MC558 2020s1

Teste 1

Tiago de Paula Alves
187679

---

1. Seja G um grafo (X,Y)-bipartido. Suponha que todo vértice em X tem grau $k > 0$ e todo vértice em Y tem grau $r > 0$. Descreva uma identidade (fórmula) envolvendo apenas k, r, X e Y. Usando isto, responda se existe um tal grafo (X,Y)-bipartido com $k = 3$, $r = 7$ e 100.000.642 vértices.

Lema 1.1

Seja G um grafo (X,Y)-bipartido. Então,

$$\sum_{v \in X} \deg_G(v) = \sum_{v \in Y} \deg_G(v)$$

Demonstração. Considere a família de conjuntos $\mathcal{E}$ composta das arestas incidentes a cada elmento de X, isto é:

$$\mathcal{E} = \{\{e \in E(G) \mid x \in \psi_G(e)\} \mid x \in X\}$$

Por definição, nenhuma aresta de G é incidente a dois elementos de X. Logo, $\mathcal{E}$ é disjunta por pares. Ademais, como toda aresta de G é incidente a pelo menos um elemento de X, a família $\mathcal{E}$ cobre E, ou seja, $\bigcup \mathcal{E} = E$.

Então, E pode ser divídos nos conjuntos de $\mathcal{E}$, de forma que

$$\begin{aligned}
|E| &= \sum_{\mathcal{E}_x \in \mathcal{E}} |\mathcal{E}_x| \\
&= \sum_{x \in X} |\{e \mid x \in \psi(e)\}| \\
&= \sum_{x \in X} \deg(x)
\end{aligned}$$

De forma similar, podemos chegar a uma identidade equivalente para Y.

Portanto,

$$\sum_{x \in X} \deg(x) = |E| = \sum_{y \in Y} \deg(y) \qquad \blacksquare$$

Teorema 1.2

Seja G um grafo (X,Y)-bipartido tal que todo vértice em X tem grau $k > 0$ e todo vértice em Y tem grau $r > 0$. Então,

$$k \cdot |X| = r \cdot |Y|$$

Demonstração. Partindo do lema 1.1, temos que,

$$\begin{aligned}\sum_{v \in X} \deg(v) &= \sum_{v \in Y} \deg(v) \\ \sum_{v \in X} k &= \sum_{v \in Y} r \\ |X| \cdot k &= |Y| \cdot r\end{aligned}$$

■

Resposta:

Por definição, X e Y são disjuntos, então

$$|X| + |Y| = n(G)$$

Assim, com o teorema 1.2, temos que

$$\begin{aligned}n &= |X| + |Y| \\ &= |X| + \frac{k}{r}|X| \\ &= \frac{r+k}{r} \cdot |X|\end{aligned}$$

Ou seja,

$$|X| = \frac{r \cdot n}{r+k}$$

Na situação proposta, teríamos que

$$|X| = \frac{7 \times 100.000.642}{7+3} = 70.000.449,4 \notin \mathbb{N}$$

Como $|X|$ não é inteiro, então não pode existir um grafo com esses valores.

---

2. Seja $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ uma sequência de inteiros positivos. Prove que $d = (d_1, \ldots, d_n)$ é uma sequência de graus de alguma **árvore** se, e somente se, $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Por exemplo, existe uma árvore cuja sequência de graus é $(4,3,2,1,1,1,1,1)$, mas não existe uma árvore cuja sequência é $(4,3,3,2,1,1,1,1)$.

Definição 2.1 (Sequência Arbórea)**.** Uma sequência finita $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de inteiros positivos é *arbórea* se for não-crescente e a soma de seus elementos é $2n-2$. Isto é,

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_n \geq 1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{n} s_i = 2n-2$$

Proposição 2.2

Seja $S = (s_1, \ldots, s_n)$ uma sequência arbórea de tamanho n. Então:

a) $n \geq 2$;

b) $s_n = 1$;

c) se $n > 2$, então $s_1 > 1$.

Demonstração do item a).

Por n ser o tamanho, temos que $n \in \mathbb{N}$. No entanto, se $n = 0$, a soma de S é zero, que não condiz com $2 \cdot n - 2 = -2$ e S não poderia ser arbórea.

Além disso, se $n = 1$ então a soma é $s_1 = 0$, que não é positivo. Logo, S também não poderia ser arbórea.

Portanto, temos que S só é possível com $n \geq 2$. ■

Demonstração da item b).

Suponha que $s_n \neq 1$. Então, como s_n deve ser positivo, só resta que $s_n \geq 2$. Por definição, S é não-crescente, isto é, $s_1 \geq \cdots \geq s_n$, portanto

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \geq \sum_{i=1}^{n} s_n \geq \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n > 2n-2$$

Logo, a soma de S não é $2n-2$, ou seja, S não é arbórea.

Como S é arbórea, s_n deve ser igual a 1. ■

Demonstração da item c).

