

ECOLE POLYTECHNIQUE

Modèles des Taux d'intérêt

Bachir EL KHADIR
June 23, 2015

CONTENTS

1	Préliminaires sur les taux d'intérêts	4
1.1	Définition	4
1.2	Mesures équivalentes	4
1.3	Produits financiers d'intérêts	7
2	Les différents modèles des taux d'intérêts	9
2.0.1	Le modèle à deux facteurs	10
2.0.2	Approximation de la solution par un arbre binomial	12
2.0.3	Améliorations	13
3	Résultats	18
3.0.4	Performance	18
4	Application: calibration et pricing	20
4.0.5	Calibration du drift	20
4.0.6	Méthode de calibration de la surface - Méthode d'optimisation	21

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon stage et qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce rapport.

Tout d'abord, j'adresse mes remerciements à mon professeur, Mr Stefano De Marco de l'Ecole Polytechnique qui m'a beaucoup aidé dans ma recherche de stage et ma permis de postuler dans cette entreprise. Son écoute et ses conseils m'ont permis de cibler mes candidatures et de trouver ce stage me correspondait totalement.

Je tiens à remercier vivement mon maitre de stage, Mr John Paul Barjaktarevic, responsable du service Y au sein de la banque JP Morgan, pour son accueil, le temps passé ensemble et le partage de son expertise au quotidien. Grâce aussi à sa confiance j'ai pu m'accomplir totalement dans mes missions avec son aide précieuse dans les moments les plus délicats.

Je remercie également toute l'équipe "rates exotic" pour leur accueil, leur esprit d'équipe.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont conseillé et relu lors de la rédaction de ce rapport de stage : ma famille, mon amie Julie B camarade de promotion.

INTRODUCTION

J'ai fait mon stage a JP Morgan equipe exotic rates. La plus grosse partie du travail: trouver le bon modele pour pricer un produit et le calibrer au marche

L'interêt que porte les banques aux produits exotiques a considérablement augmenté au cours des dernières années. Plusieurs modèles ont été développés pour refléter au mieux le comportement des marchés financiers. Le département au sein duquel j'ai effectué mon stage s'occupait des produits basés sur les taux d'intérêt. Dans ce domaine, une propriété appréciable est le fait qu'ils possèdent un nombre de paramètres suffisant pour être calibrés parfaitement au prix observable dans la réalité, sans pour autant "overfitter" l'échantillon disponible. En effet, depuis la crise, le marché des taux a connu des changements radicaux, la possibilité d'observer des taux négatifs en est un exemple.

Un produit en particulier n'a cessé de gagner en notoriété: les cancelables spread options. Ma mission de stage était de comprendre les modèles existants et leurs implémentations, comprendre leurs limites, et essayer de trouver des améliorations.

Dans la littérature, il existe différents modèles Hull white modèle 1F et 2F. Motivation C'est la première implémentation de WH à 2F avec des paramètres variant avec le temps

- Dans une première partie je présenterai quelques définitions essentielles à l'étude des taux d'intérêts, ainsi que les produits financiers principaux utilisés pour la calibration des modèles.
- Dans la deuxième partie modèle existant dans la littérature, pk 2F? Implémentation, calibration Conclusion

CHAPTER 1

PRÉLIMINAIRES SUR LES TAUX D'INTERÊTS

1.1 DÉFINITION

Definition 1. On dénote le prix de zéro coupon forwardé $Z(T, S)$ le montant qu'il faut investir à dans un instrument risque-neutre au temps T pour obtenir une unité de monnaie au temps S .

Definition 2. On définit $f(t, T)$ le taux d'intérêt instantané forward à la date t pour une maturité T la quantité

$$f(t, T) := -\frac{\delta}{\delta T} \log Z(T, S)$$

Definition 3. La courbe de rendement ou la yield curve $L(t, T)$ On appelle courbe des taux ou structure par terme des taux la fonction associant à une maturité T un taux R , L ou Y . De telles courbes sont construites à partir des prix d'obligations observés sur les marchés étudiés.

Definition 4. Le taux instantané $r_t = \lim_{T \rightarrow t} f(t, T)$

Definition 5. Le taux d'interet cumulé

le taux r_t n'est pas un produit échangé sur le marché que l'on peut mettre en portefeuille. On ne peut donc pas construire de couverture d'un produit donné de la même manière que dans un modèle d'action, et ce malgré la similitude des modèles mathématiques.

1.2 MESURES ÉQUIVALENTES

Nous nous plaçons dans le cadre d'une économie à temps continu, qui admet une espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, avec $K + 1$ actifs tradables, que nous appellerons

actifs de base, dont le prix est donné par $(S_t = (S_t^0, \dots, S_t^K))_t$. Dans toute la suite nous confondons l'actif et son prix. S^0 étant l'actif sans risque, qui évolue donc au temps sans risque

$$dS_t^0 = r_t S_t^0 dt$$

ie

$$S_t^0 = e^{-\int_0^t r_s ds}$$

Par définition, nous connaissons le prix des actifs $K + 1$, dans la prochaine section nous détaillerons la procédure de pricing de produits plus compliqués.

PRINCIPE DE PRICING

A travers les $K + 1$ actifs de base, nous construisons des produits plus complexes. Le prix de ce dernier est donc intimement lié à la possibilité de trouver une stratégie auto-financée qui le réplique. Commençons d'abord par définir ce qu'est une stratégie auto financé.

