Universidad de los Andes
Departamento de Ingeniería Industrial
Probabilidad y Estadística I (IIND2106)
Profesor Coordinador: Mario Castillo
Instructores: Astrid Bernal María Alejandra López y Fabio Lagos
Periodo Intersemestral 2015

TAREA 1

Normas para la presentación de la Tarea

- La tarea puede realizarse **en parejas** de cualquier sección.
- La presente tarea puede realizarla a computador o a mano. Debe tener en cuenta que la presentación del informe puede influir en la calificación final.
- El informe debe ser presentado en hojas blancas, numeradas, impresión por ambos lados y en la parte superior de cada hoja se debe especificar el nombre y código de cada estudiante.
- **La primera hoja de su tarea debe contener el formato que se presenta en la siguiente página**. Las tareas que no tengan este formato tendrán una penalización de cero punto cinco (0.5) sobre la nota final de la tarea.
- Será responsabilidad de los integrantes del grupo verificar el contenido de la tarea antes de la entrega. Luego de entregado el documento, no se recibirán adiciones por motivos de problemas de impresión en fórmulas o ecuaciones.
- Debe respetar el horario y el lugar de entrega de las tareas. **Las tareas entregadas después de este plazo no serán recibidas y su calificación será de cero (0)**.
- **Por ningún motivo la tarea será recibida por correo electrónico.**
- El incumplimiento de alguna de las anteriores instrucciones tendrá un impacto negativo en la nota de la tarea.
- Cualquier sospecha de fraude será tratada de acuerdo con el reglamento de la Universidad.
- Si usted encuentra algún GAZAPO[1] en la solución correspondiente a esta tarea por favor comuníquelo a **ma.galvis138**. Si su observación es válida, se verá recompensado con un incremento del 5% en la nota de la tarea

Forma de entrega

- El informe de la tarea debe ser entregado en los casilleros de Ingeniería Industrial, en el séptimo piso del ML, antes de la fecha límite de entrega. El casillero será habilitado el día anterior a la entrega de la tarea.
- Adicionalmente, el informe de la tarea junto a sus archivos de soporte deberán ser colgados en el link habilitado en SicuaPlus, antes de la fecha límite de entrega. Por lo tanto, si usted realizó su tarea a mano, debe escanear el documento y subirlo al link correspondiente.

Fecha de entrega

La fecha límite de entrega es el **jueves 18 de junio de 2015, antes de las 5:00 p.m.**

[1] Yerro que por inadvertencia deja escapar quien escribe o habla. (Definición según La Real Academia de la Lengua Española)

Integrante 1:________________________________Código:____________Sección:_____

Integrante 2:________________________________Código:____________Sección:_____

Numeral		Puntaje
1	a)	/2
	b)	/3
	c)	/6
	d)	/4
2	a)	/2
	b)	/8
3	a)	/1
	b)	/1
	c)	/1
	d)	/1
	e)	/2
	f)	/2
4	a)	/2
	b)	/2
	c)	/3
	d)	/2
	e)	/2
	f)	/3
	g)	/3
5	a)	/5
	b)	/5
	c)	/5
	d)	/5

Numeral		Puntaje
6	a)	/14
	b)	/5
	c)	/6
	d)	/5
7	a)	/10
	b)	/7
	c)	/3
	d)	/2
	e)	/3
8	a)	/2
	b)	/2
	c)	/2
	d)	/2
	e)	/2
	f)	/2
	g)	/6
	h)	/2
9	a)	/2
	b)	/2
	c)	/5
	d)	/4
	e)	/4
	f)	/4
	g)	/4

TOTAL	

NOTA	

Punto 1. Estadísticas Básicas en Excel – (15 puntos)

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) se encuentra realizando un estudio acerca de la inversión de distintos sectores de la industria, en proyectos de investigación y desarrollo. Para ello, tomó información de la cantidad total de dinero invertido por cuatro sectores (agricultura; caza, forestal y pesca; minería y manufactura y servicios) durante 5 años (2005 a 2009) en cuatro países. La información recolectada, en millones de dólares, se encuentra en el archivo adjunto de Excel "R&D". Teniendo en cuenta estos datos responda las preguntas:

a. **(2 puntos)** Utilizando la herramienta de análisis de datos de Excel, presente un resumen de las principales estadísticas descriptivas de la inversión por parte de la industria minera, de manufactura y de servicios. ¿Qué puede analizar de las medidas de tendencia central y de variabilidad? Interprete sus resultados.

MINERIA	
Media	552,1225
Error típico	198,452258
Mediana	90,8145
Moda	#N/A
Desviación estándar	887,505477
Varianza de la muestra	787665,972
Curtosis	0,50666007
Coeficiente de asimetría	1,46124511
Rango	2622,95
Mínimo	10,776
Máximo	2633,726
Suma	11042,45
Cuenta	20

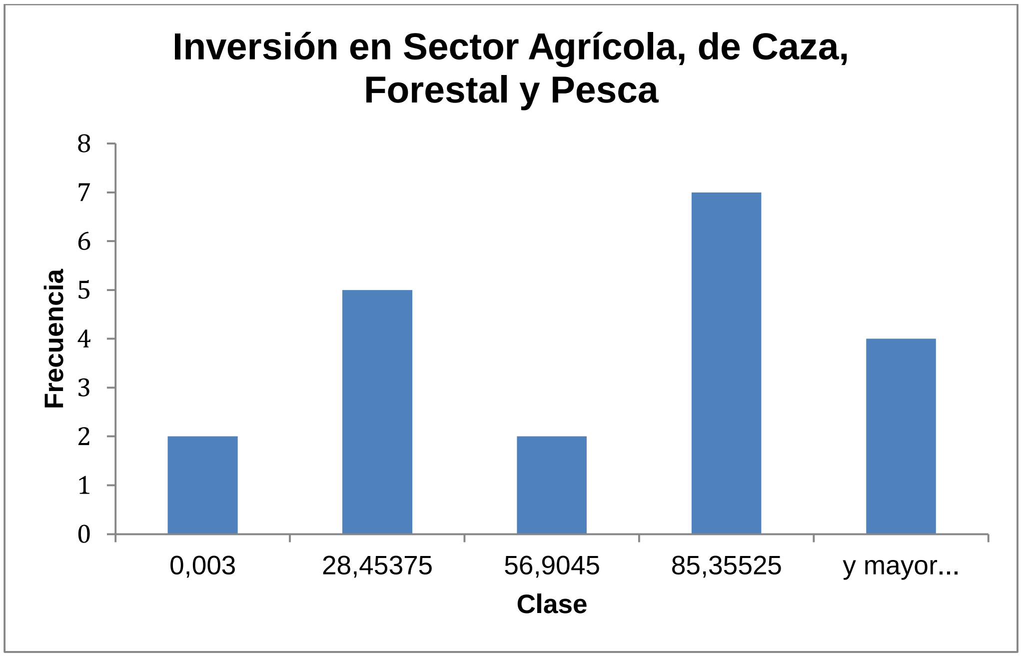
MANUFACTURA	
Media	24813,8198
Error típico	8731,05691
Mediana	3437,801
Moda	#N/A
Desviación estándar	39046,4735
Varianza de la muestra	1524627094
Curtosis	-0,43427145
Coeficiente de asimetría	1,26276256
Rango	94272,113
Mínimo	1700,494
Máximo	95972,607
Suma	496276,395
Cuenta	20

