
Rapport projet numérique

Approximation du paramètre d'amortissement dans la condition de Robin avec un modèle de dissipation de volume

Auteur :

Marouane BATTACH

Encadrants :

Anna ROZANOVA-PIERRAT

Frédéric MAGOULÈS

Résumé : Le but de ce projet est de décrire l'absorption des ondes par les matériaux poreux. La méthode classique consiste à considérer la propagation des ondes dans deux milieux, typiquement de l'air et une paroi, ce qui correspond à un amortissement dans le volume. Le modèle mathématique le plus courant pour cela est l'équation d'onde amortie. Dans ce projet on s'intéresse à l'équivalence du modèle classique avec le modèle considérant un seul milieu : l'air, et en modélisant la dissipation d'énergie par une condition d'amortissement sur la frontière. Le passage du premier modèle au deuxième modèle se fait par une méthode de minimisation et doit assurer le même ordre d'amortissement énergétique

Mots clés :

optimisation de forme, équation de Helmholtz, Condition aux limites de Robin.

Table des matières

1	Notation	2
2	Introduction	3
3	Le modèle mathématique et motivation	4
3.1	Définition du problème	4
3.2	approche numérique	5
3.3	algorithme de minimisation	7
4	implémentation numérique	8
4.1	Aperçu du code	8
4.2	Matériaux simulés	9
4.3	Analyse des résultats	10
5	conclusion	11

1 Notation

Ω est un domaine (un ouvert connexe) de \mathbb{R}^n .

$\partial\Omega$ est le bord Ω .

μ est une mesure de $\partial\Omega$.

ν est la normale extérieure du bord.

Γ_{Dir} est une partie du bord $\partial\Omega$ sur laquelle la condition de Dirichlet est imposée.

Γ_{Neum} est une partie du bord $\partial\Omega$ sur laquelle la condition de Neumann est imposée.

Γ_{Rob} ou Γ est une partie du bord

$\partial\Omega$ sur laquelle la condition de Robin est imposée. (in the geometrical shape optimization it is a moving part of $\partial\Omega$).

\bar{a} si a est un complexe alors \bar{a} est son complexe conjugué i.e pour $a = 1 + 2i$ on $\bar{a} = 1 - 2i$.

2 Introduction

La séquence thématique porte sur le contrôle de la pollution acoustique et électromagnétique qui est aujourd'hui devenu un enjeu majeur. En effet, que ce soit en milieu urbain, ou bien dans un espace de coworking, les architectes et ingénieurs se doivent de concevoir des matériaux qui permettront de minimiser le bruit afin de garantir un confort pour tous (par exemple des gens habitant proche d'un grand axe routier, ou bien même pour les espèces vivant dans les écosystèmes alentours). Il est aussi nécessaire de s'assurer qu'il n'y ait pas d'anomalie dans la transmission des ondes électromagnétiques. Cela touche en effet aux télécommunications, qui sont aujourd'hui très présentes et d'une importance capitale (de la communication entre individus aux communications entre armées, importance des radars pour les sous-marins par exemple ...). La pollution acoustique et électromagnétique pose donc une réelle problématique dans notre monde qu'il est nécessaire de tacler.

Dans le but de trouver la forme la plus simple et la plus efficace d'un mur insonorisant pour dissiper l'énergie acoustique d'une onde sonore, on préfère un modèle fréquentiel [4] décrit par l'équation de Helmholtz avec un amortissement au bord à la place d'un modèle avec deux milieux différents

Dans ce projet numérique, on s'intéresse à un modèle mathématique permettant d'établir l'équivalence entre l'amortissement en volume (Damping in volume) et l'amortissement par le bord (Damping by the boundary). Puis on essaie de calculer numériquement le paramètre d'amortissement pour différents matériaux

