frac{}{\sqrt{g}}\left(-\frac{}{4}\right)\delta\left(\sqrt{g}g \; g \; F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\right) \\
&= -F_{\mu\beta}F_{\nu\delta}\,g^{\beta\delta} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} \Rightarrow \\
g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} &= 0 \quad (\checkmark)
\end{aligned}
$$

No espaço Planos temos:

$$
\begin{aligned}
T_{00} &= E^2 + \frac{1}{4}\cdot 2\left(B^2 - E^2\right) \\
&\overset{\checkmark}{=} \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right)
\end{aligned}
$$

## Limites Newtonianos

Devemos ser capazes de identificar a gravidade newtoniana olhando para a situação com espaço quase plano e apenas T = ρ significativo. A condição de ação estacionária dá

$$
\kappa\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right) = \frac{1}{2}T_{\alpha\beta}
$$

Ou

$$
2\kappa R_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta} \qquad \left(g_{00} \approx c^2 \gg g_{ij}\right)
$$

Em R temos com ΓΓ peças de ordem superior. Também com

$$
\frac{\partial}{\partial x^0} \sim \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x^i}
$$

São pequenos. Assim em

$$
\begin{aligned}
R_{00} &\approx \partial_\gamma \Gamma^\gamma_{00} - \partial_0 \Gamma^\gamma_{0\gamma} \\
&\overset{\approx}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}
\end{aligned}
$$

E finalmente

$$2\kappa\nabla^2 g_{00} = \rho$$

Para interpretar isso, escreva g = 1 + € (g = 1 — €). A densidade de ação da matéria é perturbada por

$$\frac{\delta(\sqrt{g}\Lambda)}{\delta g^{00}} \approx -\frac{\rho}{2}\epsilon$$

Isso se parece com o acoplamento newtoniano se

$$\epsilon = 2\phi.$$

A equação

$$2\kappa\nabla^2 g_{00} = \rho \Rightarrow 4\kappa\nabla^2\phi = \rho$$

Isso corrige

$$\kappa = \frac{1}{16\pi G_N}.$$

$$\left(\phi = -\frac{G_N M}{r}; \nabla\phi = \frac{G_N M}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \xrightarrow{\text{Gauss}} \int dV \underbrace{\nabla^2\phi}_{=\frac{M}{4\kappa}} = 4\pi G_N M\right)$$

## Modelos Cosmológicos com Matéria Idealizada

### Espaços do Model: Construção

Espaços de alta simetria desempenham um papel muito importante nas construções de modelos cosmológicos e como exemplo da relatividade geral. Os mais importantes podem ser considerados como diferentes tipos estranhos de esferas, então começamos com aqueles

Esfera 3D

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = R^2$$

Coordenadas Esféricas

$$x_1 = R\cos\left(\frac{x}{R}\right) \qquad x_3 = R\sin\left(\frac{x}{R}\right)\sin(\theta)\cos(\phi)$$
$$x_2 = R\sin\left(\frac{x}{R}\right) \qquad x_4 = R\sin\left(\frac{x}{R}\right)\sin(\theta)\sin(\phi)$$
$$dl^2 = \sum_i dx_i^2 \underbrace{=}_{\text{Exercise}} dx^2 + R^2\sin^2\left(\frac{x}{R}\right)\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right)$$

Coordenadas Quase Planas

$$dx_4 = \frac{rdr}{x_4} \qquad dx_4^2 = \frac{r^2dr^2}{R^2 - r^2}$$

$$\begin{aligned} dl^2 &= \sum_{i=1}^{3} dx_i^2 + dx_4^2 \\ &= dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right) + \frac{r^2dr^2}{R^2 - r^2} \\ &= \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right) \\ &= R^2\left(\frac{du^2}{1 - u^2} + u^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right)\right), u = \frac{r}{R} \end{aligned}$$

A partir do formulário anterior, teremos isso se usarmos η no lugar de r de modo que

$$\begin{aligned} \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} &= f^2 d\eta^2 \\ r^2 &= f^2\eta^2 \\ \Rightarrow \frac{d\eta}{\eta} &= \frac{dr}{r\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} \end{aligned}$$

Levando a

$$\eta \;=\; \tan\left(\tfrac{u}{2}\right)$$

Com

$$\sin(u) \;=\; \tfrac{r}{R}.$$

Escrevemos:

$$r \;=\; R\sin(u); \frac{dr}{r\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}} \;=\; \frac{du}{\sin(u)} \;=$$

$$d\left(\log\tan\left(\tfrac{u}{2}\right)\right) = \frac{d\eta}{\eta} = d\log(\eta).$$

