Direct and Inverse Problems in Geophysics - Basic Concepts and Applications

Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações

PARTE - II

Prof. Giuliano Sant'Anna Marotta

marotta@unb.br

Observatório Sismológico

Instituto de Geociências - Universidade de Brasília

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Linearização

Até agora, lidamos com o **problema linear**, **explícito** e **direto**, dado por

$$\boldsymbol{Gm} = \boldsymbol{d}$$

No caso de **problema não linear**, há de se **realizar a linearização**, geralmente utilizando os **dois primeiros termos** da **expansão da série de Taylor**, resultando na seguinte forma:

$$d_i = g_i(\boldsymbol{m}) \approx g_i(\boldsymbol{m}_0) + \sum_{j=1}^{M} \left[\left. \frac{\partial g_i(\boldsymbol{m})}{\partial m_j} \right|_{\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}_0} . \Delta \boldsymbol{m}_j \right]$$

$$\Delta \boldsymbol{c} = \boldsymbol{G} \Delta \boldsymbol{m}$$

$$\Delta \boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} - \widehat{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{m}_0)$$

$$\Delta \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_0$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Problema não linear

Passos

0 – Definir modelo funcional

$$d_1 = 2m_1^3$$

1 – Definir valores para o **vetor dos parâmetros aproximados**

$$\boldsymbol{m}_0$$

2 – Definir a **matriz das derivadas parciais**

$$\boldsymbol{G} = \left.\frac{\partial g_i(\boldsymbol{m})}{\partial m_j}\right|_{\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}_0}$$

3 – Definir o **vetor dos valores aproximados**

$$\widehat{\boldsymbol{d}} = [g_i(\boldsymbol{m}_0)]$$

4 – Definir o **vetor das diferenças**

$$\Delta\boldsymbol{c} = \widehat{\boldsymbol{d}} - \boldsymbol{d}$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Problema não linear

5 – Definir o **vetor das correções**

$$\Delta \boldsymbol{m} = \left(\boldsymbol{G}^T \boldsymbol{G}\right)^{-1} \boldsymbol{G}^T \Delta \boldsymbol{c} \quad \text{ou} \quad \Delta \boldsymbol{m} = \left(\boldsymbol{G}^T \boldsymbol{W} \boldsymbol{G}\right)^{-1} \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{W} \Delta \boldsymbol{c}$$

6 – Definir o **vetor dos parâmetros ajustados**

$$\boldsymbol{m_1} = \boldsymbol{m_0} + \Delta \boldsymbol{m}$$

7 – Definir o **vetor dos resíduos**

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{d} - [g_i(\boldsymbol{m}_1)]$$

8 – Adotar $\boldsymbol{m_0} = \boldsymbol{m_1}$ e **repetir** os passos (realizar iteração) de **1 a 7 até que** $\Delta \boldsymbol{m}$ seja suficientemente pequeno, ou seja, quando a **convergência é obtida**.

Obs.: A solução de problemas não lineares são altamente dependentes dos parâmetros iniciais ($\boldsymbol{m_0}$)

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Modelo Linear

$$2m_1 = 4$$

1 – Definir valores para o **vetor dos parâmetros aproximados**

$$\boldsymbol{m}_0 = [0]$$

2 – Definir a **matriz das derivadas parciais**

$$\boldsymbol{G} = \frac{\partial(2m_1)}{\partial m_1} = [2]$$

3 – Definir o **vetor dos valores aproximados**

$$\widehat{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{m}_0 = [2][0] = [0]$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Modelo Linear

4 – Definir o **vetor das diferenças**

$$\Delta \boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} - \widehat{\boldsymbol{d}} = [\mathbf{4}] - [\mathbf{0}] = [\mathbf{4}]$$

5 – Definir o **vetor das correções**

$$\Delta \boldsymbol{m} = \left(\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{G}\right)^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}} \Delta \boldsymbol{c} = [2]$$

6 – Definir o **vetor dos parâmetros ajustados**

$$\boldsymbol{m}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{m}_{\mathbf{0}} + \Delta \boldsymbol{m} = [\mathbf{0}] + [\mathbf{2}] = [\mathbf{2}]$$

7 – Definir o **vetor dos resíduos**

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{m}_1) = 4 - [2][2] = [0]$$

8 - Como $\boldsymbol{e} = [\mathbf{0}]$, considera-se que $\boldsymbol{m}$ convergiu com apelas uma iteração

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

```
% Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações
% Prof. Giuliano Marotta - SIS/IG/UnB - marotta@unb.br
% Parte II: Exemplo 01
% ------------------------------------------------------------------
% Modelo: 2m= 4
clear; clc;
figure; % Cria Figura
hold on; % Habilita plotar na mesma figura
d = [4]; % Vetor dos dados conhecidos
m0 = [1]; % Vetor dos parametros aproximados
it = 10; % Numero de iteracoes
for i=1:it
  G = [2]; % Matriz das derivadas parciais
  d0 = 2.*m0; % Vetor dos valores calculados
  dc = d-d0; % Vetor das diferencas
  dm = (G'*G)^-1*(G'*dc) % Vetor das correcoes
  m = m0+dm; % Vetor dos parametros ajustados
  e = d-2.*m; % Vetor dos residuos
  m0 = m; % Vetor dos parametros aproximados igual aos ajustados
  plot(i,m0,'.r'); % Plota valor do parametro estimado a cada iteracao
end
xlabel('iteracao')
ylabel('parametro')
```

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Modelo Não Linear

$$2m^3 = 16$$

Adotar: $\boldsymbol{m}_0 = [1]$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

```
% Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações
% Prof. Giuliano Marotta - SIS/IG/UnB - marotta@unb.br
% Parte II: Exemplo 02
% ---------------------------------------------------------------
% Modelo: 2m^3= 16
clear; clc;
figure % Cria figura
hold on % habilita plotar na mesma figura
d =[16]; % Vetor dos valores observados
m0 = [1]; % Vetor dos parametros aproximados
N = length(d(:,1)); % Numero de Observacoes
M = length(m0(1,:)); % Numero de parametros
it = 10; % Numero de iteracoes
for i=1:it
   G =[3*2.*m0.^2]; % Matriz das derivadas parciais
   d0 = 2.*m0.^3; % Vetor dos valores calculados
   dc = d-d0; % Vetor das diferencas
   dm = (G'*G)^-1*(G'*dc); % Vetor das correções
   m = m0+dm % Vetor dos parametros ajustados
   e = d-2.*m.^3; % Vetor dos residuos
   m0=m;% vetor dos parâmetros ajustados
   plot(i,m,'.r') % plota valor do parametro por iteracao
end
xlabel('iteracao')
ylabel('parametro')
```

Exercício

Exercício 02

De posse dos **dados** e do **modelo funcional**, **determinar o parâmetro** (v). Adotar modelo linear e não linear.

Dado o modelo: $t_i = \frac{s_i}{v_i}$

t(s)	s(km)
5.0	150.0
5.1	155.0
5.3	160.0
5.0	153.0

Considerar $W = I$ e calcular a incerteza do parâmetro estimado