



Experimento 4

Física Experimental IV

Grupo 3:

Felipe Mack (81335),
Gabriel Ferrauche (197314) e
Tiago de Paula (187679)

1 de Novembro de 2018

Resumo

A decomposição da luz em ondas de diferentes frequências decorre da dependência do índice de refração de um material do comprimento de onda da onda incidente.

Neste experimento, foi medida a relação de dispersão de um prisma de vidro a partir dos ângulos de desvio mínimo decorrentes da decomposição da luz emitida por lâmpadas de Hélio (He), Cádmio (Cd), Mercúrio (Hg) e Sódio (Na). Partindo das medidas de ângulo de desvio mínimo, este experimento teve como objetivo analisar a precisão deste aparato todo para medições desse tipo de natureza, utilizando como modelo a equação de Cauchy.

O resultado de tudo isso foi uma resolução espectral de 32 nm na faixa de luz visível, capaz de diferenciar até 11 faixas distintas de comprimentos de onda nesse espectro. Isso já seria uma quantia razoável para esse equipamentos, porém eles têm potencial para muito mais se o modelo teórico for calibrado mais precisamente.

1 Introdução

A dispersão cromática, observada no século XVII pelo físico e matemático britânico Isaac Newton (1643 - 1727), é um fenômeno de extrema importância, inclusive histórica. Decorre das observações de Newton ideias importantes sobre a Teoria das Cores.

O experimento relatado tem por objetivo o estudo da dispersão de um prisma de vidro a partir da decomposição da luz utilizando-se lâmpadas de diferentes espectros. Prismas, além de sua importância prática em instrumentos ópticos como periscópios, binóculos e lentes para algumas ametropias da visão, podem ser utilizados como espectrômetros.

Utilizando-se um espectrômetro, é possível dispersar um feixe de luz em frequências aproximadamente monocromáticas, o que permite um estudo detalhado das propriedades da luz visível. A construção desse espectro possibilita um estudo dirigido das diferentes faixas de ondas eletromagnéticas.

É possível obter uma equação que permita determinar o índice de refração de um dado material para diferentes comprimentos de onda que nele são incididas, a partir do desvio mínimo de dispersão de lâmpadas de diferentes constituições. Em suma, este experimento busca essa relação para um prisma de vidro, assim, determinando uma curva que possibilite a utilização do prisma como espectrômetro, também definindo a resolução espectral do mesmo.

2 Materiais e Métodos

Os materiais utilizados para o experimento foram: goniômetro, lâmpadas de diferentes elementos químicos, lupa e prisma de numeração 17.

para o início da coleta de dados, o primeiro passo se resumiu a calibrar o goniômetro. Para tal, o prisma foi retirado do goniômetro, a luneta de leitura foi destravada e alinhada com a entrada de luz da lâmpada de Sódio, travando a luneta. Na sequência, o foco da luneta foi ajustado de para que a cruz no interior da mesma pudesse ser visto de forma nítida, assim como a fenda de entrada de luz; o parafuso de ajuste fino foi empregado para garantir que a cruz se alinhasse com o lado fixo da fenda. Para finalizar o ajuste, o disco graduado do goniômetro foi liberado seu "zero" foi alinhado com o "zero" da luneta.

Para próxima etapa do experimento, foi preciso determinar o ângulo α do ápice do prisma, isto é, a separação angular entre as duas faces do prisma mais próximas à fonte de luz. Para isto, considerou-se os dois raios luz L_1 e L_2 refletidos pelas faces do prisma, e o resultado geométrico que mostra que $\Delta\theta_L = \theta_{L_1} + 360^\circ - \theta_{L_2} = 2\alpha$, ou seja, a separação angular entre os raios é igual ao dobro do ápice, como ilustrado abaixo.

