対角行列

Aの固有値と固有ベクトルを求めよ。また、
$B^t AB$が対角行列になるような、直交行列Bを求めよ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

対称行列を対角化する直行行列Bを考える。
対称行列の固有ベクトルは、固有値が全て異なる場合、全て直行するという性質を利用する

Aの固有方程式は，$FA(t) = -(t-1)(t-2)(t-4)$であるから，
Aの固有値は$1, 2, 4$である
対応する正規化された単位固有ベクトルはそれぞれ

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるので，直交行列Bは

$$B = (P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$ によって，

$$B^t AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ を得る