Definition 6. • Une stratégie est une processus $(\Phi_t = (\Phi_t^0, \dots, \Phi_t^K))_t$ localement borné et adapté à la filtration \mathcal{F} .

- La valeur associé à cette stratégie est donné par $V_t(\Phi) = \langle \Phi_t, S_t \rangle$.
- Une stratégie est auto financée sir $dV_t = \Phi_t dS_t$

Une hypothèse souvent utilisée dans le cadre de la finance de marché est l'absence d'arbitrage. Une opportunité d'arbitrage est la possibilité d'investir 0 aujourd'hui, et recevoir, avec probabilité non nulle, un montant positive dans le future. En d'autres termes, l'absence d'arbitrage signifie que si Φ est une stratégie auto financée telle que $V_0(\Phi) = 0$, alors $\mathbb{P}(V_T(\Phi) > 0) = 0$. Ceci nous permettra de valoriser des produits complexes en répliquant leur payoff par une combinaison linéaire de produits simple dont le prix est connue.

Une deuxième hypothèse que nous admettrons dans la suite est la complétude du marché: Tout les produits utilisés seront considérés disponible à tout moment et en quantité abondante (liquide), ie à chaque instant t , pour tout payoff H , il existe une stratégie autofinancée associée Φ qui vérifie $V_t(\Phi) = H$. Nous ne traiterons pas le cas des produits illiquide. Ceci est justifié, le marché des taux étant l'un des plus gros en volume dans le monde.

Nous pouvons montrer(*) que ces hypothèse sont équivalent à l'existence d'une mesure de probabilité risque neutre Q unique sous laquelle le prix actualisé de tous les produits tradables sont des martingales. ie si un on note H_t le prix à l'instant t d'un produit financier, alors

$$H_t = E^Q \left[\frac{H_s}{S_t^0} | \mathcal{F}_t \right] = V_t(\Phi)$$

En particulier, le prix d'un zéro coupon qui paye 1 à l'instant T est donné par

$$P(t, T) := E^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \right]$$

Nous pouvons interpréter le ratio $\frac{H_s}{S_s^0}$ comme étant le nombre de H par unité de discount factor stochastique S^0 . Le discount factor est appelé dans ce cas numéraire. Nous verrons maintenant que nous pouvons choisir un autre numéraire plus adapté au produit que nous voulons pricer. En effet le changement de numéraire préserve la propriété d'autofinancement d'un portefeuille.

Definition 7. Un numéraire est tout actif financier ne payant pas de dividendes

Definition 8. Mesure de probabilité équivalente.

Supposons qu'il existe un numéraire $(M_t)_{t \geq 0}$ et une mesure martingale équivalente Q^M telle que le prix de chaque actif actualisé par le processus M soit une Q^M -martingale.

$$\frac{S_t^i}{M_t} = E^{Q^M} \left[\frac{S_T^i}{M_T} | F_t \right]$$

Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un numéraire.

Alors il existe une mesure de probabilité Q^N telle que le prix de chaque actif actualisé par le processus N soit une Q^N -martingale, i.e.

$$\frac{S_t^i}{N_t} = E^{Q^N} \left[\frac{S_T^i}{N_T} | F_t \right]$$

où Q^N est définie par:

$$E^{Q^N} [H] = E^{Q^M} \left[\frac{M_T / N_T}{M_0 / N_0} H \right]$$

Example: Mesure forward neutre

Le bond zéron coupon dont la maturité concide avec la date du payment d'un produit financier peut servir de numéraire. Nous appellerons la mesure de probabilité associé Q_T .

Dans ce cas $P(T, T) = 1$, et par conséquent il suffit de calculer l'espérance du payoff (divisé par 1) sous Q_T . Si nous notons le payoff de ce produit H , alors son prix à l'instant 0 est donné par

$$P(t, T) E^{Q_T} [H | F_t]$$

Pour que celà nous soit utile, il faut que la dynamique de H soit connue sous Q_T . Ceci est vérifié pour les contrats payant un taux d'intérêt sur un nominal fixe. En effet $(F(t; S, T))_t$ est une martingale

$$E^{Q_T} [F(t; S, T) | F_u] = F(u; S, T)$$

proof

1.3 PRODUITS FINANCIER D'INTERÊTS

Le développement de la section précédente nous sera utile pour pricer les dériver des taux. Considérons le cas particulier d'un call européen à maturité T , strike K , dont le sous-jacent est bond zéro coupon qui expire à l'instant S . Le payoff d'un tel contrat est connu: $(P(T, S) - K)^+$. Son prix à un instant antérieur t est

$$ZBC(t, T, S, K) := E^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (P(T, S) - K)^+ | F_t \right]$$

Il est plus pratique de considérer la forward mesure, sous laquelle le prix du call s'écrit

$$ZBC(t, T, S, K) = P(t, T) E^{Q_T} [(P(T, S) - K)^+ | F_t]$$

De même, pour un put

$$ZBP(t, T, S, K) = P(t, T) E^{Q_T} [(K - P(T, S))^+ | F_t]$$

Cette écriture nous rappelle la formule de blackscholes pour les options sur les actions.

