

Direct and Inverse Problems in Geophysics - Basic Concepts and Applications

Problemas Diretos e Inversos em Geofísica -
Conceitos Básicos e Aplicações

PARTE - IV

Prof. Giuliano Sant'Anna Marotta

marotta@unb.br

Observatório Sismológico

Instituto de Geociências - Universidade de Brasília

Injunção (Vínculo)

Um tipo de informação que pode ser **utilizada nos problemas inversos** é **a injunção** (constraint), dada pela seguinte expressão:

$$Fm = h$$

Onde F é uma matriz $P \times M$ sendo P o número de injunções consideradas

Na **forma geral**, tem-se $\tilde{G} = \begin{bmatrix} G \\ F \end{bmatrix}$ e $\tilde{d} = \begin{bmatrix} d \\ h \end{bmatrix}$ de tal forma que:

$$\tilde{G}m = \begin{bmatrix} G \\ F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ h \end{bmatrix}; e = \begin{bmatrix} d^{obs} \\ h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d^{pre} \\ h^{pre} \end{bmatrix}$$
$$m = (\tilde{G}^T W \tilde{G})^{-1} \tilde{G}^T W \tilde{d}$$

Injunção (Vínculo)

Introduzindo o peso, tem-se:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{W} \mathbf{e} = \min$$

Sendo que:

$$\mathbf{W} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b \end{array} \right]; b \text{ representa o peso do vínculo}$$

Injunção (Vínculo)

Sempre que o assunto das injunções é levantado, os multiplicadores de Lagrange também vêm à mente. Neste caso, a injunção também pode ser adicionada na equação normal, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} m \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^T G & F^T \\ F & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G^T d \\ h \end{bmatrix}$$

Exercícios

Ajuste de reta com injunção

Dadas as observações de temperatura T_i realizadas em diferentes profundidades z_i na Terra, e assumindo um modelo no qual a temperatura é uma função linear da profundidade, dado por:

$$T = a + bz$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \dots \\ T_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \\ \dots & \dots \\ 1 & z_N \end{bmatrix}$$

Adotar as incertezas dos dados e realizar injunção na profundidade de 2 km com valor de temperatura de 110°.

Ajuste de reta com injunção

% Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações

% Prof. Giuliano Marotta - SIS/IG/UnB - marotta@unb.br

% Parte IV: Exercício 02

% -----

clear

clc

% Modelo: $T = a \cdot 1 + b \cdot z$

Dados = load('DadosExercicio03.txt'); % Abrir arquivo de dados

z = Dados(:,1); % Vetor dos dados de profundidade

d = Dados(:,2); % Vetor dos dados observados de Temperatura

Var_d = Dados(:,3).^2; % Vetor das incertezas dos dados observados

M = 2; % Numero de parametros 'a' e 'b'

N = length(d(:,1)); % Numero de Observacoes

G = [ones(N,1) z]; % Matriz dos coeficientes

W = (Var_d.*eye(N,N))^-1; % Matris Peso

%-----

Ti=100; % Inserir dados do modelo para injuncao (T = 110)

h = Ti; di = [d;h];

zi = 2; % Inserir coeficientes do modelo para injuncao (z = 2km)

F = [1 zi]; Gi = [G;F];

Wh = 10000000; % Inserir injuncao na matriz peso

Wi = zeros(N+1,N+1); Wi(1:N,1:N) = W; Wi(N+1,N+1)=Wh;

%-----

Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações – Parte IV

Prof. Giuliano Marotta - SIS/IG/UnB - marotta@unb.br

Ajuste de reta com injunção

$m = (G_i' W_i G_i)^{-1} (G_i' W_i d_i)$ % Vetor dos parametros

$e = d - G * m$ % Vetor dos erros

$Var_pos = (e' * W * e) / (N - M)$ % Variancia a posteriori

$Cov_m = Var_pos * (G' * W * G)^{-1}$ % Matrix covariancia dos parametros

$Dp_m = diag(Cov_m)^{0.5}$ % Vetor dos desvios Padrao dos Parametros

figure % Plotar dados observados

plot(d,z,'.b')

xlabel('Temperatura')

ylabel('Profundidade')

hold on % Plotar dados calculados

plot(G*m,z,'.r')

plot(Ti,zi,'or')

figure % plotar erro

plot(e,'.r')

ylabel('erro')

Ajuste de reta com injunção

Ajuste de reta com injunção

Dadas as observações de temperatura T_i realizadas em diferentes profundidades z_i na Terra, e assumindo um modelo no qual a temperatura é uma função linear da profundidade, dado por:

$$T = a + bz$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \dots \\ T_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \\ \dots & \dots \\ 1 & z_N \end{bmatrix}$$

Adotar injunção na profundidade de 2 km com valor de temperatura de 110°. Adicionar a injunção na equação normal

Ajuste de reta com injunção

% Problemas Diretos e Inversos em Geofísica - Conceitos Básicos e Aplicações

% Prof. Giuliano Marotta - SIS/IG/UnB - marotta@unb.br

% Parte IV: Exercício 02

% -----

clear

clc

% Modelo: $T = a \cdot 1 + b \cdot z$

Dados = load('DadosExercicio03.txt'); % Abrir arquivo de dados

z = Dados(:,1); % Vetor dos dados de profundidade

d = Dados(:,2); % Vetor dos dados observados de Temperatura

Var_d = Dados(:,3).^2; % Vetor das incertezas dos dados observados

M = 2; % 'a' e 'b' % Numero de parametros

N = length(d(:,1)); % Numero de Observacoes

G = [ones(N,1) z]; % Matriz dos coeficientes

W = (Var_d.*eye(N,N))^-1; % Matris Peso

%-----

Ti=100; % Inserir dados do modelo para injuncao (T = 110)

h = Ti;

zi = 2; % Inserir coeficientes do modelo para injuncao (z = 2km)

F = [1 zi];

%-----

Ajuste de reta com injeção

```
MM = zeros(M+1,M+1); % Vetor dos parametros
MM(1:M,1:M)=(G'*W*G); MM(M+1,1:M)=F; MM(1:M,M+1)=F'; NN=[(G'*W*d);h]; m = (MM)\-
1*(NN)
lgr = m(M+1,1); % multiplicador de Lagrange
m = m(1:M,1); % Vetor dos parametros
e = d-G*m % Vetor dos erros
Var_pos = (e'*W*e)/(N-M); % Variancia a posteriori
Cov_m = Var_pos*(G'*W*G)^-1; % Matrix covariancia dos parametros
Dp_m = diag(Cov_m).^0.5 % Vetor dos desvios Padrao dos Parametros
figure % Plotar dados observados
plot(d,z,'.b'); xlabel('Temperatura'); ylabel('Profundidade')
% Plotar dados calculados
hold on
plot(G*m,z,'.r'); plot(h,2,'or')
figure % plotar erro
plot(e,'.r')
ylabel('erro')
```