D L M M J V S

Tiago de Paula Alves RA: 187679

Tiago de Paula Alves

CORRIGIR A QUESTÃO: 3

1 Considere que uma matriz A de dimensões $m \times n$ é crescente se cada linha de M é estritamente crescente e cada coluna também é estritamente crescente, ou seja, para todo $1 \leq i < m$ e $1 \leq j \leq n$ temos que $A(i,j) < A(i+1,j)$ e para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j < n$ temos que $A(i,j) < A(i,j+1)$.

Demonstração: Vamos provar por indução forte em n que para toda matriz crescente M de ~~dimen~~ dimensões $2^n \times 2^n$ é possível determinar se existem e quais são os índices i e j tais que $M(i,j) = x$, para um número x arbitrário.

Caso Base: $n = 0$. Seja então M uma matriz crescente 1×1, ou seja, uma matriz com apenas um elemento. Se $M(1,1) = x$, temos então $i = j = 1$. Caso contrário, ~~caso~~ esses índices não existem.

Hipótese Indutiva: Suponha um natural n tal que para todo $k \leq n$ e qualquer matriz crescente M de dimensões $2^k \times 2^k$ é possível se existem e quais são os índices i e j tais que $M(i,j) = x$.

Passo indutivo: Suponha uma matriz crescente M de dimensões $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ e um número x qualquer. Considere ainda as partições de M a seguir, com dimensões iguais:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

Desse modo, M_{11} também é crescente, mas com dimensões $(2^{n+1}/2) \times (2^{n+1}/2) = 2^n \times 2^n$. O mesmo vale para as submatrizes M_{12}, M_{21} e M_{22}.

Caso 1: $M(2^n, 2^n) = x$. Então temos $i = j = 2^n$ tais que $M(i,j) = x$, como proposto.

Caso 2: $M(2^n, 2^n) < x$. Note que $M(2^n, 2^n)$ é o maior valor de M_{11}, já que esse é o último elemento da úlima coluna de M_{11}. Portanto, $M_{11}(i',j') \leq M_{11}(2^n, 2^n) = M(2^n, 2^n) < x$ ~~então~~ para todo $1 \leq i,j \leq 2^n$, então não pode existir uma posição com valor x em M_{11}.

Assim, como $n \leq n$ e M_{21} é crescente e $2^n \times 2^n$, podemos, de acordo com a hipótese indutiva, determinar se existem e quais são os índices i' e j' tais que $M_{21}(i',j') = x$. Se eles existirem, podemos tomar $i = i' + 2^n$ e $j = j'$ de forma que $M(i,j) = M_{21}(i',j') = x$, concluindo a demonstração.

Por outro lado, se os índices não existirem em M_{21}, temos que as mesmas condições se aplicam à M_{12}. Portanto, se existirem i' e j' para M_{12}, podemos tomar $i = i'$ e $j = j' + 2^n$ de maneira que $M(i,j) = M_{12}(i',j') = x$, como proposto.

Se esses índices também não existirem para M_{12}, podemos aplicar a hipótese indutiva em M_{22}. Se os índices não existirem M_{22}, então eles não existem em nenhuma das partições e, portanto, não existem em M. Caso contrário, podemos tomar $i = i' + 2^n$ e $j = j' + 2^n$ em que $M(i,j) = M_{22}(i',j') = x$.

Caso 3: $M(2^n, 2^n) > x$. Note ~~que~~ agora que $M(2^n, 2^n)$ é menor que qualquer valor de M_{22}, portanto x não aparece em ~~nenha~~ nenhuma posição de M_{22}.