Es posible apreciar que la mayor contribución la ha realizado el sector de manufactura, seguido del sector de servicios y finalmente el de minería. También es posible apreciar que, en el caso de las contribuciones de minería y manufactura el coeficiente de variación es superior a 1, lo que indica una gran variabilidad de los mismos

b. **(3 puntos)** Cree un histograma de frecuencias para la inversión del sector agrícola, de caza, forestal y pesca. Muestre la tabla de frecuencias obtenida. ¿Qué puede concluir acerca de la distribución de los datos presentados en el histograma?

Clase	*Frecuencia*
0,003	2
28,45375	5
56,9045	2
85,35525	7

y mayor...	4



En este caso se puede observar que la mayor frecuencia de inversiones está entre 56.9045 y 85.35525 millones de dólares. También se puede observar que, debido a la mayor frecuencia de datos de mayor magnitud el histograma es asimétrico hacia la derecha.

c. **(6 puntos)** Construya una tabla dinámica que corresponde a cada una de las siguientes preguntas:

- ¿Qué país posee la mayor inversión promedio por parte del sector minero?

Etiquetas de fila	Promedio de MINERIA
Australia	1998,9848
España	43,8336
Japón	127,1336
México	38,538
(en blanco)	
Total general	**552,1225**

Según estos resultados, Australia posee la mayor inversión minera promedio.

- ¿En qué año ocurrió la mayor inversión por parte del sector manufactura?

Etiquetas de fila	Máx. de MANUFACTURA
2005	86858,188
2006	91569,718
2007	95972,607
2008	94836,555
2009	83727
Total general	**95972,607**

La máxima inversión de manufactura se realizó en 2007.

- ¿En qué país ocurrió la menor inversión por parte del sector de servicios en el año 2007?

Mín. de SERVICIOS	Etiquetas de columna						
Etiquetas de fila	2005	2006	2007	2008	2009	(en blanco)	Total general
Australia	3032,076	3657,067	4178,768	4489,218	4643,056		3032,076
España	2994,323	3667,366	4239,984	4985,743	4548,714		2994,323
Japón	9828,621	10825,305	11233,988	12315,874	10805,646		9828,621
México	457,523	796,527	739,522	423,239	522,633		423,239
(en blanco)							
Total general	**457,523**	**796,527**	**739,522**	**423,239**	**522,633**		**423,239**

El país con la menor inversión en servicios durante 2007 fue México.

d. **(4 puntos)** Construya una tabla de jerarquías y percentiles para la inversión de la industria durante el año 2005. ¿A qué valores corresponden los valores 20% y 60%? ¿Cómo interpretaría los resultados?

Posición	*Inversión 2005*	*Jerarquía*	*Porcentaje*
11	86858,188	1	100,00%
12	9828,621	2	93,30%
3	3904,054	3	86,60%
16	3032,076	4	80,00%
4	2994,323	5	73,30%
15	2768,527	6	66,60%
7	2029,252	7	60,00%
14	1297,218	8	53,30%
8	457,523	9	46,60%
10	146,536	10	40,00%
1	71,044	11	33,30%
13	68,843	12	26,60%
9	44,206	13	20,00%
2	11,256	14	13,30%

6	10,776	15	6,60%
5	0,337	16	0,00%

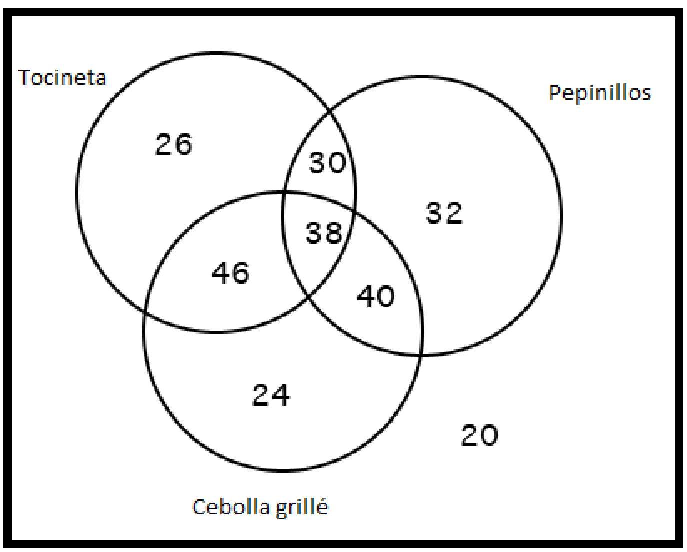
El percentil 20% corresponde a 44.206, e indica que el 20% de las inversiones industriales para R&D fueron menores a 44.206 millones de dólares. El percentil 60% corresponde a 2029.252, e indica que el 60% de las inversiones industriales para R&D fueron menores a 2029.252 millones de dólares.

Punto 2. Cálculo de Probabilidades de Eventos – (10 puntos)

Hamburguesas El Toro se encuentra interesada en crear una nueva hamburguesa que contenga las adiciones más solicitadas por los clientes. Para ello, registró los pedidos de 256 clientes, y obtuvo los siguientes resultados:

- 140 pidieron pepinillos.
- 140 pidieron tocineta.
- 84 pidieron tocineta y cebolla grillé.
- 62 pidieron pepinillos pero no cebolla grillé.
- 68 pidieron pepinillos y tocineta.
- 38 pidieron las tres adiciones.
- 20 no pidieron ninguna adición.

a. (2 puntos) Construya un diagrama de Venn que represente la situación anterior.



b. (8 puntos) Si se escoge un cliente al azar, determine la probabilidad de que dicho cliente:

i. Pida pepinillos o cebolla grillé o tocineta.

$$P(P \cup T \cup C) = 1 - \frac{20}{256} = 0.9218$$

ii. Pida las tres adiciones.

