

Lista de Exercícios Avaliativa 1

MC458 - 2s2020

Tiago de Paula Alves

187679

CORRIGIR A QUESTÃO ??.

1. Considere que uma matriz A de dimensões $m \times n$ é crescente se cada linha de M é estritamente crescente e cada coluna também é estritamente crescente, ou seja, para todo $1 \leq i < m$ e $1 \leq j \leq n$ temos que $A_{i,j} < A_{i+1,j}$, e para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j < n$ temos que $A_{i,j} < A_{i,j+1}$.

Demonstração. Vamos provar por indução forte em n que para toda matriz crescente M de dimensões $2^n \times 2^n$ é possível determinar se existem e quais são os índices i e j tais que $M(i, j) = x$, para um número x arbitrário.

Caso base: $n = 0$. Seja então M uma matriz crescente 1×1 , ou seja, uma matriz com apenas um elemento. Se $M(1, 1) = x$, temos os que $i = j = 1$. Caso contrário, esses índices não existem.

Passo indutivo: Suponha um natural $n \geq 1$ tal que para todo $k \leq n$ e qualquer matriz crescente M de dimensões $2^k \times 2^k$ é possível determinar se existem e quais são os índices i e j tais que $M(i, j) = x$. Suponha também uma matriz crescente M de dimensões $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ e um número x qualquer.

Considere as partições de M a seguir de dimensões iguais:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

Desse modo, M_{11} também é crescente, mas com dimensões $(2^{n+1}/2) \times (2^{n+1}/2) = 2^n \times 2^n$. O mesmo vale para as submatrizes M_{12} , M_{21} e M_{22} .

Caso 1: $M(2^n, 2^n) = x$. Então temos $i = j = 2^n$ tais que $M(i, j) = x$, como proposto.

Caso 2: $M(2^n, 2^n) < x$. Note que $M(2^n, 2^n)$ é o maior valor de M_{11} , ou seja, $M_{11}(i, j) \leq M(2^n, 2^n)$ para todo $1 \leq i, j \leq 2^n$. Portanto, não pode existir uma posição com valor x em M_{11} .

Assim, como $n \leq n$ e M_{21} é crescente e $2^n \times 2^n$, podemos, de acordo com a hipótese indutiva, determinar se existem e quais são os índices i' e j' tais que $M_{21}(i', j') = x$. Se eles existirem, podemos tomar $i = i'$ e $j = j' + 2^n$ de forma que $M(i, j) = M_{21}(i', j') = x$, concluindo a demonstração.

Por outro lado, se os índices não existem em M_{21} , temos que as mesmas condições se aplicam à M_{12} . Portanto, se existirem i' e j' para M_{12} , podemos tomar $i = i' + 2^n$ e $j = j'$ de maneira que $M(i, j) = M_{12}(i', j') = x$, como proposto.

Se esses índices também não existirem para M_{12} , podemos aplicar a hipótese indutiva em M_{22} . Se os índices não existirem em M_{22} , então eles não existem em nenhuma das partições e, portanto, não existem em M . Caso contrário, podemos tomar $i = i' + 2^n$ e $j = j' + 2^n$ em que $M(i, j) = M_{22}(i', j') = x$.

Caso 3: $M(2^n, 2^n) > x$. Note agora que $M(2^n, 2^n)$ é menor que qualquer valor de M_{22} , já que $2^n < i, j \leq 2^{n+1}$, sendo i e j índices válidos para M_{22} . Portanto, x não aparece em nenhuma posição de M_{22} .

Assim como no caso anterior, teremos M_{11} , M_{21} e M_{12} , que podem ser resolvidas pela hipótese indutiva. Caso não exista os índices em nenhuma dessas matrizes, então x não existe em M . ■

