

Direct and Inverse Problems in Geophysics - Basic Concepts and Applications

Problemas Diretos e Inversos em Geofísica -
Conceitos Básicos e Aplicações

PARTE - I

Prof. Giuliano Sant'Anna Marotta

marotta@unb.br

Observatório Sismológico

Instituto de Geociências - Universidade de Brasília

Introdução

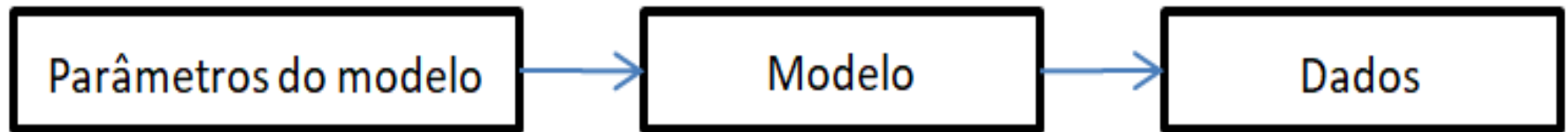
Teoria da inversão

Pode ser definida como a **arte de estimar parâmetros de modelos a partir de dados conhecidos (observações)**. Portanto, **requer** a definição de **modelo** capaz de, por meio dos **parâmetros conhecidos, prever os dados** de interesse.

Além da estimativa de parâmetros, a teoria da inversão também pode ser usada para estimar a "**qualidade**" **dos parâmetros** do modelo previsto, **uma vez conhecidas as incertezas dos dados conhecidos**.

Definições Básicas

Problema direto: O processo (matemático) de **predição de dados** com base em algum **modelo físico ou matemático** por meio de um determinado **conjunto de parâmetros** do modelo.



Exemplo: O **tempo de percurso t** de uma onda sísmica que passa por **M camadas** de **espessura h_i** e **velocidade v_i** é dado por:

$$t = \sum_{i=1}^M \frac{h_i}{v_i}$$

Definições Básicas

Problema inverso: O processo (matemático) de **estimar os valores numéricos**, e **incertezas associadas**, de um **conjunto de parâmetros** presentes um **modelo definido**, baseado em um **conjunto de dados** ou observações.



Exemplo: pode-se **inverter o tempo de percurso t** e **determinar as velocidades das camadas**. Neste caso seria necessário **conhecer o modelo** (matemático) que **relaciona o tempo de percurso** às **informações de espessura e velocidades** das camadas.

$$t = \sum_{i=1}^M \frac{h_i}{v_i}$$

Definições Básicas

Dados: São as **observações**, ou medições, feitas na tentativa de **restringir a solução** de algum **problema de interesse**.

Modelo: A **relação** entre os **parâmetros** e os **dados**.

Parâmetros: As **quantidades numéricas**, ou desconhecidas, **que se deseja estimar**.

Exemplo: t é um tipo de dado; somente v_i são consideradas **parâmetros do modelo**; e **pode-se** simplificar o problema e tratá-lo em termos de **vagarosidade** s_i , onde:

$$s_i = \frac{1}{v_i} | t = \sum_{i=1}^M h_i \cdot s_i$$

Modelos lineares e **não lineares** podem resultar em **diferentes estimativas** de velocidade se os dados contiverem algum ruído.

Nomenclaturas

Vetores: letras **minúsculas em negrito**

Matrizes: letras **maiúsculas em negrito**

Para os **dados**, tem-se: $\mathbf{d} = [d_1, d_2, d_3, \dots, d_N]^T$

Para os **parâmetros** do modelo, tem-se: $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3, \dots, m_M]^T$

Em um **modelo explícito**, tem-se: $\mathbf{d} = \mathbf{Gm}$

\mathbf{d} é **N -dimensional**, \mathbf{m} é **M -dimensional** e \mathbf{G} , denominada **matriz das derivadas parciais** e, algumas vezes chamada de núcleo ou dos coeficientes, possui **dimensão $N \times M$** e, no caso de modelo linear, contém apenas coeficientes constantes.