$$P(P \cap T \cap C) = \frac{38}{256} = 0.148$$

iii. Pida tocineta pero no pida cebolla grillé ni pepinillos.

$$P(T) - P(T \cap P) - P(C \cap P) + P(P \cap T \cap C) = \frac{26}{256} = 0.1016$$

iv. Pida exactamente dos adiciones.

$$P(P \cap C) + P(T \cap P) + P(C \cap P) - 3P(P \cap T \cap C) = \frac{(30 + 46 + 40)}{256} = 0.453$$

Nota: Para que el punto sea completamente valido, escriba la representación matemática en notación de conjuntos de cada uno de los numerales utilizando la siguiente notación:

P: Pepinillos
T: Tocineta
C: Cebolla grillé

Punto 3. Cálculo de Probabilidades de Eventos – (8 puntos)

Al ministerio de cultura ha llegado una alerta presentada por los representantes de los museos de mayor reconocimiento internacional, debido a que, por los frecuentes cambios de humedad en la ciudad, algunas de las piezas de arte han evidenciado un deterioro significativo, y en consecuencia, requieren de una restauración inmediata. Para diseñar un plan de restauración a gran escala, se ha recolectado información en algunos de los museos, registrando el número de piezas que necesitan ser restauradas, y aquellas que no. Esta información se presenta en la tabla que sigue a continuación:

Museo	# Piezas deterioradas	# Piezas no deterioradas
Museo Nacional de Colombia	22	47
Museo Botero	32	26
Museo del Oro	15	68
Museo Mercedes Sierra de Pérez	26	24
Museo de Arte Moderno de Bogotá	49	38

Teniendo en cuenta la información presentad en la tabla anterior, responda las siguientes preguntas:

Nota: para que el punto sea completamente válido, escriba la expresión de la probabilidad solicitada al igual que en el punto anterior.

a. **(1 puntos)** Si se selecciona una pieza de arte al azar, ¿cuál es la probabilidad de que necesite ser restaurada?

$$P(Restaurada) = \frac{22+32+15+26+49}{22+32+15+26+49+47+26+68+24+38} = \frac{144}{347} = 0.415$$

b. **(1 puntos)** Si se selecciona una pieza de arte al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al Museo del Oro?

$$P(Museo\ del\ Oro) = \frac{15+68}{347} = 0.239$$

c. **(1 puntos)** Si se selecciona una pieza de arte al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al Museo Botero y no requiera ser restaurada?

$$P(Museo\ Botero\ \cap No\ Restaurada) = \frac{26}{347} = 0.075$$

d. **(1 puntos)** Si se selecciona una pieza de arte al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al Museo Mercedes Sierra de Pérez o al Museo Nacional de Colombia?

$$P(Museo\ MSP\ \cup Museo\ Nacional) = \frac{26+24+22+47}{347} = 0.343$$

e. **(2 puntos)** Si se selecciona una pieza de arte de manera aleatoria y se sabe que pertenece al Museo de Arte Moderno de Bogotá, ¿cuál es la probabilidad de que requiera ser restaurada?

$$P(Restaurada\mid MAMBO) = \frac{P(Restaurada\ \cap\ MAMBO)}{P(MAMBO)} = \frac{49}{49+48} = 0.563$$

f. **(2 puntos)** Si se selecciona una pieza de arte al azar y se sabe que no requiere ser restaurada, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al Museo Mercedes Sierra de Pérez?

$$P(Museo\ MSP\mid No\ Restaurada) = \frac{P(Museo\ MSP\ \cap\ No\ Restaurada)}{P(No\ Restaurada)} = \frac{24}{47+26+68+24+38}$$

$$P(Museo\ MSP\mid No\ Restaurada) = 0.118$$

Punto 4. Técnicas de Conteo – (17 puntos)

Un asesor de mercadeo de Nikke se encuentra diseñando un stand para una exposición deportiva que se realizará el próximo mes. En esta exposición se quiere presentar la nueva línea, compuesta de calzado (guayos, tenis y zapatillas para trotar) y camisetas, para hombre y para mujer. Posee 16 camisetas para exponer, y posee tres mostradores: Uno con una capacidad de 5 camisetas, otro con una capacidad de 4 camisetas, otro con una capacidad de 7 camisetas.

a. **(2 puntos)** ¿De cuantas formas se pueden ubicar las camisetas en los distintos mostradores?

$$\frac{16!}{5!\,4!\,7!} = 1441440$$

Al final de la exposición se decide seleccionar un grupo de camisetas para donar a escuelas de fútbol locales. Si se sabe que de las 16 camisetas 10 son para mujer, y se desea donar 9 camisetas:

b. **(2 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que 5 camisetas para mujer sean seleccionadas para la donación?

$$\frac{\binom{6}{4}\binom{10}{5}}{\binom{16}{9}} = 0.3304$$

c. **(3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo queden 3 camisetas de hombre en la donación?

$$\frac{\binom{6}{0}\binom{10}{9}}{\binom{16}{9}} + \frac{\binom{6}{1}\binom{10}{8}}{\binom{16}{9}} + \frac{\binom{6}{2}\binom{10}{7}}{\binom{16}{9}} + \frac{\binom{6}{3}\binom{10}{6}}{\binom{16}{9}} = 0.549$$

Una revista especializada en calzado deportivo va a realizar un artículo, al final de la exposición, donde muestra la nueva línea de calzado. En el stand se tienen 3 modelos de guayos, 5 modelos de tenis y 4 modelos de zapatillas para trotar. Determine de cuántas formas se pueden ordenar los distintos modelos de zapatos en las fotos de toda la línea si:

d. **(2 puntos)** No hay ninguna restricción sobre el orden de las zapatillas:

12! = 479001600

e. **(2 puntos)** Se quiere que los guayos queden juntos, los tenis queden juntos y las zapatillas para trotar queden juntas:

3!*3!*5!*4! = 103680

f. **(3 puntos)** Se quiere que los guayos y los tenis queden juntos, pero las zapatillas no queden necesariamente juntas:

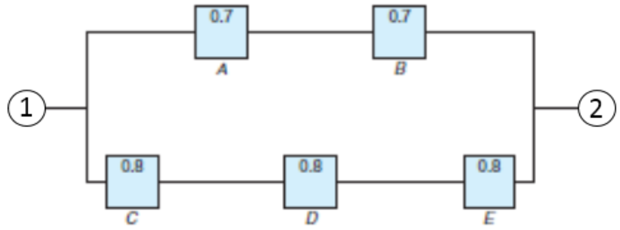
6!*3!*5! = 518400

g. **(3 puntos)** El mostrador quede organizado de la siguiente manera (Z para zapatilla para trotar, T para tenis y G para guayos): ZGT-GTZ-TZT-ZTG