Assim, dados um número x e uma matriz crescente M de dimensões $n \times n$, onde n é uma potência de 2, podemos encontrar se existem e quais são os índices i e j em que $M(i, j) = x$. Nesse caso, um algoritmo baseado na demonstração acima teria seu pior caso quando x não pode ser encontrado em M . Assim, considerando a entrada M , teríamos que:

$$\begin{aligned} T(M) &= \begin{cases} T(M_{11}) + T(M_{12}) + T(M_{21}) + \Theta(1) & \text{se } x < M(2/n, 2/n) \\ T(M_{12}) + T(M_{21}) + T(M_{22}) + \Theta(1) & \text{se } x > M(2/n, 2/n) \end{cases} \\ &= T(M_{12}) + T(M_{21}) + \begin{cases} T(M_{11}) & \text{se } x < M(2/n, 2/n) \\ T(M_{22}) & \text{se } x > M(2/n, 2/n) \end{cases} + \Theta(1) \end{aligned}$$

Agora, considerando o tempo em função da altura n , teremos que $T(M) = T(n)$ e $T(M_{11}) = T(M_{12}) = T(M_{21}) = T(M_{22}) = T(n/2)$. Portanto, a recorrência será:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) + \Theta(1) \\ &= 3T(n/2) + \Theta(1) \\ &= \Theta(n^{\lg 3}) \end{aligned} \quad \text{(pelo Teorema Master)}$$

2.

Demonstração. Suponha um natural $n \geq 1$ tal que para toda árvore T com $1 \leq k < n$ nós e raiz r podemos encontrar $\text{DMFP}(r)$ e $\text{DMFD}(r)$ e podemos rotular $r.D = |\text{DMFP}(r) - \text{DMFD}(r)|$. Suponha também uma árvore T com n nós e raiz r .

Caso 1: r não tem filhos. Logo, também podemos considerá-lo como a única folha de T . Assim, as distâncias da folha mais próxima e da folha mais distante são 0, isto é, $\text{DMFP}(r) = \text{DMFD}(r) = 0$. Portanto, $r.D = |0 - 0| = 0$.

Caso 2: r tem apenas 1 filho. Seja então r_f esse filho e T_f a subárvore com raiz no vértice r_f . Como $T_f = T \setminus \{r\}$ e $n \geq 2$, então T_f tem $1 \leq n - 1 < n$ nós. Portanto, pela hipótese indutiva, podemos encontrar $\text{DMFP}(r_f)$ e $\text{DMFD}(r_f)$ e rotular o campo $r_f.D$. Note que todas as folhas de T também estão em T_f , sendo que r_f é o único caminho de r para elas. Logo, as distâncias da folha mais próxima e da folha mais distante são dadas por $\text{DMFP}(r) = \text{DMFP}(r_f) + 1$ e $\text{DMFD}(r) = \text{DMFD}(r_f) + 1$. Portanto, temos que

$$r.D = |\text{DMFP}(r) - \text{DMFD}(r)| = |\text{DMFP}(r_f) - \text{DMFD}(r_f)| = r_f.D$$

Caso 3: r tem 2 filhos. Sejam então r_e e r_d estes filhos e T_e e T_d as subárvores enraizadas em cada um deles. Como $T_e \subseteq T \setminus \{r\}$, então T_e tem $1 \leq k_e \leq n - 1 < n$ nós, logo, podemos encontrar $\text{DMFP}(r_e)$ e $\text{DMFD}(r_e)$ e rotular $r_e.D$. Do mesmo modo, $T_d \subseteq T \setminus \{r\}$ e T_d tem $1 \leq k_d < n$ nós, então temos $\text{DMFP}(r_d)$ e $\text{DMFD}(r_d)$ e $r_d.D$.

Note que a folha mais próxima de r , passando por r_e está à $\text{DMFP}(r_e) + 1$ de distância, e passando por r_d está à $\text{DMFP}(r_d) + 1$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \text{DMFP}(r) &= \max \{ \text{DMFP}(r_e) + 1, \text{DMFP}(r_d) + 1 \} \\ &= \max \{ \text{DMFP}(r_e), \text{DMFP}(r_d) \} + 1 \end{aligned}$$

De forma similar, temos que $\text{DMFD}(r) = \min \{ \text{DMFD}(r_e), \text{DMFD}(r_d) \} + 1$. Com disso, podemos rotular $r.D = |\text{DMFP}(r) - \text{DMFD}(r)|$. ■

