Probabilidad 1
Tarea 1

22 de febrero de 2025

---

1. *a*) ¿Cuántas placas de matrícula diferentes de 7 posiciones son posibles si los dos primeros lugares son para letras y los otros cinco para números?

   Sea $A = \{A, B, C, ..., X, Y, Z\}$ el conjunto del abecedario del español, $A \backslash \{$ ñ $\}$, y $D = \{0, 1, ..., 9\}$ el conjunto del sistema de numeración decimal.

   Como las primeras dos posiciones son para letras, por cada una de ellas se pueden elegir 1 de las $|A|$ letras, pero si tomamos en cuenta que podemos elegir la H o la Z, practicamente cualquier letra, debemos tomar todas las posibles opciones, osea las $|A|$.

   Ahora, para las 5 posiciones restantes, podemos elegir 1 de los $|D|$ números por posición, siguiendo la misma lógica entonces tomemos todas las posibles opciones, lo que quiere decir que tenemos el producto cartesiano $A \times A \times D \times D \times D \times D \times D$.

   Y ya que $|A| = 26$ y $|D| = 10$, y por la definición del producto cartesiano, tenemos:

$$\begin{aligned}
|A \times A \times D \times D \times D \times D \times D| &= |A| \cdot |A| \cdot |D| \cdot |D| \cdot |D| \cdot |D| \cdot |D| \\
&= 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \\
&= 26^2 \cdot 10^2 \\
&= 67,600,000 \text{ matrículas diferentes.}
\end{aligned}$$

   Ejemplo de matrícula:

$$\boxed{\text{H}}\ \boxed{\text{K}}\ \boxed{8}\ \boxed{3}\ \boxed{6}\ \boxed{2}\ \boxed{2}$$

b) Repite la parte (a) bajo la suposición de que ninguna letra o número puede repetirse en una sola matrícula.

En este caso, cuando tomamos una letra $x \in A$ para la primera posición, para la siguiente posición debemos quitar la letra que ya elegimos, ya que no podemos repetirla, $|A \backslash \{x\}| = |A| - 1 = 25$.

Ahora, para las siguientes posiciones debemos tomar en cuenta de igual forma que al elegir un número para una posición, para la siguiente posición debemos quitar el número que ya elegimos anteriormente.

Para la 3ra casilla, podemos elegir $|D|$ números, para la siguiente $|D \backslash \{x\}| = 10 - 1 = 9$, despues $|(D \backslash \{x\}) \backslash \{y\}| = (10 - 1) - 1 = 8$, con $x \in D$ y $y \in D \backslash \{x\}$.

Asi sucesivamente, por lo tanto, tenemos:

$$26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 19,656,000 \text{ matrículas posibles.}$$

2. Se deben asignar 20 trabajadores a 20 trabajos diferentes, uno por cada trabajo. ¿Cuántas asignaciones diferentes son posibles?

3. John, Jim, Jay y Jack han formado una banda con 4 instrumentos. Si cada uno de los chicos puede tocar los 4 instrumentos, ¿cuántos arreglos diferentes son posibles? ¿Y si John y Jim pueden tocar todos los instrumentos, pero Jay y Jack solo pueden tocar piano y batería?

4. Durante años, los códigos de área telefónicos en los Estados Unidos y Canadá consistían en una secuencia de tres dígitos. El primer dígito era un número entre 2 y 9, el segundo era 0 o 1, y el tercero era cualquier número del 1 al 9. ¿Cuántos códigos de área eran posibles? ¿Cuántos códigos de área que comienzan con 4 eran posibles?

5. Una conocida rima infantil comienza así:
   "Cuando iba camino a St. Ives
   Me encontré con un hombre con 7 esposas.
   Cada esposa tenía 7 sacos.
   Cada saco tenía 7 gatos.
   Cada gato tenía 7 gatitos..." ¿Cuántos gatitos encontró el viajero?

6. (a) ¿De cuántas maneras pueden sentarse en fila 3 niños y 3 niñas?
   (b) ¿De cuántas maneras pueden sentarse si los niños y las niñas deben estar juntos?
   (c) ¿Y si solo los niños deben estar juntos?
   (d) ¿Y si no se permite que dos personas del mismo sexo se sienten juntas?

7. ¿Cuántos arreglos diferentes de letras pueden formarse con las siguientes palabras?

(a) Fluke
(b) Propose
(c) Mississippi
(d) Arrange

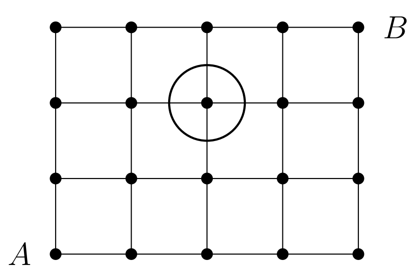
8. Un niño tiene 12 bloques, de los cuales 6 son negros, 4 son rojos, 1 es blanco y 1 es azul. Si coloca los bloques en una línea, ¿cuántos arreglos son posibles?

9. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en una fila 8 personas si:
(a) No hay restricciones en el arreglo.
(b) Las personas A y B deben sentarse juntas.
(c) Hay 4 hombres y 4 mujeres y no se permite que dos hombres o dos mujeres se sienten juntos.
(d) Hay 5 hombres y deben sentarse juntos.
(e) Hay 4 parejas casadas y cada pareja debe sentarse junta.

10. Determina el número de vectores $(x_1, \ldots, x_n)$ tales que x_i es 1 o 0 y

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k$$

11. Considera la retícula:



Si sólo podemos hacer movimientos hacia la izquierda o hacia arriba. ¿Cuantos caminos hay del punto A al punto B? ¿cuantas si es necesario pasar por el punto marcado con el círculo?

12. La siguiente identidad es conocida como la identidad combinatoria de Fermat:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1}, \quad \text{para } n \geq k.$$

Demuestra esta identidad utilizando un argumento combinatorio (sin cálculos).
Sugerencia: Considera el conjunto de números del 1 al n. ¿Cuántos subconjuntos de tamaño k tienen i como su elemento más grande?

13. Demuestra la igualdad:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Usando únicamente argumentos combinatorios.

Sugerencia

- ¿Cuántas selecciones hay para un comité de tamaño k y su presidente?
- ¿Cuántas selecciones hay para un presidente y el resto del comité?

14. Prueba usando argumentos combinatorios la igualdad:

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

Sugerencia: Considera un grupo de n hombres y m mujeres. ¿Cuantos grupos de tamaño r son posibles?