

ECOLE POLYTECHNIQUE

---

# Modèles des Taux d'intérêt

---

Bachir EL KHADIR  
June 20, 2015

## CONTENTS

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Remerciments</b>   | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Introduction</b>   | <b>4</b>  |
| <b>3</b> | <b>Quelques définitions</b>   | <b>5</b>  |
| 3.1      | Choix de mesure . . . . .   | 5         |
| 3.1.1    | Principe de pricing . . . . .   | 5         |
| <b>4</b> | <b>Produits financier d'interêts</b>                                    | <b>7</b>  |
| <b>5</b> | <b>Les différents modèles des taux d'interêts</b>                       | <b>8</b>  |
| <b>6</b> | <b>Le modèle à deux facteurs</b>  | <b>9</b>  |
| 6.1      | Motivation . . . . .  | 9         |
| <b>7</b> | <b>Approximation de la solution par un arbre binomial</b>               | <b>11</b> |
| 7.0.1    | Construction . . . . .  | 11        |
| 7.1      | Améliorations . . . . .   | 12        |
| 7.1.1    | Formule exacte . . . . .  | 13        |
| 7.1.2    | Ajout d'un shift déterministe . . . . .                                 | 14        |
| 7.1.3    | Optimiser la taille des slices . . . . .                                | 14        |
| 7.1.4    | Paramètres dépendant du temps . . . . .                                 | 14        |
| <b>8</b> | <b>Résultats</b>  | <b>15</b> |
| 8.1      | Performance . . . . .   | 15        |
| <b>9</b> | <b>Application: calibration et pricing</b>                              | <b>16</b> |
| 9.1      | Calibration du drift . . . . .  | 16        |
| 9.2      | Calibration de la vol . . . . .   | 16        |
| 9.3      | Methode de calibration de la surface - Méthode d'optimisation . . . . . | 16        |

# 1 REMERCIMENTS

Ecole Polytechnique Maitre de stage Bla bla bla

## 2 INTRODUCTION

J'ai fait mon stage a JP Morgan equipe exotic rates. La plus grosse partie du travail: trouver le bon modele pour pricer un produit et le calibrer au marche

L'interêt que porte les banques aux produits exotiques a considérablement augmenté au cours des dernières années. Plusieurs modèles ont été développés pour refléter au mieux le comportement des marchés financiers. Le département au sein duquel j'ai effectué mon stage s'occupait des produits basés sur les taux d'intérêt. Dans ce domaine, une propriété appréciable est le fait qu'ils possèdent un nombre de paramètres suffisant pour être calibrés parfaitement au prix observable dans la réalité, sans pour autant "overfitter" l'échantillon disponible. En effet, depuis la crise, le marché des taux a connu des changements radicaux, la possibilité d'observer des taux négatifs en est un exemple.

Un produit en particulier n'a cessé de gagner en notoriété: les cancelables spread options. Ma mission de stage était de comprendre les modèles existants et leurs implémentations, comprendre leurs limites, et essayer de trouver des améliorations.

Dans la littérature, il existe différents modèles Hull white modèle 1F et 2F Motivation C'est la première implémentation de de WH a 2F avec des paramètres variant avec le temps

Dans une première partie je présenterai quelques définitions essentielles à l'étude des taux d'intérêts, ainsi que les produits financiers principaux utilisés pour la calibration des modèles. Dans la deuxième partie modèle existant dans la littérature, pk 2F? Implémentation, calibration Conclusion

### 3 QUELQUES DÉFINITIONS

**Definition 1.** On dénote le prix de zéro coupon forwardé  $Z(T, S)$  le montant qu'il faut investir à dans un instrument risque-neutre au temps  $T$  pour obtenir une unité de monnaie au temps  $S$ .