Assim como no caso anterior, teremos M_{11}, M_{21} e M_{12}, que podem ser resolvidas pela hipótese indutiva. Caso não existam os índices em nenhuma dessas matrizes, então x não existe em M. ∎

Assim, dados um número x e uma matriz crescente M de dimensões $n \times n$, onde n é uma potência de 2, podemos encontrar se existem e quais são os índices i e j em que $M(i,j) = x$. Nesse caso, um algoritmo baseado na demonstração acima teria seu pior caso quando x não pode ser encontrado em M. Assim, considerando a entrada M, teríamos que:

$$T(M) = \begin{cases} T(M_{11}) + T(M_{12}) + T(M_{21}) + \Theta(1); & \text{se } x > M(n/2, n/2) \\ T(M_{12}) + T(M_{21}) + T(M_{22}) + \Theta(1); & \text{se } x < M(n/2, n/2) \end{cases}$$

$$= \Theta(1) + T(M_{12}) + T(M_{21}) + \begin{cases} T(M_{11}); & \text{se } x > M(n/2, n/2) \\ T(M_{22}); & \text{se } x < M(n/2, n/2) \end{cases}$$

Agora, considerando o tempo em função da altura n, temos que $T(M) = T(n)$ e que $T(M_{11}) = T(M_{12}) = T(M_{21}) = T(M_{22}) = T(n/2)$. Portanto, a recorrência será:

$$T(n) = \Theta(1) + T(n/2) + T(n/2) + T(n/2)$$

$$= 3T(n/2) + \Theta(1)$$

$$= \Theta(n^{\lg 3})$$ (pelo Teorema Master)

② Suponha um natural $n \geq 1$ tal que para toda árvore T com $1 \leq k < n$ nós e raiz r podemos encontrar $DMFP(r)$ e $DMFD(r)$ e podemos rotular $r.D = |DMFP(r) - DMFD(r)|$. Suponha também uma árvore T com n nós e raiz r.

Caso 1: r não tem filhos. Logo, também podemos considerá-lo como a única folha de T. Assim, as distâncias da folha mais próxima e da folha mais distante são 0, isto é, $DMFP(r) = DMFD(r) = 0$. Portanto, $r.D = |0-0| = 0$.

Caso 2: r tem apenas um filho. Seja então r_F esse filho e T_F a subárvore com raiz no vértice r_F. Como $T_F = T \setminus \{r\}$ e $n \geq 2$, então T_F tem $1 \leq k = n-1 < n$ nós. Portanto, pela hipótese indutiva, podemos encontrar $DMFP(r_F)$ e $DMFD(r_F)$ e rotular o campo $r_F.D$. Note que todas as folhas de T também estão em T_F, sendo que r_F é o único caminho de r para elas. Logo, as distâncias da folha mais próxima e da mais distante são dadas por $DMFP(r) = DMFP(r_F) + 1$ e $DMFD(r) = DMFD(r_F) + 1$. Portanto, temos que

$$r.D = |DMFP(r) - DMFD(r)| = |DMFP(r_F) - DMFD(r_F)| = r_F.D$$

Caso 3: r tem 2 filhos. Sejam então r_e e r_d estes filhos e T_e e T_d as subárvores enraizadas em cada um deles. Como $T_e \subseteq T \setminus \{r\}$, então T_e tem $1 \leq k_e \leq n-1 < n$ nós, logo, podemos encontrar $DMFP(r_e)$ e $DMFD(r_e)$ e rotular $r_e.D$. Do mesmo modo, $T_d \subseteq T \setminus \{r\}$ e T_d tem $1 \leq k_d < n$

nós, então temos $DMFP(r_d)$, $DMFD(r_d)$ e $r_d.D$.

Note que a folha mais próxima de r passando por r_e está à $DMFP(r_e)+1$ de distância, e passando por r_d está à $DMFP(r_d)+1$. Portanto, temos que

$$
\begin{aligned}
DMFP(r) &= \overset{\min}{\cancel{\max}}\{DMFP(r_e)+1, DMFP(r_d)+1\} \\
&= \underset{\min}{\cancel{\max}}\{DMFP(r_e), DMFP(r_d)\} + 1
\end{aligned}
$$

De forma similar, temos que $DMFD(r) = \overset{\max}{\cancel{\min}}\{DMFD(r_e), DMFD(r_d)\} + 1$. Com isso, podemos rotular $r.D = |DMFP(r) - DMFD(r)|$.

