

ECOLE POLYTECHNIQUE

Modèles des Taux d'intérêt

Bachir EL KHADIR
June 17, 2015

CONTENTS

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Remerciments | 3 |
| 2 | Introduction | 4 |
| 3 | Quelques définitions | 5 |
| 4 | Produits financier d'interêts | 6 |
| 5 | Les différents modèles des taux d'interêts | 7 |
| 6 | Le modèle à deux facteurs | 8 |
| 6.1 | Motivation | 8 |
| 6.2 | Approximation de la solution par un arbre binomial | 9 |
| 6.3 | Formule analytique - Intégration | 9 |
| 6.4 | Performance | 10 |
| 7 | Application: calibration et pricing | 11 |
| 7.1 | Calibration | 11 |
| 7.1.1 | Calibration du drift | 11 |
| 7.1.2 | Methode de calibration de la surface - Méthode d'optimisation | 11 |

1 REMERCIMENTS

Ecole Polytechnique Maitre de stage Bla bla bla

2 INTRODUCTION

J'ai fait mon stage a JP Morgan equipe exotic rates. La plus grosse partie du travail: trouver le bon modele pour pricer un produit et le calibrer au marche

L'interêt que porte les banques aux produits exotiques a considérablement augmenté au cours des dernières années. Plusieurs modèles ont été développés pour refléter au mieux le comportement des marchés financiers. Le département au sein duquel j'ai effectué mon stage s'occupait des produits basés sur les taux d'intérêt. Dans ce domaine, une propriété appréciable est le fait qu'ils possèdent un nombre de paramètres suffisant pour être calibrés parfaitement au prix observable dans la réalité, sans pour autant "overfitter" l'échantillon disponible. En effet, depuis la crise, le marché des taux a connu des changements radicaux, la possibilité d'observer des taux négatifs en est un exemple.

Un produit en particulier n'a cessé de gagner en notoriété: les cancelables spread options. Ma mission de stage était de comprendre les modèles existants et leurs implémentations, comprendre leurs limites, et essayer de trouver des améliorations.

Dans la littérature, il existe différents modèles Hull white modèle 1F et 2F Motivation C'est la première implémentation de de WH a 2F avec des paramètres variant avec le temps

Dans une première partie je présenterai quelques définitions essentielles à l'étude des taux d'intérêts, ainsi que les produits financiers principaux utilisés pour la calibration des modèles. Dans la deuxième partie modèle existant dans la littérature, pk 2F? Implémentation, calibration Conclusion

La notion de taux d'intérêt nous est familière et fait parti de notre vie de tous les jours.
Zéro Coupon

3 QUELQUES DÉFINITIONS

Theorem 1. $Z(t, T, S)$ est le montant qu'il faut investir dans un instrument risque-neutre au temps T pour obtenir 1euro au temps S .

Theorem 2. r le taux d'intérêt instantané est défini comme étant

Theorem 3. La courbe de rendement ou la yield curve $L(t, T)$

Theorem 4. Le taux d'interet cumulé

4 PRODUITS FINANCIER D'INTERÊTS

Theorem 5. *Swap: Un swap est un contract entre deux parties qui s'engagent à échanger des flux financier pendant une durée et à une fréquence déterminées. la plupart du temps, ces flux sont déterminé comme étant l'intêret sur un notionnel K .*

$$N \sum D_t^{T_i} \tau_i (L(T_{i-1}) - K)$$

Caps/floor: Un cap/floor peut être vu comme un call/put européenne sur un swap

$$N \sum D_t^{T_i} \tau_i (L(T_{i-1}) - K)^+$$

nominal $N = 1$

$$CPL(t, t_{i-1}, t_i, \tau_i, X) = (1 + X\tau_i) ZBP(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1 + X\tau_i})$$

$$ZBP = \mathbb{E}^{Q_T} ((P(t_{i-1}, t_i) - X)^+)$$

Si $P(t, T)$ admet une loi log normal par rapport a la mesure forward neutre Q_T , on peut appliquer black scholes. Dans la pratique, les trader sont habitue a raisonner en terme de vol bs plutot qu'en terme de prix. Nous verrons plus loin que la dynamique $P(t, T)$ est plus complique, mais cette methode permet neanmoins d'avoir une correspondance entre prix et vol.

Swaption

$$N(\sum D_t^{T_i} \tau_i (L(T_{i-1}) - K))^+$$

5 LES DIFFÉRENTS MODÈLES DES TAUX D'INTERÊTS

Certains produits financiers dépendent en grande partie de la courbe de rendement. Nous avons vu précédemment que la donnée du taux instantané r_t permet de caractériser complètement cette courbe.

Il est donc important que la dynamique de r_t soit à la fois riche pour pouvoir décrire la courbe de rendement observée dans le marché, et suffisamment simple pour que le temps nécessaire pour le calcul ne soit trop long.

Nous pouvons considérer que la courbe de rendement varie dans un espace vectoriel de dimension infinie. Toute tentative de la caractériser par un nombre fini de paramètres réels est donc vouée à l'échec.