**Definition 2.** On définit  $f(t, T)$  le taux d'intérêt instantané forward à la date  $t$  pour une maturité  $T$  la quantité

$$f(t, T) := -\frac{\delta}{\delta T} \log Z(T, S)$$

**Definition 3.** La courbe de rendement ou la yield curve  $L(t, T)$

**Definition 4.** Le taux d'interet cumulé

#### 3.1 CHOIX DE MESURE

Nous nous plaçons dans le cadre d'une économie à temps continu, qui admet une espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , avec  $K + 1$  actifs tradables, que nous appellerons actifs de base, dont le prix est donné par  $(S_t = (S_t^0, \dots, S_t^K))_t$ . Dans toute la suite nous confondons l'actif et son prix.  $S^0$  étant l'actif sans risque, qui évolue donc au temps sans risque

$$dS_t^0 = r_t S_t^0 dt$$

ie

$$S_t^0 = e^{-\int_0^t r_s ds}$$

Par définition, nous connaissons le prix des actifs  $K + 1$ , dans la prochaine section nous détaillerons la procédure de pricing de produits plus compliqués.

##### 3.1.1 PRINCIPE DE PRICING

A travers les  $K + 1$  actifs de base, nous construisons des produits plus complexes. Le prix de ce dernier est donc intimement lié à la possibilité de trouver une stratégie auto-financée qui le réplique. Commençons d'abord par définir ce qu'est une stratégie auto financé.

**Definition 5.** • Une stratégie est une processus  $(\Phi_t = (\Phi_t^0, \dots, \Phi_t^K))_t$  localement borné et adapté à la filtration  $\mathcal{F}$ .

- La valeur associé à cette stratégie est donné par  $V_t(\Phi) = \langle \Phi_t, S_t \rangle$ .
- Une stratégie est auto financée sir  $dV_t = \Phi_t dS_t$

Une hypothèse souvent utilisée dans le cadre de la finance de marché est l'absence d'arbitrage. Une opportunité d'arbitrage est la possibilité d'investir 0 aujourd'hui, et recevoir, avec probabilité non nulle, un montant positive dans le future. En d'autres termes, l'absence d'arbitrage signifie que si  $\Phi$  est une stratégie auto financée telle que  $V_0(\Phi) = 0$ , alors  $\mathbb{P}(V_t(\Phi) > 0) = 0$ . Ceci nous permettra de valoriser des produits complexes en répliquant leur payoff par une combinaison linéaire de produits simple dont le prix est connue.

Une deuxième hypothèse que nous admettrons dans la suite est la complétude du marché: Tout les produits utilisés seront considérés disponible à tout moment et en quantité abondante (liquide), ie à chaque instant  $t$ , pour tout payoff  $H$ , il existe une stratégie autofinancée associée  $\Phi$  qui vérifie  $V_t(\Phi) = H$ . Nous ne traiterons pas le cas des produits illiquide. Ceci est justifié, le marché des taux étant l'un des plus gros en volume dans le monde.

Nous pouvons montrer(\*) que ces hypothèse sont équivalent à l'existence d'une mesure de probabilité risque neutre  $Q$  unique sous laquelle le prix actualisé de tous les produits tradables sont des martingales. ie si on note  $H_t$  le prix à l'instant  $t$  d'un produit financier, alors

$$H_t = E^Q \left[ \frac{H_s}{S_t^0} | F_t \right] = V_t(\Phi)$$

En particulier, le prix d'un zéro coupon qui paye 1 à l'instant  $T$  est donné par

$$P(t, T) := E^Q \left[ e^{-\int_t^T r} \right]$$

Nous pouvons interpréter le ratio  $\frac{H_s}{S_s^0}$  comme étant le nombre de  $H$  par unité de discount factor stochastique  $S^0$ . Le discount factor est appelé dans ce cas numéraire. Nous verrons maintenant que nous pouvons choisir un autre numéraire plus adapté au produit que nous voulons pricer. En effet le changement de numéraire préserve la propriété d'autofinancement d'un portefeuille.

**Definition 6.** Un numéraire est tout actif financier ne payant pas de dividendes

**Definition 7.** Mesure de probabilité équivalente

Exemple: Mesure forward neutre

Le bond zéron coupon dont la maturité concide avec la date du payment d'un produit financier peut servir de numéraire. Nous appellerons la mesure de probabilité associé  $Q_T$ .

