



PROJET MODELE DE TAUX

Pricing du taux d'intérêt des caplets avec le modèle de taux $G2++$

Professeur : Christophe LUNVEN

29 Fevrier 2012

Taylan KUNAL - Dinh GIA KHANH - Aurélia ISTRATII

Sommaire

1.	Introduction-----	3
1.1.	L'utilisation des modèles stochastiques de taux -----	4
1.2.	Descriptif d'un modèle de taux parfait -----	4
2.	Modèles de taux courts -----	5
2.1.	Les modèles mono factoriels-----	5
2.1.1.	Le modèle de Vasicek-----	5
2.1.2.	Avantage et Inconvénient du modèle de Vasicek -----	6
2.1.3.	Le modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR) -----	6
2.1.4.	Le modèle de Hull et White (ou Vasicek étendu)-----	7
2.2.	Les limites des modèles mono factoriels-----	7
3.	Les modèles multifactoriels-----	8
3.1.	Le modèle Gaussien à deux facteur : G2 ++ -----	8
3.1.1.	Présentation du modèle :-----	8
3.1.2.	Prix de l'obligation zéro-coupon -----	10
3.2.	Avantages et Inconvénients du modèle G2++ -----	10
3.3.	Calibration du modèle G2++ à partir de prix de marché de caplets -----	11
3.3.1.	Pricer le taux d'intérêt des caps avec le modèle G2++ -----	11
3.3.2.	Calibration-----	11
3.4.	Etude Empirique : Calibration du modèle G2++ vs Hull-White à un facteur-----	11
4.	Calibration du modèle sous Matlab-----	12
4.1.	Les étapes de la simulation-----	12
4.1.1.	Taux courts-----	12
4.1.2.	Prix zéros coupons forward ZCP -----	14
4.1.3.	Prix de caplets d'échéance T_i -----	15
4.2.	Résultats de la simulation-----	16
5.	Conclusion-----	19

1. Introduction

Le sujet de notre projet est l'étude des modèles des taux. Dans un premier temps, nous allons présenter les modèles mono factoriels et leurs limites. Nous enchainons avec la présentation du modèle gaussien à deux facteurs que nous allons implémenter et calibrer sous Matlab.

1.1. L'utilisation des modèles stochastiques de taux

Une courbe des taux (Yield Curve) est la représentation graphique de la fonction mathématique du taux d'intérêt effectif à un instant donné sur une période définie d'un zéro-coupon en fonction de sa maturité d'une même classe d'instruments fongibles.

En pratique, nous utilisons les modèles stochastiques de déformation de la courbe de taux pour deux raisons essentielles :

1. L'évaluation et la couverture de produits de taux délivrant des flux aléatoires dans le futur (caplets). Le vendeur d'option doit être capable de donner un prix au produit qu'il vend, mais surtout de couvrir l'option qu'il vend car il est exposé à une perte illimitée.

Ces modèles sont surtout utilisés en salle de marché dans un contexte de trading, et dans les départements de risques.

2. Permet à mettre en place de l'analyse par scénario.

Un gérant de portefeuille fait des anticipations sur la courbe de taux quand il met en place une stratégie. Il a besoin de connaître le scénario de déformation de la courbe des taux qu'il anticipe. Pour cela, il utilise un outil qui lui permet d'envisager tous les scénarios possible de déformation de la courbe des taux. Comme il n'est pas sûr que son scénario se réalise, il a aussi besoin de mesurer le risque qu'il prend si ce scénario ne se réalise pas dans le faits.

1.2. Descriptif d'un modèle de taux parfait

Avant d'étudier les différents modèles de taux et leurs limites, nous voulons parler des propriétés d'un modèle de taux parfait :

1. Un modèle de taux doit prendre en compte les propriétés empiriques de la courbe des taux mises en évidence précédemment.
2. Un modèle de taux doit être bien construit dans le sens que les inputs du modèle son observables sur le marché ou facilement estimables, et en outre fréquemment ré ajustables.
3. Un modèle de taux doit être compatible avec les prix de marché de produits vanille (caplets..).
4. Suffisamment simple pour permettre des calculs rapides.
5. Un modèle qui peut être manipulé facilement par l'utilisateur (Traders, Contrôleur de risque).
6. Un modèle qui n'oublie pas le facteur de risque.
7. Un modèle qui satisfait l'hypothèse théorique de l'absence d'opportunité d'arbitrage.
8. Un modèle offrant une méthode de couverture efficace qui permet au vendeur de couvrir son produit tout au long de la vie de produit.

2. Modèles de taux courts

La modélisation stochastique des taux d'intérêt a véritablement commencé avec le modèle de Vasicek en 1977. Il a été l'un des sujets en finance qui a eu un impact considérable au cours des vingt dernières années. Les travaux de Vasicek ont permis de présenter un processus, d'Ornstein-Uhlenbeck dont le taux d'intérêt ne dépend que du taux instantané mais autorisant des taux négatifs. Par la suite, nous allons présenter le processus CIR qui est un modèle affine de taux court qui a permis de remédier à cette lacune mais ne satisfait pas les spécialistes du fait de la difficulté d'interprétation financière des paramètres de diffusion et de leur incapacité à reproduire exactement la courbe de taux zéro-coupon spot.

