

対角行列

Aの固有値と固有ベクトルを求めよ。また、
 $B^t AB$ が対角行列になるような、直交行列Bを求めよ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

対称行列を対角化する直行行列Bを考える。

対称行列の固有ベクトルは、固有値が全て異なる場合、全て直行するという性質を利用する

Aの固有方程式は、 $FA(t) = -(t-1)(t-2)(t-4)$ であるから、

Aの固有値は1, 2, 4である

対応する正規化された単位固有ベクトルはそれぞれ

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるので、直交行列Bは

$$B = (P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ によって,}$$

$$B^t AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ を得る}$$