Definition 9. Swap: Un swap est un contract entre deux parties qui s'engagent à échanger des flux financiers pendant une durée et à une fréquence déterminées. la plupart du temps, ces flux sont déterminé comme étant l'intérêt sur un notionnel K .

$$N \sum D_t^{T_i} \tau_i (L(T_{i-1}) - K)$$

Definition 10. Caplet/floorlet: Un caplet/floorlet peut être vu comme un call/put européenne sur un Son payoff est le suivant

$$\tau(L(T, S) - K)^+$$

$$Cpl(t, T, S, \tau, X) = E^Q \left[e^{-\int_t^S r_s ds} \tau(L(T, S) - K)^+ | F_t \right] \quad (1.3.1)$$

$$= E^Q \left[e^{-\int_t^S r_s ds} P(t, T) \tau(L(T, S) - K)^+ | F_t \right] \quad (1.3.2)$$

$$= E^Q \left[e^{-\int_t^S r_s ds} (1 - (1 + X\tau)P(t, T))^+ | F_t \right] \quad (1.3.3)$$

$$= (1 + X\tau) E^Q \left[e^{-\int_t^S r_s ds} \left(\frac{1}{1 + X\tau} - P(t, T) \right)^+ | F_t \right] \quad (1.3.4)$$

$$= (1 + X\tau) ZBP(t, T, S, \frac{1}{1 + X\tau}) \quad (1.3.5)$$

Definition 11. Cap/floor: Un cap/floorlet peut être vu comme une somme de caplets

$$N \sum D_t^{T_i} \tau_i (L(T_{i-1}) - K)^+$$

La forme des payoff indique que le cap permet de protéger son détenteur d'une hausse des taux Libor, et symétriquement que le floor protège d'une éventuelle baisse de ces taux.

nominal $N = 1$

$$ZBP = \mathbb{E}^{Q_T}((P(t_{i-1}, t_i) - X)^+)$$

Si $P(t, T)$ admet une loi log normal par rapport à la mesure forward neutre Q_T , on peut appliquer black scholes. Dans la pratique, les trader sont habitués à raisonner en terme de vol bs plutôt qu'en terme de prix. Nous verrons plus loin que la dynamique $P(t, T)$ est plus compliquée, mais cette méthode permet néanmoins d'avoir une correspondance entre prix et vol.

Definition 12. Swaption

$$N(\sum D_t^{T_i} \tau_i (L(T_{i-1}) - K)^+)$$

CHAPTER 2

LES DIFFÉRENTS MODÈLES DES TAUX D'INTERÊTS

Nous avons vu dans la partie précédente que pour trouver un prix aux dérivés de taux, il faut donner la dynamique qui régit le sous-jacent, dans notre cas *BLA BLA BLA* Plusieurs approches sont possibles. Nous pouvons modéliser directement le forward:

$$dL = \sigma L^\beta dW_t$$

L'approche historique, décrit la dynamique du taux d'intérêt instantané comme étant "drivé" par un driver à une seule dimension. C'est l'approche que nous adopterons ici. Ceci est pratique dans le seul où les prix de zéro coupon et le taux sont directement disponible dans le modèle. De plus, certains produits financiers dépendent directement la courbe de rendement. Nous avons vu précédemment que la donnée du taux instantané r_t permet de caractériser complètement cette courbe.

Il est donc important que la dynamique de r_t soit à la fois riche pour pouvoir décrire la courbe de rendement observée dans le marché, et suffisamment simple pour que le temps nécessaire pour le calcul ne soit trop long.

Nous pouvons considérer que la courbe de rendement varie dans un espace vectoriel de dimension infinie. Toute tentative de la caractériser par un nombre fini de paramètre réels est donc vouée à l'échec.

Le modèle de Hull White a été introduit en 1990. Un des atouts majeure de ce modèle est la possibilité de simuler la dynamique de r_t par un arbre trinomiale. Ceci étant essentiel pour pricer des produits du type bermuda options

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t$$

$$r_t = e^{-\alpha t} r_0 + integral...$$

2.0.1 LE MODÈLE À DEUX FACTEURS

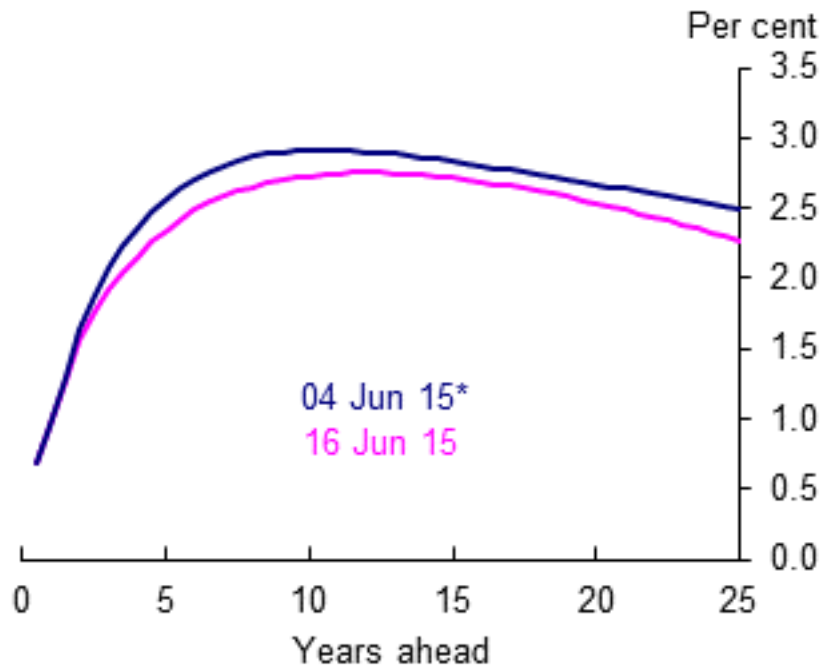
MOTIVATION

Considérons un produit E dont le payoff dépend du spread entre un taux d'intérêt cumulé entre 0 et T_1 pour le premier et 0 et T_2 pour le second. E dépend donc de la distribution jointe des deux taux.