Les plus grandes découvertes en matière de modélisation ont commencé par la proposition de Heath, Jarrow et Merton (1992) et les modèles de marché (BGM et Jamshidian (1997)).

HJM ont proposé une famille de modèles, dont la dynamique ne dépend que d'une fonction facilement interprétable (la volatilité de taux forward) et capable de rendre compte de n'importe quelle courbe de taux donnée.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons distinguer les modèles à un facteur et les modèles multifactoriels.

2.1. Les modèles mono factoriels

2.1.1. Le modèle de Vasicek

Dans le modèle à un facteur de Vasicek, le taux court r guide l'évolution de l'ensemble de la courbe des taux.

On suppose que sous une probabilité risque neutre Q le taux court instantané r suit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients constants :

$$\begin{cases} dr_t &= \kappa[\theta - r_t]dt + \sigma dW_t \\ r(0) &= r_0 \quad Q - p.s. \end{cases}$$

$r_0, \kappa, \theta, \sigma$ constantes positives et W un mouvement brownien. Le terme dt du processus d'Ornstein-Uhlenbeck s'interprète classiquement comme un retour à la moyenne long-terme θ avec une vitesse de retour à la moyenne κ , σ est la volatilité du taux court.

La solution de l'EDS s'écrit :

$$r(t) = r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u.$$

$r(t)$ est distribué normalement conditionnellement à \mathcal{F}_s , $s < t$, de moyenne et variance :

$$\begin{aligned} E_Q[r_t | \mathcal{F}_s] &= r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}), \\ \text{Var}_Q[r_t | \mathcal{F}_s] &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}). \end{aligned}$$

Dans le modèle de Vasicek, le taux zéro coupon de maturité T s'écrit à la date t :

$$R(t, T) = R_\infty + (r_t - R_\infty) \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3(T-t)} (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2,$$

avec

$$R_\infty = \theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}.$$

2.1.2. Avantage et Inconvénient du modèle de Vasicek

Le modèle Vasicek a les avantages suivantes : la distribution est connue et facile à manipuler (gaussienne), les formules sont explicites pour les obligations et taux zéro-coupon et donc la simulation est aisée.

Le premier défaut du modèle de Vasicek est dû à son caractère gaussien qui ne garantit pas la positivité du taux court $r(t)$.

Enfin, la courbe des taux zéro-coupon trouvée à partir du modèle n'est pas assez souple pour reproduire toutes les formes de courbes observées sur les marchés.

2.1.3. Le modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Le modèle CIR a répondu au problème de la positivité du taux court. Ce modèle a été proposé par Cox-Ingersoll-Ross en 1985.

On suppose que sous une probabilité risque neutre \mathbf{Q} le taux court instantané r est la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dr_t = \kappa[\theta - r_t]dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t,$$

Avec r_0, κ, θ et σ constantes positives vérifiant $\sigma^2 \prec 2\kappa\theta$. Cette condition permet de s'assurer de la stricte positivité du processus $r(t)^2$. Le terme en dt est un retour à la moyenne comme on a vu dans le modèle de Vasicek.

2.1.4. Le modèle de Hull et White (ou Vasicek étendu)

Le modèle HW est le dérivé du modèle Vasicek. HW ont introduit une moyenne long-terme fonction déterministe du temps. Ils ont supposé que sous la probabilité risque neutre Q , l'évolution du taux d'intérêt court r représenté par le processus de retour à la moyenne suivante :

$$dr_t = (b(t) - ar_t)dt + \sigma dW_t,$$

Où $b(t)$ est une fonction déterministe du temps. Le paramètre a est la vitesse de retour à la moyenne qui contrôle la vitesse de l'ajustement de retour à la moyenne défini par $b(t)$. Le paramètre σ est la volatilité de taux court et a et σ sont des constants positifs. W_t représente le composant aléatoire, donc le mouvement Brownien.

L'intérêt du modèle c'est que le modèle HW reproduit exactement la courbe de taux zéro-coupon de marché à l'aide de la fonction déterministe suivante :

$$b(t) = \frac{\partial f^M}{\partial T}(0, t) + af^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

Où f^M est le taux instantané de forward du marché pour $t=0$.

Par application du lemme d'Ito au processus $r_t^*e^{at}$, on montre que le taux court s'écrit :

$$r(t) = r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \int_s^t b(u)e^{-a(t-u)}du + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dW_u.$$

2.2. Les limites des modèles mono factoriels

Nous avons vu que certains modèles comme Vasicek autorisent les taux à devenir négatifs avec une probabilité non nulle. Deuxième limite, c'est le mauvais calage de ces modèles sur les données de marché (prix d'obligations). Il est fréquent d'observer des prix d'obligations reproduits par le modèle qui diffèrent d'1% ou plus des prix de marché. Troisièmement, ces modèles sont inadaptés pour l'évolution et la couverture de produits de taux.