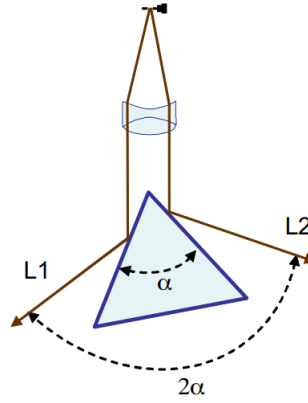


Figura 1: Diagrama para a obtenção de α

Com o ápice do prisma devidamente determinado, a fim de determinar o coeficientes A e B da equação de Cauchy com dois termos, indicada como uma aproximação apropriada no espectro de luz visível [Emi69]:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (1)$$

Mostrando-se necessário coletar dados para o ângulo de desvio mínimo δ_{\min} das raia espectrais de dispersão e determinar o índice de refração através da relação:

$$n(\delta_{\min}) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + \delta_{\min}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (2)$$

Assim, possibilitando a construção de um gráfico de n por $1/\lambda^2$ em que A e B equivalem, respectivamente, aos coeficientes linear e angular do ajuste.

Para determinação dos desvios mínimos de cada raia espectral, lâmpadas baseadas em diferentes elementos químicos foram empregadas, no caso, os elementos utilizados foram: Sódio, Mercúrio, Cádmio e Hélio. O procedimento experimental consistia da observação das raia espectrais mais intensas geradas a partir da luz emitida pelas lâmpadas, de forma que o ângulo mínimo de dispersão de cada uma delas fosse medido com auxílio do goniômetro. Na sequência, os comprimentos de onda de cada raia foi obtido a partir de valores tabelados na literatura. Foram coletados dados para as 3 raia mais intensas de cada lâmpada, com exceção do Hélio, em que 4 raia puderam ser observadas com clareza.

Por fim, com os dados coletados, foi possível determinar os coeficiente A e B e por fim, utilizando a equação

2 e seguinte inversão da equação de Cauchy:

$$\lambda = \sqrt{\frac{B}{n(\delta_{\min}) - A}} \quad (3)$$

foi gerada uma curva que pode ser empregada como espectrômetro.

2.1 Incertezas associadas

O único tipo de medição experimental coletado diretamente foi o de ângulos, para os quais a resolução da medida era $\text{res} = 1'$. Com base nisso, foram atribuídas duas incertezas, a incerteza da leitura, que segue uma distribuição triangular de $\pm \text{res}/2$, e a incerteza de paralaxe do posicionamento na leitura, que poderia mover o encaixe dos minutos para as posições adjacentes, que foi calculada com uma distribuição retangular de $\pm \text{res}$. Isso nos leva a incerteza acumulada da medida, que foi feita com base nas recomendações do GUM[08].

$$\begin{aligned} u_{\text{leitura}} &= \frac{\text{res}}{2\sqrt{6}} = \text{res} \frac{\sqrt{6}}{12} \\ u_{\text{paralaxe}} &= \frac{2 \text{ res}}{2\sqrt{3}} = \text{res} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Delta\delta_{\min} = \Delta\theta_L = u_{\text{medida}} &= \sqrt{u_{\text{leitura}}^2 + u_{\text{paralaxe}}^2} = \text{res} \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

Todos os outros valores, calculados a partir desses ângulos e de valores referenciados de outros trabalhos, tiveram suas incertezas encontradas por meio da propagação das incertezas iniciais. Como é o caso da equação de incerteza abaixo, alcançada pela eq. teórica do α , que veio diretamente da figura 1.

$$\Delta\alpha = \sqrt{\Delta L_1^2 \frac{1}{4} + \Delta L_2^2 \frac{1}{4}} = \Delta\theta_L \frac{\sqrt{2}}{2}$$

O mesmo foi feito para a equação do índice de refração (2), como segue abaixo:

$$\begin{aligned} \Delta n &= \sqrt{\Delta\alpha^2 \left(\frac{\partial n}{\partial \alpha}\right)^2 + \Delta\delta_{\min}^2 \left(\frac{\partial n}{\partial \delta_{\min}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\Delta\alpha^2 \frac{\sin^2(\delta_{\min}/2)}{\sin^4(\alpha/2)} + \Delta\delta_{\min}^2 \frac{\cos(\alpha + \delta_{\min}) + 1}{1 - \cos(\alpha)}} \end{aligned}$$

