Atividade 1

Tiago de Paula Alves (187679)
tiagodepalves@gmail.com

Vinicius da Silva (206734)
v206734@dac.unicamp.br

8 de junho de 2025

1 Modelo

1.1 Descrição do Problema

Uma companhia possui F fábricas para atender a demanda de J clientes. Cada fábrica pode escolher dentre L máquinas e M tipos de matéria-prima para produzir P tipos de produtos. A companhia precisa desenvolver um plano de produção e transporte com o objetivo de minimizar os custos totais. Mais especificamente, a companhia deve determinar a quantidade de cada tipo de produto a ser produzida em cada máquina de cada fábrica e a quantidade que deve ser transportada de cada produto partindo de cada fábrica para cada consumidor.

1.2 Parâmetros

1.2.1 Dimensões

Esses valores são necessariamente inteiros, já que medem contagem de itens.

J quantidade de clientes;

F quantidade de fábricas;

L quantidade de máquinas em cada fábrica;

M quantidade de tipos de matéria-prima;

P quantidade de tipos de produtos;

1.2.2 Parâmetros de Restrição

Valores usados nas restrições do problema e podem ser reais.

$D_{j,p}$ demanda do cliente j, em toneladas, do produto p;

$R_{m,f}$ quantidade de matéria-prima m, em toneladas, disponível na fábrica f;

$C_{l,f}$ capacidade disponível de produção, em toneladas, da máquina l na fábrica f;

1.2.3 Parâmetros de Relação de Variáveis

Relação entre matéria-prima e produto e entre produtos, clientes e custo. Também podem ser reais.

$r_{m,p,l}$ quantidade de matéria-prima m, em toneladas, necessária para produzir uma tonelada do produto p na máquina l;

$p_{p,l,f}$ custo de produção por tonelada do produto p utilizando a máquina l na fábrica f;

$t_{p,f,j}$ custo de transporte por tonelada do produto p partindo da fábrica f até o cliente j;

1.3 Variáveis de Decisão

As variáveis desse problema podem assumir quaisquer valores reais, considerando as restrições abaixo.

$x_{p,l,f}$ toneladas produzidas de p na máquina l da fábrica f;

$y_{p,f,j}$ toneladas transportadas de p da fábrica f para o cliente j;

1.4 Restrições

Não-negatividade

$$x_{p,l,f} \geq 0 \qquad \text{para toda produção de } p \text{ na máquina } l \text{ da fábrica } f$$
$$y_{p,f,j} \geq 0 \qquad \text{para toda transporte de } p \text{ da fábrica } f \text{ para o cliente } j$$

Atendimento às demandas dos clientes

$$\sum_{f=1}^{F} y_{p,f,j} = D_{j,p} \qquad \text{para todo cliente } j \text{ e produto } p$$

Limite de matéria-prima disponível

$$\sum_{p=1}^{P} \sum_{l=1}^{L} r_{m,p,l} x_{p,l,f} \leq R_{m,f} \qquad \text{para toda matéria-prima } m \text{ e fábrica } f$$

Capacidade de produção

$$\sum_{p=1}^{P} x_{p,l,f} \leq C_{l,f} \qquad \text{para toda máquina } l \text{ na fábrica } f$$

Equivalência de produção e transporte

$$\sum_{l=1}^{L} x_{p,l,f} = \sum_{j=1}^{J} y_{p,f,j} \qquad \text{para toda produção de } p \text{ na fábrica } f$$

1.5 Função Objetivo

O objetivo final da otimização é minimizar o custo total, garantindo a demanda dos clientes. O custo é separado nos seguintes tipos:

$$\text{custo de produção} = \sum_{f=1}^{F} \sum_{p=1}^{P} \sum_{l=1}^{L} x_{p,l,f} p_{p,l,f}$$
$$\text{custo de transporte} = \sum_{f=1}^{F} \sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{J} y_{p,f,j} t_{p,f,j}$$

Assim, o objetivo é minimizar:

$$\begin{aligned} \text{custo total} &= \text{custo de produção} + \text{custo de transporte} \\ &= \sum_{f=1}^{F} \sum_{p=1}^{P} \left(\sum_{l=1}^{L} x_{p,l,f} p_{p,l,f} + \sum_{j=1}^{J} y_{p,f,j} t_{p,f,j} \right) \end{aligned}$$

2 Experimentos

A partir da escolha de J, a instância é gerada com valores aleatórios seguindo as restrições do enunciado. Tudo foi feito em Python 3, inclusive a implementação do modelo, usando o Gurobi.

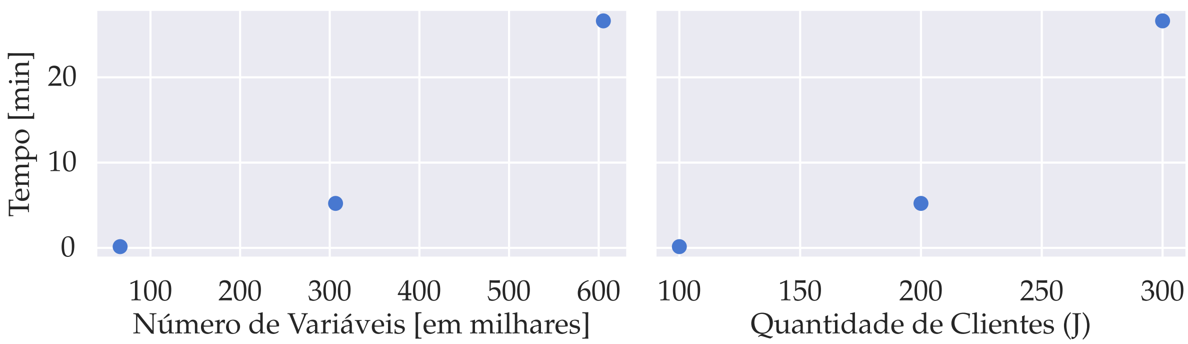
2.1 Resultados

Os resultados a seguir foram obtidos em um Macbook Pro M1 com 16 GB de memória RAM.

J	F	L	M	P	Vars.	Restrs.	Iters.	Tempo de Execução	Custo Final
100	126	5	8	5	66 150	2768	12753	8.9 s	160 268.5
200	299	5	8	5	306 475	6382	58689	5 min 13 s	309 782.7
300	393	8	8	5	605 220	9753	93678	26 min 37 s	455 172.4
400		—					—		—
500		—					—		—
600		—					—		—
700		—					—		—
800		—					—		—
900		—					—		—
1000		—					—		—

3 Análise dos Resultados

Figura 1: Tempo de execução em relação a quantidade de clientes e o número de variáveis de otimização.



Infelizmente, não conseguimos executar todos os experimentos. Um dos possíveis problemas é que o número de variáveis no modelo, que é dado por:

$$\text{número de variáveis} = PLF + PFJ = PF(L + J)$$

Considerando os limites da instância no enunciado, temos que

$$5 \cdot J(5 + J) \leq \text{número de variáveis} \leq 10 \cdot 2J(10 + J)$$
$$5J^2 + 25J \leq \text{número de variáveis} \leq 20J^2 + 200J$$

Portanto, o número de variáveis cresce de forma quadrática com o parâmetro J. Considerando que, no melhor dos casos, o tempo de execução depende linearmente do número de variáveis, então o tempo também cresce de forma quadrática.