Dans ce cas  $P(T, T) = 1$ , et par conséquent il suffit de calculer l'espérance du payoff (divisé par 1) sous  $Q_T$ . Si nous notons le payoff de ce produit  $H$ , alors son prix à l'instant 0 est donné par

$$P(t, T) E^Q [H | F_t]$$

Pour que cela nous soit utile, il faut que la dynamique de  $H$  soit connue sous  $Q_T$ . Ceci est vérifié pour les contrats payant un taux d'intérêt sur un nominal fixe. En effet  $(F(t; S, T))_t$  est une martingale

$$E^Q [F(t; S, T) | F_u] = F(u; S, T)$$

proof

## 4 PRODUITS FINANCIER D'INTERÊTS

Le développement de la section précédente nous sera utile pour pricer les dériver des taux. Considérons le cas particulier d'un call européen à maturité  $T$ , strike  $K$ , dont le sous-jacent est bond zéro coupon. Le payoff d'un tel contrat est connu:  $(P(T, S) - K)^+$ . Son prix à un instant antérieur  $t$  est

$$ZBC(t, T, S, K) := E^Q \left[ \frac{(P(T, S) - K)^+}{S_T^0} \right]$$

Il est plus pratique de considérer la forward mesure.

$$ZBC(t, T, S, K) = E^{Q_T} [(P(T, S) - K)^+]$$

Cette écriture nous rappelle la

**Definition 8.** Swap: Un swap est un contract entre deux parties qui s'engagent à échanger des flux financiers pendant une durée et à une fréquence déterminées. la plupart du temps, ces flux sont déterminé comme étant l'intérêt sur un notionnel  $K$ .

$$N \sum D_t^{T_i} \tau_i (L(T_{i-1}) - K)$$

**Definition 9.** Caplets/floor: Un caplet/floorlet peut être vu comme un call/put européenne sur un swap

$$N \sum D_t^{T_i} \tau_i (L(T_{i-1}) - K)^+$$

nominal  $N = 1$

$$CPL(t, t_{i-1}, t_i, \tau_i, X) = (1 + X\tau_i) ZBP(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1 + X\tau_i})$$

$$ZBP = E^{Q_T} ((P(t_{i-1}, t_i) - X)^+)$$

Si  $P(t, T)$  admet une loi log normal par rapport a la mesure forward neutre  $Q_T$ , on peut appliquer black scholes. Dans la pratique, les trader sont habitués a raisonner en terme de vol bs plutôt qu'en terme de prix. Nous verrons plus loin que la dynamique  $P(t, T)$  est plus compliqué, mais cette methode permet néanmoins d'avoir une correspondance entre prix et vol.

**Definition 10.** Swaption

$$N(\sum D_t^{T_i} \tau_i (L(T_{i-1}) - K))^+$$

## 5 LES DIFFÉRENTS MODÈLES DES TAUX D'INTERÊTS

Nous avons vu dans la partie précédente que pour trouver un prix aux dérivés de taux, il faut donner la dynamique qui régit le sous-jacent, dans notre cas \*BLA BLA BLA\* Plusieurs approches sont possibles. Nous pouvons modéliser directement le forward:

$$dL = \sigma L^\beta dW_t$$

L'approche historique, décrit la dynamique du taux d'intérêt instantané comme étant "drivé" par un driver à une seule dimension. C'est l'approche que nous adopterons ici. Ceci est pratique dans le seul où les prix de zéro coupon et le taux sont directement disponible dans le modèle. De plus, certains produits financiers dépendent directement la courbe de rendement. Nous avons vu précédemment que la donnée du taux instantané  $r_t$  permet de caractériser complètement cette courbe.

Il est donc important que la dynamique de  $r_t$  soit à la fois riche pour pouvoir décrire la courbe de rendement observée dans le marché, et suffisamment simple pour que le temps nécessaire pour le calcul ne soit trop long.

Nous pouvons considérer que la courbe de rendement varie dans un espace vectoriel de dimension infinie. Toute tentative de la caractériser par un nombre fini de paramètre réels est donc vouée à l'échec.