La figure suivante, tiré du PDF *bla bla bla* reproduit une matrice de corrélation par terme de variations quotidiennes de taux zéro-coupon. Il apparaît très clairement que des taux de maturités proches, comme le taux de maturité 3 ans et celui de maturité 4 ans, sont très corrélés, tandis que des taux de maturité éloignées (par exemple le taux 1 mois et le taux 10 ans) le sont très peu:

	1M	3M	6M	1A	2A	3A	4A	5A	7A	10A
1M	1									
3M	0.999	1								
6M	0.908	0.914	1							
1A	0.546	0.539	0.672	1						
2A	0.235	0.224	0.31	0.88	1					
3A	0.246	0.239	0.384	0.808	0.929	1				
4A	0.209	0.202	0.337	0.742	0.881	0.981	1			
5A	0.163	0.154	0.255	0.7	0.859	0.936	0.981	1		
7A	0.107	0.097	0.182	0.617	0.792	0.867	0.927	0.97	1	
10A	0.073	0.063	0.134	0.549	0.735	0.811	0.871	0.917	0.966	1

Dans la réalité, on observe sur les marchés que les taux à différentes maturités ne sont pas corrélés. Si on regarde le taux 2Y et 10Y



LIMITE DES MODÈLE À UN SEUL FACTEUR

Montrons dans un premier temps pourquoi un modèle à un seul facteur n'est pas suffisant pour pricer ces produits qui dépendent non seulement de la distribution de chaque courbe de taux, mais aussi de leur corrélation.

La dynamique de r_t dans le modèle de Vasicek est donné par

$$r_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

La formule analytique du bond zéro coupon est donc

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r_t)$$

En particulier le taux d'intérêt cumulé est une donné par une transformation affine du taux instantané:

$$R(t, T) = \frac{\ln P(t, T)}{T - t} =: a(t, T) + b(t, T)r_t$$

Le payoff du produit E est donc fonction de la distribution jointe de $R(0, T_1)$ et $R(0, T_2)$.
Sauf que:

$$\text{Cor}(R(0, T_1), R(0, T_2)) = 1$$

On en déduit qu'un choc à r_t agit de la même manière sur toutes les courbes.

Un modèle à un seul facteur ne capture pas ce comportement. Essayons de pallier à ce problème en rajoutons un facteur à ce modèle.

Dans cette section nous considérons un modèle où le taux d'intérêt instantané est donné par une somme de deux facteurs gaussiens centrés et corrélés. Dans ce modèle doit sa popularité au fait que le prix des bond zéron coupon admet une formule exact, ainsi que le prix des caps et des floors.

$$\begin{aligned} dx &= -\alpha x(t)dt + \sigma dW_t^1 \\ dy &= -\beta y(t)dt + \nu dW_t^2 \\ dr &= x + y \end{aligned}$$

2.0.2 APPROXIMATION DE LA SOLUTION PAR UN ARBRE BINOMIAL

L'équation (*) s'intègre simplement en:

$$x(t) = x(s)e^{-\alpha(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u^1$$

$$y(t) = x(s)e^{-\beta(t-s)} + \nu \int_s^t e^{-\beta(t-u)} dW_u^2$$

CONSTRUCTION

Cette méthode a été d'abord suggérée par Hull-White (1994)

On discrétise l'intervalle $[0, T]$ avec les temps $T_i = i\Delta t$, où $\Delta t = \frac{T}{N}$. Nous donnons une approximation de la dynamique processus x et y , par une suite de variable de discretisé $((\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \approx (x(i\Delta t), y(i\Delta t)))_i$. Pour cela nous calculerons les deux premier moment de (x, y)

$$E(x(t + \Delta t)|F_t) = x(t)e^{-a\Delta t}$$

$$V(x(t + \Delta t)|F_t) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t})$$

$$\text{Cov}\{x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)|F_t\} = \frac{\sigma\nu\rho}{a+b}(1 - e^{-(a+b)\Delta t})$$

Pour que le $((\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)_i$ et $(x(i\Delta t), y(i\Delta t))_i$ aient les même moment, la loi de $((\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ est donnée par:

