Direct and Inverse Problems in Geophysics - Basic Concepts and Applications

Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações

PARTE - III

Prof. Giuliano Sant'Anna Marotta

marotta@unb.br

Observatório Sismológico

Instituto de Geociências - Universidade de Brasília

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Quando $M = N$

Se **existe uma solução**, ela é **única**. O **erro de previsto** $[d_i^{obs} - d_i^{Pre}]$ é **igual à zero**.

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Quando $M = N$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

```
% Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações
% Prof. Giuliano Marotta - SIS/IG/UnB - marotta@unb.br
% Parte III: Exemplo 01
% ------------------------------------------------------------------
% Numero de observacoes = numero de parametros
clear
clc
d = [1;2]; % Vetor dos dados observados
G = [1 0; 5 -1]; % Matriz dos coeficientes
m = (G'*G)^-1*(G'*d) % Vetor dos parametros
e = d-G*m % Vetor dos erros
```

$$\boldsymbol{m} = [1 \quad 3]^T$$
$$\boldsymbol{e} = [0 \quad 0]^T$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Quando $M > N$

Com **mais incógnitas** do **que observações**, $\boldsymbol{m}$ **não tem solução única**. Um **caso especial** do problema subdeterminado ocorre quando você pode **ajustar os dados exatamente**, o que é chamado de **caso puramente subdeterminado**. A **predição do erro** para o caso puramente subdeterminado é **exatamente zero**. Um exemplo de tal problema é:

$$[1] = [2 \quad 1]\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

As possíveis soluções incluem $\boldsymbol{m} = [0 \quad 1]^T$, $\boldsymbol{m} = [0{,}5 \quad 0]^T$, $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$ e $\boldsymbol{m} = [0{,}4 \quad 0{,}2]^T$.

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Problemas subdeterminados

Para **resolver problemas subdeterminados**, devemos **adicionar informações** que ainda não estão **em G**. Isso é chamado de informação *a priori*. **Exemplos** podem incluir a restrição de que a **densidade** seja **maior que zero para rochas**, que a **velocidade da onda sísmica P** na Moho esteja **dentro do intervalo 5 a 10 km/s**, **etc**.

Outra suposição a priori é chamada de "**simplicidade da solução**", buscando **soluções** tão **simples quanto possível**, como **minimizar o tamanho de m**.

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Problemas subdeterminados

No caso de problema puramente subdeterminado, onde não há solução , considera-se a aplicação dos **multiplicadores de Lagrange** ($\boldsymbol{\lambda}$) na solução de norma mínima, **de tal forma que $\boldsymbol{m}^T\boldsymbol{m}$ seja minimizado**:

$$2\boldsymbol{m} - \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{\lambda} = 0\;;\; \boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{\lambda}$$

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{m} = \boldsymbol{G}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{\lambda}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{\lambda}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = 2(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^T)^{-1}\boldsymbol{d}\;;\; \boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\boldsymbol{G}^T\left[2(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^T)^{-1}\right]\boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^T)^{-1}\boldsymbol{d}$$

Se $(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^T)^{-1}$ existe, o procedimento acima permite determinar a **solução que tem o norma mínima** entre o **número infinito de soluções** que se **ajustam exatamente aos dados.**

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Quando $M > N$

$$[1] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

```
% Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações
% Prof. Giuliano Marotta - SIS/IG/UnB - marotta@unb.br
% Parte III: Exemplo 02
% ----------------------------------------------------------------
% Numero de observacoes < numero de parametros
clear
clc
d = [1]; % Vetor dos dados observados
G = [2 1]; % Matriz dos coeficientes
m = G'*(G*G')^-1*d % Vetor dos parametros
e = d-G*m % Vetor dos erros
```

$$\boldsymbol{m} = [0{,}4 \quad 0{,}2]^T$$
$$\boldsymbol{e} = [0]$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Regularização

Para **problemas mal postos** (que falham), seja **na existência de soluções**, **na unicidade dessas soluções** ou mesmo **no caso em que a solução não dependa continuamente dos dados**, são utilizadas frequentemente **técnicas de regularização**. Isto para dar **estabilidade ao problema**.

Do ponto de vista matemático, **no caso de modelos lineares**, esses problemas mal postos se devem geralmente ao fato da matriz $\boldsymbol{G}$ **possuir valores singulares nulos ou muito próximos de zero**. Uma das formas de contornar isto seria **acrescentar** à matriz $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}$ um **múltiplo da matriz identidade,** de tal maneira que essa nova matriz possua somente **valores singulares positivos**, porém **distantes de zero**.

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Regularização

De fato, **considerando** $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G} + \boldsymbol{\lambda I}$, temos que **se** $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$, os **autovalores** de $\boldsymbol{B}$ ficam **diferentes de zero** (positivos). **Feito isto**, pode-se definir a solução de **mínimos quadrados amortecidos** do sistema original por:

$$\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G} + \boldsymbol{\lambda I})^{-1}\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{d}$$

A **escolha de um bom parâmetro** λ, chamado de parâmetro de regularização, é **fundamental nos problemas mal postos**.