3 Le modèle mathématique et motivation

La méthode classique consiste à considérer la propagation des ondes dans deux milieux, typiquement de l'air et une paroi, ce qui correspond à un amortissement dans le volume. Le modèle mathématique le plus courant pour cela est l'équation d'onde amortie. La seconde est de ne considérer qu'un seul milieu sans perte, l'air, et de modéliser l'énergie dissipation par une condition d'amortissement sur la frontière. Dans les deux cas, nous devons assurer le même ordre d'amortissement énergétique correspondant à la caractéristiques du milieu poreux choisi comme sa porosité, sa tortuosité et résistivité au passage de l'air

3.1 Définition du problème

On connaît les caractéristiques physiques macroscopiques d'un milieu poreux fixe comme la porosité, la tortuosité h et la résistivité au passage de l'air. On sait alors comment pour définir la décroissance d'énergie correspondante à partir de l'équation d'onde amortie. Mais surtout pour les simplifications numériques, nous aimerions travailler avec un modèle de la propagation des ondes dans l'air avec une frontière nous donnant la forme d'une paroi absorbante et sur laquelle on impose une condition limite complexe de type Robin état

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(\omega)u|_{\Gamma} = 0 \quad (1)$$

assurant le même comportement de propagation des ondes que pour le cas d'amortissement dans le volume (voir figure 1)

En d'autres termes, nous devons trouver le coefficient du problème de minimisation suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dans } \Omega_{\text{air}} : \\ \nabla \cdot (\eta_0 \nabla u_0) + \omega^2 \zeta_0 u_0 = 0 \\ \text{dans } \Omega_{\text{mur}} : \\ \nabla \cdot (\eta_1 \nabla u_1) + \omega^2 \zeta_1 \left(1 + \frac{ai}{\xi_1 \omega}\right) u_1 = 0 \\ \text{dans } \Gamma : \\ u_0 = u_1 \text{ et } \eta_0 \nabla u_0 \cdot \nu = \eta_1 \nabla u_1 \cdot \nu \\ \text{sur } k=\text{le bord du gauche} : \\ u_0(-L, y) = g(y) \end{array} \right.$$

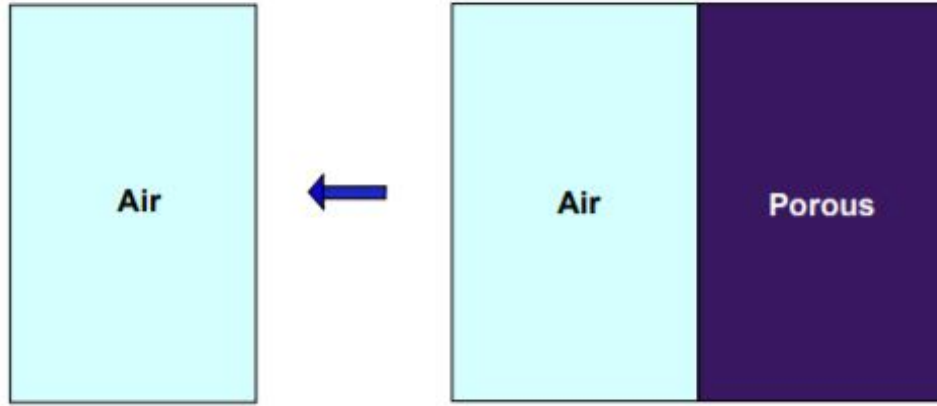


FIGURE 1 – Nous voulons trouver une condition sur la frontière du mur qui assure que la solution du problème d'un média est presque le même que la solution dans l'air des deux médias problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dans } \Omega_{\text{air}} : \\ \nabla \cdot (\eta_0 \nabla u_2) + \omega^2 \zeta_0 u_2 = 0 \\ \text{sur } \Gamma : \\ \eta_0 \nabla u_2 \cdot \nu + \alpha u_2 = 0 \\ \text{sur le bord du gauche :} \\ u_2(-L, y) = g(y) \end{array} \right.$$