En effet, Les modèles de taux à un facteur ont des limites quand on parle des produits de taux avec différentes maturités. Ces modèles impliquent que les taux évoluent de façon parfaitement corrélés donc la corrélation de deux taux zéro-coupon de maturité T_1 et T_2 distinctes est égale à 1.

Ce qui n'est pas le cas dans la matrice suivante des corrélations entre variations de taux zéro coupon de différentes maturités (France – 1995-1998, Courbe interbancaire) :

Figure 1.

	1M	3M	6M	1A	2A	3A	4A	5A	7A	10A
1M	1									
3M	0.999	1								
6M	0.908	0.914	1							
1A	0.546	0.539	0.672	1						
2A	0.235	0.224	0.31	0.88	1					
3A	0.246	0.239	0.384	0.808	0.929	1				
4A	0.209	0.202	0.337	0.742	0.881	0.981	1			
5A	0.163	0.154	0.255	0.7	0.859	0.936	0.981	1		
7A	0.107	0.097	0.182	0.617	0.792	0.867	0.927	0.97	1	
10A	0.073	0.063	0.134	0.549	0.735	0.811	0.871	0.917	0.966	1

Nous voyons que des taux de maturités proches, comme le taux de maturité 3 ans et celui de maturité 4 ans, sont très corrélés, tandis que des taux de maturité éloignées (par exemple le taux 1 mois et le taux 7 ans) sont très peu corrélés.

Figure2.

No. of factors	By correlation matrix				
	1	2	3	4	5
DEM	67.7	83.9	93.7	97.1	98.5
JPY	75.8	91.2	94.3	96.6	98.1
USD	75.8	85.1	93.0	97.0	98.9

Sur les trois marchés (le deutsche mark, le yen et le dollar américain), deux facteurs permettent d'expliquer plus de 80% des variations observées, trois facteurs plus de 90%.

Ces deux observations montrent la nécessité et l'importance des modèles multifactoriels.

3. Les modèles multifactoriels

Par la suite, nous allons concentrer sur le modèle Gaussien à deux facteurs G2++, puis nous allons étudier les résultats obtenus lors de l'implémentation et la calibration du modèle sous Matlab. Ensuite Le modèle G2++ sera utilisé pour pricer le taux d'intérêt des caplets.

3.1. Le modèle Gaussien à deux facteur : G2 ++

3.1.1. Présentation du modèle :

Le modèle Gaussien à deux facteurs a été présenté par Brigo & Mercurio (2005). Selon Brigo & Mercurio, le modèle à deux facteurs de Hull et White est équivalent au modèle Gaussien à deux facteurs additifs (G2++). Dans G2++ le processus de taux court est donné par la somme des deux facteurs distribués par la loi normale et par une fonction déterministe comme celle dans le modèle à un facteur de Hull-White.

Nous avons rendu compte que le modèle G2++ est basé sur une formule beaucoup moins compliquée et son implémentation est plus facile.

On suppose ici que sous la mesure risque-neutre Q le taux court s'écrit :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \phi(t), \quad r(0) = r_0,$$

Où les deux facteurs $x(t)$ et $y(t)$ sont deux processus stochastique, et $\Phi(t)$ représente une fonction déterministe.

$$\begin{cases} dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), & x(0) = 0, \\ dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t), & y(0) = 0, \end{cases}$$

Où W_1 et W_2 sont deux mouvements browniens de variation croisée $(W_1, W_2) = \rho$ et $\Phi(0) = r_0$. Les paramètres a, b, σ, η sont constants et le facteur de corrélation et dans l'intervalle $-1 \leq \rho \leq 1$. La valeur initiale de taux court est $r(0) = r_0$.

- Φ permettra de calibrer ce modèle à la courbe $P^M(0, T)$, $T > 0$ des prix d'obligations zéro-coupon observés sur le marché. Son rôle est similaire à celui joué par la fonctionnelle $b(t)$ dans le modèle de Vasicek étendu.

Résolution EDS nous donne l'équation de taux court suivante :

$$r(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_2(u) + \Phi(t)$$

Le taux court $r(t)$ est donc gaussien, de moyenne et variance :

$$\begin{aligned} E_Q[r_t | \mathcal{F}_s] &= x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \phi(t), \\ \text{Var}_Q[r_t | \mathcal{F}_s] &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)}) + \frac{\eta^2}{2b}(1 - e^{-2b(t-s)}) \\ &\quad + 2\rho \frac{\eta\sigma}{a+b}(1 - e^{-2(a+b)(t-s)}). \end{aligned}$$

3.1.2. Prix de l'obligation zéro-coupon

En utilisant la dynamique et la forme de taux court nous allons déterminer les prix forward en t d'une obligation zéro coupon d'échéance T , noté $P(t, T)$:

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_0^T \Phi(u) du - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{a} y(t) + \frac{1}{2} V(t, T) \right\}$$

Où

$$\begin{aligned} V(t, T) = & \frac{\sigma^2}{a^2} \left[T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right] \\ & + \frac{\eta^2}{b^2} \left[T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right] \\ & + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left[T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right] \end{aligned}$$