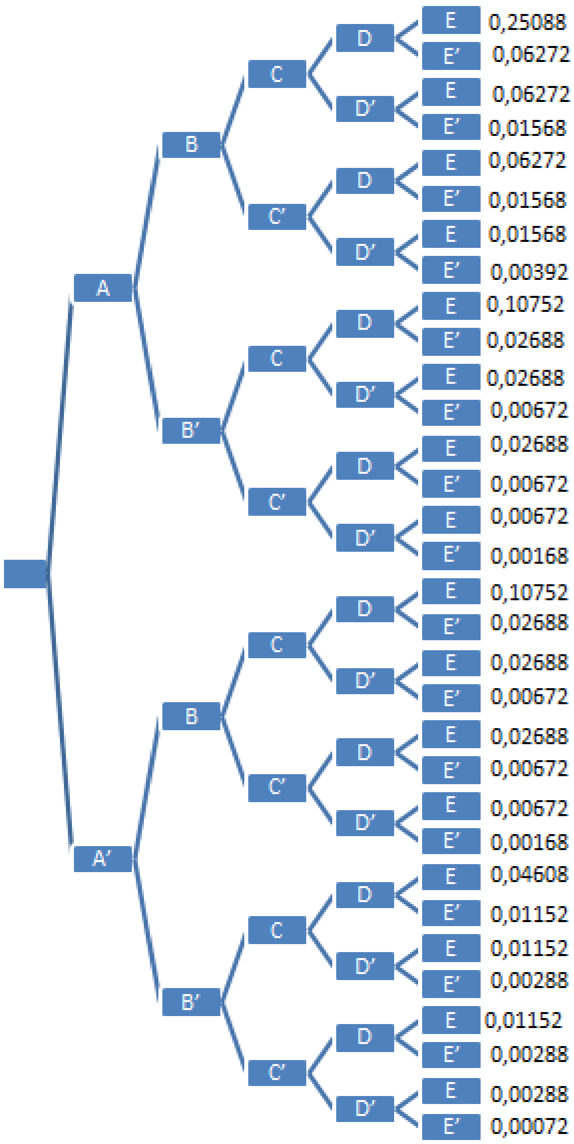
4*3*5*2*4*3*3*2*2*1*1*1= 17280

Punto 5. Teorema de Bayes y Árboles de Probabilidad– (20 puntos)

En la figura que se presenta a continuación se muestra el diagrama de un circuito de 5 componentes. El circuito funciona correctamente si la energía puede pasar del punto 1 al punto 2. Cada uno de los componentes del circuito funciona de manera independiente de los demás.



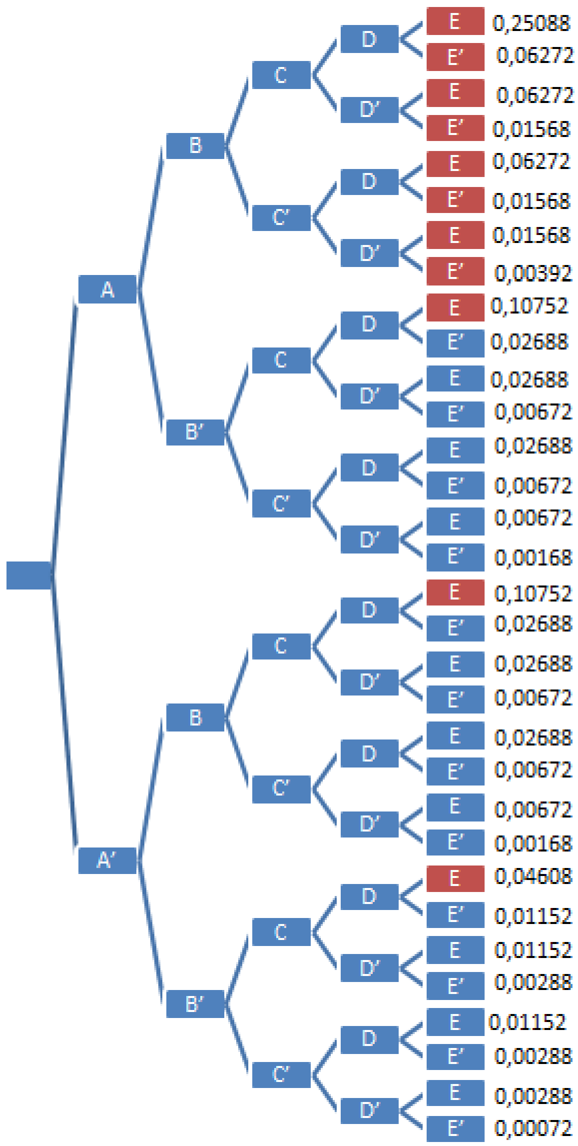
a. **(5 puntos)** Represente el funcionamiento del circuito mediante un diagrama de árbol.



Donde A = B = 0.7, A'=B'=0.3, C=D=E=0.8, C'=D'=E'=0.2

b. **(5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito funcione correctamente?

Para que el circuito funcione se necesita que A y B funcionen correctamente en simultáneo, o que C,D y E funcionen correctamente en simultáneo. Señalando del diagrama de árbol dichas opciones con color rojo:



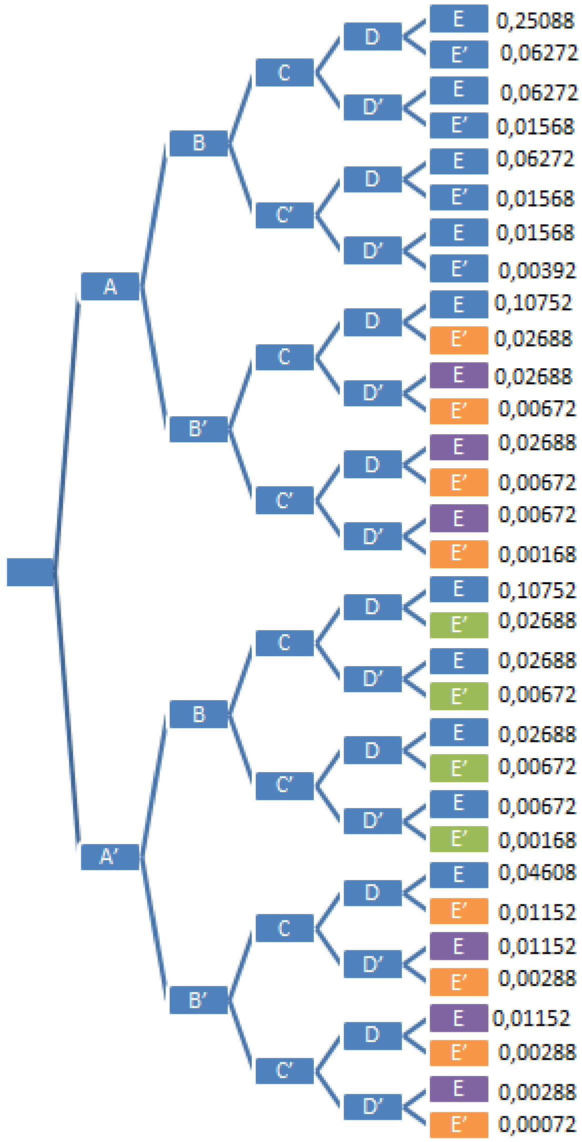
Por lo tanto, la probabilidad de que el circuito funcione es igual a:

P(Funcione) = 0.25088 + 0.06272 + 0.06272 + 0.01568 + 0.06272 + 0.01568 + 0.01568 + 0.00392 + 0.10752 + 0.10752 + 0.04608 = 0.75112

c. **(5 puntos)** Si se sabe que la pieza A no falló, ¿cuál es la probabilidad de que el circuito no funcione?

$$P(E' \cup \, B' | no \; funcionó) = \frac{P(E' \cap no \; funcionó)}{P(no \; funcionó)} + \frac{P(B' \cap no \; funcionó)}{P(no \; funcionó)} - \frac{P(E' \cap B \cap no \; funcionó)}{P(no \; funcionó)}$$

En el diagrama se muestra cada uno de los eventos que corresponden a los interceptos ($E' \cap no\ funcionó$ en verde, $B' \cap no\ funcionó$ en morado, $E' \cap B' \cap no\ funcionó$ en naranja).



$P(E' \cap no\ funcionó) = 0.02688 + 0.00672 + 0.00672 + 0.00168 + 0.02688 + 0.00672 + 0.00672 + 0.00168 + 0.01152 + 0.00288 + 0.00288 + 0.00072 = 0.102$

$P(B' \cap no\ funcionó) = 0.02688 + 0.02688 + 0.00672 + 0.02688 + 0.00672 + 0.00672 + 0.00168 + 0.01152 + 0.01158 + 0.00288 + 0.01152 + 0.00288 + 0.00288 + 0.00072 = 0.14646$

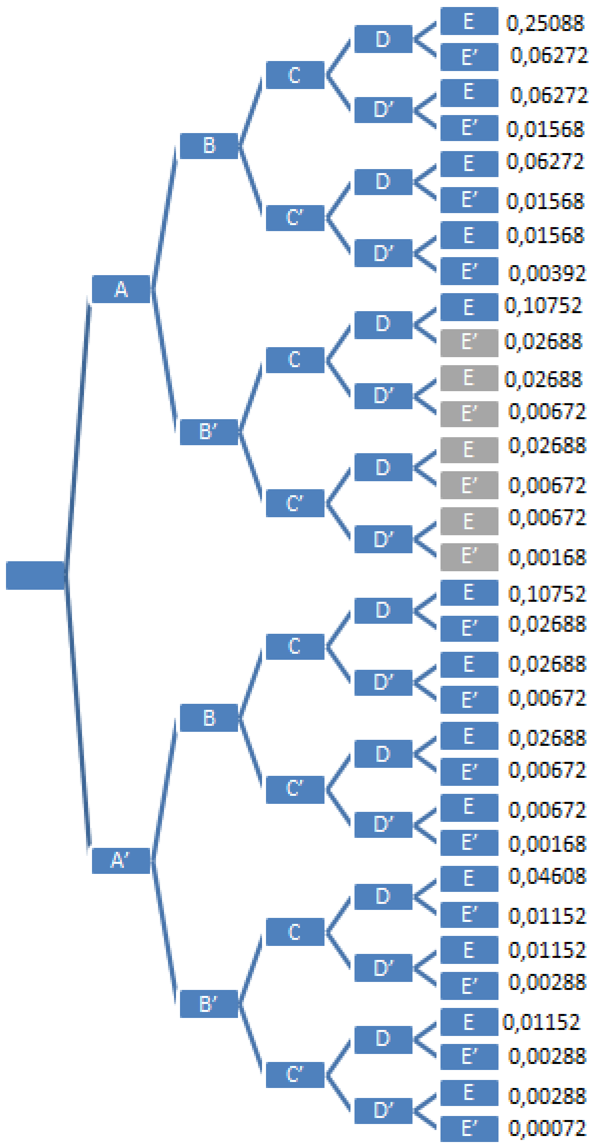
$P(E' \cap B \cap no\ funcionó) = 0.02688 + 0.00672 + 0.00672 + 0.00168 + 0.01152 + 0.00288 + 0.00288 + 0.00072 = 0.06$

$$P(E' \cup B' | no\ funcionó) = \frac{0.102}{1 - 0.75112} + \frac{0.146}{1 - 0.75112} - \frac{0.06}{1 - 0.75112} = 0.755$$

d. **(5 puntos)** Si se sabe que el circuito no funcionó, ¿cuál es la probabilidad de que fallaran las piezas B, E o las dos?
Ayuda: se requiere realizar todo el árbol de probabilidad.

$$P(no\ funcionara|A) = \frac{P(no\ funcionara\ \cap A)}{P(A)}$$

El siguiente diagrama muestra las configuraciones para $no\ funcionara\ \cap A$ en gris:



$$P(no\ funcionara\ \cap A) = 0.02688 + 0.02688 + 0.00672 + 0.02688 + 0.00672 + 0.00672 + 0.00168 = 0.10248$$

$$P(no\ funcionara|A) = \frac{0.10248}{0.7} = 0.1464$$

Punto 6. Variables Aleatorias Discretas – (30 puntos)

Un apostador chino le ha propuesto el siguiente juego: usted debe elegir un número entero del uno al seis y luego lanzar 3 dados al mismo tiempo. El costo que le pide el apostador para entrar en el juego es de cinco dólares. Si el número que se elige sale en uno de los tres dados, se recibe lo apostado y no se pierde dinero. En cambio, si el número elegido sale en dos de los tres dados, se recibe el doble de lo apostado. Y finalmente, si el número elegido sale en los tres dados, se recibe el triple de lo apostado. Sin embargo, si el número no sale en ninguno de los dados se pierde lo apostado. Siendo X la variable aleatoria que representa la ganancia neta del juego, de respuesta a los siguientes literales:

a. **(14 puntos)** Encuentre la Función de Probabilidad de la variable aleatoria X y grafíquela.

