例題2

行例Aを対角化せよ

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&-3\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

---

a) 固有方程式 $det(A-\lambda E)=0$を解く

Eは単位行列なので対角成分にλを代入する

$$det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&-3\\1&1&-2-\lambda\end{pmatrix}=0$$

ここで行列式の計算はサラスの法則で行い固有値を求める。

$$=(1-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda)+0+0$$
$$-3\lambda+3+0+0$$
$$=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$$

高次方程式の因数分解を行う。因数定理や組立除法を用いて求めると

$$=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$\therefore$ 固有値$\lambda=-1,1$(二重解)

---

b)次にそれぞれのλを代入して固有ベクトルV_1を求める

b_1) $\lambda=-1$の時

$$(A-\lambda E)\overrightarrow{V_1}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&-3\\1&1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right\}\overrightarrow{V_1}$$
$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&3&-3\\1&1&1\end{pmatrix}\overrightarrow{V_1}=0$$

連立方程式にして

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

※このa,b,cは、求めるλ=-1の固有ベクトル

$$\begin{cases} 2a = 0 & (1) \\ a + 3b - 3c = 0 & (2) \\ a + b + c = 0 & (3) \end{cases}$$

この連立３元１次方程式を解くと

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 固有ベクトルV_1は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

b_2) $\lambda = 1$の時

$(A - \lambda E)\overrightarrow{V_2}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \overrightarrow{V_2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overrightarrow{V_2} = 0$$

方程式にする

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

※このa,b,cは、求めるλ=1の固有ベクトル

b,cを求める

$$\begin{cases} a + b - 3c = 0 & (2) \\ a + b - 3c = 0 & (3) \end{cases}$$

重解の時は、固有ベクトルの成分の内最低一つは0になるため

1)$c=0$とすると
$a=-1$
$b=1$
よって$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

2)$b=0$とすると
$a=3$
$c=1$
よって$\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

$\therefore$ 固有ベクトルV_2は$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$これを順に$V_21, V_22$とする

---

c) 固有ベクトルを順(V_1, V_21, V_22)に束ねた行列をP
$P=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$
$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$
※ P^{-1} の求め方はガウス消去法を用いる
$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$