ECOLE POLYTECHNIQUE

Modèles des Taux d’interêt

Bachir EL KHADIR
June 16, 2015

1 REMERCIMENTS

Ecole Polytechnique Maitre de stage Bla bla bla

2 INTRODUCTION

Dans la littérature, il Differents modoles Hull white modele 1F et 2F Motivation

La notion de taux d'interêt nous est familière et fait parti de notre vie de tous les jours.
Zéro Coupon

3 Quelques définitions

Theorem 1. *$Z(t, T, S)$ est le montant qu'il faut investir dans un instrument risque-neutre au temps T pour obtenir 1euro au temps S.*

Theorem 2. *r le taux d'intêret instantné est défini comme étant*

Theorem 3. *La courbe de rendement ou la yield curve $L(t, T)$*

Theorem 4. *Le taux d'interet cumulé*

4 PRODUITS FINANCIER D'INTERÊTS

Swap: Un swap est un contract entre deux parties qui s'engagent à échanger des flux financier pendant une durée et à une fréquence détérminées. la plupart du temps, ces flux sont détérminé comme étant l'intêret sur un notionnel K.

$$N\sum D_t^{T_i}\tau_i(L(T_{i-1})-K)$$

Caps/floor: Un cap/floor peut être vu comme un call/put européenne sur un swap

$$N\sum D_t^{T_i}\tau_i(L(T_{i-1})-K)^+$$

Swaption

$$N(\sum D_t^{T_i}\tau_i(L(T_{i-1})-K))^+$$

5 LES DIFFÉRENTS MODÈLES DES TAUX D'INTERÊTS

Certains produits financiers dépendent en grande partie de la courbe de rendement. Nous avons vu précédemment que la donnée du taux instantané r_t permet de caractériser complètement cette courbe.

Il est donc important que la dynamque de r_t soit à la fois riche pour pouvoir décrire la courbe de rendement observée dans le marché, et suffisemment simple pour que le temps nécessaire pour le calcul ne soit trop long.

Nous pouvons considérer que la courbe de rendement varie dans un espace vectoriel de dimension infinie. Toute tentative de la caracteriser par un nombre fini de paramètre rééls est donc vouée à l'échec.

Le modèle de Hull White a été introduit en 1990. Un des atouts majeure de ce modèle est la possiblité de simuler la dynamique de r_t par un arbre trinomiale. Ceci étant essentiel pour pricer des produits du type bermuda options

$$\mathrm{d}r_t = (\theta(t) - \alpha(t) r_t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}W_t$$

$$r_t = e^{-\alpha t} r_0 + integral...$$

6 Le modèle à deux facteurs

6.1 Motivation

Montrons dans un premier temps pourquoi un modèle à un seul facteur n'est pas suffisant pour pricer certains produits disponible sur les marchés. En effet, considérons un produit E dont le payoff dépent du spread entre un taux d'intêret cumulé entre 0 et T_1 pour le premier et 0 et T_2 pour le second.

La dynamique de r_t dans le modèle de Vasicek est donné par

$$r_t = k(\theta - r_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t$$

La formule analytique du bond zéro coupon est donc

$$P(t,T) = A(t,T)exp(-B(t,T)r_t)$$

En particulier le taux d'intêret cumulé est une donné par une transformation affine du taux instantané:

$$R(t,T) = \frac{lnP(t,T)}{T-t} =: a(t,T) + b(t,T)r_t$$

Le payoff du produit E est donc fonction de la distribution jointe de $R(0,T_1)$ et $R(0,T_2)$. Sauf que:

$$Cor(R(0,T_1), R(0,T_2) = 1$$

On en déduit qu'un choc à r_t agit de la même manière sur toutes les courbes On observe sur les marchés que les taux à différentes maturités ne sont pas corrélés. Si on regarde le taux 2Y et 10Y

<Courbe 10Y>

<Courbe 2Y>

Clairement un tel modèle ne capture pas ce comportement.

Dans cette section nous considérons un modèle où le taux d'intêret instantanté est donné par une somme de deux facteurs gaussiens centrés et corrélés. Pour fitter la yield courbe, on rajoute une fonction détérministe.

$$\begin{aligned} \mathrm{dX} &= \\ \mathrm{dY} &= \\ \mathrm{dr} &= X + Y + \phi(t) \end{aligned}$$

$$P(t,T) = E[...]$$

Le processus est markovien

Les cap floors ademettent une formule analytiques, comme pour les options vanilles : formule de blackscholes Dans la pratique, les banques tradent beaucoup des produits exotiques. Ce n'est pas le cas pour ces produits => arbre de pricing

6.2 APPROXIMATION DE LA SOLUTION PAR UN ARBRE BINOMIAL

Cette méthode a été d'abord suggéré par Hull-White (1994) On commence par donner une approximation de la dynamique processus x et y :

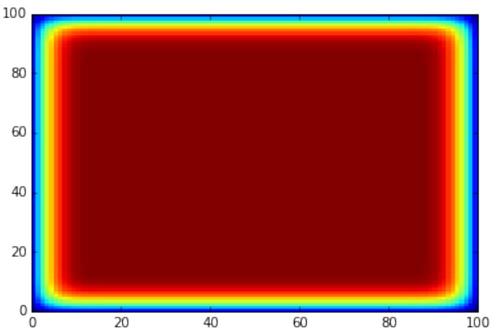
$$E(x(t+\Delta t)|F_t) = x(t)e^{-a\Delta t}$$

$$V(x(t+\Delta t)|F_t) = \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2a\Delta t})$$

$$Cov\{x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)|F_t\} = \frac{\sigma\nu\rho}{a+b}(1-e^{-(a+b)\Delta t})$$

Dans l'abre, on commence par discrétiser le temps par un pas fixe Δt, ensuite à chaque pas de temps on fait l'approximation du couple aléatoire à cdf continue (x, y) par un couple de variables de bernouilli qui a les même moments de premier et second ordre.

Le nombre de noeuds augmente de façon exponentielle en fonction du nombre de pas de temps. En pratique ceci est problématique et conduit vite à une saturation de mémoire. Pour palier à ce problème on réutilise les noeuds



- Discrétisation
- Construction de l'abre

6.3 Formule analytique - Intégration

6.4 Performance

L'arbre est long mais beaucoup plus puissant Imperfections de l'arbre:

- bornee
- discretisation
- probabilite negative

Monte Carlo Limitation Closed Form

Le temps d'execution: Arbre Closed form

7 APPLICATION: CALIBRATION ET PRICING

Le modèle à 2F permet de caputrer le hump de la courbe de rendement

Le nombre de paramètre est fini (5) => pas de overfitting

Méthode d'optimisation