LISTA DE EXERCÍCIOS

LISTA 06

(Conjuntos, Funções, Cardinalidade)

Leitura necessária:

- *Matemática Discreta e Suas Aplicações, 6ª Edição (Kenneth H. Rosen):*
  - *Capítulo 2.1: Conjuntos*
  - *Capítulo 2.2: Operações com conjuntos*
  - *Capítulo 2.3: Funções*
  - *Capítulo 2.4: Sequências e Somatórios*

Exercícios.

1. (Rosen, 8th Edition, 2.1.7, adaptado) Determine quais desses pares de conjuntos são iguais:

a) $\{ 1, 2, 3 \}$ *e* $\{ 2, 3, 1 \}$

b) $\{ 2, 2, 2 \}$ *e* $\{ 2 \}$

c) $\{ 1, 3, 3, 3, 5, 5 \}$ *e* $\{ 5, 3, 1 \}$

d) $\{ \{1\} \}$ *e* $\{ 1, \{1\} \}$

e) $\{ \emptyset \}$ *e* $\emptyset$

2. (Rosen 2.1.7, adaptado) Determine se cada uma das afirmações abaixo e verdadeira ou falsa, considerando os conjuntos:

$A = \{1\}$

$B = \{\{1\}\}$

$C = \emptyset$

(a) $1 \in C$

(b) $\{1\} \in B$

(c) $A \subset C$

(d) $C \subset A$

(e) $A \in A$

(f) $A \subset A$

(g) $A \subseteq A$

3. (Rosen, 8th Edition, 2.1.13, adaptado) Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

(a) $x \in \{x\}$

(b) $\{x\} \subseteq \{x\}$

(c) $\{x\} \in \{x\}$

(d) $\{x\} \subseteq \{\{x\}\}$

(e) $\emptyset \subseteq \{x\}$

(f) $\emptyset \in \{x\}$

4. (Rosen 2.1.19, adaptado) Encontre o conjunto das partes para cada um dos conjuntos abaixo, em que a e b são elementos distintos:

a) $\{a\}$

B) $\{a, b\}$

c) $\{ \emptyset, \{\emptyset\} \}$

d) $\{a, \{\emptyset\}\}$

5. (Rosen 2.1.21, adaptado) Quantos elementos cada um destes conjuntos contém, considerando que a e b são elementos distintos:
(a) P({a, b, {a, b}})
(b) P({∅, a, b, {a}, {{a}}})
(c) P(P(∅))

6. (Rosen 2.1.23, adaptado) Sejam A = {1, 2, 3} e B = {x, y, z, w}. Encontre:
a) A × B
b) B × A

7. (Rosen, 8th Edition, 2.1.32, adaptado) Sejam A e B conjuntos, tal que A × B = ∅.
a) Se A = {1, 2}, o que você pode dizer sobre B?
b) Se B = {3, 5}, o que você pode dizer sobre A ∩ B?
c) O que você pode dizer sobre A e B?

8. (Rosen 2.1.31, adaptado) Explique por que A × B × C e A × (B × C) não são o mesmo conjunto.

9. (Rosen, 8th Edition, 2.2.21, adaptado) Mostre que, se A e B são conjuntos, então:
a) A − B = A ∩ B'.
b) (A ∩ B) ∪ (A ∩ B') = A.

10. (Rosen 2.2.18) Sejam A e B conjuntos. Usando manipulação de conectivos lógicos, mostre que:
a) (A ∪ B) ⊆ (A ∪ B ∪ C)
b) (A ∩ B ∩ C) ⊆ (A ∩ B)
c) (A - B) - C ⊆ A - C
d) (A - C) ∩ (C - B) = ∅
e) (B - A) ∪ (C - A) = (B ∪ C) – A

11. (Rosen 2.2.29, adaptado) Dados A e B conjuntos, determine se são V ou F e justifique:
(a) Se A ∪ B = A, então A ⊂ B
(b) Se A ∩ B = A, então A ⊂ B
(c) Se A − B = A, então existem conjuntos A e B tais que A ∩ B ≠ ∅
(d) Se A ∩ B = B ∩ A, então B ⊂ A
(e) Se A − B = B − A, então A − B = ∅

12. (Rosen 2.2.49) Determine $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *e* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ para cada A_i abaixo:
a) $A_i = \{-i, -i+1, ..., -1, 0, 1, ..., i-1, i\}$.
b) $A_i = \{-i, i\}$.
c) $A_i = [-i, i]$*, ou seja, o conjunto dos números reais x com* $-i \leq x \leq i$.
d) $A_i = [i, \infty)$*, ou seja, o conjunto dos números reais x com* $x \geq i$.