Le modèle de Hull White a été introduit en 1990. Un des atouts majeure de ce modèle est la possibilité de simuler la dynamique de  $r_t$  par un arbre trinomiale. Ceci étant essentiel pour pricer des produits du type bermuda options

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t$$

$$r_t = e^{-\alpha t} r_0 + integral...$$



## 6 LE MODÈLE À DEUX FACTEURS

### 6.1 MOTIVATION

Considérons un produit  $E$  dont le payoff dépend du spread entre un taux d'intérêt cumulé entre 0 et  $T_1$  pour le premier et 0 et  $T_2$  pour le second.  $E$  dépend donc de la distribution jointe des deux taux.

#### LIMITE DES MODÈLE À UN SEUL FACTEUR

Montrons dans un premier temps pourquoi un modèle à un seul facteur n'est pas suffisant pour pricer ces produits qui dépendent non seulement de la distribution de chaque courbe de taux, mais aussi de leur corrélation.

La dynamique de  $r_t$  dans le modèle de Vasicek est donné par

$$r_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

La formule analytique du bond zéro coupon est donc

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r_t)$$

En particulier le taux d'intérêt cumulé est une donné par une transformation affine du taux instantané:

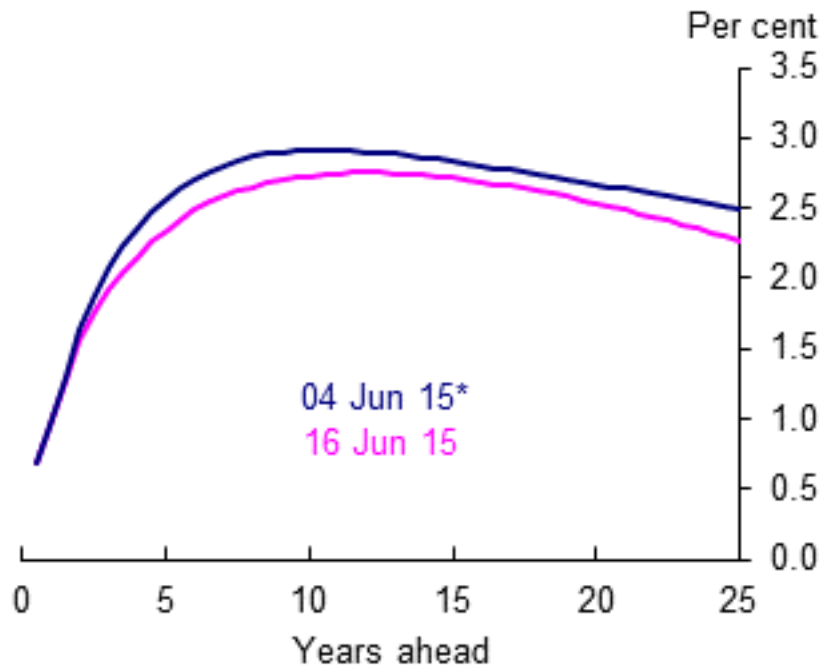
$$R(t, T) = \frac{\ln P(t, T)}{T - t} =: a(t, T) + b(t, T)r_t$$

Le payoff du produit  $E$  est donc fonction de la distribution jointe de  $R(0, T_1)$  et  $R(0, T_2)$ . Sauf que:

$$\text{Cor}(R(0, T_1), R(0, T_2)) = 1$$

On en déduit qu'un choc à  $r_t$  agit de la même manière sur toutes les courbes.

Dans la réalité, on observe sur les marchés que les taux à différentes maturités ne sont pas corrélés. Si on regarde le taux 2Y et 10Y



Un modèle à un seul facteur ne capture pas ce comportement. Essayons de pallier à ce problème en rajoutons un facteur à ce modèle.