Le but est de trouver α tel que les constantes $A > 0$ et $B > 0$

$$A \|u_0 - u_2\|_{L^2(\Omega_{\text{air}})}^2 + B \|\nabla(u_0 - u_2)\|_{L^2(\Omega_{\text{air}})}^2 \rightarrow \min$$

il est possible de résoudre ce problème numériquement, en utilisant les formules du théorème suivant :

3.2 approche numérique

Notre méthode pour calculer le α numériquement repose sur le théorème suivant. (démonstration donné en [3]) :

Théorème : Soit $\Omega =]-L, L[\times]-\ell, \ell[$ un domaine avec des sous-domaines connectés Ω_{air} , tel que ses bords sont $] -L, 0[\times \{\ell\}, \{-L\} \times]-\ell, \ell[,] -L, 0[\times \{-\ell\}$, et un autre bord, noté Γ , qui est une ligne droite commençant par $(0, -\ell)$ et finissant à $(0, \ell)$. Soit Ω_{mur} le domaine supplémentaire Ω_{air} dans Ω , tel que Γ est le bord commun de Ω_{air} et Ω_{mur} . La longueur L est supposée suffisamment

grande . Le problème original (version fréquentielle du problème de l'onde amortie) est

$$-\nabla \cdot (\eta_0 \nabla u_0) - \omega^2 \xi_0 u_0 = 0 \quad \text{in } \Omega_{air} \quad (2)$$

$$-\nabla \cdot (\eta_1 \nabla u_1) - \omega^2 \tilde{\xi}_1 u_1 = 0 \quad \text{in } \Omega_{mur} \quad (3)$$

avec

$$\tilde{\xi}_1 = \xi_1 \left(1 + \frac{ai}{\xi_1 \omega} \right)$$

avec des conditions de bord sur Γ

$$u_0 = u_1 \text{ et } \eta_0 \nabla u_0 \cdot \nu = \eta_1 \nabla u_1 \cdot \nu$$

et une condition sur le bord de gauche

$$u_0(-L, y) = g(y)$$

et d'autres conditions de bord. Le problème modifié est

$$-\nabla \cdot (\eta_0 \nabla u_2) - \omega^2 \tilde{\xi}_0 u_2 = 0 \quad \text{in } \Omega_{air}$$

avec une condition d'absorption sur Γ

$$\eta_0 \nabla u_2 \cdot \nu + \alpha u_2 = 0$$

et une condition sur le bord de gauche

$$u_2(-L, y) = g(y)$$

Soient u_0, u_1, u_2 et g la décomposition de Fourier sur la direction de y , en notant k le nombre d'onde associé. Alors le paramètre complexe α , minimisant l'expression suivante

$$A \|u_0 - u_2\|_{L_2(\Omega_{air})}^2 + B \|\nabla (u_0 - u_2)\|_{L_2(\Omega_{air})}^2$$

peut être trouvé par la minimisation de la fonction d'erreur :

$$e(\alpha) := \sum_{k=\frac{u}{L}, n \in \mathbb{Z}} e_k(\alpha)$$

tel que e_k est :

$$\begin{aligned} e_k(\alpha) = & \left(A + B|k|^2 \right) \left(\frac{1}{2\lambda_0} \left\{ |\chi|^2 [1 - \exp(-2\lambda_0 L)] \right. \right. \\ & \left. \left. + |\gamma|^2 [\exp(2\lambda_0 L) - 1] \right\} + 2L \operatorname{Re}(\chi \bar{\gamma}) \right) \\ & + B \frac{\lambda_0}{2} \left\{ |\chi|^2 [1 - \exp(-2\lambda_0 L)] + |\gamma|^2 [\exp(2\lambda_0 L) - 1] \right\} - 2B\lambda_0^2 L \operatorname{Re}(\chi \bar{\gamma}) \end{aligned}$$