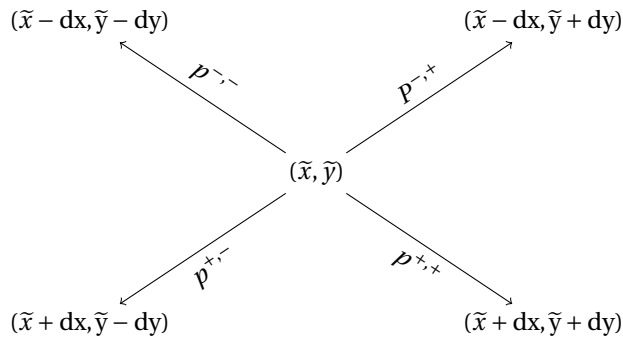
$$P(\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + a dx, \tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + b dy | \tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = p^{a,b}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$$

où

- $a, b \in \{-1, +1\}$
- p est donnée par:

$$p^{a,b}(x, y) = \frac{1 + a\rho}{4} - b \frac{\beta\sigma y + a\sigma\nu x}{4\sigma\nu} \sqrt{\Delta t}$$

Le schéma suivant résume les transitions du processus (\tilde{x}, \tilde{y}) ;



Nous appelons slice l'ensemble des noeuds qui sont équi distant de la racine. Une slice représente la distribution du processus $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ à un instant donné.

Le pricing se fait en deux temps:

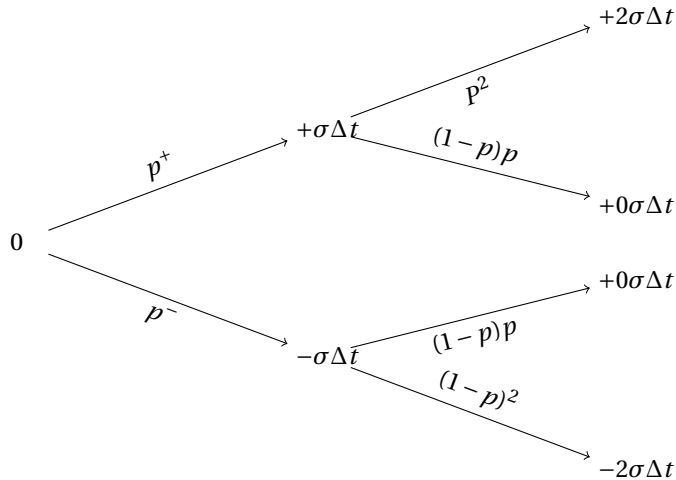
- On diffuse le processus (\tilde{x}, \tilde{y}) dans l'arbre en prenant soin de calculer la probabilité de transition d'un état à un autre
- On "drawback" dans l'arbre en partant de la date à laquelle on fait le payoff, en ***discountant***

PETITE DISCUSSION SUR LA COURBE D'ACTUALISATION VS LA COURBE DE DIFFUSION

Avant la crise de 2008, il était d'usage courant que les banques considèrent le taux Libor comme reflétant la réalité du marché de crédit inter-bancaire. Le taux est publié quotidiennement par taux réel auquel les banques sont prêtes à se prêter de l'argent est appelé taux OIS (Overnight Index Swap). Pendant la crise, le spread entre LIBOR et OIS était si grand qu'il devenait impossible à ignorer. Depuis tous les modèles de taux intègrent deux courbes, une pour la diffusion (LIBOR par exemple) et une autre pour l'actualisation (OIS). Dans le développement de cet article, nous ignorons cette différence.

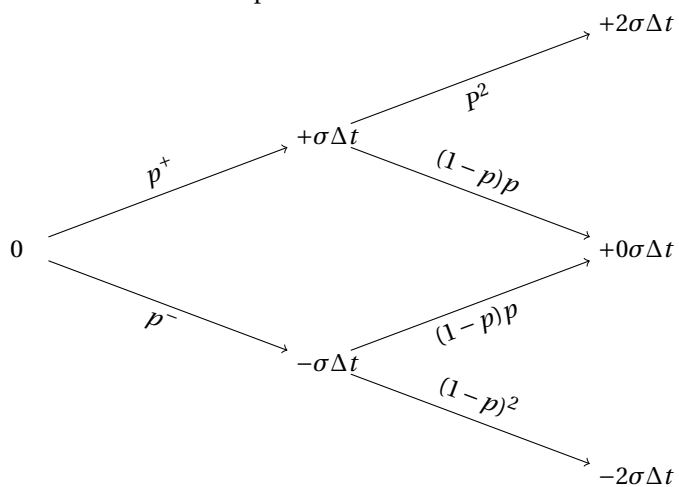
2.0.3 AMÉLIORATIONS

Si nous implémentons l'arbre de façon naïve, le nombre de noeuds augmente de façon exponentielle en fonction du nombre de pas de temps. En pratique ceci est problématique et conduit vite à une saturation de mémoire. Dans l'exemple simplifié ci-dessus nous traçons l'arbre de diffusion du premier facteur $(x(t))$. A chaque pas de temps le nombre de noeuds double, ie pour n pas de temps, nous nous retrouvons avec 2^n noeuds pour un facteur, ou 4^n pour deux.

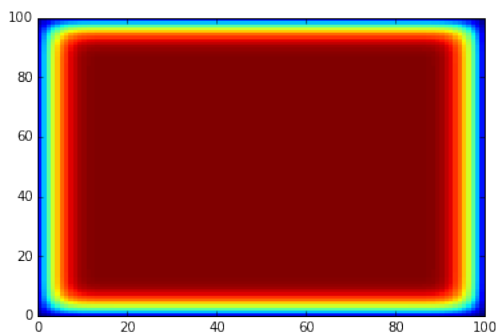


Remarquer que $(x, y)_i$ tilde est un processus markovien homogène à valeurs discrètes nous permet d'optimiser la simulation de l'arbre. En effet, il nous suffit de

calculer la table de transition une fois au début du programme et de la réutiliser pour avancer/reculer dans le temps.