El número de casos totales corresponde a 6^3 debido a que en cada dado hay 6 posibles resultados equivalentes ($6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$). El número de casos favorables correspondiente a la probabilidad del evento en que en ninguno de los tres dados salga el número escogido es 5^3.

$$P(X = -5) = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216} = 0.5787$$

Para hallar la probabilidad de que en alguno de los tres dados salga el número elegido se deben deducir los casos favorables correspondientes a este evento. Se puede decir que los dos dados en los cuales no sale el número escogido tienen 5^2 posibilidades. Adicionalmente a esto, se tiene que el número elegido puede salir en cualquiera de los tres dados por lo cual hay que tener esto en cuenta en el número de posibilidades. Esto se tiene en cuenta a partir de una combinación en la cual están las posibilidades de que el número salga en alguno de los tres dados. De esta forma, la probabilidad de este evento sería:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{3}{1} 5^2}{6^3} = \frac{75}{216} = 0.3472$$

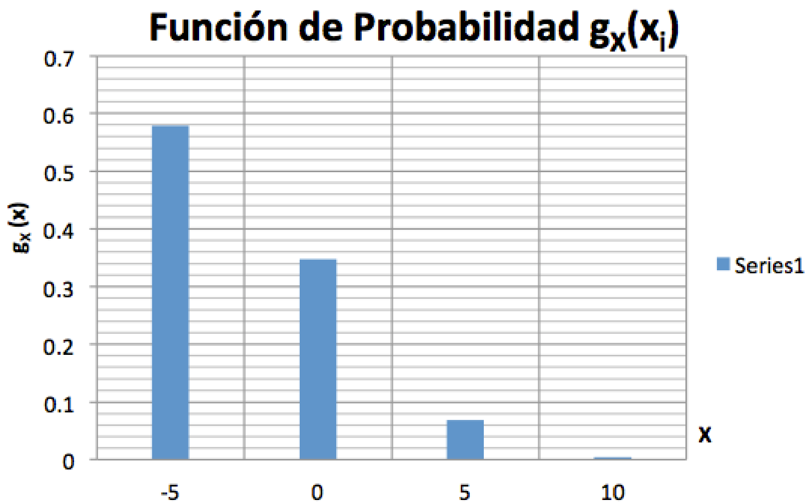
Las probabilidades faltantes se calculan con el mismo raciocinio:

$$P(X = 5) = \frac{\binom{3}{2} 5}{6^3} = \frac{15}{216} = 0.0694$$

$$P(X = 10) = \frac{1^3}{6^3} = \frac{1}{216} = 0.0047$$

La función de probabilidad sería entonces:

$$g_X(x) = \begin{cases} 0.5787 & x = -5 \\ 0.3472 & x = 0 \\ 0.0694 & x = 5 \\ 0.0047 & x = 10 \\ 0 & d.l.c \end{cases}$$



b. **(5 puntos)** Encuentre la Función de Distribución Acumulada de la variable aleatoria X.

$$G_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -5 \\ 0.5787 & -5 \leq x < 0 \\ 0.9259 & 0 \leq x < 5 \\ 0.9953 & 5 \leq x < 10 \\ 1 & x \geq 10 \end{cases}$$

c. **(6 puntos)** Calcule el valor esperado y la desviación estándar de la variable aleatoria X. Interprete su resultado.

$$E(X) = \sum_{R(X)} x_i \cdot P(X = x_i)$$

$$E(X) = (-5) \cdot 0.5787 + (0) \cdot 0.3472 + (5) \cdot 0.0694 + (10) \cdot 0.0047 = -2.4995 \ dólares$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum_{R(X)} x_i^2 \cdot P(X = x_i)$$

$$E(X^2) = (-5)^2 \cdot 0.5787 + (0)^2 \cdot 0.3472 + (5)^2 \cdot 0.0694 + (10)^2 \cdot 0.0047 = 16.6725$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 16.6725 - 6.2475 = 10.425$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = 3.2288$$

Se espera que un jugador seleccionado al azar en promedio pierda 2.5 dólares, adicional a esto, en un juego se espera que la ganancia neta este distanciada en promedio 3.22 dólares de la media.

d. **(5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que algún jugador gane algo en el juego? ¿Usted jugaría?

$$P(X > 0) = g_X(5) + g_X(10) = 0.0741$$

Con una probabilidad de 0.0741 una persona tendrá una ganancia neta positiva en el juego de este casino. Esta probabilidad es muy baja y teniendo en cuenta el valor esperado hallado anteriormente, no sería apropiado jugar este juego.

Punto 7. Variables Aleatorias Continuas – (25 puntos)

El Ministerio de Transporte ha estimado que el tiempo en horas que se demora un usuario en refrendar su licencia de conducción puede modelarse como una variable aleatoria X, con la siguiente Función de Densidad de Probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} a + b \cdot x^2 & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & d.l.c \end{cases}$$

a. **(10 puntos)** Si se sabe que el valor esperado de la variable aleatoria X es de 3.1 horas, encuentre los valores de las constantes **a** y **b** que garantizan que la función de densidad de probabilidad está correctamente definida.

La FDP está correctamente definida si:

$$\int_{R(X)} f_X(x)dx = 1$$

$$\int_2^4 (a + b \cdot x^2)dx = 1$$

$$a \cdot x + \frac{b \cdot x^3}{3}\Bigg|_2^4 = 1$$

$$4a + \frac{64b}{3} - 2a - \frac{8b}{3} = 1$$

$$2a + \frac{56b}{3} = 1$$

$$a = \frac{3 - 56b}{6}$$

El valor esperado de la variable aleatoria X está dado por:

$$E(x) = \int_{R(X)} x \cdot f_X(x)dx = 1$$

$$E(x) = \int_2^4 x \cdot (a + b \cdot x^2)dx = 3.1$$

$$\int_2^4 (a \cdot x + b \cdot x^3)dx = 3.1$$

$$\left.\frac{a\cdot x^2}{2}+\frac{b\cdot x^4}{4}\right|_2^4 = 3.1$$

$$8a + 64b - 2a - 4b = 3.1$$

$$6a + 60b = 3.1$$

$$3 - 56b + 60b = 3.1$$

$$b = \frac{1}{40}$$

$$a = \frac{3-\frac{56}{40}}{6} = \frac{4}{15}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{15}+\frac{x^2}{40} & 2 \le x \le 4 \\ 0 & d.l.c \end{cases}$$

b. **(7 puntos)** Halle la Función de Distribución Acumulada de la variable aleatoria X que representa el tiempo que se demora un usuario en refrendar su licencia.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

$$F_X(x) = \int_2^x \left(\frac{4}{15}+\frac{t^2}{40}\right)dt = \left.\frac{4t}{15}+\frac{t^3}{120}\right|_2^x = \frac{4}{15}(x-2)+\frac{1}{120}(x^3-8)$$

$$F_X(x) = \frac{1}{120}x^3 + \frac{4}{15}x - \frac{3}{5}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{1}{120}x^3 + \frac{4}{15}x - \frac{3}{5} & 2 \le x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

c. **(3 puntos)** Calcule la desviación estándar de la variable aleatoria X.

