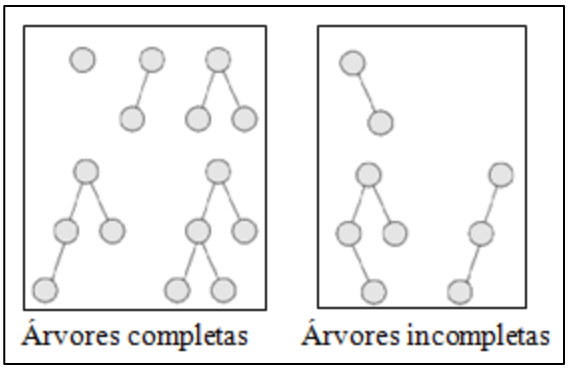
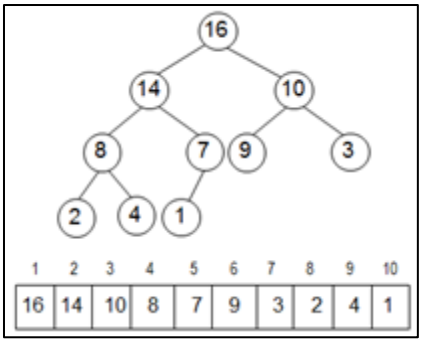
Heaps

- Um tipo particular de árvores binárias são as Heaps.
- No caso de heaps a propriedade a ser mantida não se resume ao balanceamento da árvore, mas também às seguintes definições:
  - ser uma árvore completa
  - manter uma propriedade de ordem
- Uma árvore completa é definida como sendo uma árvore cheia, em que elementos faltantes aparecem apenas no nível mais baixo e, sempre, na subárvore da direita.
- Para manter o heap ordenado e facilitar a localização do elemento de maior prioridade, o mesmo é colocado no nó raiz.



- Com isso, a prioridade de um nó X qualquer será, sempre, maior ou igual a de seus dependentes.
- A raiz é sempre o maior (ou o menor) elemento do heap.
- Existem dois tipos de heaps:
  - Heaps de máximo (max heap): O valor de todos os nós são menores que os de seus respectivos pais.
  - Heaps de mínimo (min heap): O valor todos os nós são maiores que os de seus respectivos pais.
- Em uma heap de máximo, o maior valor do conjunto está na raiz da árvore.
- Na heap de mínimo a raiz armazena o menor valor existente.
- Uma heap pode ser implementada como uma matriz unidimensional.
- O pai do elemento da posição i é a parte inteira do elemento (i/2);
- O filho esquerdo do elemento da posição i é o da posição (2 * i) ;
- O filho direito do elemento da posição i é o da posição (2 * i)+1.
- Para armazenar uma árvore de altura h precisamos de um array de 2h – 1 (número de nós de uma árvore cheia de altura h).



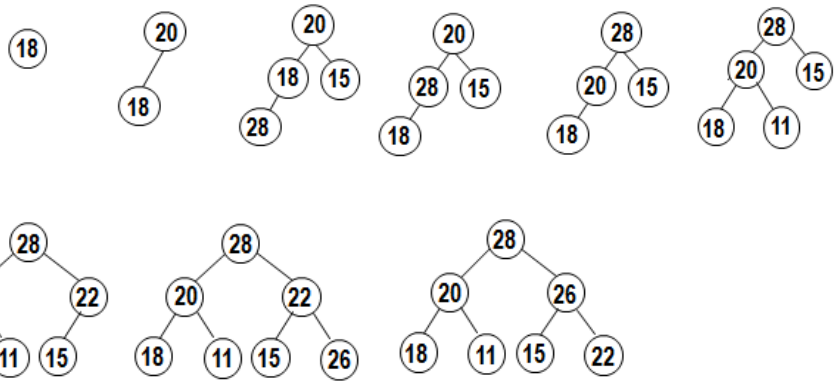
- As operações mais comuns em heaps são:
  - Inserção
  - Remoção
- Quando um elemento é adicionado a uma heap, pode ser adicionado de baixo para cima ou de cima para baixo.
- Quando o elemento é removido, em geral remove-se o elemento mais à direita do nível da base.
- Dois procedimentos de migração do nó são utilizados nas oprações de inserção e remoção : "Subir" e "Descer":
  - *Subir (i, n, H)* migra o nó i para cima na heap H
  - *Descer (i,n,H)* migra o nó i para baixo na heap H (sendo *n* o número total de nós da árvore/heap)
- Para inserir, pode-se colocar o novo valor na posição n+1 da heap e chamar Subir.
- Para remover pode-se substituir a raiz pela folha da posição n (H [1]) por H (n) e chamar Descer.

```
Subir (i, n, H [1 .. n])
{
  se i > 1 e H [Pai(i)] < H [i] então
     {
     H[i], H[Pai(i)] ← H[Pai(i)], H[i]
     Subir (Pai(i),n,H)
     }
}
```

```
Descer (i, n, H [1 .. n])
{
  se Dir(i) ≤ n e H [Dir(i)] > H [Esq(i)]
     então filho ← Dir(i)
     senão filho ← Esq(i)
  se filho ≤ n  e H [filho] > H [i] então {
     H [i], H [filho] ← H [filho], H [i]
     Descer (filho, n, H)
  }
}
```