Dans cette section nous considérons un modèle où le taux d'intérêt instantané est donné par une somme de deux facteurs gaussiens centrés et corrélés. Dans ce modèle doit sa popularité au fait que le prix des bond zéron coupon admet une formule exact, ainsi que le prix des caps et des floors.

$$dx = -\alpha x(t)dt + \sigma dW_t^1$$

$$dy = -\beta y(t)dt + \nu dW_t^2$$

$$dr = x + y$$

## 7 APPROXIMATION DE LA SOLUTION PAR UN ARBRE BINOMIAL

L'équation (\*) s'intègre simplement en:

$$\begin{aligned}x(t) &= x(s)e^{-\alpha(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u^1 \\y(t) &= x(s)e^{-\beta(t-s)} + \nu \int_s^t e^{-\beta(t-u)} dW_u^2\end{aligned}$$

### 7.0.1 CONSTRUCTION

Cette méthode a été d'abord suggérée par Hull-White (1994) On commence par donner une approximation de la dynamique processus  $x$  et  $y$ , par une suite de variable de discretisé  $((\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \approx (x(i\Delta t), y(i\Delta t)))_i$ . Pour cela nous calculerons les deux premier moment de  $(x, y)$

$$\begin{aligned}E(x(t + \Delta t)|F_t) &= x(t)e^{-a\Delta t} \\V(x(t + \Delta t)|F_t) &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t}) \\Cov\{x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)|F_t\} &= \frac{\sigma\nu\rho}{a+b}(1 - e^{-(a+b)\Delta t})\end{aligned}$$

Pour que le  $((\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$  et  $(x(i\Delta t), y(i\Delta t)))_i$  aient les même moment, la loi de  $((\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$  est donnée par:

$$P(\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + a dx, \tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + b dy | \tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = p^{a,b}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$$

où

- $a, b \in \{-1, +1\}$
- $p$  est donnée par

Nous appelons slice l'ensemble des noeuds qui sont équi distant de la racine. Une slice représente la distribution du processus  $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$  à un instant donné.

Le pricing se fait en deux temps:

- On diffuse le processus  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  dans l'arbre en prenant soin de calculer la probabilité de transition d'un état à un autre
- On "drawback" dans l'arbre en partant de la date à laquelle on fait le payoff, en \*\*\*dis-countant\*\*\*