13. (Rosen, 8th Edition, 2.3.1, adaptado) Por que as afirmações a seguir são falsas?
a) f(x) = x/2 e uma função de Z para Z
b) f(x) = ±3x e uma função de N para N
c) f(x) = 1/x e uma função de R para R
d) f(x) = √x e uma função de R para R

14. (Rosen 2.3.4, adaptado) Encontre o domínio e a imagem das funções abaixo. Note que, em cada caso, para achar o domínio deve-se identificar o conjunto de elementos aos quais a função associa algum valor.
(a) A função que associa a cada número inteiro ao resto da sua divisão por 4.
(b) A função que associa o inteiro seguinte a um inteiro não negativo.
(c) A função que associa a uma string binaria o número de bits 1 da negação desta string.

15. (Rosen, 8th Edition, 2.3.9, adaptado) Encontre o valor de:
a) $\lceil 3/4 \rceil$
b) $\lfloor 7/8 \rfloor$
c) $\lceil -3/4 \rceil$
d) $\lfloor -7/8 \rfloor$
e) $\lceil 3 \rceil$
f) $\lfloor -1 \rfloor$
g) $\lfloor 1/2 + \lceil 3/2 \rceil \rfloor$
h) $\lfloor 1/2 \cdot \lfloor 5/2 \rfloor \rfloor$

16. (Rosen 2.3.12, adaptada) Determine se cada uma das funções de Z para Z e injetiva, sobrejetiva e bijetiva:
a) $f(n) = n - 1$
b) $f(n) = n^2 + 1$
c) $f(n) = n^3$
d) $f(n) = \lceil n^2/2 \rceil$
e) $f(n) = 2n$
f) $f(n) = -n$

17. (Rosen 2.3.38) Seja f uma função de R para R definida como f(x) = x^2. Encontre:
(a) $f^{-1}(1)$
(b) $f^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$
(c) $f^{-1}(\{x \mid x > 4\})$

18. (Rosen, 8th Edition, 2.3.52, adaptado) Demonstre que se x e um número real e m e um inteiro, então
$\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

19. Escreva os primeiros 5 números da sequência dada por:
$a_1 = 1$
$a_{2n} = 1 / (1 + a_n)$
$a_{2n+1} = 1 + a_n$

20. (Rosen 2.4.5, adaptado) Liste os 10 primeiros termos destas sequencias:
a) Sequência cujo n-ésimo termo e $2^n - n$ para $n >= 1$.
b) Sequência que começa com 2 e cada termo e o triplo do anterior.
c) Sequência cujo primeiro termo e 3, o segundo e 5 e cada termo seguinte e a soma dos dois termos anteriores.
d) Sequência cujo n-ésimo termo e o número de letras da palavra em português para o número n+1.

21. (Rosen, 8th Edition, 2.4.25, adaptado) Para cada uma das listas de inteiros abaixo, dê uma fórmula simples ou regra que gere os termos de uma sequência de inteiros que comece com a lista dada. Assumindo que a sua fórmula esteja correta, dê os próximos três elementos da sequência.
a) 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1,…
b) 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8,…
c) 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0,…
d) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192,…
e) 15, 8, 1,−6,−13,−20,−27,…
f) 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47,…
g) 2, 16, 54, 128, 250, 432, 686,…
h) 2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321,…

22. (Rosen 2.4.27) Qual o valor dos seguintes produtos:
(a) $\prod_{i=0}^{10} i$
(b) $\prod_{i=5}^{8} i$
(c) $\prod_{\{i=1]}^{100} (-1)^i$
(d) $\prod_{i=1}^{10} 2$
(e) $\prod_{i=1}^{4} (2i - 1)$

23. (Rosen 2.4.31, adaptado) Determine se cada um dos conjuntos abaixo e finito, infinito enumerável ou não enumerável. Para aqueles infinitos enumeráveis, exiba uma enumeração mostrando os 10 primeiros elementos:
(a) inteiros negativos
(b) inteiros múltiplos de 7
(c) conjunto { x em Q | x = p/2, p em Z^+ }
(d) intervalo (-1, 1) contido em R

24. (Rosen, 8th Edition, 2.5.6) Suponha que o Hotel de Hilbert esteja totalmente ocupado. Num certo dia, Hilbert resolve fechar todos os quartos do hotel com números pares para manutenção. Mostre que, mesmo assim, todos os hóspedes podem permanecer no hotel.

25. (Rosen, 8th Edition, 2.5.11) De um exemplo de dois conjuntos não-enumeráveis A e B tais que A ∩ B seja:
a) finito
b) infinito enumerável
c) infinito não enumerável

26. (Rosen 2.5.28) Mostre que o conjunto N × P e enumerável, em que P e o conjunto dos números primos.

27. Desafio! Mostre que, para quaisquer números reais distintos a, b, com a < b, o intervalo (a, b) e não-enumerável. Dica: Lembre-se de que sabemos que o intervalo [0,1) e não-enumerável, e use o Teorema de Schroder-Bernstein, que diz que, para quaisquer conjuntos A e B, temos que |A| = |B| se existe uma injeção de A em B e uma injeção de B em A.