Ou

$$\left(\begin{aligned} dl^2 &= \frac{4R^2}{(1+\eta^2)^2}\left(d\eta^2 + \eta^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right)\right) \\ f^2 &= \frac{r^2}{\eta^2} \\ \sin^2(u) &= \frac{r^2}{R^2} \\ 4\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u}{2}\right) &= 4\left(\frac{\eta^2}{1+\eta^2}\right)\left(\frac{1}{1+\eta^2}\right) \end{aligned}\right)$$

A esfera suporta a simetria SO

Hiperboloide 3D

$$x_0^2 - \sum_{i=1} x_i^2 = R^2$$

Coordenadas Esféricas

$$\begin{aligned} x_0 &= R\cosh\left(\frac{x}{R}\right) \\ x_1 &= R\sinh\left(\frac{x}{R}\right)\cos(\theta) \\ &\ldots \\ dl^2 &= -dx_0^2 + d\mathbf{x}^2 \\ &= dx^2 + R^2\sinh^2\left(\frac{x}{R}\right)\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right) \end{aligned}$$

Coordenadas quase planas

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}| &= r \\ x_0^2 &= R^2 + r^2 \\ &\ldots \\ dl^2 &= \frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{R^2}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right) \\ &= R^2\left(\frac{du^2}{1+u^2} + u^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right)\right) \end{aligned}$$

Coordenadas Conformes

$$dl^2 = \frac{4}{(1-\eta^2)^2}\left(d\eta^2 + \eta^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right)\right)$$

Com

$$\eta = \tanh\left(\tfrac{u}{2}\right)$$

$$, \sinh(u) = \tfrac{r}{R}$$

Suporta Simetria SO, ou seja, simetria "Lorentz", agundo puramente espacial. Para trazer isso para fora, user.

$$x_0 = \sqrt{r^2 + R^2}\cosh(\lambda) \qquad x_2 = r\cos(\phi)$$
$$x_1 = \sqrt{r^2 + R^2}\sinh(\lambda) \qquad x_3 = r\sin(\phi)$$

$$dl^2 = \frac{1}{1 + \frac{r^2}{R^2}}dr^2 + r^2 d\phi^2 + (r^2 + R^2)d\lambda^2$$

Traduções λ → λ + "constante", correspondendo aos aumentos nas variáveis originais, deixe este invariante.

## Espaço Tempo

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = -R^2$$

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cosh\left(\frac{x}{R}\right)\cos(\lambda) \\ x_2 &= R\cosh\left(\frac{x}{R}\right)\sin(\lambda)\cos(\theta) \\ x_3 &= R\cosh\left(\frac{x}{R}\right)\sin(\lambda)\sin(\theta)\cos(\phi) \\ x_4 &= R\cosh\left(\frac{x}{R}\right)\sin(\lambda)\sin(\theta)\sin(\phi) \\ x_0 &= R\sinh\left(\frac{x}{R}\right) \end{aligned}$$

Coordenadas Esféricas

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_0^2 - \sum_i dx_i^2 \\ &= dx^2 - R^2\cosh^2\left(\frac{x}{R}\right)\left(\underbrace{d\lambda^2 + \sin^2(\lambda)\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right)}_{\text{unit 3-sphere}}\right) \end{aligned}$$

Expansão Exponencial

Coordenadas

$$x_0^2 = r^2 - R^2 \qquad dx_0^2 = \frac{r^2 dr^2}{r^2 - R^2}$$

$$ds^2 = \frac{dr^2}{\frac{r^2}{R^2} - 1} - r^2\left(d\lambda^2 + \sin^2(\lambda)\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right)\right)$$

Coordenadas fotônicas

$$x_+ = x_0 + x_1 \qquad x_- = x_0 - x_1$$

$$\underbrace{x_0^2 - x_1^2}_{x_+ x_-} - \mathbf{x}_\perp^2 = -R^2 \qquad x_- = \frac{\mathbf{x}_\perp^2 - R^2}{x_+}$$

$$ds^2 = dx_+ dx_- - d\mathbf{x}_\perp^2$$

$$dx_- = \frac{2\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}}{x_+} - \frac{dx_+}{x_+^2}(\mathbf{x}_\perp^2 - R^2)$$

$$ds^2 = dx_+\left(\frac{2\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}}{x_+} - \frac{dx_+}{x_+^2}\left(\mathbf{x}^2 - R^2\right)\right) - d\mathbf{x}^2$$

Para remover o termo ugly cross term, introduza

$$\mathbf{v} = f(x_+)\mathbf{x}$$

Apenas

$$d\mathbf{v} = f' dx_+ \mathbf{x} + f d\mathbf{x}$$

$$d\mathbf{v}^2 = (f')^2 \mathbf{x}^2 dx_+^2 + 2ff'\mathbf{x}\cdot d\mathbf{v} + f^2 d\mathbf{x}^2$$

$$-d\mathbf{x}^2 = \frac{1}{f^2}\left(-d\mathbf{v}^2 + (f')^2\mathbf{x}^2 dx_+^2 + 2ff'\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}\right)$$