Voir l'annexe pour l'implémentation en python. Ci-dessous une visualisation graphique d'une slice.



Une autre amélioration possible est de trouver une formule analytique pour certain produits. En effet, si nous reprenons l'exemple d'un cancellable spread option 2Y10Y dont la maturité est dans 5 ans, nous devrions normalement construire l'arbre jusqu'en 2030 pour avoir le taux 10Y en 2020. Nous pouvons éviter cela en fournissant directement une formule exacte pour les zéro coupons.

FORMULE EXACTE

Cette partie est fortement inspiré de *BLA BLA BLA*

On rappelle l'expression du prix du bond zéron coupon sous la mesure risque neutre Q

$$P(t, T) = E^Q \left[e^{-\int_t^T r_u du} \right]$$

Notons $I(t, T) := \int_t^T x(u) + y(u) du$, et montrons que conditionnellement à l'information accumulé jusqu'au temps t , c'est une variable normale d'esperance $M(t, T)$ et de variance $V(t, T)$ où:

$$M(\alpha, t, T) := \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} \quad (2.0.1)$$

$$V(\alpha, \sigma, \beta, \nu, t, T) := \frac{\sigma \nu}{\alpha \beta} \left[T - t + \frac{e^{-\alpha(T-t)} - 1}{\alpha} + \frac{e^{-\beta(T-t)} - 1}{\beta} - \frac{e^{-(\alpha+\beta)(T-t)} - 1}{\alpha + \beta} \right] \quad (2.0.2)$$

$$V(t, T) := V(\alpha, \sigma, \alpha, \sigma, t, T) + V(\beta, \nu, \beta, \nu, t, T) + 2\rho V(\alpha, \sigma, \beta, \nu, t, T) \quad (2.0.3)$$

Proof. Par simple calcul:

$$\int_t^T x(u) du = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} + \frac{\sigma}{\alpha} \int_t^T [1 - e^{-\alpha(T-t)}] dW_u^1$$

$$E^Q \left[\int_t^T x(u) du \right] = M(\alpha, t, T) x(t)$$

$$Var(\int_t^T x(u) du) = \left(\frac{\sigma}{\alpha} \right)^2 E^Q \left[\int_t^T [1 - e^{-\alpha(T-t)}]^2 du \right] = V(\alpha, \sigma, \alpha, \sigma, t, T)$$

(isométrie d'ito) □

Nous avons donc

$$P(t, T) = exp \left(- \int_t^T r_u du + \frac{1}{2} Var \left(- \int_t^T r_u du \right) \right) \quad (2.0.4)$$

$$= exp \left(- M(\alpha, t, T) x(t) - M(\beta, t, T) y(t) + \frac{1}{2} V(t, T) \right) \quad (2.0.5)$$

Nous utiliserons cette formule directement dans le pricer, ce qui nous évitera de construire l'arbre jusqu'à la date de maturité du dernier zéro coupon.

AJOUT D'UN SHIFT DÉTERMINISTE

Le modèle, tel que développé jusqu'à présent, présente un inconvénient majeur: à tout instant, r_t est symétriquement distribué autour de 0. Ceci ne correspond pas à la réalité, puisque les taux négatifs ne sont observés dans les marchés que dans de très rares circonstances (en Europe après crise inter-bancaire de 2009, Au Japon après des années de déflation). Une autre raison est que le modèle ne permet pas de retrouver les prix des bonds zéro coupon.

Pour pallier à ce problème, nous rajoutons une fonction ϕ au taux r_t . La fonction déterministe $\phi(t)$ permet de fitter exactement la courbe de taux observée. Dans la partie "Calibration nous" nous verrons comment calculer cette fonction à partir des prix de bonds zéro coupon.

En prenant en compte ce changement, le prix du bond zéro coupon devient:

$$P(t, T) = E^Q [e^{-r_t + \phi(t)}]$$

Nous prendrons soin de modifier l'étape de "draw back" dans l'arbre en changeant le facteur d'actualisation.

Le processus est markovien

OPTIMISER LA TAILLE DES SLICES

La slice que nous avons construite est rectangulaire. La plage que nous autorisons à (x, y) doit logiquement dépendre de leur corrélation.

$$dW_t := (dW_t^1, dW_t^2)^T = A(t)dZ_t$$

où

$$A(t) := \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ \rho\sigma & \sqrt{1-\rho^2}\sigma \end{pmatrix}$$

Z un mouvement brownien 2D à composantes indépendantes.

A l'instant t_n ,

$$x(t_{n+1}) := x_i(t_n)(1 - \alpha\Delta) + \dots Z_1$$

$$y(t_{n+1}) := y_i(t_n)(1 - \beta\Delta) + \dots Z_1 + \dots Z_2$$

Les limites de l'arbre sont définies comme étant les bords de l'ellipsoïde décrit par l'équation:

$$Z_1^2 + Z_2^2 = n_\sigma^2$$

Où n_σ dénote le degré de déviation qu'on autorise.

Comment connecter les slices entre elles

PARAMÈTRES DÉPENDANT DU TEMPS

Dans la partie précédente, les paramètres σ ν α β étaient constantes. Considérer des variables qui dépendent du temps permet au modèle plus de flexibilité pour fitter les données de marché. Voir la partie calibration.