$$Var(X) = \mathrm{E}(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_2^4 x^2\left(\frac{4}{15}+\frac{x^2}{40}\right)dx$$

$$E(X^2) = \left.\frac{4}{45}x^3 + \frac{1}{200}x^5\right|_2^4 = 9.94$$

$$Var(X) = 9.94 - 9.61 = 0.33$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = 0.574$$

d. (2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona se demore exactamente 2 horas refrendar su licencia de conducción? Justifique su respuesta.

Dado que se trata de una variable aleatoria continua, la probabilidad en un punto es igual a cero. Por lo tanto:

$$P(X = 2) = 0$$

e. (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona se demore entre 2.3 y 3.2 horas en renovar su licencia?

$$P(2.3 \leq X \leq 3.2) = P(X \leq 3.2) - P(X < 2.3) = F_X(3.2) - F_X(2.3)$$

$$P(2.3 \leq X \leq 3.2) = \frac{1}{120}(3.2)^3 + \frac{4}{15}(3.2) - \frac{3}{5} - \left(\frac{1}{120}(2.3)^3 + \frac{4}{15}(2.3) - \frac{3}{5}\right) = 0.4117$$

Punto 8. Proceso de Poisson y Distribución Exponencial – (20 puntos)

Comida en la W es una empresa que provee servicios de domicilio para diferentes restaurantes dentro de la universidad a través de una página web. De acuerdo con la información recolectada por su propietario, durante las horas pico (12:00 – 2:00 p.m.) se sabe que se reciben pedidos de acuerdo a un Proceso de Poisson con una tasa de 3 pedidos por minuto.

a. (2 puntos) ¿Cuál es el valor esperado y la varianza del número de pedidos que recibe la página durante las horas pico?

Teniendo en cuenta el proceso de Poisson, podemos calcular el valor esperado y varianza como:

$$\lambda = 3\, pedidos/minuto \;\rightarrow\; \lambda = 180\;\; pedidos/hora$$

$$t = 2\, horas$$

$$E(X) = \lambda t = 360$$

$$Var(X) = \lambda t = 360$$

b. (2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se tengan 50 pedidos entre las 12:05 y las 12:20?

Esta probabilidad se puede calcular como:

$$P(N(0.25) = 50) = \frac{(180 \cdot 0.25)^{50} \cdot e^{-(180 \cdot 0.25)}}{50!} = 0.043$$

c. (2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que entre la 1:00 y la 1:45 lleguen a la página más de 110 pedidos?

Esta probabilidad se puede calcular como:

$$P(N(0.75) > 110) = 1 - P(N(0.75) \leq 110)$$

$$P(N(0.75) > 110) = 1 - \sum_{i=0}^{110} \frac{(180 \cdot 0.75)^i \cdot e^{-(180 \cdot 0.75)}}{i!} = 1 - 0.0153 = 0.9847$$

d. **(2 puntos)** ¿Cuál es el valor esperado y la varianza del tiempo entre dos pedidos consecutivos que llegan a la página?

Teniendo en cuenta que el tiempo que transcurre entre dos arribos consecutivos es exponencial, tenemos:

$$t \sim \exp\left(\mu = \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$E(t) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{180} = 0.0055$$

$$Var(t) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{180^2} = 0.00003086$$

e. **(2 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo que transcurre entre el noveno pedido que llega a la página y el décimo sea mayor a un minuto?

Esta probabilidad se puede calcular como:

$$P\left(t > \frac{1}{60}\right) = 1 - P\left(t \leq \frac{1}{60}\right)$$

$$P\left(t > \frac{1}{60}\right) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

$$P\left(t > \frac{1}{60}\right) = e^{-\lambda t} = e^{-180 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)} = 0.0498$$

f. **(2 puntos)** Si se sabe que entre la 12:30 y las 1:00 p.m. llegaron a la página 150 pedidos, ¿cuál es la probabilidad de que lleguen menos de 110 pedidos entre la 1:00 y la 1:40 p.m.?

Esta probabilidad se calcula como:

$$P(N(40/60) < 110) = \sum_{i=0}^{109} \frac{(180 \cdot 0.667)^i \cdot e^{-(180 \cdot 0.667)}}{i!} = 0.1691$$

g. **(6 puntos)** Si se sabe que llegaron 200 pedidos entre las 12:00 y la 1:30 p.m., ¿cuál es la probabilidad de que 80 pedidos se hayan realizado entre las 12:45 y la 1:15 p.m.?

Nota: reporte únicamente la expresión asociada a la probabilidad que se solicita.

Si denotamos el número de llegadas en el intervalo de 12:00 (t=0) y las 12:45 (t=0.75) como ***i***, el número de llegadas en el intervalo de 1:15 (t=1.25) y la 1:30 (t=1.5) se puede expresar como ***200-80-i***, con el objetivo de garantizar que en el intervalo de hora y media ocurran los 200 pedidos de los clientes.

Por lo tanto, la probabilidad solicitada se puede representar como:

$$P\left[\left(N(1.25) - N(0.75)\right) = 80 \mid N(1.5) = 200\right]$$

Por lo que esta probabilidad se puede calcular como:

$$P\left[\left(N(1.25)-N(0.75)\right)=80 \mid N(1.5)=200\right]=\frac{P\left[\left(N(1.25)-N(0.75)\right)=80, N(1.5)=200\right]}{P[N(1.5)=200]}$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{120} P\left[N(0.75)=i,\ \left(N(1.25)-N(0.75)\right)=80,\ N(1.5)-N(1.25)=120-i\right]}{P[N(1.5)=200]}$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{120} P[N(0.75)=i]\cdot P\left[\left(N(0.5)\right)=80\right]\cdot P[N(0.25)=120-i]}{P[N(1.5)=200]}$$