Cette équation nous permet d'obtenir la fonction Φ permettant de calibrer le modèle gaussien à deux facteurs sur la courbe $P^M(0, T)$, $T > 0$ de prix d'obligation observé sur le marché.

$$\phi(T) = f^M(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{bT})^2 + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} (1 - e^{aT})(1 - e^{bT}).$$

Le modèle gaussien à deux facteur calibrer par l'équation au-dessus le prix $P(t, T)$ à la date t de l'obligation de zéro-coupon de maturité T est suivant :

$$P(t, T) = A(t, T) \exp \{ -B_a(t, T)x(t) - B_b(t, T)y(t) \}$$

$$\begin{cases} A(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp \left\{ \frac{1}{2} (V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)) \right\}, \\ B_i(t, T) = \frac{1 - e^{-i(T-t)}}{i}. \end{cases}$$

3.2. Avantages et Inconvénients du modèle G2++

L'inconvénient du modèle Gaussien à deux facteur par rapport au modèle Hull-White à deux facteurs, c'est le sens de l'utilisation pas claires des deux facteurs x et y . Cela rend l'interprétation du modèle difficile. Comme dans le modèle à un facteur du modèle HW, des taux négatifs présents dans le modèle G2++.

L'avantage du modèle est la possibilité de réglage de la corrélation entre les maturités grâce au paramètre ρ .

3.3. Calibration du modèle G2++ à partir de prix de marché de caplets

3.3.1. Pricer le taux d'intérêt des caps avec le modèle G2++

Etape 1

Tout d'abord nous avons défini des paramètres a, b, σ, η et des prix de zéro coupon de marché afin de pouvoir déterminer $\Phi(\theta) = \{\Phi_1(\theta), \dots, \Phi_T(\theta)\}$.

Etape 2

- Les prix des zéros coupons forwards $= ZCP(t, T, \theta)$
- Le facteur d'escompte $= DiscountFactor(t, T, \theta)$
- Le taux libor 1 mois $= Libor(t, \theta)$

Etape 3

Par la suite, nous calculons le prix d'un caplet :

$$Cpl(0, T, \theta, X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Libor_i(t, \theta) - X)^+ \times l \times DiscountFactor_i(0, T, \theta)$$

Etape 4

A l'aide de la simulation Monte Carlo, nous estimons $Cpl(t, T_{i-1}, T_i, \theta, X)$ de N fois :

$$Cap(t, T, \tau, \theta, X) = \sum_{i=1}^N Cpl(t, T_{i-1}, T_i, \theta, X)$$

3.3.2. Calibration

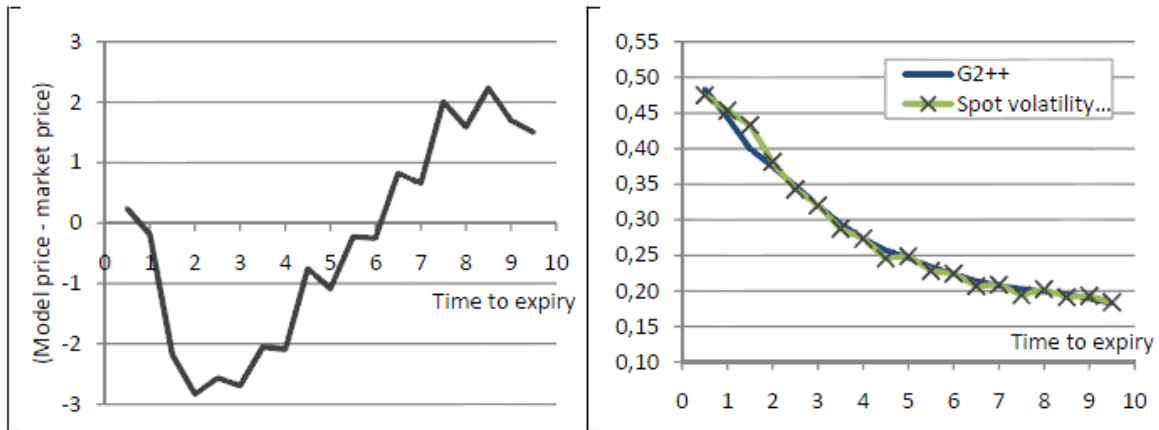
Ensuite, nous calculons la somme des carrés résiduel entre le model et les prix de marché de caplets d'échéance