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Quando $M > N$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

```
% Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações
% Prof. Giuliano Marotta - SIS/IG/UnB - marotta@unb.br
% Parte III: Exemplo 03
% ------------------------------------------------------------------
% Numero de observacoes < numero de parametros
clear
clc
d = [1; 1]; % Vetor dos dados observados
G = [1 2 1; 2 4 2]; % Matriz dos coeficientes
M = length(G(1,:)); % Numero de parametros
I = eye(M,M); % Matriz identidade
lamb(1:M,1) = 0.001; % Vetor dos parametros de regularizacao
m = (G'*G + lamb.*I)^-1*(G'*d) % Vetor dos parametros
e = d-G*m % Vetor dos erros
```

$$\boldsymbol{m} = [0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}1]^T$$
$$\boldsymbol{e} = [0{,}4 \quad -0{,}2]^T$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Quando $M > N$

Embora aqui tenha dito que **problemas sobredeterminados** normalmente **têm $N > M$**, é importante perceber que **nem sempre é esse o caso**. Considere o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

Para este problema, **$\boldsymbol{m_1}$ é sobredeterminado**, enquanto que **$\boldsymbol{m_2}$ e $\boldsymbol{m_3}$ são subdeterminados**. E embora existam duas equações em apenas duas incógnitas (m_2, m_3), elas **não são independentes** ($2L_2 = L_3$). Assim, este **problema é tanto sobredeterminado como subdeterminado** ao mesmo tempo.

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

```
% Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações
% Prof. Giuliano Marotta - SIS/IG/UnB - marotta@unb.br
% Parte III: Exemplo 04
% ---------------------------------------------------------------
% Numero de observacoes < numero de parametros
% Numero de observacoes > numero de parametros
clear
clc
d = [1; 2; 3; 4]; % Vetor dos dados observados
G = [1 0 0; 1 0 0; 0 1 1; 0 2 2]; % Matriz dos coeficientes
M = length(G(1,:)); % Numero de parametros
I = eye(M,M); % Matriz identidade
lamb(1:M,1) = 0.00001; % Vetor dos parametros de regularizacao
m = (G'*G + lamb.*I)^-1*(G'*d) % Vetor dos parametros
e = d-G*m % Vetor dos erros
```

$\boldsymbol{m} = [1{,}5 \quad 1{,}1 \quad 1{,}1]^T$

$\boldsymbol{e} = [-0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}8 \quad -0{,}4]^T$

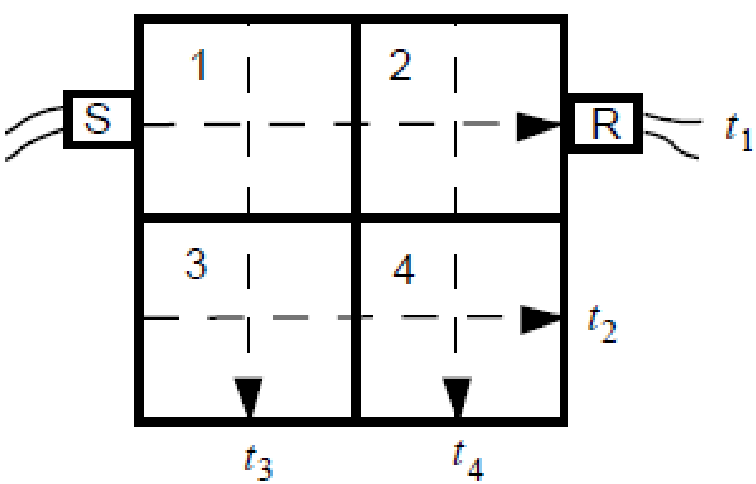
Exercício

MMQ – Exemplos de Aplicação

Ajuste (Exercício 01)

Baseado no conceito de tomografia, considerar 4 observações de tempo de percurso para estimar 4 parâmetros. h é a espessura da camada, v_i são as velocidades e s_i as vagarozidades:

Dados: $h = 1$ e $t_1 = t_3 = 1$ e $t_2 = t_4 = 2$



$$t_1 = h\left(\frac{1}{v_1}\right) + h\left(\frac{1}{v_2}\right) = h(s_1 + s_2)$$

$$t_2 = h\left(\frac{1}{v_3}\right) + h\left(\frac{1}{v_4}\right) = h(s_3 + s_4)$$

$$t_3 = h\left(\frac{1}{v_1}\right) + h\left(\frac{1}{v_3}\right) = h(s_1 + s_3)$$

$$t_4 = h\left(\frac{1}{v_2}\right) + h\left(\frac{1}{v_4}\right) = h(s_2 + s_4)$$