3. Dado uma árvore ternária T não-vazia com raiz R e chave r , vamos considerar o Valor do nó Mais à Esquerda (VME) de T como

$$\text{VME}(T) = \begin{cases} \text{VME}(T_e) & \text{se } T \text{ tem uma subárvore esquerda } T_e \text{ não-vazia} \\ R.r & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Do mesmo modo, seja o Valor do nó Mais à Direita (VMD) dado por

$$\text{VMD}(T) = \begin{cases} \text{VMD}(T_d) & \text{se } T \text{ tem uma subárvore direita } T_d \text{ não-vazia} \\ R.r & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que para uma Árvore de Tusca T não-vazia, $\text{VME}(T)$ é o menor valor presente em T e $\text{VMD}(T)$ é o maior valor de T . Com isso, vamos provar por indução forte que é possível verificar se uma árvore ternária é uma Árvore de Tusca, utilizando os valores VME e VMD da árvore.

Demonstração para árvores não-vazias.

Suponha um natural n tal que para toda árvore ternária com $1 \leq k < n$ nós é possível calcular as medidas VME e VMD dela e verificar se ela é uma Árvore de Tusca (ADT). Suponha ainda um a árvore ternária T com n nós e seja v a raiz de T , com T_e , T_c e T_d sendo as subárvores esquerda, central e direita de T , respectivamente.

Assim, considere as seguintes condições necessárias e suficientes para que T seja uma ADT:

- a) T_e é uma ADT e todos os valores de T_e são menores que $v.r$;
- b) T_c é uma ADT e todos os valores de T_c são iguais que $v.r$;
- c) T_d é uma ADT e todos os valores de T_d são maiores que $v.r$.

Observando a subárvore esquerda, se T_e é vazia, então ela é uma ADT e, por vacuidade, todos seus valores são menores que $v.r$, ou seja, a condição (a) foi atendida. Além disso, por definição, temos que $\text{VME}(T) = v.r$.

Se T_e não é vazia, como $T_e \subseteq T \setminus \{v\}$, então ela tem $1 \leq k_e < n$ nós e, pela hipótese indutiva, sabemos se ela é uma ADT e temos os valores VME e VMD dela.

Caso 1: T_e não é uma ADT. Logo, a condição (a) não foi atendida.

Caso 2: T_e é uma ADT e $\text{VMD}(T_e) \geq v.r$. Então, temos pelo menos um nó em T_e cujo valor não é menor que $v.r$. Portanto, a condição (a) não foi atendida.

Caso 3: T_e é uma ADT e $\text{VMD}(T_e) < v.r$. Como $\text{VMD}(T_e)$ é o maior valor em T_e , então todos os valores de T_e são menores que $v.r$ e, como ela é uma ADT, a condição (a) foi atendida.

Por fim, como os caso são exaustivos para T_e não-vazia, conseguimos analisar a condição (a) e temos, como T_e é não vazia, que $VME(T) = VME(T_e)$.

De forma similar para a subárvore central, se T_c é vazia, então a condição (b) foi atendida. Caso contrário, T_c tem $1 \leq k_c < n$ nós, então sabemos os valores VME e VMD dela e se ela é uma ADT. Nesse caso, a condição (b) só é garantida quando T_c é uma ADT com $VME(T_c) = v.r = VMD(T_c)$.

Agora, para a subárvore direita, se T_d for vazia, a condição (c) será garantida e teremos que $VMD(T) = v.r$. Se ela não for vazia, então T_d deve ter $1 \leq k_d < n$ nós, portanto temos VME, VMD e se ela é uma ADT, sendo que $VMD(T) = VMD(T_d)$. Além disso, para T_d não-vazia, a condição (c) será atendida se e somente se $VME(T_d) > v.r$.

Por fim, conseguimos calcular $VME(T)$ e $VMD(T)$ em cada caso possível, além de analisar com certeza as condições (a), (b) e (c). Então, podemos dizer que T é ADT se e somente se essas três condições são verdadeiras para T , ou seja, podemos verificar se T uma ADT. ■

Demonstração para árvores quaisquer.

Para uma árvore ternária T qualquer, se T é vazia então, por definição, T é uma Árvore de Tusca. Caso contrário, como T é não-vazia, então podemos verificar se ela é uma ADT utilizando as medidas VME e VMD, como demonstrado anteriormente. ■
