Lista de Exercícios Avaliativa 1

MC458 - 2s2020

Tiago de Paula Alves

187679

CORRIGIR A QUESTÃO **1**.

1.

a) Vale a pena notar aqui que $\ln(n) \in o\left(n^{\varepsilon}\right)$ para qualquer $\varepsilon > 0$, pois

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\varepsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1}}{\varepsilon\, n^{\varepsilon-1}} = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon}} = 0$$

Com isso, podemos escolher $g(n) = \dfrac{n^k}{\ln n}$ como contraexemplo, pois $g \in o\left(n^k\right)$ e $g \in \omega\left(n^{k-\varepsilon}\right)$.

Demonstração. Suponha $k \geq 1$. Seja $g : \mathbb{R}^{>1} \mapsto \mathbb{R}^{+}$ dada por $g(x) = \dfrac{x^k}{\ln x}$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x^k} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^k / \ln x}{x^k} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como g é contínua e monotônica para $x > ke$, então o limite também vale para os naturais, ou seja, $g \in o\left(n^k\right)$.

Suponha agora um $\varepsilon > 0$. Como x^{ε} e $\ln x$ são contínuas, diferenciáveis e crescem indefinidamente, então comparando $g(x)$ com $x^{k-\varepsilon}$, teremos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x^{k-\varepsilon}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^k/\ln x}{x^k/x^{\varepsilon}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\varepsilon}}{\ln x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}{x^{-1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \varepsilon x^{\varepsilon} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

Novamente, como as funções são contínuas e monotônicas, a comparação continua válida para os naturais. Então, podemos afirmar que para todo $\varepsilon > 0$, $g \in \omega\left(n^{k-\varepsilon}\right)$ e, por isso, $g \notin O\left(n^{k-\varepsilon}\right)$.

Por fim, considerando $g^\star : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ a restrição de g aos naturais dada por:

$$
g^\star(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ \dfrac{n^k}{\ln(n)} & \text{se } n > 1 \end{cases}
$$

Como $g^\star(n) = g(n)$ para $n > 1$, o crescimento assintótico delas é o mesmo. Logo, teremos que $g^\star \in o\left(n^k\right)$, mas não existe $\varepsilon > 0$ tal que $g^\star \in O\left(n^{k-\varepsilon}\right)$. Portanto, Chorãozinho está errado. ∎

b)

Demonstração. Suponha uma função $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $g \in O\left(n^{k-\varepsilon}\right)$, para um real $\varepsilon > 0$. Logo, temos um $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, uma constante $c_1 \in \mathbb{R}^+$ e um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n > n_1$, sabemos que $0 \leq g(n) \leq c_1 n^{k-\varepsilon}$. Suponha ainda uma constante $c_2 \in \mathbb{R}^+$ qualquer e considere o natural $n_2 = \left\lceil (c_1/c_2)^{1/\varepsilon} \right\rceil$.

Então, para um natural $n > n_2$, teremos que

$$n > n_2 = \left\lceil (c_1/c_2)^{1/\varepsilon} \right\rceil \geq \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{1/\varepsilon}$$

Como x^ε é estritamente crescente, já que $\varepsilon > 0$, então $n^\varepsilon > \frac{c_1}{c_2}$. Logo,

$$c_1 n^{k-\varepsilon} = c_1 \frac{n^k}{n^\varepsilon} < c_1 \frac{n^k}{c_1/c_2} = c_2 n^k$$

Assim, seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e suponha $n > n_0$, ou seja, $n > n_1$ e $n > n_2$. Logo,

$$0 \leq g(n) \leq c_1 n^{k-\varepsilon} < c_2 n^k$$

Ou seja, para qualquer c_2 positivo, existe n_0 tal que $0 \leq g(n) < c_2 n^k$ para $n > n_0$. Portanto, $g \in o\left(n^k\right)$. Como $g \in O\left(n^{k-\varepsilon}\right)$ era arbitrária, Xitoró está correto. ■

2. Aplicando a fórmula de recorrência iterativamente, podemos ver que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2n - 1 + T(n-1) \\
&= 2n - 1 + 2(n-1) - 1 + T(n-2) \\
&= 2\,[n + (n-1)] - [1+1] + T(n-2) \\
&= 2\,[n + (n-1)] - [1+1] + 2(n-2) - 1 + T(n-3) \\
&= 2\,[n + (n-1) + (n-2)] - [1+1+1] + T(n-3) \\
&= \cdots \\
&= 2\,[n + (n-1) + \cdots + 2] - [1 + \cdots + 1] + T(1) \\
&= 2\sum_{i=2}^{n} i - \sum_{i=2}^{n} 1 + 1 \\
&= 2\left[\frac{n(n+1)}{2} - 1\right] - (n-1) + 1 \\
&= n^2
\end{aligned}
$$

Demonstração de $T(n) = n^2$.

Caso base: Para $n = 1$, temos que $T(1) = 1 = 1^2$, como esperado.

Passo indutivo: Suponha que $T(n) = n^2$ para algum $n \geq 1$. Assim, podemos aplicar o método da substituição em $T(n+1)$.

$$
\begin{aligned}
T(n+1) &= T(n) + 2(n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2n + 2 - 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}
$$

Portanto, como a fórmula fechada é válida para $T(n)$ quando $n = 1$ ou quando $T(n-1) = (n-1)^2$, o princípio da indução finita nos permite afirmar que $T(n) = n^2$ no domínio proposto. ■

3. Observando o tempo do algoritmo A, como o expoente crítico é $\log_2 8 = 3$ e $n^2 \in O\left(n^{3-\varepsilon}\right)$ com $\varepsilon = 1 > 0$, o teorema Master nos diz que a recorrência determina a ordem de crescimento do tempo do algoritmo, isto é, $T_A(n) \in \Theta\left(n^3\right)$.

Agora, para o algoritmo B, como $f(n) = n^2$, então $T_B(n) \in \Omega\left(n^2\right)$. Pelo teorema Master, para que α determine o crescimento da função queremos que o expoente crítico seja $2 < \log_3 \alpha$, isto é, $\alpha > 3^2 = 9$. Com essa condição, $T_B(n) \in \Theta\left(n^{\log_3 \alpha}\right)$.

Considerando as variáveis que temos controle, para que $T_B(n) \in o\left(T_A(n)\right)$, α deve ser escolhido de modo que $n^{\log_3 \alpha} \in o\left(n^3\right)$. Logo, teremos que $\log_3 \alpha < 3$, ou seja, $\alpha < 3^3 = 27$. Como α deve ser inteiro, a escolha de maior valor é $\alpha = 26$.