diverses : $Cap_{i,MKT} SSR = \min \sum_{i=1}^n (Cap_{i,G2++} - Cap_{i,MKT})^2$

3.4. Etude Empirique : Calibration du modèle G2++ vs Hull-White à un facteur

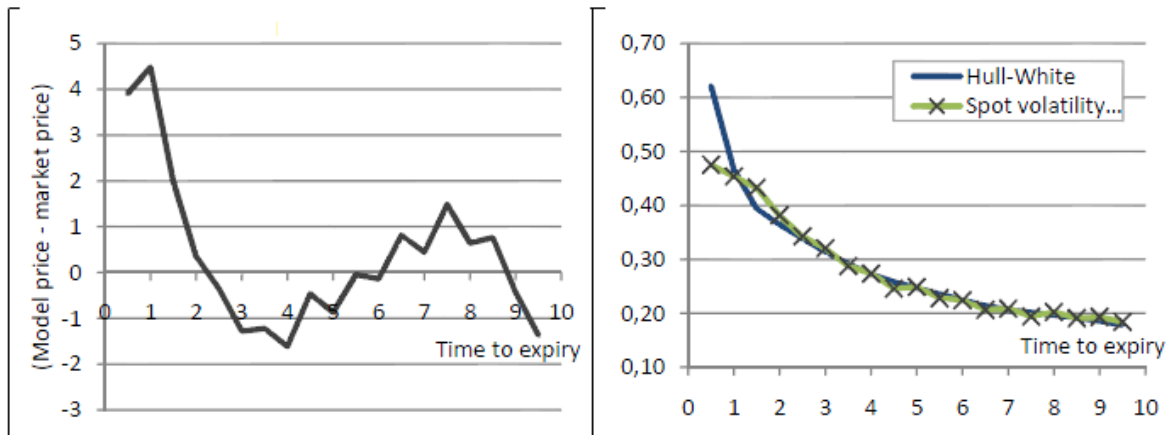
La différence entre le modèle G2++ et les prix du marché sont autour de 5 points de base.

Figure 3 : G2 ++



Le graphique à gauche montre l'erreur entre le modèle G2++ et les prix de marché de caplets. Le graphique à droite montre la volatilité implicite du marché et la volatilité implicite des prix de caplets du modèle G2++.

Figure 4 : Hull-White à un facteur



Le graphique à gauche montre l'erreur entre le modèle HW et les prix de marché de caplets. Le graphique à droite montre la volatilité implicite du marché et la volatilité implicite des prix de caplets du modèle HW.

Commentaire :

Si on compare la calibration du modèle de HW avec la calibration de G2++, nous pouvons voir que les erreurs ont des magnitudes similaires. Nous pouvons dire que pour les caps à court terme, G2++ reproduit mieux la structure de la volatilité du marché par rapport à HW. (Figure 4)

4. Calibration du modèle sous Matlab

4.1. Les étapes de la simulation

4.1.1. Taux courts

La simulation des taux courts est effectuée avec la formule discrétisée du modèle G2++:

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{-\alpha \Delta t} x_k + \gamma \sqrt{\frac{1-e^{-2\alpha \Delta t}}{2\alpha}} z_{k+1}^1 \\ y_{k+1} = e^{-\beta \Delta t} y_k + \eta \sqrt{\frac{1-e^{-2\beta \Delta t}}{2\beta}} z_{k+1}^2 \\ \phi_k = f(0, t_k) + \frac{\gamma^2}{2\alpha^2} (1 - e^{-2\alpha t_k})^2 + \frac{\eta^2}{2\beta^2} (1 - e^{-2\beta t_k})^2 + \kappa \frac{\gamma\eta}{\alpha\beta} (1 - e^{-\alpha t_k})(1 - e^{-\beta t_k}) \\ r_k = x_k + y_k + \phi_k \end{cases}$$

On a besoin de simuler deux variables aléatoires suivantes une loi normale centrée réduite et corrélées avec un coefficient de corrélation rho. On a appliqué la formule suivante pour obtenir deux variables aléatoires nécessaires à partir des aléas initiaux.

$$dW_1(t) = d\widetilde{W}_1,$$

$$dW_2(t) = \rho d\widetilde{W}_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} d\widetilde{W}_2(t),$$

```
function [r,x,y] = Generate_taux(param,aleas1,aleas2,dt,fwd)
% FONCTION qui calcule le taux d'intérêt à partir des aléas simulés
% INPUT:      - param: vecteur des paramètres du modèle
%              - aleas1: matrice des variables aléatoires 1
%              - aleas2: matrice des variables aléatoires 2
%              - dt: pas de temps
%              - fwd: taux forward
% Affectation des paramètres
a=param(1);
b=param(2);
sigma=param(3);
eta=param(4);
rho=param(5);

% Nombre de simulations et nombre de périodes
[N,T]=size(aleas1);

% Transformation aleas1 et aleas2 en deux variables aléatoire suivant loi normale centrée
% réduite avec un coefficient de corrélation rho.
alea1 = aleas1;
alea2 = rho*aleas1+sqrt(1-rho^2)*aleas2;

%initialisation x0=0, y0=0, r0
x(:,1)=zeros(N,1);
y(:,1)=zeros(N,1);
r(:,1)=fwd(1)*ones(N,1);
for i=2:T+1
    % Durée de temps entre 0 et t
    t = dt*i;
    % Simulation du premier facteur
    x(:,i) = x(:,i-1)*exp(-a*dt) + sigma*sqrt((1-exp(-2*a*dt))/(2*a))*alea1(:,i-1);
    % Simulation du deuxième facteur
    y(:,i) = y(:,i-1)*exp(-b*dt) + eta*sqrt((1-exp(-2*b*dt))/(2*b))*alea2(:,i-1);
    % Facteur phi
    phi = fwd(i) + 0.5 * ( (sigma/a)^2*(1- exp(-a*t))^2 + (eta/b)^2*(1- exp(-b*t))^2 ) +
    sigma*eta*rho*(1- exp(-a*t))*(1- exp(-b*t))/(a*b);
    % Taux d'intérêt
    r(:,i) = x(:,i) + y(:,i) + phi;
end
end
```

