例題2

行例Aを対角化せよ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

---

a) 固有方程式 $det(A - \lambda E) = 0$を解く

Eは単位行列なので対角成分にλを代入する

$$det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

ここで行列式の計算はサラスの法則で行い固有値を求める。

$$=(1-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda)+0+0$$

$$\quad -3\lambda+3+0+0$$

$$=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$$

高次方程式の因数分解を行う。因数定理や組立除法を用いて求めると

$$=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$\therefore$ 固有値$\lambda = -1, 1$(二重解)

---

b)次にそれぞれのλを代入して固有ベクトルV_1を求める

b_1) $\lambda = -1$の時

$$(A-\lambda E)\overrightarrow{V_1}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \overrightarrow{V_1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{V_1} = 0$$

連立方程式にして

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

※このa,b,cは、求めるλ=-1の固有ベクトル

$$\begin{cases} 2a = 0 & (1) \\ a + 3b - 3c = 0 & (2) \\ a + b + c = 0 & (3) \end{cases}$$

この連立３元１次方程式を解くと

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 固有ベクトルV_1は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

b_2) $\lambda = 1$の時

$(A - \lambda E)\overrightarrow{V_2}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \overrightarrow{V_2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overrightarrow{V_2} = 0$$

方程式にする

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

※このa,b,cは、求めるλ=1の固有ベクトル

b,cを求める

$$\begin{cases} a + b - 3c = 0 & (2) \\ a + b - 3c = 0 & (3) \end{cases}$$

重解の時は、固有ベクトルの成分の内最低一つは0になるため

1)$c=0$とすると
$a=-1$
$b=1$

よって$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2)$b=0$とすると
$a=3$
$c=1$

よって$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 固有ベクトルV_2は$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ これを順にV_21, V_22とする

---

c) 行列Aの対角化した行列Xを$X = P^{-1} * D * P$にて求める
固有ベクトルを順(V_1, V_21, V_22)に束ねた行列をP

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

※ P^{-1} の求め方はガウス消去法を用いる

$$X = P^{-1} * D * P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[redacted]