Criação de heaps: inserção de elementos: método de cima para baixo

0	1	2	3	4	5	6
18	20	15	28	11	22	26



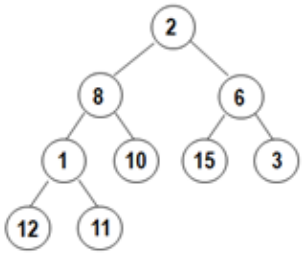
Criação de heaps: inserção de elementos: método de baixo para cima.

```
BuildHeap(data[ ])
  for (i= n/2-1; i>=0; i--)
            Descer (i,n-1,data)
```

- Quando um elemento é analisado, suas duas subárvores devem ser convertidas em heaps.
- Quando a propriedade de heap é desfeita, ela é reestabelecida movendo para baixo o elemento analisado.

data

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	8	6	1	10	15	3	12	11

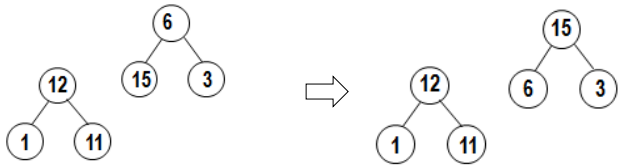


- Começa-se a partir do último nó não-folha que é dado por ***n* / 2 - 1**, n é o tamanho da matriz.
- Último nó não-folha → data[3] = 1
- Se o último nó não-folha é menor que um de seus filhos ele é trocado com seu maior filho.

data

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	8	6	12	10	15	3	1	11

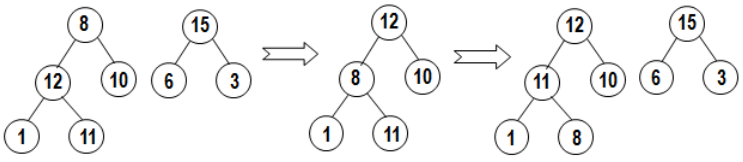
- Considera-se o elemento ***n* / 2 - 2** → data[2] = 6



data

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	8	15	12	10	6	3	1	11

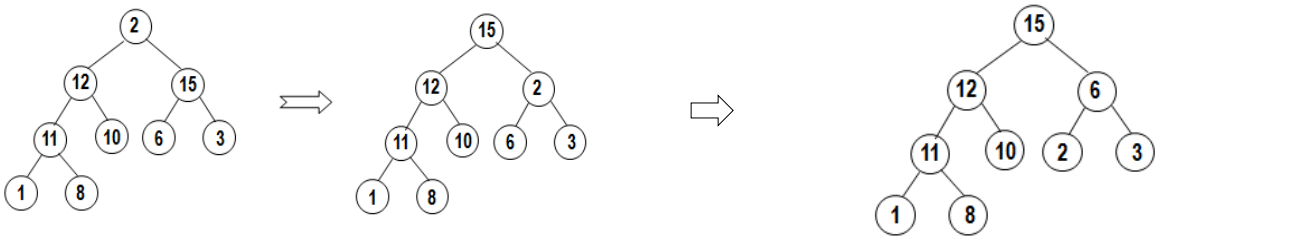
- Considera-se o elemento n/2-3 → data[1] = 8



data

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	12	15	11	10	6	3	1	8

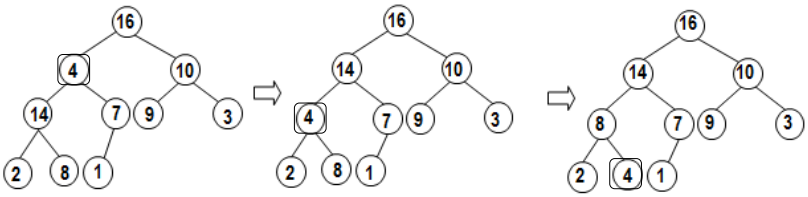
- Considera-se o elemento n/2-4 → data[0] = 2



data	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	15	12	6	11	10	2	3	1	8

Heapify

- Reorganiza heaps
- Supõe que as árvores binárias correspondentes a Esquerda(i) e Direita(i) são heaps, mas A[i] pode ser menor que seus filhos.