4.1.2. Prix zéros coupons forward ZCP

Le prix du zéro coupon est calculé par la formule suivante :

$$P(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp \left\{ \frac{1}{2} (V^2(t, T) - V^2(0, T) + V^2(0, t)) - M(t, T) \right\}.$$

Avec :

$$M(t, T) = x_1(t)B_1(t, T) + x_2(t)B_2(t, T)$$

$$\begin{aligned} V^2(t, T) = & \frac{\sigma_1^2}{k_1^2} \left(T - t - B_1(t, T) - \frac{k_1}{2} B_1^2(t, T) \right) \\ & + \frac{\sigma_2^2}{k_2^2} \left(T - t - B_2(t, T) - \frac{k_2}{2} B_2^2(t, T) \right) \\ & + \frac{2\sigma_1\sigma_2\rho}{k_1k_2} (T - t - B_1(t, T) - B_2(t, T) + B_{12}(t, T)), \end{aligned}$$

$$B_1(t, T) = \frac{1 - e^{-k_1(T-t)}}{k_1}, \quad B_2(t, T) = \frac{1 - e^{-k_2(T-t)}}{k_2},$$

$$B_{12}(t, T) = \frac{1 - e^{-(k_1+k_2)(T-t)}}{k_1 + k_2}.$$

```
function PZC = Pricing_ZC(param,t,T,PZC_t,PZC_T,xt,yt)
%fonction qui calcul les prix zeros coupons forwards à partir d'un jeu de
%paramètre donné
a=param(1);
b=param(2);
sigma=param(3);
eta=param(4);
rho=param(5);
% Moyenne
mtT = xt*(1-exp(-a*(T-t)))/a + yt*(1-exp(-b*(T-t)))/b;

% Variance
v0t=((sigma/a)^2)*(t-2*((1-exp(-a*t))/a)+(1-exp(-2*a*t))/(2*a)) ...
+ ((eta/b)^2)*(t-2*((1-exp(-b*t))/b)+(1-exp(-2*b*t))/(2*b)) ...
+ 2*((sigma*eta*rho/(a*b))*(t+((1-exp(-a*t))/a)+((1-exp(-b*t))/b)+((1-exp(-(a+b)*t))/(a+b)))));
v0T=((sigma/a)^2)*(T-2*((1-exp(-a*T))/a)+(1-exp(-2*a*T))/(2*a)) ...
+ ((eta/b)^2)*(T-2*((1-exp(-b*T))/b)+(1-exp(-2*b*T))/(2*b)) ...
+ 2*((sigma*eta*rho/(a*b))*(T+((1-exp(-a*T))/a)+((1-exp(-b*T))/b)+((1-exp(-(a+b)*T))/(a+b)))));
vtT=((sigma/a)^2)*(T-t-2*((1-exp(-a*(T-t)))/a)+(1-exp(-2*a*(T-t)))/(2*a)) ...
+ ((eta/b)^2)*(T-t-2*((1-exp(-b*(T-t))/b)+(1-exp(-2*b*(T-t)))/(2*b)) ...
+ 2*((sigma*eta*rho/(a*b))*(T-t+((1-exp(-a*(T-t)))/a)+((1-exp(-b*(T-t))/b)+((1-exp(-(a+b)*(T-t)))/(a+b)))));

% Prix du zero-coupon
PZC = exp(-mtT+0.5*(vtT+v0t-v0T))*PZC_T/PZC_t;
```

4.1.3. Prix de caplets d'échéance Ti

Note: caplets de taux d'intérêt sont équivalentes à des options de vente sur obligations à zéro coupon.

```
function [prix_caplets,pzc,tx] =
Pricing_caplets(param,aleas1,aleas2,PZC,dates_Cpl,dt,strikes,fwd)
% FONCTION qui simule les prix des caplets, les prix du zéro-coupons et les
% taux d'intérêt.

% Nb de simulations et Nb de périodes
[N,T]=size(aleas1);

% Simulation des taux courts
[r,x,y] = Generate_taux(param,aleas1,aleas2,dt,fwd);

% Calcul des facteurs d'actualisations
DF = ones(N,T);
for i=2:T
    DF(:,i) = DF(i-1,1).*exp(-r(:,i-1)*dt);
end

% Calcul des prix Zéro coupons
pzc=ones(N,T);
for i=1:T
    pzc(:,i)=Pricing_ZC(param,dates_Cpl(i),dates_Cpl(i+1),PZC(i),PZC(i+1),x(:,i),y(:,i));
end

% Calcul des taux courts à partir des prix du zero-coupon
tx = 12*(1./pzc-1);

% Calcul des prix des caplets
caplets=ones(N,T-1);
for i=1:(T-1)
    caplets(:,i) = max(tx(:,i) - strikes(i),0).*DF(:,i+1)*dt*1;
end

% Prix moyens des caplets pour chaque maturité
prix_caplets = mean(caplets,1);

end
```

