計算上のメモとして解法手順を以下に記す
step1：行列Aの固有方程式det(A−λE)=0を未知数λの方程式として解いて固有値λを求める.
step2：各々の固有値を連立方程式(A−λE)→x=→0に代入して，対応する固有ベクトル→xを求める.

固有値と固有ベクトル

例題1
次の固有値と固有ベクトルを求めよ

$$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$$

---

a) 固有方程式 $det(A-\lambda E)=0$を解く
Eは単位行列なので対角成分にλを代入する

$$det\begin{pmatrix}3-\lambda&2&4\\2&0-\lambda&2\\4&2&3-\lambda\end{pmatrix}=0$$

ここで行列式の計算はサラスの法則で行い固有値を求める。

$$=(3-\lambda)(0-\lambda)(3-\lambda)+16+16$$
$$-16\lambda-12+4\lambda-12+4\lambda$$
$$=\lambda^3-6\lambda^2-15\lambda-8$$

高次方程式の因数分解を行う。因数定理や組立除法を用いて求めると

$$=(\lambda-8)(\lambda+1)^2$$

$\therefore$ 固有値$\lambda=8,-1$(二重解)

---

b)次にそれぞれのλを代入して固有ベクトルV_1を求める

b_1) $\lambda = 8$の時

$$(A - \lambda E)\overrightarrow{V_1}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \right\} \overrightarrow{V_1}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \overrightarrow{V_1} = 0$$

連立方程式にして

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

※このa,b,cは、求めるλ=8の固有ベクトル

$$\begin{cases} -5a + 2b + 4c = 0 & (1) \\ 2a - 8b + 2c = 0 & (2) \\ 4a + 2b - 5c = 0 & (3) \end{cases}$$

この連立３元１次方程式を解くと

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 固有ベクトルV_1は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

---

b_2) $\lambda = -1$の時

$$(A - \lambda E)\overrightarrow{V_2}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \overrightarrow{V_2}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overrightarrow{V_2} = 0$$

連立方程式にして

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

※このa,b,cは、求めるλ=-1の固有ベクトル

$$\begin{cases} 4a+2b+4c=0 & (1) \\ 2a+b+2c=0 & (2) \\ 4a+2b+4c=0 & (3) \end{cases}$$

重解の時は、固有ベクトルの成分の内最低一つは0になるため

1)$c=0$とすると

$b=1$

$a=-\frac{1}{2}$

よって $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2)$b=0$とすると

$a=-1$

$c=1$

よって $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 固有ベクトルV_2は $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$