De donde obtenemos como resultado, la siguiente expresión para el cálculo de la probabilidad:

$$\sum_{i=0}^{120}\frac{\left(\frac{(180\cdot 0.75)^{i}\cdot e^{-(180\cdot 0.75)}}{i!}\right)\cdot\left(\frac{(180\cdot 0.5)^{80}\cdot e^{-(180\cdot 0.5)}}{80!}\right)\cdot\left(\frac{(180\cdot 0.25)^{120-i}\cdot e^{-(180\cdot 0.25)}}{(120-i)!}\right)}{\left(\frac{(180\cdot 1.5)^{200}\cdot e^{-(180\cdot 1.5)}}{200!}\right)}$$

h. (2 puntos) Si se sabe que un pedido llegó hace dos minutos, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo de llegada del siguiente pedido sea mayor a cuatro minutos?

$$P(t>4/60 \mid t>2/60)=P(t>2/60)$$

$$P(t>2/60)=1-(1-e^{-\lambda t})$$

$$P(t>2/60)=e^{-\lambda t}=e^{-(180\cdot 2/60)}=0.0025$$

Punto 9. Distribución Normal y Distribuciones de Mayor Aplicación – (25 puntos)

En la fabricación de cámaras de combustión para los motores V12 de los vehículos de carreras, se realizan mediciones del diámetro de la cámara, utilizando una fotocompuerta. Esta utiliza dispositivos láser para realizar mediciones del cilindro que constituye la cámara. De las mediciones realizadas con la fotocompuerta se sabe que en general el diámetro de las cámaras de combustión se comporta como una variable aleatoria normal con media 70 mm y desviación estándar de 0.3 mm. Teniendo en cuenta esta información, responda los siguientes literales:

a. (2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de una cámara de combustión seleccionada al azar sea mayor a 69.8 mm?

Si definimos la variable aleatoria X, como el diámetro (en mm) de las cámaras de combustión, podemos decir que:

$$X\sim N(70,9)$$

La probabilidad solicitada sería entonces:

$$P(X>69.8)=P\left(Z>\frac{69.8-70}{0.3}\right)=1-P(Z\leq -0.667)=1-0.252\approx 0.748$$

b. (2 puntos) Según el departamento de control de calidad, una cámara de combustión es aceptable si su diámetro está entre 69.9 y 70.1 mm. ¿Cuál es la probabilidad de que una cámara seleccionada al azar tenga un diámetro aceptable?

Esta probabilidad se puede calcular como:

$$P(69.9 \leq X \leq 70.1) = P\left(\frac{69.9 - 70}{0.3} \leq Z \leq \frac{70.1 - 70}{0.3}\right)$$

$$P(-0.33 \leq Z \leq 0.33) = 0.629 - 0.371 = 0.258$$

c. (5 puntos) Si la escala aceptable para el diámetro fuera de (70 - **c**, 70 + **c**), ¿para qué valor de **c** habría un 90% de probabilidad de que los cilindros de las cámaras de combustión tengan un diámetro aceptable?

Este valor se puede calcular como:

$$P(70 - c \leq X \leq 70 + c) = 0.9$$

$$P\left(\frac{70 - c - 70}{0.3} \leq Z \leq \frac{70 + c - 70}{0.3}\right) = 0.9$$

$$P\left(-\frac{c}{0.3} \leq Z \leq \frac{c}{0.3}\right) = 0.9$$

$$P\left(-\frac{c}{0.3} \leq Z \leq \frac{c}{0.3}\right) = P\left(Z \leq \frac{c}{0.3}\right) - \left(1 - P\left(\frac{c}{0.3} \leq Z\right)\right) = 0.9$$

$$2P\left(Z \leq \frac{c}{0.3}\right) = 1.9$$

$$P\left(Z \leq \frac{c}{0.3}\right) = 0.95$$

En la tabla de la normal estándar se encuentra que el valor Z asociado a una probabilidad de 0.95 es 1.645, por lo cual:

$$\frac{c}{0.3} = 1.645 \ \rightarrow c = 0.4935$$

Por lo tanto, la escala aceptable de precisión será de:

$$(70 - 0.4935, 70 + 0.4935) = (69.5065\ mm, 70.4935\ mm)$$

Para los literales siguientes (desde el ***literal e*** hasta el ***literal g***), usted debe especificar la variable aleatoria asociada y su distribución de probabilidad.

d. (4 puntos) Una cámara de combustión se considera inaceptable si su diámetro es menor o igual a 69.5 mm o si este es mayor o igual a 70.5 mm. Si se eligen diez cámaras al azar, ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo 2 de estas sean inaceptables?

Se define p como la probabilidad asociada a que una cámara sea inaceptable, de lo definido en el enunciado se tendría que:

$$p = P(X \leq 69.5) + P(X \geq 70.5) = P\left(Z \leq \frac{69.5 - 70}{0.3}\right) + 1 - P\left(Z \leq \frac{70.5 - 70}{0.3}\right) = 0.096$$

Se define la variable aleatoria A como el número de piezas no aceptables en una muestra de 10 cámaras de combustión.

$$A \sim Binomial(p = 0.096, n = 10)$$

La probabilidad que se pide sería entonces:

$$P(A \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} (0.096)^i \,(1 - 0.096)^{10-i} = 0.937$$

e. **(4 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que la quinta cámara seleccionada de forma independiente sea la tercera aceptable?

Inicialmente, calculamos la probabilidad de que una cámara sea aceptable por medio de:

$$P(Aceptable) = 1 - P(Inaceptable)$$

$$P(Aceptable) = 1 - 0.096 = 0.904$$

Se define la variable aleatoria B como el número de piezas revisadas hasta encontrar la tercera cámara de combustión aceptable.

$$B \sim Binomial\ Negativa(p = 0.904, k = 3)$$

$$P(B = 5) = \binom{4}{2} (0.904)^3 (0.096)^2 = 0.041$$

f. **(4 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que la quinta cámara de combustión revisada sea la primera aceptable?

Se define la variable aleatoria C como el número de piezas revisadas hasta encontrar la primera cámara de combustión aceptable.

$$C \sim Geométrica\ (p = 0.904)$$

$$P(C = 5) = (0.096)^4 (0.904) = 0.000077$$

g. **(4 puntos)** ¿Cuál es el valor esperado del número de cámaras que se deben revisar para completar 5 aceptables? Interprete este resultado.

Se define la variable aleatoria D como el número de piezas revisadas hasta encontrar la quinta cámara de combustión aceptable.

$$D \sim Binomial\ Negativa(p = 0.904, k = 5)$$

$$E(D) = \frac{5}{0.904} = 5.53$$

En promedio se deberán revisar 5.53 cámaras de combustión para encontrar 5 aceptables.