A equação de incerteza mais importante aqui talvez seja a eq. 4, abaixo, que é usada para analisar a resolução final do equipamento.

$$\Delta\lambda = \sqrt{\Delta A^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial A}\right)^2 + \Delta B^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial B}\right)^2 + \Delta\alpha^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\right)^2 + \Delta\delta_{\min}^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \delta_{\min}}\right)^2} \quad (4)$$

Tendo em mente que $n(\delta_{\min})$ se refere a eq. 2, os fatores da eq. 4 são os dados abaixo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial A}\right)^2 &= \frac{B}{4(n(\delta_{\min}) - A)^3} \\ \left(\frac{\partial \lambda}{\partial B}\right)^2 &= \frac{1}{4B(n(\delta_{\min}) - A)} \\ \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\right)^2 &= \frac{B}{16(n(\delta_{\min}) - A)^3} \frac{\sin^2(\delta_{\min}/2)}{\sin^4(\alpha/2)} \\ \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \delta_{\min}}\right)^2 &= \frac{B}{16(n(\delta_{\min}) - A)^3} \frac{\cos(\alpha + \delta_{\min}) + 1}{1 - \cos(\alpha)} \end{aligned}$$

No caso das incertezas de A e B , o seu valor foi extraído pelo modelo de regressão linear por mínimos quadrados, como descrito no final do Guia de Incertezas [08], bem como os valores utilizados para esses parâmetros. A única exceção sobre a incerteza dos valores é com os comprimentos de onda λ que foram retirados da referência usada como base do experimento [Gus17], e, portanto, não possuem incertezas associadas.

3 Resultados

Medida	Valor
θ_{L_1}	$56^\circ 30' 00'' \pm 36''$
θ_{L_2}	$298^\circ 20' 00'' \pm 36''$
α	$59^\circ 05' 00'' \pm 25''$

Tabela 1: Medidas para o cálculo da abertura do prisma

As primeiras medições feitas após toda a calibração do equipamento foram do ápice do prisma, cujos valores estão detalhados na tabela 1. A partir desse valor da abertura α e dos desvios mínimos tabelados em 2, foram encontrados os índices de refração do prisma para cada linha espectral (pela relação 2), apresentados na mesma tabela.

Lâmpada	Comprimento de onda	Desvio mínimo	Índice de refração
Na	589.55 nm	$48^\circ 05' 00'' \pm 37''$	1.632 ± 0.009
Na	567.95 nm	$47^\circ 58' 00'' \pm 37''$	1.631 ± 0.009
Na	447.10 nm	$49^\circ 42' 00'' \pm 37''$	1.649 ± 0.009
Hg	545.48 nm	$48^\circ 20' 00'' \pm 37''$	1.635 ± 0.009
Hg	577.50 nm	$48^\circ 14' 00'' \pm 37''$	1.634 ± 0.009
Hg	435.11 nm	$49^\circ 52' 00'' \pm 37''$	1.651 ± 0.009
He	586.72 nm	$48^\circ 00' 00'' \pm 37''$	1.631 ± 0.009
He	500.77 nm	$48^\circ 50' 00'' \pm 37''$	1.640 ± 0.009
He	446.57 nm	$49^\circ 38' 00'' \pm 37''$	1.648 ± 0.009
He	667.80 nm	$47^\circ 18' 00'' \pm 37''$	1.624 ± 0.009
Cd	480.73 nm	$48^\circ 52' 00'' \pm 37''$	1.640 ± 0.009
Cd	636.05 nm	$47^\circ 37' 00'' \pm 37''$	1.627 ± 0.009
Cd	471.95 nm	$48^\circ 58' 00'' \pm 37''$	1.641 ± 0.009

Tabela 2: Desvio mínimo medido para cada comprimento de onda

Com isso, os últimos dados restantes vieram do roteiro do experimento [Gus17], que são os comprimentos de onda associados às linhas, permitindo a montagem do gráfico 2 e os valores recolhidos da regressão (na tab. 3).

