Pumping Lemma

Marco Moschettini

21 aprile 2015

Capitolo 1

Teorema

1.1 Ipotesi

In un linguaggio *infinito*, ogni stringa sufficientemente lunga deve avere una parte che si ripete.

1.2 Pumping lemma per grammatiche context-free

Se **L** è un linguaggio context-free, esiste un interno N tale che, per ogni stringa z di lunghezza almeno pari a N:

- z può essere riscritta come: $z = uvwxy \quad con\, |z| \geq N$
- la parte centrale vwx ha lunghezza limitata: $|vwx| \leq N$
- v e x non sono nulle: $|vx| \geq 1$
- *tutte le stringhe della forma* $uv^iwx^iy \in L$

In pratica il lemma afferma che le due sottostringhe v e x possono essere pompate quanto si vuole ottenendo sempre stringhe di L

1.3 Pumping lemma per linguaggi regolari

Se L è un linguaggio regolare, esiste un intero M tale che, per ogni stringa z di lunghezza almeno pari a M:

- z può essere riscritta come: $z = xyw \quad con\, |z| \geq M$
- la parte centrale xy ha lunghezza limitata: $|xy| \leq M$
- y non è nulla: $|y| \geq 1$
- *tutte le stringhe della forma* $xy^iw \in L$

In pratica, qui il lemma afferma che la sottostringa y può essere *pompata* quanto si vuole ottenendo sempre stringhe di L

Capitolo 2

Esempi

2.1 Esempio 1

Prendiamo in esempio un linguaggio:

$$L = \{a^n b^n c^n,\ n > 0\}$$

dimostriamo che il linguaggio **non** è context-free:

- se L fosse context-free, esisterebbe un intero N che soddisferebbe il pumping lemma; consideriamo allora la stringa $z = a^n b^n c^n$ prendiamo ad esempio
- scomponiamo z nei cinque pezzi uvwxy con $|\mathbf{vwx}| \leq N$
- ad esempio prendiamo $n = 6 \rightarrow \mathbf{z} =$ "aaaaaabbbbbbcccccc"
- prendiamo una sottostringa **vwx** di **z** al più lunga N (nel nostro caso scegliamo $N = 5$) = "abbbb".
- in questa stringa cosa corrisponde a v/w/x? Ci sono più possibilità:
  - **v** = a, **w** = bbbb, **x** = *vuota*
  - **v** = *vuota*, **w** = abbb, **x** = b
  - ecc...
- tra le stringhe del linguaggio, della forma uv^iwx^iy ci sono anche quelle per cui $i = 0$ ossia in cui **v** e **x** mancano. ossia dato che **u** e **y** sono quelle scelte da noi poco fa (**u** ="aaaaa", **vwx** = "abbbb", **y** = "bbcccccc") e che il pezzo centrale **w** può essere:
  - "bbbb"
  - "abbb"
  - "bbb"
  - "abb"

- la stringa **uwy** (ottenuta tagliando **v** e **x**) risulta "aaaaa" + w + " bbcccccc", ovvero tutte le 6 'c' previste in fondo, ma meno a e/o meno b del necessario, perchè alcune sono state mangiate dalla sotto-stringa **vx**.
- di conseguenza la stringa **uwy non appartiene al linguaggio** violando l'ipotesi! Di conseguenza il linguaggio L **non è context free**

2.2 Esempio 2

Prendiamo in esempio un linguaggio:

$$L = \{a^p, \text{ p } \textbf{primo}\}$$

dimostriamo che il linguaggio **non** è regolare:

- se L fosse regolare, esisterebbe un M che soddisferebbe il pumping lemma;
- sia P un primo $\geq$ M + 2 (sappiamo che esiste perchè i numeri primi sono infiniti): consideriamo allora la stringa $z = a^p$:
- scomponiamo z nei tre pezzi **xyw**, con $|y| = r$; ne segue che $|xw| = p - r$
- in base al lemma, se L fosse regolare, la nuova stringa $xy^{p-r}w$ dovrebbe anch'essa appartenere al linguaggio.
- peccato però che la lunghezza di tale stringa sia:

  $\left|xp^{p-r}w\right| = |xw|+(p-r)\,|y| = (p-r)+(p-r)\,|y| = (p-r)(1+|y|) =$ **(p-r)(1-r)**

  ovvero *non un numero primo.*
- pertanto possiamo affermare che essa non appartiene al linguaggio e dunque **esso non è regolare**.

2.3 Esempio 3

Prendiamo in esempio un linguaggio:

$$L = \{0^n 1^n + k \text{ con } n, k > 0\}$$

dimostriamo che il linguaggio **non è regolare**.

- prendiamo n=2, k=2 da cui z = "001111"
- scomponiamo in **xyw**: **x** = 0, **y** = 01, **w** = 111
- si deve avere che $\forall i \in N,\ xy^i w \in L$
- prendendo i = 2, abbiamo che $xy^2w = 00101111 \notin L$
- pertanto L **non è regolare**.

Dimostriamo ora che L è di tipo 2 trovando una grammatica che lo genera:
$S \rightarrow 0S1\ |01G$
$G \rightarrow 1G\ |\ 1$ Il linguaggio è **context-free**.

$S \rightarrow aSa\ |\ X$
$X \rightarrow aX\ |\ bX\ |\ a\ |\ b$