Introducción al Modelado el Continuo

Primer parcial -- Primer cuatrimestre 2024

Justifique sus respuestas.

Problema 1. *Considere el sistema*

$$\dot{x} = y + ax(x^2 + y^2) \qquad \dot{y} = -x + ay(x^2 + y^2).$$

1. *Demuestre que si $a = 0$ las trayectorias son círculos.* Ayuda: ¿se parece a algún sistema conocido?

2. *Muestre numéricamente, con Python, que si $a \neq 0$ las trajectorias son espirales. Calcule además la derivada respecto del tiempo del radio al cuadrado del punto (x, y), $r(x, y) = x^2 + y^2$. ¿Qué conclusión saca?*

3. *Muestre que si $a < 0$ la función $V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ es una función de Liapunov fuerte para la ecuación diferencial en cualquier entorno del origen. ¿Será el $(0, 0)$ asintóticamente estable?*

Problema 2. *El problema de Kepler considera un planeta que se mueve alrededor del Sol, con una fuerza atractiva, y sus soluciones son elipses con un foco sobre la posición del Sol. El mismo problema pero con una fuerza repulsiva viene descripto por las siguientes ecuaciones*

$$\ddot{x} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \ddot{y} = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

donde por simplicidad todas las constantes se han igualado a uno. Se pide:

1. *Halle numéricamente en Python las soluciones $x(t)$, $y(t)$ y presente un gráfico de estas funciones. También grafique la trayectoria (x, y). ¿Se ve alguna trayectoria cerrada? Suponga que la posición x_0 e y_0 y velocidades iniciales $\dot{x}_0$ e $\dot{y}_0$ son parámetros que usted elige, pero le será conveniente utilizar valores menores que uno.*

2. *Considere ahora las ecuaciones*

$$\ddot{x} = \pm\frac{x}{(x^2 + y^2)^r}, \qquad \ddot{y} = \pm\frac{y}{(x^2 + y^2)^r},$$

Grafique diferentes soluciones correspondientes al caso atractivo y repulsivo con distintos parámetros r. En el caso atractivo (signo -) ¿las trayectorias resultan siempre periódicas? Discuta el efecto que tiene r en la fuerza que sufre la partícula. (Sugerencia: considere qué sucede para r grande y $r \to 0$). *¿Es similar el caso $r \to 0$ que $r = 0$?*

Problema 3. *Considere un planeador volando a velocidad v mientras forma un ángulo θ con la horizontal. Su movimiento está gobernado aproximadamente por las ecuaciones adimensionales:*

$$\dot{v} = -\sin(\theta) - Dv^2, \qquad v\dot{\theta} = -\cos(\theta) + v^2,$$

donde los términos trigonométricos representan los efectos de la gravedad, y los términos en v^2 los efectos del frenado y la sustentación aerodinámicas.

1. *Suponga que no hay frenado aerodinámico ($D = 0$). Demuestre que $v^3 - 3v\cos(\theta)$ se conserva. Grafique cualitativamente las trayectorias en el espacio de fases. Interprete sus resultados físicamente: ¿qué está haciendo el planeador?*

2. *Analice numéricamente el caso de frenado positivo ($D > 0$).*

Problema 4. *La altura $h(t)$ del agua en un tanque de área transversal A constante, alimentado por un caudal constante $q_e > 0$ y con un pequeño agujero en la base satisface la ecuación diferencial siguiente*

$$A\frac{dh}{dt} = (q_e - \frac{\sqrt{h}}{R}), \qquad h(0) = h_0,$$

donde el último término de la ecuación representa el caudal de salida, proporcional a la raíz cuadrada de la altura h. R representa una resistencia de salida. Se pide lo siguiente.

1. *¿Es lineal esta ecuación? Adimensionalícela.*

2. *¿Existe algún punto de equilibrio? ¿Es estable?*

3. *Hallar la solución de esta ecuación de la forma $t = f(h)$. No es necesario invertir para hallar $h = f(t)$.*

4. Estudie numéricamente la ecuación (puede utilizar el método que desee). Asuma que $A = q_e = 1$, $h_0 = 10$ y considere diferentes valores para la resistencia $R = 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, \sqrt{10}, 5$. Considerando el punto 2. de este ejercicio, ¿qué conclusión puede obtener respecto de las soluciones para los diferentes valores de R?

Fórmula útil: Se tiene

$$\int \frac{dx}{a - \sqrt{x}} = -2\sqrt{x} - 2a\log(a - \sqrt{x}) + c,$$

si $\sqrt{x} < a$ en el intervalo de integración, o bien

$$\int \frac{dx}{a - \sqrt{x}} = -2\sqrt{x} + 2a\log(\sqrt{x} - a) + c,$$

si $\sqrt{x} > a$ en dicho intervalo.