Nomenclaturas

Exemplo de um **modelo explícito linear** (Problema Direto):

$$\begin{aligned} d_1 &= 2m_1 + 0m_2 - 4m_3 \\ d_2 &= m_1 + 2m_2 + 3m_3 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

E **por simplificação**, tem-se:

$$\mathbf{d} = \mathbf{Gm}$$

Onde:

$$\mathbf{d} = [d_1, d_2]^T \quad \mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3]^T \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Problema inverso

Ao assumir o **problema direto**, conforme já exposto, tem-se:

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$$

A **inversão do problema**, direto para estimativa dos parâmetros do modelo, pode ser dada por:

$$\mathbf{m} = \mathbf{d}\mathbf{G}^{-1}$$

Um **problema comum**, que depende de **grande esforço**, aparece **quando \mathbf{G}^{-1} não existe no sentido matemático**. Ou seja, quando não satisfaz a seguinte relação:

$$\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{I}$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade

Método de inversão

Dois vetores mais comuns: **Vetor de erro de dados**, ou de desajuste; e vetor de parâmetros do modelo.

Os **métodos baseados no vetor de erro de dados** dão origem a **soluções clássicas de mínimos quadrados (MMQ)**. Já os **métodos baseados no vetor de parâmetros** do modelo dão origem ao que é conhecido como **soluções de comprimento mínimo**, ou **norma mínima**.

Melhorias sobre soluções de mínimos quadrados e comprimento mínimo **incluem o uso de informações sobre ruído nos dados e informações a priori sobre os parâmetros do modelo**, e são conhecidas como **soluções de mínimos quadrados ponderados** ou comprimento mínimo ponderado, respectivamente.

Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Vetores de erro de dados

O **vetor de erro de dados e** é essencial no **desenvolvimento de problemas inversos pelo MMQ**. Eles são dados por:

$$\mathbf{e} = \mathbf{d}^{calc} - \mathbf{d}^{obs}$$

A dimensão do vetor de erro \mathbf{e} é **$N \times 1$** .

A aplicação do **MMQ se baseia na aceitação do melhor estimador de \mathbf{m}** considerando que:

$$\sum_{i=1}^N e_i^2 = \min \quad \text{ou} \quad \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \min$$

Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Considerando a presença de **erro nas observações**, tem-se:

$$d + e = Gm$$

$$e = Gm - d$$

De acordo com as **premissas do MMQ**, tem-se:

$$e^T e = \min$$

Então

$$e^T e = (Gm - d)^T (Gm - d) = \min$$

Considerando as derivadas parciais de $e^T e$ em relação a m , e **definindo-as como zero**, tem-se:

$$\frac{d(e^T e)}{dm} = 2G^T Gm - G^T d - G^T d = 0 \mid G^T Gm - G^T d = 0$$

Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Esta última expressão representa o **conjunto de M equações de observação e M incógnitas**.

Quando $G^T G$ ($M \times M$) é não singular, a solução única é dada por:

$$\mathbf{m} = (G^T G)^{-1} G^T \mathbf{d}$$

Em um caso mais geral, **considerando os pesos** dos dados observados, tem-se:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{W} \mathbf{e} = \min \quad \mathbf{W} = \sigma_0^2 (\sum \mathbf{d})^{-1}$$

Onde **σ_0^2 é um valor de variância a priori e $\sum \mathbf{d}$ a matriz covariância dos valores observados**. E, **por solução análoga à anterior, tem-se:**

$$\mathbf{m} = (G^T \mathbf{W} G)^{-1} G^T \mathbf{W} \mathbf{d} ; \sigma_{pos}^2 = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}{N-M} ; \sum \mathbf{m} = \sigma_{pos}^2 (G^T \mathbf{W} G)^{-1}$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Vimos que a solução de mínimos quadrados para $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$ é dada por:

$$\mathbf{m} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d} \quad \text{ou} \quad \mathbf{m} = (\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{d}$$

Um **problema** é que a **solução não existe quando $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ não tem inversão matemática.**

Matematicamente, podemos dizer que o **$\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ tem um inverso**, e é único, **quando $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ tem posto igual a M .**

Essencialmente, **se $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ tiver o posto igual a M** , ele **terá informações suficientes para resolver M coisas** (neste caso, parâmetros do modelo).

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Isso **acontece quando** todas as **M linhas** (ou equivalentemente, desde que $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ seja quadrado) **são linearmente independentes**.

$\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ terá posto $< M$ se o **número de observações N** for menor que **M** .

Se **$[\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1}$ não existe**, um **número infinito de estimativas** irá **se ajustar aos dados** igualmente bem. Matematicamente, $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ tem posto $< M$ se $|\mathbf{G}^T \mathbf{G}| = 0$, onde $|\mathbf{G}^T \mathbf{G}|$ é o determinante do $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$.

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Quando $M < N$

Com **mais observações do que incógnitas**, normalmente **não é possível ajustar todos os dados exatamente**. O problema dos **mínimos quadrados se enquadra nessa categoria**. Considere o seguinte exemplo:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

Se a solução existe, este **caso** é denominado **sobredeterminado**.