③ Dada uma árvore ternária T não-vazia com raiz R e chave r, vamos cosiderar o Valor do nó Mais à Esquerda (VME) de T como:

$$VME(T) = \begin{cases} VME(T_e) & \text{; se } T \text{ tem uma subàrvore esquerda } T_e \text{ não-vazia.} \\ R.r & \text{; caso contrário} \end{cases}$$

Do mesmo modo, seja o Valor do nó Mais à Direita (VMD) dado por:

$$VMD(T) = \begin{cases} VMD(T_d) & \text{; se } T \text{ tem uma subárvore direita } T_d \text{ não-vazia.} \\ R.r & \text{; caso contrário} \end{cases}$$

Note que para uma ~~árvore~~ Árvore de Tusca T não-vazia, VME(T) é o menor valor presente em T e VMD(T) é o maior valor de T. Com isso, vamos provar por indução forte que é possível verificar se uma árvore ternária é uma Árvore de Tusca, utilizando os valores VME e VMD da árvore.

Demonstração para árvores não-vazias.

Suponha um natural positivo n tal que para toda árvore ternária com $1 \leq k < n$ nós é possível calcular as medidas VME e VMD dela e verificar se ela é uma Árvore de Tusca (ADT). Suponha ainda uma árvore ternária T com n nós e seja v a raiz de T, com T_e, T_c e T_d sendo as subárvores esquerda, central e direita de T, respectivamente.

Assim, considere as seguintes condições necessárias e suficientes para que T seja uma ADT:

a) T_e é uma ADT e todos os valores de T_e são menores que v.r;

b) T_c é uma ADT e todos os valores de T_c são iguais à v.r;

c) T_d é uma ADT e todos os valores de T_d são maiores que v.r.

Observando a subárvore esquerda, se T_e é vazia, então ela é uma ADT e, por vacuidade, todos seus valores são menores que v.r, ou seja, a condição (a) foi atendida. Além disso, por definição, temos que $VME(T) = v.r$.

Se T_e não é vazia, como $T_e \subseteq T \setminus \{v\}$, então ela tem $1 \leq k_e < n$ nós e, pela hipótese indutiva, sabemos se ela é uma ADT e ~~temos~~ temos os valores VME e VMD dela.

Caso 1: T_e não é uma ADT. Logo, a condição (a) não foi atendida.

Caso 2: T_e é uma ADT e $VMD(T_e) \geq v.r$. Então, temos pelo menos um nó em T_e cujo valor não é menor que v.r. Portanto, a condição (a) não foi atendida.

Caso 3: T_e é uma ADT e $VMD(T_e) < v.r$. Como $VMD(T_e)$ é o maior valor em T_e, então todos os valores de T_e são menores que v.r e, como ela é uma ADT, a condição (a) foi atendida.

Por fim, como os casos são exaustivos para T_e não-vazia, conseguimos analisar a condição (a) e temos, como T_e é não-vazia, que ~~VME~~ $VME(T) = VME(T_e)$.

De forma similar para a subárvore central, se T_c é vazia, então a condição (b) foi atendida. Caso contrário, T_c tem $1 \leq k_c < n$ nós, então sabemos os valores VME e VMD dela e se ela é uma ADT. Nesse caso, a condição (b) só é garantida quando T_c é uma ADT com $VME(T_c) = v.r = VMD(T_c)$.

Agora, para a subárvore direita, se T_d for vazia, a condição (c) será garantida e teremos que $VMD(T) = v.r$. Se ela não for vazia, então T_d deve ter $1 \leq k_d < n$ nós, portanto temos VME, VMD e se ela é uma ADT, sendo que $VMD(T) = VMD(T_d)$. Além disso, para T_d não-vazia, a condição (c) será atendida se e somente se $VME(T_d) > v.r$.

Por fim, conseguimos calcular $VME(T)$ e $VMD(T)$ em cada caso possível, além de analisar com certeza as condições (a), (b) e (c). Então, podemos que T é uma ADT se e somente se essas três condições são verdadeiras para T, ou seja, podemos verificar se T é uma ADT.

∎

Demonstração para árvores quaisquer.

Para uma ávore ternária T qualquer, se T é vazia então, por definição T é uma Árvore de Tusca. Caso contrário, como T é não-vazia, então podemos verificar se ela é uma ADT utilizando as medidas VME e VMD, como demonstrado anteriormente. ∎