- Algoritmo

```
Heapify(A, i)
Esquerdo <- Filho Esquerdo(i)
Direito <- Filho Direito(i)
Se Esquerdo > i (pai)
   Maior <- Esquerdo
Senão
   Maior <- i
Se Direito > que Maior
  Maior <- Direito
Se Maior != i(pai)
   troca(A,i,Maior)
   Heapify Maximo(A, Maior)
```

Exercícios

1) Verifique se as seqüência de chaves seguintes correspondem ou não a uma heap.
   a) 33 32 28 31 26 29 25 30 27
   b) 33 32 28 31 29 26 25 30 27
2) Elabore um algoritmo para verificar se uma dada seqüência de chaves corresponde a uma heap.

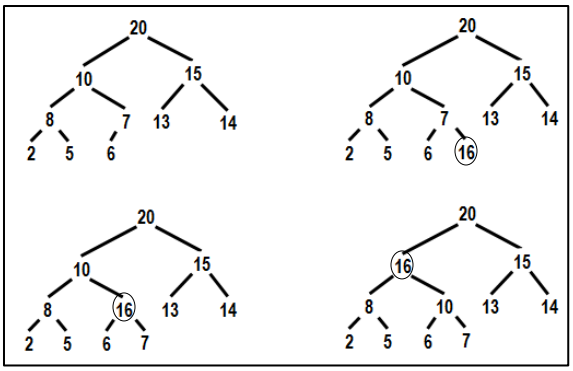
Filas de prioridade

- Em muitas aplicações, dados de uma coleção são acessados por ordem de prioridade.
- A prioridade associada a um dado pode ser qualquer parâmetro específico como: tempo, custo, etc.
- Numa fila de prioridade atribui-se um valor de prioridade a cada elemento e as operações de inserção e remoção passam a ser feitas em função dessa prioridade.
- Aplicações:
  - Escalonamento de processos em um sistema multi-programável. A fila de prioridade máxima mantém o controle dos processos a serem executados e de suas prioridades relativas. Quando um processo temina ou é interrompido, o processo de prioridade mais alta é selecionado dentre os processos pendentes.
  - As chaves podem também representar o tempo em que eventos devem ocorrer.
  - Métodos numéricos iterativos são baseados na seleção repetida de um item com maior (menor) valor.

- Sistemas de gerência de memória usam a técnica de substituir a página menos utilizada na memória principal por uma nova página.

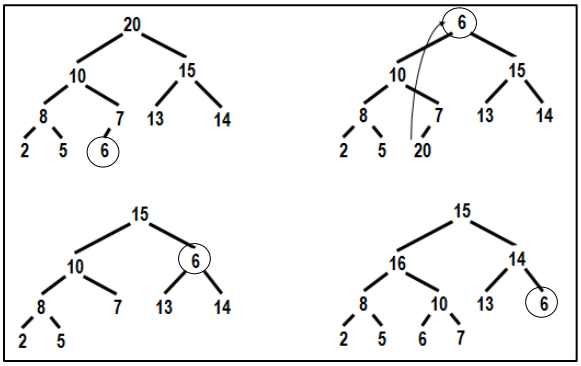
- Nesse contexto, as operações que se costuma querer implementar eficientemente são:
  - Seleção do elemento com maior (ou menor) prioridade
  - Remoção do elemento de maior (ou menor) prioridade
  - Inserção de um novo elemento
- As heaps são estruturas próprias para implementação de listas de prioridade.
- A raiz de uma heap contém a chave (prioridade) de menor ou maior valor.
- Inserção de um novo elemento
  - Para colocar um elemento na fila, o elemento é adicionado no fim da heap como a última folha.
  - A restauração da propriedade de heap é obtida movendo-se a última folha em direção a raiz segundo o seguinte algoritmo:

```
heapEnqueue(el)
colocar el no final da heap;
while el não é a raiz e el > ascendente(el);
troca (el, ascendente);
```



- Remoção de um elemento
  - Para remover um elemento da heap, deve-se remover a raiz da heap, pois esse é o elemento com a maior prioridade.
  - Coloca-se a última folha no lugar da raiz e restaura-se a propriedade de heap movendo-se da raiz para baixo na árvore:

```
heapDequeue(el)
Extrai-se a raiz;
Coloca-se a última folha (p) em seu lugar;
Remove-se a última folha;
while p não é folha e p < um dos descendentes
troque p com o maior ascendente
```



Exercício para apresentar em sala

- Elabore um programa no qual são dadas as seguintes escolhas:
- inserção de elementos em matriz unidimensional
- Inserção de elementos na heap
- busca de elementos
- remoção de elementos
- criar uma heap
- Apresentação da árvore
- A árvore deve ser apresentada da seguinte forma:

  Raiz: x FD: y FE: z

  Nó y: FD: a FE: b

  Nó z: FD: c FE: d