Coordenadas Conformes

$$ds^2 = R^2 x_+^2\left(\frac{dx_+^2}{x_+^4} - d\mathbf{v}^2\right)$$

$$ds^2 = \frac{R^2}{u^2}\left(du^2 - d\mathbf{v}^2\right)$$

## Espaço Tempo FRW

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - a^2(t)dl^2 \\ dl^2 &= \frac{du^2}{1+\kappa u^2} + u^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} K = 1 \\ K = 0 \\ K = -1 \end{gathered}$$

### Cálculos de Curvatura

$$\begin{aligned} \omega_\mu^{ef} &= \frac{e^{f\nu}}{2}\left(\partial_\mu e_\nu^e - \partial_\nu e_\mu^e + e_{a\mu}e^{e\rho}\partial_\rho e_\nu^a\right) - (e \leftrightarrow f) \\ R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} &= -F_{\mu\nu}{}^{ab}e_a^\alpha e_b^\beta \\ F_{\mu\nu}{}^{ab} &= \partial_\mu\omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu\omega_\mu{}^{ab} - \omega_\mu{}^a{}_c\omega_\nu{}^c{}_b + \omega_\nu{}^a{}_c\omega_\mu{}^c{}_v \end{aligned}$$

Isso é melhor explorado usando certos vierbeins quase cartesianos

$$e_\alpha^a = \delta_\alpha^a g_a \qquad (\text{so } e^{a\alpha} = \eta^{a\alpha}g_a^{-1})$$

1º Termo

$$g_f^{-1}\,\frac{1}{2}\underbrace{\eta^{f\nu}\delta_\nu^e}_{\eta^{ef}}\partial_\mu g_e \to 0$$

2º Termo

$$-\frac{1}{2}\eta^{f\nu}g_f^{-1}\delta^e_\mu\partial_\nu g_e = -\frac{1}{2}\eta^{f\nu}g_f^{-1}\delta^e_\mu\partial_\nu g_e$$

3° Termo

$$\frac{1}{2}\underbrace{\eta^{f\nu}\eta_{a\mu}\eta^{e\rho}\eta^{a}{}_{\nu}}_{f,\nu,\mu,a \text{ all equal}}\cancel{g_f^{-1}}\cancel{g_a}g_e^{-1}\partial_\rho g_f = \frac{1}{2}\delta^f_\mu\eta^{e\rho}g_e^{-1}\partial_\rho g_f$$

Apenas

$$\omega^{ef}_\mu = \delta^f_\mu\eta^{e\rho}g_e^{-1}\partial_\rho g_f - \delta^e_\mu\eta^{f\rho}g_f^{-1}\partial_\rho g_e$$

## Dinâmica FRW

As Equações de Campo são

$$R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R = 8\pi G$$

Nós interpretamos

$$T^0{}_0 = \rho, T^i{}_j = -p\delta^i_j$$

Do cálculo anterior obtemos:

$$\begin{cases} 8\pi G\rho = 3\dfrac{\dot{a}^2}{a^2} \\ 8\pi G p = -2\dfrac{\ddot{a}}{a} - \dfrac{\dot{a}^2}{a^2} \end{cases}$$

$$\left(8\pi G(p+\rho) = 2\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}\right)\right)$$

Outra equação importante vem de diferenciar o primeiro destes e eliminando:

$$8\pi G\dot{\rho} = 6\frac{}{a}\left(\frac{}{a} - \frac{}{a^2}\right)$$

$$= -3 \cdot 8\pi G\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)$$

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a}$$

Simplificando obtemos

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a}$$

Outra coisa interessante é ver quem é o responsável pela aceleração:

$$8\pi G(\rho + 3p) = -6\frac{\ddot{a}}{a}$$

Imagine uma partícula de teste para o passeio. A gravidade “fora” é cancelada (teorema de Birkhoff). Conservação da energia da partícula.

$$\frac{m}{2}\overbrace{r^2\dot{a}^2}^{v^2} - \frac{G \cdot \frac{4\pi}{3}\rho r^3 a^3 m}{r} = mkr^2$$

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G\rho}{3}a^2 = k$$

Temos isso com k = 0: Ligação neutra, “Velocidade de Escape”.

Os valores diferentes de zero surgem em espaços FRW com hipérboles (k>0) ou esférico (k< 0) seções espaciais

Imagine o trabalho realizado por um fluído em expansão contra pressão

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{3}\rho a^3 r^3\right) = -p\frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{3}a^3 r^3\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho a^3\right) = -p\frac{d}{dt}(a^3)$$

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a}$$

## Referências

ocw.mit.edu — MIT
usp.br — Universidade de São Paulo
tum.de — Technische Universität München

Fisica Quantica   Física De Partículas   Quantum Physics   Physics   Relatividade Geral