if $k^2 \geq \frac{\xi_0}{\eta_D} \omega^2$ or

$$e_k(\alpha) = \left(A + B|k|^2 \right) \left(L \left(|\chi|^2 + |\gamma|^2 \right) + \frac{i}{\lambda_0} \operatorname{Im} \{ \chi \bar{\gamma} [1 - \exp(-2\lambda_0 L)] \} \right) \\ + BL |\lambda_0|^2 \left(|\chi|^2 + |\gamma|^2 \right) + iB\lambda_0 \operatorname{Im} \{ \chi \bar{\gamma} [1 - \exp(-2\lambda_0 L)] \}$$

si $k^2 < \frac{\xi_0}{\eta_0} \omega^2$, tel que

$$f(x) = (\lambda_0 \eta_0 - x) \exp(-\lambda_0 L) + (\lambda_0 \eta_0 + x) \exp(\lambda_0 L) \\ \chi(k, \alpha) = g_k \left(\frac{\lambda_0 \eta_0 - \lambda_1 \eta_1}{f(\lambda_1 \eta_1)} - \frac{\lambda_0 \eta_0 - \alpha}{f(\alpha)} \right) \\ \gamma(k, \alpha) = g_k \left(\frac{\lambda_0 \eta_0 + \lambda_1 \eta_1}{f(\lambda_1 \eta_1)} - \frac{\lambda_0 \eta_0 + \alpha}{f(\alpha)} \right)$$

tel que

$$\begin{cases} \lambda_0 = \sqrt{k^2 - \frac{\xi_0}{\eta_0} \omega^2} & \text{if } k^2 \geq \frac{\xi_0}{\eta_0} \omega^2 \\ \lambda_0 = i \sqrt{\frac{\xi_0}{\eta_0} \omega^2 - k^2} & \text{if } k^2 \leq \frac{\xi_0}{\eta_0} \omega^2 \end{cases}$$

et

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{k^2 - \frac{\xi_1}{\eta_1} \omega^2 + \sqrt{\left(k^2 - \frac{\xi_1}{\eta_1} \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a\omega}{\eta_1}\right)^2}} \\ - \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\xi_1}{\eta_1} \omega^2 - k^2 + \sqrt{\left(k^2 - \frac{\xi_1}{\eta_1} \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a\omega}{\eta_1}\right)^2}}$$

Puisque la minimisation est faite numériquement et puisque la séquence $(z, -z, z - z, \dots) = z(\exp(i(j\Delta x)/\Delta x))$ est le mode de fréquence le plus élevé qui peut être atteint sur une grille de taille Δx , alors, en pratique, la somme peut être tronquée à

$$e_{\Delta x}(\alpha) := \sum_{k=\frac{n\pi}{\ell}, n \in \mathbb{Z}, -\frac{L}{\Delta x} \leq n \leq \frac{L}{\Delta x}} e_k(\alpha)$$

3.3 algorithme de minimisation

L'algorithme de minimisation choisi dans ce TP est l'algorithme du gradient conjugué. Ce choix est dû à sa disponibilité dans le module `minimize` de `Scipy`. De surcroît il atteint le minimum en un temps linéaire. La suite présente l'heuristique de cet algorithme. La première idée fondamentale de l'algorithme du gradient conjugué consiste choisir chaque direction de recherche de sorte qu'elle soit

conjuguée à la direction de recherche précédente par rapport à la Haussienne du critère.

```

GradConj( $f$ ,  $x_0$ , tolerance)
(* Minimise une fonction quadratique elliptique  $f$  *)
 $x \leftarrow x_0$ ,  $u \leftarrow -\nabla f(x_0)$ 
Tant que :  $\|u\| \geq \text{tolerance}$ 
 $t \leftarrow -\frac{\nabla f(x)^T u}{u^T \nabla^2 f(x) u}$ 
 $s \leftarrow \|\nabla f(x)\|^2$ ,  $x \leftarrow x + t u$ ,  $s \leftarrow s^{-1} \star \|\nabla f(x)\|^2$ ,  $u \leftarrow -\nabla f(x) + s u$ 
Retourner  $x$ 

```

Lemme : Pour toute initialisation x_0 , l'algorithme **GradConj** converge en au plus n itérations. Pour Plus de détail [1]

4 implémentation numérique

4.1 Aperçu du code

Pour organiser l'implémentation numérique du théorème, on crée un module "damping surface" où on met toutes les fonctions qui caractérisent l'erreur. Et c'est dans le fichier main où on appelle le module damping surafce.