Suponha que $s_1 = 1$. Como S é não-crescente e só contém inteiros positivos, $1 = s_1 \geq \cdots \geq s_n \geq 1$, ou seja, $s_i = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} 1 = n = 2n-2$$

O que resulta em $n = 2$. Portanto, pela contrapositiva, se $n \neq 2$, temos que $s_1 \neq 1$.

Então, para um $n > 2$ e como s_1 deve ser positivo, segue que $s_1 > 1$. ■

Corolário 2.3

Seja $S = (s_1, \ldots, s_n)$ uma sequência arbórea de tamanho $n > 2$. Então existe um índice $1 \leq i < n$ onde S é estritamente decrescente, isto é,

$$s_1 \geq \cdots \geq s_{i-1} \geq s_i > s_{i+1} \geq \cdots \geq s_n \geq 1$$

Demonstração. Pelas proposições 2.2.b e 2.2.c, temos que $s_1 > s_n = 1$, ou seja, o primeiro elemento é maior que o último. Portanto, pelo menos um elemento deverá ser maior que seu sucessor em S. ■

Lema 2.4

Para toda sequência arbórea S, existe uma árvore cuja sequência de graus é S.

Demonstração. Vamos provar por indução no tamanho n da sequência. Note que, pela proposição 2.2.a, $n \geq 2$.

Caso base: $n = 2$. Seja $S = (s_1, s_2)$ uma sequência arbórea. Logo, $s_1 + s_2 = 2$ e, como s_1 e s_2 devem ser positivos, temos que $s_1 = s_2 = 1$.

Considere o grafo simples $T = (\{v_1, v_2\}, \{v_1v_2\})$. Note que T é conexo e acíclico, portanto, T é uma árvore. Além disso, temos que $\deg(v_1) = \deg(v_2) = 1$, então a sequência de graus de T é $(1,1) = S$, como proposto.

Hipótese indutiva: Suponha um $n \geq 2$ tal que para toda sequência arbórea S de tamanho n existe um árvore com sequência de graus igual a S.

Passo indutivo: Seja $S = (s_1, \ldots, s_n, s_{n+1})$ uma sequência arbórea de tamanho $n+1 \geq 2+1 > 2$. Logo, pelo corolário 2.3, temos um índice k tal que $s_k > s_{k+1}$. Assim, podemos construir a sequência $S' = (s_1, \ldots, s_{k-1}, s_k - 1, s_{k+1}, \ldots, s_n)$ sem s_{n+1} e com $s'_k = s_k - 1$, que também é crescente, pois $s'_k \geq s'_{k+1}$. Ademais, pela proposição 2.2.b, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} s'_i = \sum_{i=1}^{n} s_i - 1 &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} s_i - s_{n+1}\right) - 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} s_i - 2 = (2(n+1) - 2) - 2 \\
&= 2n - 2
\end{aligned}$$

Logo, S' é uma sequência arbórea e, pela hipótese indutiva, temos uma árvore $T' = (V, E)$ cuja sequência de graus é igual a S'. Além disso, temos um vértice $v_k \in V$ tal que $\deg_{T'}(v_k) = s'_k$.

Seja $v_{n+1} \notin V$ um novo vértice e considere o grafo $T = (V \cup \{v_{n+1}\}, E \cup \{v_kv_{n+1}\})$. Por v_k ser um vértice novo, a nova aresta mantém T simples e acíclica. Além disso, v_kv_{n+1} conecta o novo vértice em T', fazendo com que T também seja conexo e, portanto, uma árvore.

Por fim, como v_kv_{n+1} é a única nova aresta de T', $\deg_T(v_k) = \deg_{T'}(v_k) + 1 = s'_k + 1 = s_k$ e $\deg_T(v_{n+1}) = 1 = s_{n+1}$, mantendo os demais graus. Portanto, S é a sequência de graus de T. ■

Teorema 2.5 (*Slide 1*)

Para todo grafo $G = (V, E)$ temos que

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$

Teorema 2.6 (*Slide 3*)

Se G é um grafo conexo e acíclico (i.e., uma árvore), então $m(G) = n(G) - 1$.

Teorema 2.7

Seja $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ uma sequência de inteiros positivos. Então, $d = (d_1, \ldots, d_n)$ é uma sequência de graus de alguma árvore se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$$

Demonstração $(\rightarrow)$. Suponha que exista uma árvore $T = (V, E)$ cuja sequência de graus é d. Então, podemos considerar $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tal que $\deg(v_i) = d_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Isso implica que $|V| = n$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} d_i &= \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) \\
&= 2|E| && \text{(teorema 2.5)} \\
&= 2 \cdot m(T) \\
&= 2\,(n(T) - 1) && \text{(teorema 2.6)} \\
&= 2n - 2 && \blacksquare
\end{aligned}$$

Demonstração $(\leftarrow)$. Suponha agora que $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Como d é não-crescente e contém apenas inteiros positivos, então d é uma sequência arbórea. Portanto, pelo lema 2.4, existe uma árvore cuja sequência de graus é d. ■