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Exemplos

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Quando $M < N$

$$\begin{aligned}1m_1 + 0m_2 &= 1 \\5m_1 - 1m_2 &= 2 \\-3m_1 + 1m_2 &= 1\end{aligned}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \frac{\partial F(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \mathbf{G}\mathbf{m} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{m} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d} \quad \mathbf{e} = \mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

% Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações

% Prof. Giuliano Marotta - SIS/IG/UnB - marotta@unb.br

% Parte I: Exemplo 01

% -----

clear

clc

d = [1;2;1]; % vetor dos dados observados

G = [1 0; 5 -1; -3 1]; % matriz dos coeficientes

m = (G'*G)^-1*(G'*d); %Vetor dos parametros

dcalc = G*m; % Vetor dos dados calculados

e = dcalc-d; % Vetor dos erros

$$\mathbf{m} = [1,333 \quad 4,833]^T$$

$$\mathbf{e} = [-0,333 \quad 0,167 \quad 0,167]^T$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Quando $M < N$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

$$W = I$$

$$W = \sigma_0^2 (\sum d)^{-1} \quad \mathbf{m} = (\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{d} \quad \mathbf{e} = \mathbf{G} \mathbf{m} - \mathbf{d}$$

$$\sigma_{pos}^2 = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{W} \mathbf{e}}{N - M} \quad \sigma_m^2 = \sigma_{pos}^2 (\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1}$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

% Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações

% Prof. Giuliano Marotta - SIS/IG/UnB - marotta@unb.br

% Parte I: Exemplo 02

% -----

clear

clc

d = [1;2;1]; % vetor dos dados observados

G = [1 0; 5 -1; -3 1]; % matriz dos coeficientes

W = eye(3,3);

m = (G'*W*G)^-1*(G'*W*d); %Vetor dos parametros

dcalc = G*m; % Vetor dos dados calculados

e = dcalc-d; % Vetor dos erros

N = length(d(:,1)); % Numero de observacoes

M = length(G(1,:)); % Numero de parametros

VarPos = (e'*W*e)/(N-M); % Variancia a posteriori

Var_m = VarPos*(G'*W*G)^-1; % Variancia dos parametros estimados

Dp_m = diag(Var_m).^0.5; % Desvio-padrao dos parametros estimados

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Quando $M < N$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma d = \begin{bmatrix} 0,01^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_0^2 = 1$$

$$W = \sigma_0^2 (\Sigma d)^{-1} \quad \mathbf{m} = (\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{d} \quad \mathbf{e} = (\mathbf{G} \mathbf{m} - \mathbf{d})$$

$$\sigma_{pos}^2 = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{W} \mathbf{e}}{N - M} \quad \sigma_m^2 = \sigma_{pos}^2 (\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1}$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

```
% Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações
% Prof. Giuliano Marotta - SIS/IG/UnB - marotta@unb.br
% Parte I: Exemplo 03
% -----
clear
clc
d = [1;2;1]; % vetor dos dados observados
Var_d = [0.01^2 0 0; 0 0.02^2 0; 0 0 0.01^2]; % Covariância dos dados observados
Var_pri = 1; % Variancia a priori
W = Var_pri.*(Var_d)^-1; % Matriz peso
G = [1 0; 5 -1; -3 1]; % matriz dos coeficientes
m = (G'*W*G)^-1*(G'*W*d); % Vetor dos parametros
dcalc = G*m; % Vetor dos dados calculados
e = dcalc-d; % Vetor dos erros
N = length(d(:,1)); % Numero de observacoes
M = length(G(1,:)); % Numero de parametros
VarPos = (e'*W*e)/(N-M); % Variância a posteriori
Var_m = VarPos*(G'*W*G)^-1; % Variância dos parametros estimados
Dp_m = diag(Var_m).^0.5; % Desvio-padrão dos parametros estimados
```

Exercício

Exercício 01

Dadas as **observações de temperatura T_i** e das respectivas **precisões σ_{T_i}** realizadas em **diferentes profundidades Z_i** na Terra (arquivo “DadosEx01.txt”), **estime os parâmetros e suas respectivas precisões**, assumindo um modelo no qual:

A temperatura é uma **função linear** da profundidade:

$$T_i = a + bZ_i$$

A temperatura é uma **função quadrática** da profundidade:

$$T_i = a + bZ_i + cZ_i^2$$