Similaire au modèle Hull-White, il n'y a pas de lien direct entre la structure par terme du marché volatilités cités et le cap (et Caplet) volatilités dans le modèle G2++. Par conséquent, pour calibrer G2++ on applique l'équation suivante:

$$SSR = \min \sum_{i=1}^n (\text{Cap}_{i,HW} - \text{Cap}_{i,mkt})^2$$

Cette équation nous permet pour une date donnée d'obtenir les paramètres du modèle Hull-White en minimisant la somme des carrés des résidus entre le modèle et le prix de marché des caps des taux d'intérêt. Ici n est le nombre de calibrations.

```

function ecart = min_G2(param)

global aleas1;
global aleas2;
global PZC;
global dt;
global strikes;
global dates_Cpl;
global courbe_fwd;
global MktP_Cpl;

% Contraintes des paramètres du modèle
if param(3)<0
    param(3)=0;
end
if param(4)<0
    param(4)=0;
end
if param(5)>1
    param(5)=1;
end
if param(5)<-1
    param(5)=-1;
end

% Prix du modèle
prix_caplets = Pricing_caplets(param,aleas1,aleas2,PZC,dates_Cpl,dt,strikes,courbe_fwd);

% Ecart quadratique entre le prix du modèle et le prix de marché des
% caplets
ecart = sum((MktP_Cpl(2:end)' - prix_caplets).^2);

end

```

La fonction `fminsearch` ne permet pas d'introduire les contraintes dans l'optimiseur, donc on a décidé de mettre les contraintes dans la fonction « `min_G2` » afin de respecter les contraintes des paramètres : les volatilités sont positives et le coefficient de corrélation est compris entre (-1,1).

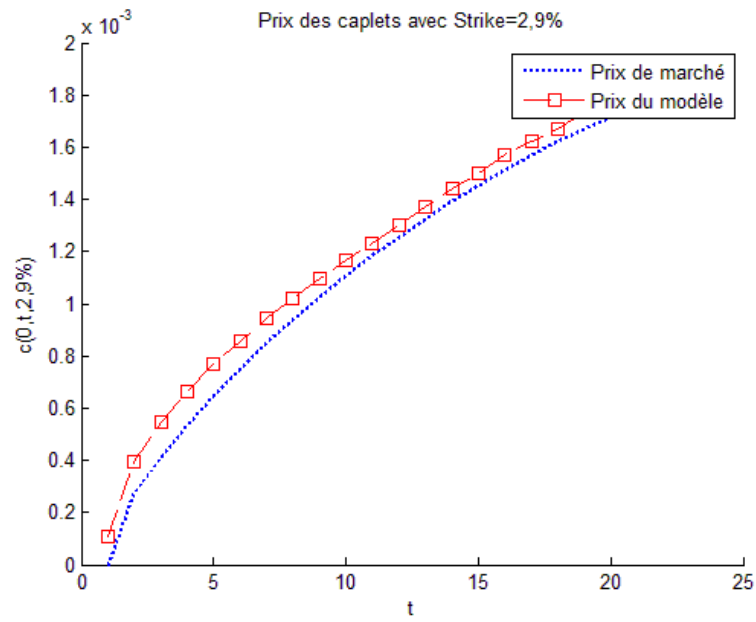
4.2. Résultats de la simulation

La minimisation d'écart quadratique entre le prix du modèle et le prix de marché des caplets nous donne des résultats suivants :

a	b	σ	η	ρ
1,50950952	1,53389226	0,01698265	0,01414985	-0,04819232

Les contraintes des paramètres sont bien respectées.

Figure 5



Le modèle G2++ est assez simple à simuler mais il donne un résultat très proche de la courbe des prix de marché.