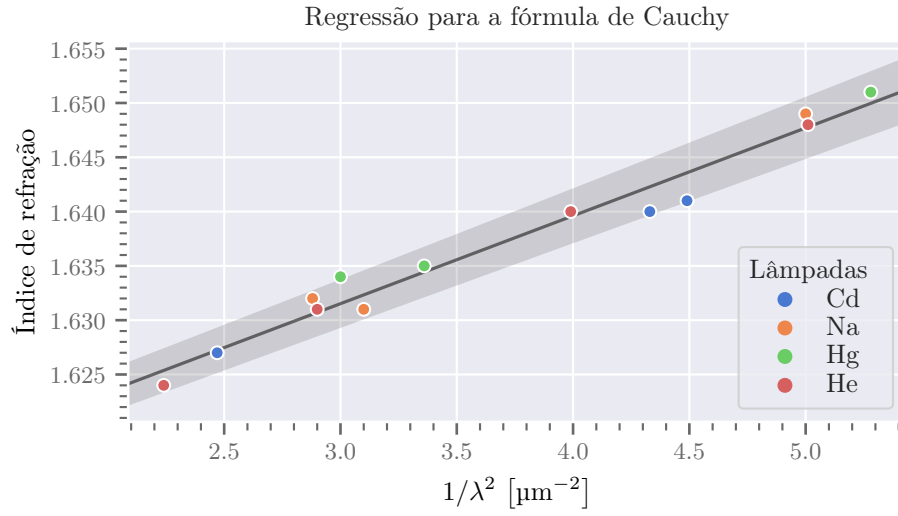


Figura 2: Linearização da relação $n \times \lambda$ pela aproximação com a fórmula de Cauchy de dois termos (1)

Coefficiente	Medida
A	1.607 ± 0.008
B	$0.0080 \pm 0.0004 \mu\text{m}^2$

Tabela 3: Coeficientes da fórmula de Cauchy

Por fim, com os valores da regressão, a fórmula de Cauchy pôde ser utilizada na forma inversa (3) para montar a relação de dispersão na figura 3, que pode ser usado em conjunto com os materiais utilizados como um espectrômetro. As faixas de incerteza foram calculadas pela eq. 4.