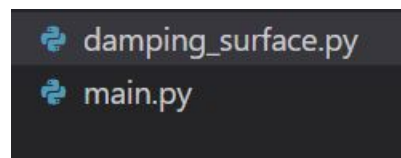


FIGURE 2 – squelette code

L'erreur qu'on veut minimiser dépend des caractéristiques des matériaux, la pulsation ω , et α . Notre objet est de fixer le matériau et ω et de regarder l'argument du minimum de l'erreur. Notons bien que α est complexe, il faut s'assurer à la fin $\Re(\alpha) > 0$ et $\Im(\alpha) < 0$. La minimisation se fait par la fonction minimize de Scipy [2]. Cette fonction prend comme paramètres la fonction à minimiser, la valeur initiale qu'on a mis $\alpha_0 = 30 - i * 35$, la méthode de minimisation (Gradient conjugué) et la tolérance ($1e - 4$)

On calcule α pour les valeurs de ω dans la plage $[2, 30000]$ avec un pas de 100
Cet extrait du code résume ce qui était dit :

damping_surface.py

```

from scipy.optimize import minimize

import matplotlib.pyplot as plt

5 omega_list=[k*pi for k in range(2,30000,100)]
  alphac_list_reel=[]
  alphac_list_imag=[]
  erreur_reel_list=[]

10

for w in omega_list:
    z=minimize(reel_erreur,[30,-35],args=w,method='CG',
              options={'gtol': 1e-4})
    alphac_list_reel.append(z.x[0])
15    alphac_list_imag.append(z.x[1])
    erreur_reel_list.append(reel_erreur([z.x[0],z.x[1]],
                                       w))

```

4.2 Matériaux simulés

Dans ce projet, on calcule $\alpha(\omega)$ pour 4 matériaux différents :

Matériaux	ϕ	α_h	σ	γ_p	ρ_0	c_0
Birch LT	0.529	1.37	151429.0	7/5	1.2	340.0
Melamine	0.99	1.02	14000.0	7/5	1.2	340.0
Polyurethane	0.98	2.01	45000.0	7/5	1.2	340.0
Sutherland	0.7	1.15	10900.0	7/5	1.2	340.0

FIGURE 3 – matériaux poreux

4.3 Analyse des résultats

Les figures suivantes permettent de comparer la différence entre deux modèles temporels considérés pour l'amortissement dans le volume et pour l'amortissement à la frontière. On voit que $\Re(\alpha)$ n'est pas une constante en général, mais pour $\omega \rightarrow \infty$, $\Im()$ est une fonction linéaire de . En ce sens, les propriétés d'amortissement de deux modèles sont presque les mêmes, mais la réflexion est plus précisément prise en compte par l'équation de l'onde d'amortissement dans le volume.