Le modèle de Hull White a été introduit en 1990. Un des atouts majeurs de ce modèle est la possibilité de simuler la dynamique de r_t par un arbre trinomial. Ceci étant essentiel pour pricer des produits du type bermuda options

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t$$

$$r_t = e^{-\alpha t}r_0 + \text{integral}...$$

6 LE MODÈLE À DEUX FACTEURS

6.1 MOTIVATION

Montrons dans un premier temps pourquoi un modèle à un seul facteur n'est pas suffisant pour pricer certains produits disponibles sur les marchés. En effet, considérons un produit E dont le payoff dépend du spread entre un taux d'intérêt cumulé entre 0 et T_1 pour le premier et 0 et T_2 pour le second.

La dynamique de r_t dans le modèle de Vasicek est donnée par

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

La formule analytique du bond zéro coupon est donc

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r_t)$$

En particulier le taux d'intérêt cumulé est une donnée par une transformation affine du taux instantané:

$$R(t, T) = \frac{\ln P(t, T)}{T - t} =: a(t, T) + b(t, T)r_t$$

Le payoff du produit E est donc fonction de la distribution jointe de $R(0, T_1)$ et $R(0, T_2)$. Sauf que:

$$\text{Cor}(R(0, T_1), R(0, T_2)) = 1$$

On en déduit qu'un choc à r_t agit de la même manière sur toutes les courbes. On observe sur les marchés que les taux à différentes maturités ne sont pas corrélés. Si on regarde le taux 2Y et 10Y

<Courbe 10Y> <Courbe 2Y>

Clairement un tel modèle ne capture pas ce comportement.

Dans cette section nous considérons un modèle où le taux d'intérêt instantané est donné par une somme de deux facteurs gaussiens centrés et corrélés. Pour fitter la yield curve, on rajoute une fonction déterministe.

$$dX =$$

$$dY =$$

$$dr = X + Y + \phi(t)$$

$$P(t, T) = E[...]$$

Le processus est markovien

Les cap floors admettent une formule analytique, comme pour les options vanilles : formule de Black-Scholes. Dans la pratique, les banques tradent beaucoup des produits exotiques. Ce n'est pas le cas pour ces produits => arbre de pricing

6.2 APPROXIMATION DE LA SOLUTION PAR UN ARBRE BINOMIAL

Cette méthode a été d'abord suggérée par Hull-White (1994) On commence par donner une approximation de la dynamique processus x et y :

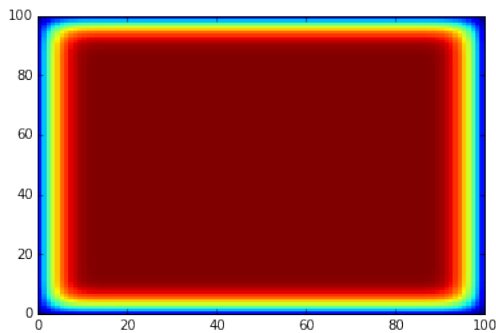
$$E(x(t + \Delta t)|F_t) = x(t)e^{-a\Delta t}$$

$$V(x(t + \Delta t)|F_t) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t})$$

$$Cov\{x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)|F_t\} = \frac{\sigma v \rho}{a + b}(1 - e^{-(a+b)\Delta t})$$

Dans l'arbre, on commence par discrétiser le temps par un pas fixe Δt , ensuite à chaque pas de temps on fait l'approximation du couple aléatoire à cdf continue (x, y) par un couple de variables de bernouilli qui a les même moments de premier et second ordre.

Le nombre de noeuds augmente de façon exponentielle en fonction du nombre de pas de temps. En pratique ceci est problématique et conduit vite à une saturation de mémoire. Pour palier à ce problème on réutilise les noeuds



Cependant, on ne peut ajouter un drift au noeud avec cette methode.
Paragraphe sur la taille des slice, ellipsoid <exemple de Slice>

- Discrétisation
- Construction de l'arbre

6.3 FORMULE ANALYTIQUE - INTÉGRATION

Closed form des zero coupons

en pratique, gain en temps

< cachegrind results >

gain en precision

<Comparaison de slice entre cf et bf>

Amerlioration:

- Time dependant parameters

6.4 PERFORMANCE

L'arbre est long mais beaucoup plus puissant Imperfections de l'arbre:

- bornee
- discretisation
- probabilité negative

Monte Carlo Limitation Closed Form

Le temps d'exécution: Arbre Closed form

7 APPLICATION: CALIBRATION ET PRICING

Le modèle à 2F permet de caputer le hump de la courbe de rendement Le nombre de paramètre est fini (5) => pas de overfitting

7.1 CALIBRATION

Dans cette section on verra a quel point le modele peut fitter la realite.

- $h(t)$ pour reconstruire la yield curve $\sigma \rho v$ pour
- matcher la surface

7.1.1 CALIBRATION DU DRIFT

Π_j state price (arrow debrew) (paye 1 si le noeud (t_n, j) est atteint.

$$D_j(h_n) := \frac{1}{1 + r(t_n)(t_{n+1} - t_n)}$$

Le discount factor

$$\Pi_j(t_{n+1}) = \sum_j \Pi_j(t_n) p_{j,j'}(t_n) D_{j'}(h_n)$$

$$\sum_j \Pi_j D_j(h_n) = P(0, t_{n+1})$$

Developement de taylor => trouver h_n

7.1.2 METHODE DE CALIBRATION DE LA SURFACE - MÉTHODE D'OPTIMISATION

On calibre les caplets

Les caplets ne sont pas directement disponible sur les marche On calibre les swaptions

Le probleme de calibration est un probleme d'optimisation Courbe de vol implicite : minimisation de l'erreur L2