Figure 6

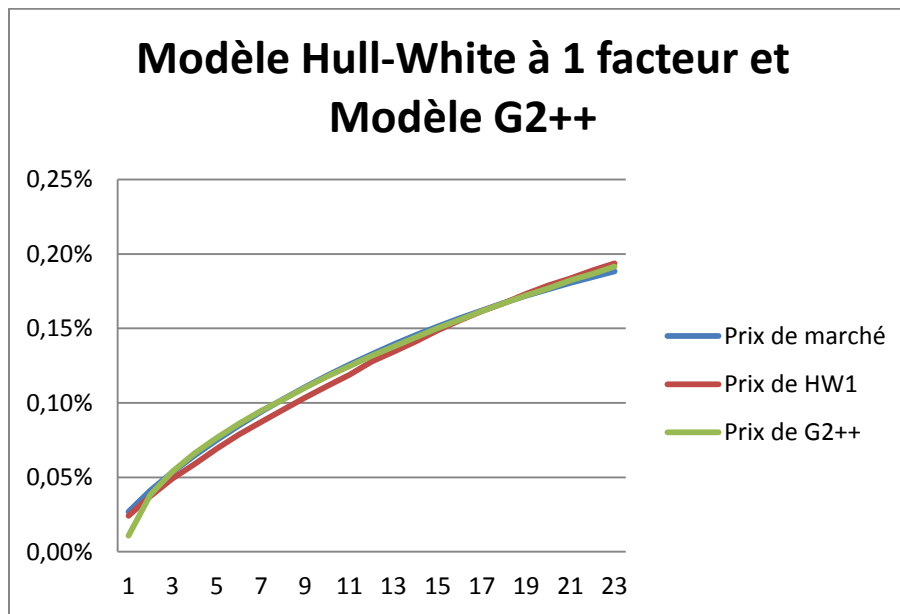
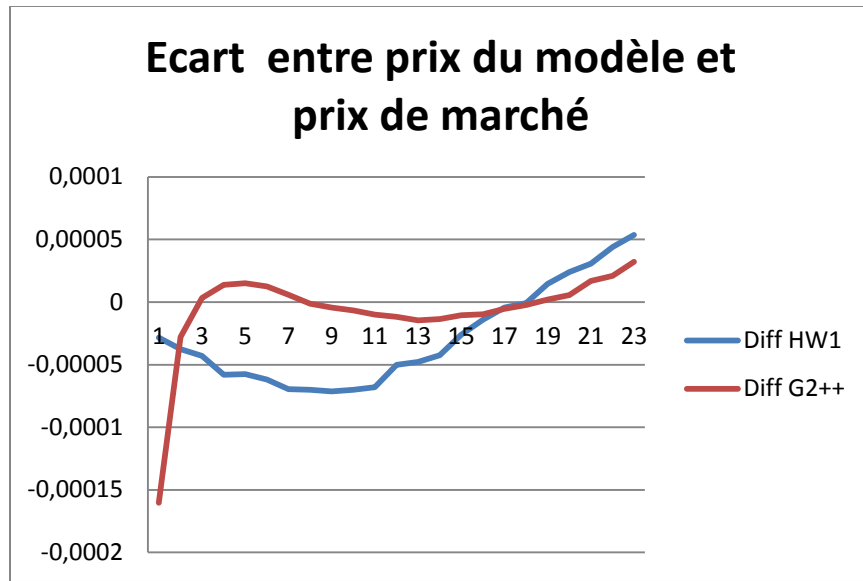
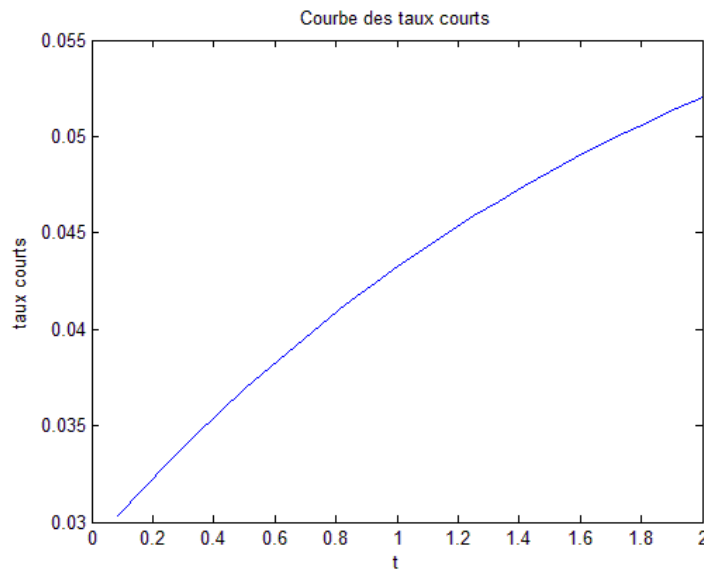


Figure 7



Par rapport au modèle Hull-White à 1 facteur, le modèle Gaussien G2++ à deux facteurs a légèrement amélioré la performance de la modélisation. Pour la modélisation de la courbe des taux courts, le modèle G2++ est plus pertinent.

Figure 8



5. Conclusion

L'étude et l'implémentation des modèles de taux occupent une partie très importante dans la valorisation des produits financiers. Nous étions intéressés par la méthode de calibration et de modélisation du modèle Gaussien G2++ à deux facteurs. A cause des limites des modèles à un seul facteur, nous avons estimé que le modèle à deux facteurs peut améliorer la capacité de modélisation des modèles de taux.

Nous avons commencé par la simulation des taux courts et le calcul des prix des caplets, puis nous avons calibré les paramètres du modèle en minimisant l'écart quadratique entre les prix de marché et les prix calculés par le modèle G2++. Les résultats de cette simulation sont très acceptables et légèrement mieux que les résultats obtenus par le modèle à un seul facteur (par exemple : HW1). Ce modèle nous semble assez robuste pour modéliser des taux courts.