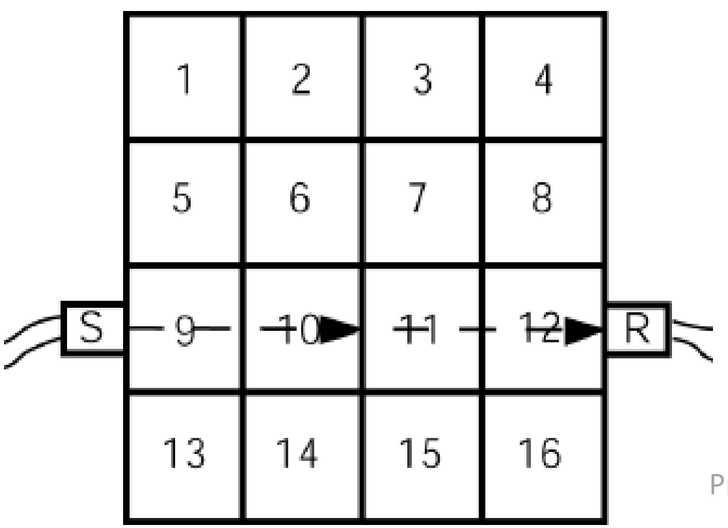
MMQ – Exemplos de Aplicação

```
% Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações
% Prof. Giuliano Marotta - SIS/IG/UnB - marotta@unb.br
% Parte III: Exercicio 01
% -----------------------------------------------------------------
clear
clc
t = [1;2;1;2]; % Vetor contendo tempos de percurso
h = 1; % Espessura da camada
d = t; % Vetor de dados
G = [h h 0 0;...
     0 0 h h;...
     h 0 h 0;...
     0 h 0 h]; % Matriz dos coeficientes
lrg=0.001; % Parametro de regularizacao
I = eye(length(G),length(G)); % Matriz identidade
m = (G'*G+lrg.*I)^-1*(G'*d) % Parametros estimados
e = d-G*m % Erro
```

MMQ – Exemplos de Aplicação

Ajuste (Exercício 02)

Os dados neste problema são compostos por 8 medições dos tempos de percurso t. Cada tijolo é composto de um material uniforme e que o tempo de viagem do som em cada tijolo é proporcional à largura e altura do tijolo h. O fator de proporcionalidade é a vagarosidade do tijolo s, dando assim 16 parâmetros do modelo $\boldsymbol{m}$, onde a ordenação é de acordo com o esquema de numeração da figura abaixo



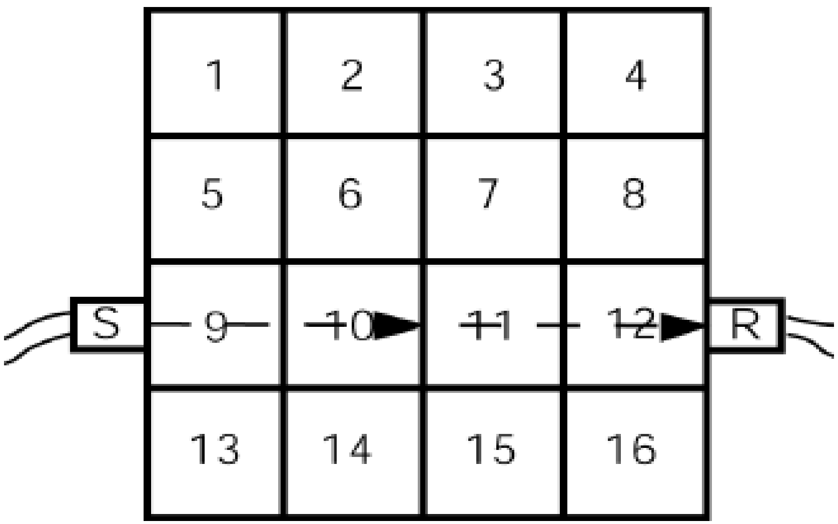
Dados:

$h = 1$ e $t_1 = t_2 = t_4 = t_5 = t_6 = t_8 = 2$

$t_3 = t_7 = 1$

Determinar: s

MMQ – Exemplos de Aplicação



$$T_1 = hs_1 + hs_2 + hs_3 + hs_4$$
$$T_2 = hs_5 + hs_6 + hs_7 + hs_8$$
$$T_3 = hs_9 + hs_{10} + hs_{11} + hs_{12}$$
$$T_4 = hs_{13} + hs_{14} + hs_{15} + hs_{16}$$
$$T_5 = hs_1 + hs_5 + hs_9 + hs_{13}$$
$$T_6 = hs_2 + hs_6 + hs_{10} + hs_{14}$$
$$T_7 = hs_3 + hs_7 + hs_{11} + hs_{15}$$
$$T_8 = hs_4 + hs_8 + hs_{12} + hs_{16}$$

MMQ – Exemplos de Aplicação

```
% Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações
% Prof. Giuliano Marotta - SIS/IG/UnB - marotta@unb.br
% Parte III: Exercicio 02
% ----------------------------------------------------------------
clear
clc
t = [2;2;1;2;2;2;1;2]; % Vetor contendo tempos de percurso
h = 1; % Espessura da camada
d = t; % Vetor de dados
G = h.*[1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
      0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0;...
      0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0;...
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1;...
      1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0;...
      0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0;...
      0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0;...
      0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1]; % Matriz dos coeficientes
lrg(1:length(G),1) = 0.001; % parametro de regularizacao
I = eye(length(G),length(G)); % Matriz identidade
m = (G'*G+lrg.*I)^-1*(G'*d) % Parametros estimados
e = d-G*m % Erro
```