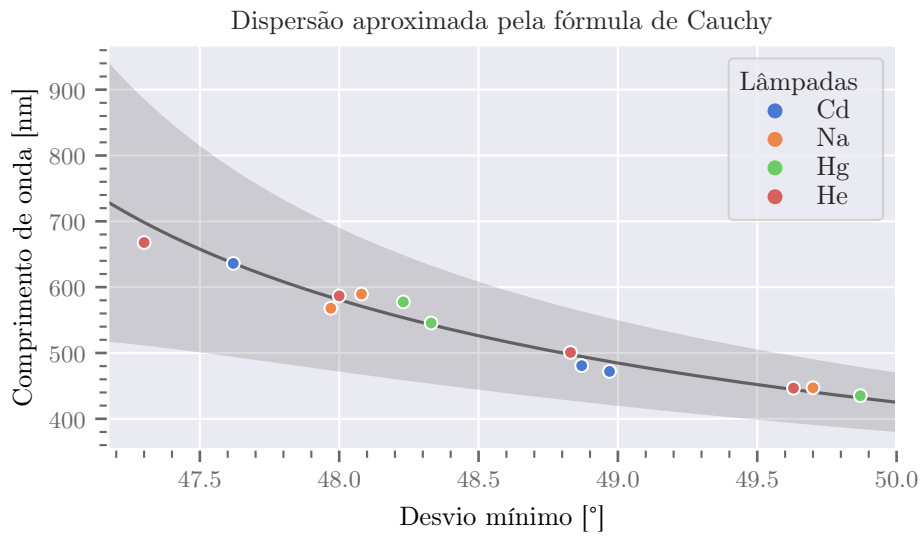


Figura 3: Relação para espectrometria, com as bandas de incerteza

4 Discussão

Com a mesma fórmula da incerteza propagada ao comprimento de onda (eq. 4) na curva de dispersão luminosa (fig. 3) pode ser estimado uma resolução espectral para o espectrômetro montado. Assumindo que o aparato seja utilizado apenas para desvios mínimos dentro do intervalo dos valores coletados, presentes na tabela 2, o valor mínimo da incerteza do comprimento de onda associado seria $\min(\Delta\lambda_i) = 45 \text{ nm}$, o que serve para diferenciar até:

$$\frac{\max(\lambda_i) - \min(\lambda_i)}{\min(\Delta\lambda_i)} = \frac{670 \text{ nm} - 440 \text{ nm}}{45 \text{ nm}} \approx 5 \text{ faixas}$$

Agora, trabalhando no espectro visível, os limites mudam para 380 nm e 750 nm, que estão ligados a $51^\circ 5'$ e $47^\circ 5'$, respectivamente, de acordo com o ajuste do gráfico 3. Se for assumir que o equipamento pode ser utilizado nessa banda, a estimativa da resolução espectral reduz para 32 nm. Isso daria uma possibilidade de até $(750 \text{ nm} - 380 \text{ nm})/32 \text{ nm} \approx 11$ faixas diferenciáveis nessa banda.

Uma opção que, apesar de improvável, serviria na redução dessa estimativa é a repetição das medidas dos desvios mínimos, de maneira manual ou automática, de modo a reduzir a incerteza associada a essa variável, ou seja, $\Delta\delta_{\min} \approx 0$, resultando em uma nova fórmula para a incerteza:

$$\Delta\lambda = \sqrt{\Delta A^2 \left(\frac{\partial\lambda}{\partial A}\right)^2 + \Delta B^2 \left(\frac{\partial\lambda}{\partial B}\right)^2 + \Delta\alpha^2 \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right)^2} \quad (5)$$

Com isso, a resolução espectral esperada chegaria a 25 nm, uma melhoria razoável, porém impraticável.

O ideal, no entanto, seria refazer esse experimento com calma e foco em garantir o mínimo de incerteza. Mais lâmpadas de compostos variados seriam bem-vindas, mas o principal seria repetir as medições de ângulos em momentos de tempo espaçados entre si e em ordens diferentes, tudo, claro, com uma calibração impecável do equipamento. Outra coisa que aumentaria a coerência da estimativa da resolução espectral, mesmo que possivelmente aumentando seu valor, seria coletar inúmeras fontes diferentes para a aquisição do valor de λ para a regressão inicial e montar uma distribuição da incerteza de cada valor.

5 Conclusão

Por mais que a resolução espectral possa ser melhorada, assim como as fontes de incerteza como um todo, o experimento foi capaz de relacionar muito bem os dados laboratoriais com os valores teóricos e as referências experimentais. O espectrômetro montado se provou mais do que capaz de ser usado para diferenciar linhas espectrais, no caso até 11 faixas, o que serve para casos nem tão preocupados com a acurácia do resultado. Porém, o mais importante de tudo é que esse experimento foi capaz de confirmar que esses mesmos materiais são mais do que o necessário para realizar espectrometrias ainda mais precisas, dado tempo e esforço o suficiente.

Referências

- [Emi69] Emil Wolf, Max Born. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. 4^a ed. Pergamon Press, Oxford, 1969.
- [08] *Guia para a expressão de incerteza de medição*. INMETRO. 2008. URL: http://www.inmetro.gov.br/noticias/conteudo/iso_gum_versao_site.pdf.
- [Gus17] Gustavo S. Wiederhecker. «Dispersão do índice de refração». Em: IFGW, Unicamp. 2017.