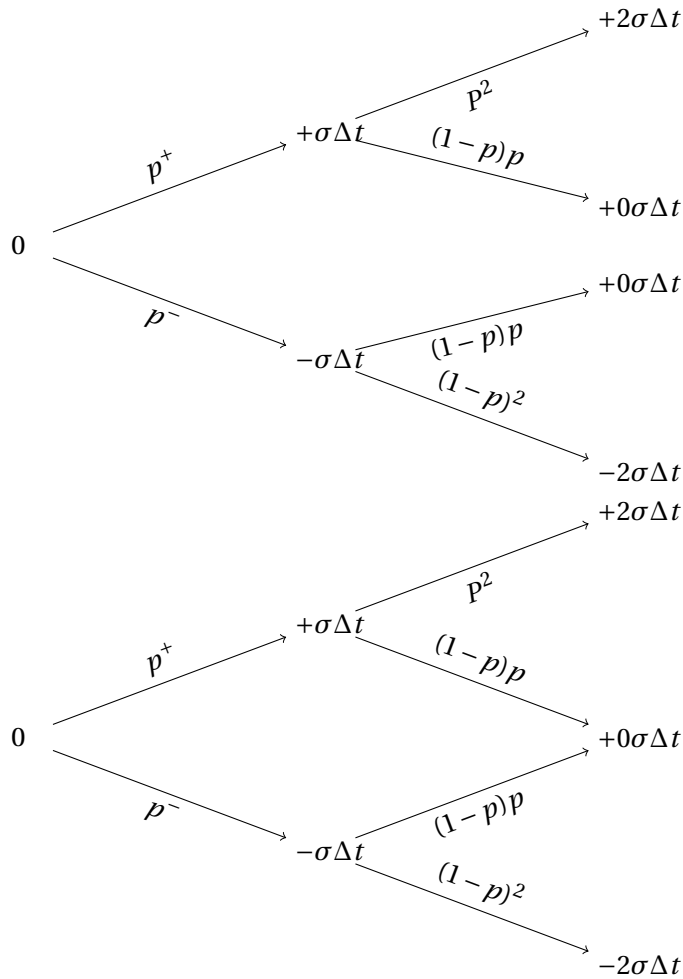
### PETITE DISCUSSION SUR LA COURBE D'ACTUALISATION VS LA COURBE DE DIFFUSION

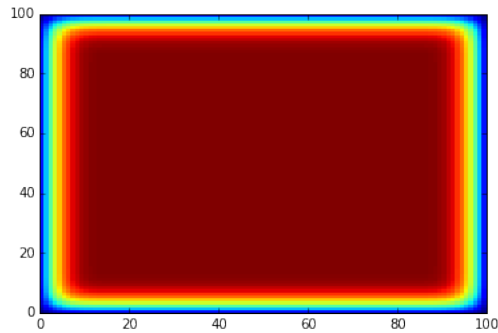
Avant la crise de 2008, il était d'usage courant que les banques considèrent le taux Libor comme reflétant la réalité du marché de crédit inter-bancaire. Le taux est publié quotidiennement par taux réel auquel les banques sont prête à se prêter de l'argent est appelé taux OIS (Overnight Index Swap). Pendant la crise, le spread entre LIBOR et OIS était si grand qu'il devenait impossible à ignorer. Depuis tous les modèles de taux intègrent deux courbe, une pour la diffusion (LIBOR par exemple) et une autre pour l'actualisation (OIS). Dans le développement de cet article, nous ignorons cette différence.

## 7.1 AMÉLIORATIONS

Si nous implémentons l'arbre de façon naïve, le nombre de noeuds augmente de façon exponentielle en fonction du nombre de pas de temps. En pratique ceci est problématique et conduit vite à une saturation de mémoire. Dans l'exemple simplifié ci-dessus nous traçons l'arbre de diffusion du premier facteur ( $x(t)$ ). A chaque pas de temps le nombre de noeuds double, ie pour  $n$  pas de temps, nous nous retrouvons avec  $2^n$  noeuds pour un facteur, ou  $4^n$  pour deux.

Remarquer que  $(x, y)_i$  tilde est un processus markovien homogène à valeurs discrètes nous permet d'optimiser la simulation de l'arbre. En effet, il nous suffit de calculer la table de transition une fois au début du programme et de la réutiliser pour avancer/reculer dans le temps.





Une autre amélioration possible est de trouver une formule analytique pour certains produits. En effet, si nous reprenons l'exemple d'un cancellable spread option 2Y10Y dont la maturité est dans 5 ans, nous devrions normalement construire l'arbre jusqu'en 2030 pour avoir le taux 10Y en 2020. Nous pouvons éviter cela en fournissant directement une formule exacte pour les zéro coupons.

#### 7.1.1 FORMULE EXACTE

Cette partie est fortement inspirée de \*BLA BLA BLA\*

On rappelle l'expression du prix du bond zéro coupon sous la mesure risque neutre  $Q$

$$P(t, T) = E^Q \left[ e^{-\int_t^T r_u du} \right]$$

Notons  $I(t, T) := \int_t^T x(u) + y(u) du$ , et montrons que conditionnellement à l'information accumulée jusqu'au temps  $t$ , c'est une variable normale d'espérance  $M(t, T)$  et de variance  $V(t, T)$  où :

$$M(t, T) := \dots$$

$$V(t, T) := \dots$$

Nous avons donc

$$P(t, T) = \exp \left( E^Q \left[ - \int_t^T r_u du \right] + \frac{1}{2} Var \left( - \int_t^T r_u du \right) \right)$$

Nous utiliserons cette formule directement dans le pricer, ce qui nous évitera de construire l'arbre jusqu'à la date de maturité du dernier zéro coupon.