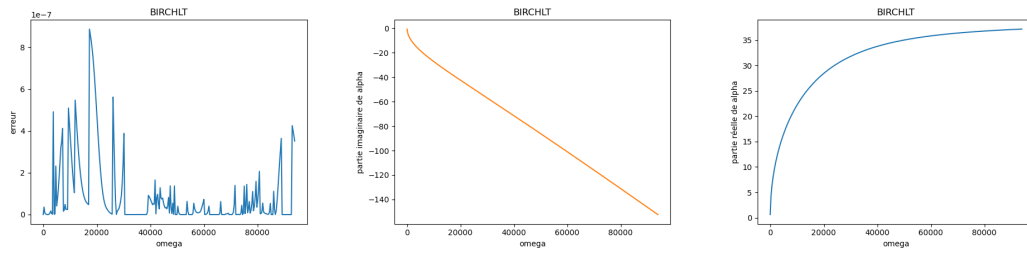


FIGURE 4 – BIRCHLT

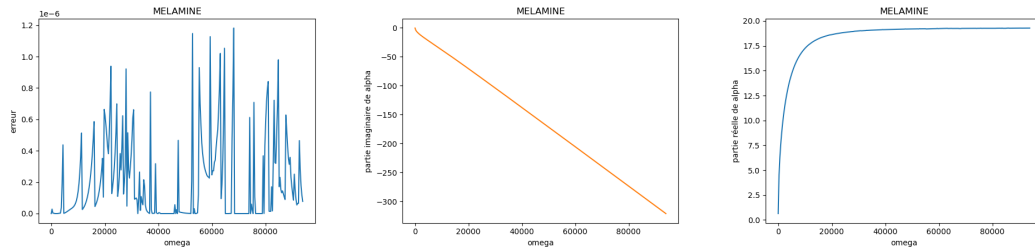


FIGURE 5 – MELAMINE

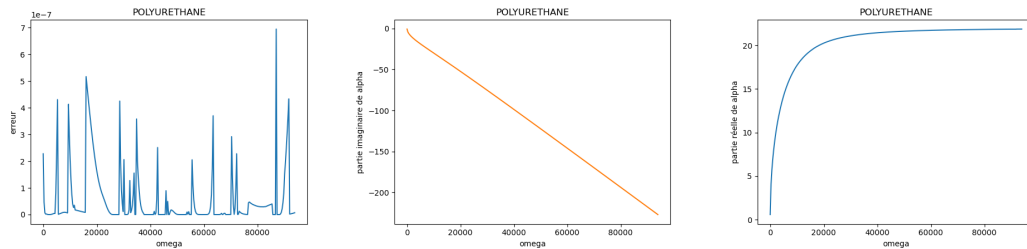


FIGURE 6 – POLYURETHANE

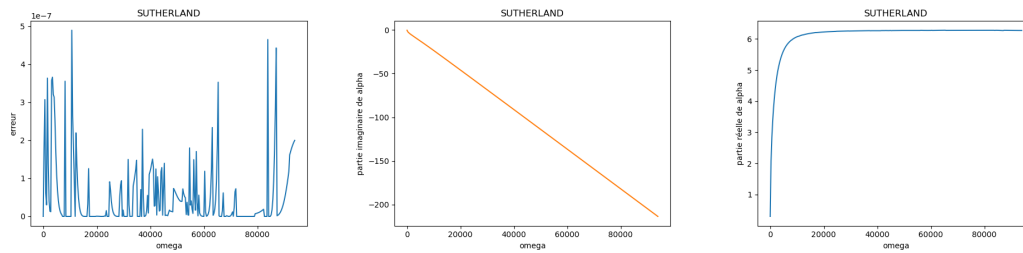


FIGURE 7 – SUTHERLAND

5 conclusion

Les deux modèles sont presque équivalents. Le passage du premier modèle au deuxième modèle nous permettra de d'appliquer des méthodes d'optimisation de forme pour trouver le matériau idéal pour notre problématique qui est la réduction du bruit.

Références

- [1] Angelini master course optimization chapitre 7.
- [2] «scipy.optimize.minimize — scipy v1.7.1 manual». consulté le 26 octobre 2021.
- [3] Frédéric MAGOULÈS, Thi Phuong Kieu NGUYEN, Pascal OMNES et Anna ROZANOVA-PIERRAT : Optimal absorption of acoustical waves by a boundary. 2020.
- [4] Anna ROZANOVA-PIERRAT : *Polycopié de cours : Contrôle des des ondes acoustiques et électromagnétiques*. Centrale Supélec.