#### 7.1.2 AJOUT D'UN SHIFT DÉTERMINISTE

Le modèle, tel que développé jusqu'à présent, présente un inconvénient majeur: à tout instant,  $r_t$  est symétriquement distribué autour de 0. Ceci ne correspond pas à la réalité, puisque les taux négatifs ne sont observés dans les marchés que dans de très rares circonstances ( en Europe après crise inter-bancaire de 2009, Au Japon après des années de déflation ). Pour pallier à ce problème, nous rajoutons une fonction  $\phi$  au taux  $r_t$ . La fonction déterministe  $\phi(t)$  permet de fitter exactement la courbe de taux observée. Dans la partie "Calibration nous" nous verrons comment calculer cette fonction à partir des prix de bonds zéro coupon.

En prenant en compte ce changement, le prix du bond zéro coupon devient:

$$P(t, T) = E^Q []$$

Nous prendrons soin de modifier l'étape de "draw back" dans l'arbre en changeant le facteur d'actualisation.

Le processus est markovien

#### 7.1.3 OPTIMISER LA TAILLE DES SLICES

La taille de la slice augmente linéairement avec le temps. Ce n'est pas raisonnable. Comment connecter les slices entre elles

#### 7.1.4 PARAMÈTRES DÉPENDANT DU TEMPS

Dans la partie précédente, les paramètres  $\sigma \nu \alpha \beta$  étaient constantes. Considérer des variables qui dépendent du temps permet au modèle plus de flexibilité pour fitter les données de marché. Voir la partie calibration.

Deux problèmes cependant:

- Le calcul est beaucoup plus long,
- possibilité de sur fitter les données historique du marché, ce qui affecte négativement le pouvoir prédictive du modèle

<Calcul>

On vérifie expérimentalement que le gain est significatif



## 8 RÉSULTATS

Une fois toutes ces modifications prises en compte, nous pouvons \*BLA BLA BLA\* Paragraphe sur la taille des slice, ellipsoid



- Discrétisation
- Construction de l'arbre

### 8.1 PERFORMANCE

L'arbre est long mais beaucoup plus puissant Imperfections de l'arbre:

- bornee
- discretisation
- probabilité négative

Monte Carlo Limitation Closed Form

Le temps d'exécution: Arbre Closed form

## 9 APPLICATION: CALIBRATION ET PRICING

Notre modèle possède à un certains nombres de paramètres libre que nous devons fixer. Pour cela, nous choisissons un certain nombre d'actifs tradables dans le marché, dont le prix est donc connu, que nous appellerons benchmark. Nous essayerons ensuite de trouver les paramètres qui reproduisent le mieux ces prix là. Cette procédure est appelé calibration. Une question naturelle qui se pose est de savoir quels actifs choisir pour la calibration. Il existe plusieurs réponses possibles, en pratique on essaye de trouver un produit à la fois simple et liquide.

Dans notre cas il est indispensable que le modèle puissent retrouver les prix des bond zéro coupons. Idéalement notre benchmarks est une ensemble de caplets. Les caplets ne sont pas tradés en tant que tel sur le marché, nous n'avons accès qu'à des caps. => Stripping

Le modèle à 2F permet de caputer le hump de la courbe de rendement Le nombre de paramètre est fini (5) => pas de overfitting

- $h(t)$  pour reconstruire la yield curve  $\sigma\rho v$  pour
- matcher la surface

### 9.1 CALIBRATION DU DRIFT

$\Pi_j$  state price (arrow debrew) (paye 1 si le noeud  $(t_n, j)$  est atteint.

$$D_j(h_n) := \frac{1}{1 + r(t_n)(t_{n+1} - t_n)}$$

Le discount factor

$$\Pi_j(t_{n+1}) = \sum_j \Pi_j(t_n) p_{j,j'}(t_n) D_{j'}(h_n)$$

$$\sum_j \Pi_j D_j(h_n) = P(0, t_{n+1})$$

Developement de taylor => trouver  $h_n$

### 9.2 CALIBRATION DE LA VOL

Stripping des caplets à partir des caps

### 9.3 METHODE DE CALIBRATION DE LA SURFACE - MÉTHODE D'OPTIMISATION

On calibre les caplets

Les caplets ne sont pas directement disponible sur les marche On calibre les swaptions/caps

- Le probleme de calbration est un probleme d'optimisation Courbe de vol implicite :
- minimisation de l'erreur L2