Deux problèmes cependant:

- Le calcul est beaucoup plus long,
- possibilité de sur fitter les données historique du marché, ce qui affecte négativement le pouvoir prédictive du modèle

<Calcul>

On vérifie expérimentalement que le gain est significatif



CHAPTER 3

RÉSULTATS

Une fois toutes ces modifications prises en compte, nous pouvons

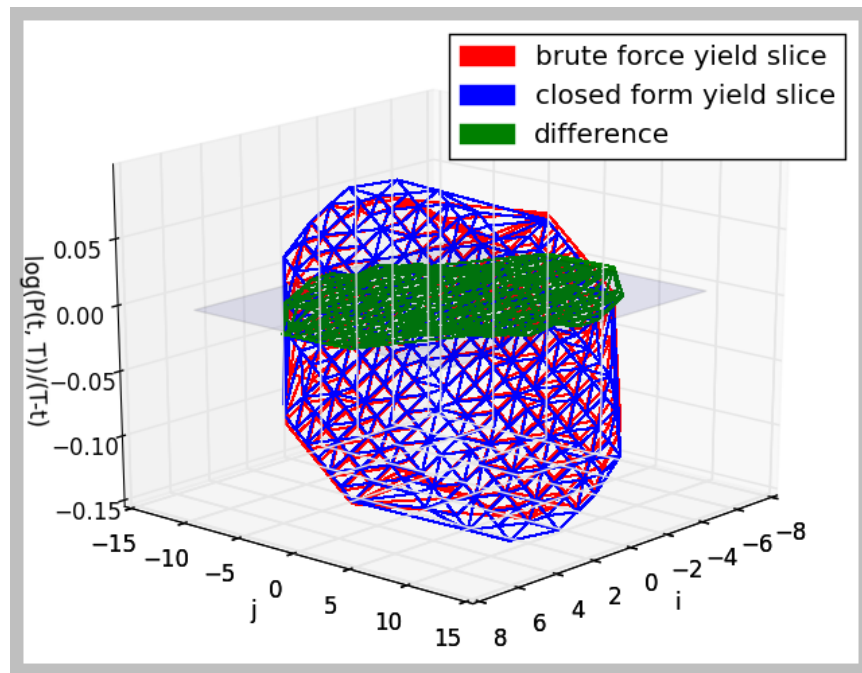


3.0.4 PERFORMANCE

L'arbre ainsi construit est puissant dans le sens où il permet de pricer quasiment tous les instruments dont on a besoin en pratique. Cependant ce modèle souffre de quelques défaut observé en pratique.

- De par sa construction, l'arbre est bornée. Ce dernier ignore donc le comportement des driver loin de leurs moyenne. Si ceci n'est pas un problème dans le cadre de variable normale (poids centré), ceci peut engendrer des erreurs non négligeables quand les variables ont des distribution à queues épaisses.
- Discrétisation des processus
- probabilités négatives

Dans le cas des obligations zéro coupon, nous disposons d'une formule exacte pour calculer les prix et les comparer à celles produites par l'arbre. Le schéma suivant montre la slice produite par l'arbre (brute force) et celle produite par la formule exacte (closed form)



CHAPTER 4

APPLICATION: CALIBRATION ET PRICING

Notre modèle possède à un certains nombres de paramètres libre que nous devons fixer. Pour cela, nous choisissons un certain nombre d'actifs tradables dans le marché, dont le prix est donc connus, que nous appellerons benchmark. Nous essayerons ensuite de trouver les paramètres qui reproduisent le mieux ces prix là. Cette procédure est appelé calibration. Une question naturelle qui se pose est de savoir quels actifs choisir pour la calibration. Il existe plusieurs réponses possibles, en pratique on essaye de trouver un produit à la fois simple et liquide.

Dans notre cas il est indispensable que le modèle puissent retrouver les prix des bond zéro coupons. Idéalement notre benchmarks est une ensemble de caplets. Les caplets ne sont pas tradés en tant que tel sur le marché, nous n'avons accès qu'à des caps. => Stripping

Le modèle à 2F permet de caputer le hump de la courbe de rendement Le nombre de paramètre est fini (5) => pas de overfitting

- $h(t)$ pour reconstruire la yield curve $\sigma\rho v$ pour
- matcher la surface

4.0.5 CALIBRATION DU DRIFT

Le modèle gaussien à deux facteurs est calibré sur la courbe $P^M(0, T)$, $T > 0$ de prix d'obligations zéro-coupon observés sur le marché si et seulement si ϕ est définie par :

$$P^M(0, T) := e^{\int_0^T \phi(s) ds + Mx(T) + My(T) + \frac{1}{2}V}$$

Ce qui est équivalent à

$$\int_t^T \phi(s) ds := \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} e^{-\frac{1}{2}(V(0, T) - V(0, t))}$$

Cependant, l'arbre ainsi simulé ne redonnera par exactement les prix des obligations zéro-coupon $P^M(0, T_i)$. En effet, dans un arbre le taux simulé est considéré constant sur la période $[T_i, T_{i+1}]$, donc tout se passe comme si l'arbre simulait en fait un taux zéro-coupon R . En d'autres termes, le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité T_1 vaut $P(0, T_1) = e^{-R(0, T_1)\Delta t}$ mais ce prix calculé directement sur l'arbre s'écrit $e^{-r_0\Delta t}$. La figure ci-dessus illustre la différence entre les prix théorique et les prix calculés l'arbre:



On propose donc ici de calibrer récursivement les ϕ_i afin de retrouver les prix des obligations zéro-coupon directement sur l'arbre. Π_j state price (arrow debrew) (paye 1 si le noeud (t_n, j) est atteint.

$$D_j(h_n) := \frac{1}{1 + r(t_n)(t_{n+1} - t_n)}$$

Le discount factor

$$\Pi_j(t_{n+1}) = \sum_j \Pi_j(t_n) p_{j,j'}(t_n) D_{j'}(h_n)$$

$$\sum_j \Pi_j D_j(h_n) = P(0, t_{n+1})$$

Developement de taylor => trouver h_n

4.0.6 MÉTHODE DE CALIBRATION DE LA SURFACE - MÉTHODE D'OPTIMISATION

Les traders préfèrent bien avoir un contrôle fin sur le modèle qui reflète leur sensation sur le marché. Pour cela, le modèle doit être paramétrable, les paramètres doivent avoir un sens/être compris par les traders.

Au lieu d'avoir un paramètre par maturité, G2++ il y a 5 paramètres

- On s'autorise un intervalle pour les paramètres
- On utilise une grille (définie par le pas) pour définir les valeurs autorisées pour chaque paramètre. (Tradeoff entre pas petite grande précision et temps de calculs)
- On calcule le prix des caplets associés
- On choisit les paramètres qui reflètent le mieux les prix du marché.

Maintenant que nous connaissons la dynamique de $P(t, T)$, nous pouvons fournir une formule explicite pour le prix des caplets.

En effet, sous la mesure forward neutre Q_T , l'équation vérifiée par (x, y) est:

$$\begin{aligned} dx &= -\alpha x(t)dt - \text{Drift}_x + \sigma dW_t^1 \\ dy &= -\beta y(t)dt - \text{Drift}_y + \nu dW_t^2 \end{aligned}$$

qui a donc pour solution:

$$\begin{aligned} x(t) &= -\alpha x(t)dt - \text{Drift}_x + \sigma dW_t^1 \\ y(t) &= -\beta y(t)dt - \text{Drift}_y + \nu dW_t^2 \end{aligned}$$

Nous rappelons l'expression du caplet sous la mesure Q_T

$$ZBC = E^{Q_T} [1]$$

$P(t, T)$ admet une distribution normale sous Q_T conditionnellement à F_t , Le prix théorique:

$$ZBC(t, T, S, K) = -P(t, T)N(d_1) + P(t, T)KN(d_2)$$

$$d_{-+} := \frac{\ln \frac{KP(t, T)}{P(t, S)}}{\Sigma} + \frac{1}{2}\Sigma$$

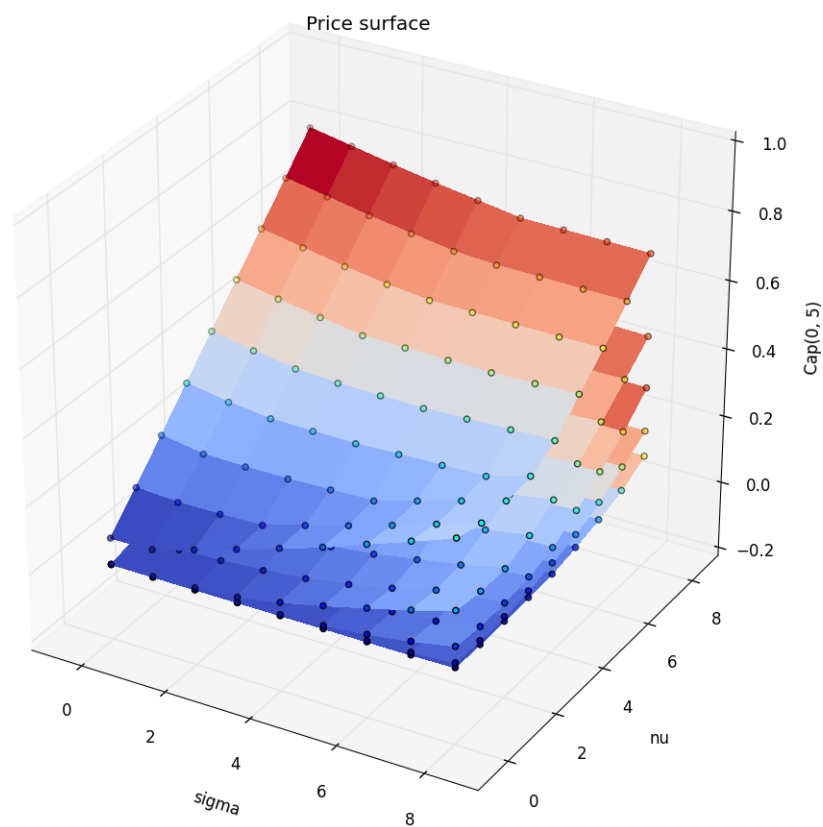
$$\Sigma^2 := \Sigma^{x,x} + \Sigma^{y,y} + 2\rho\Sigma^{x,y}$$

$$\Sigma^{x,y} := \sigma\nu M^x(t, T)M^y(t, T) \frac{1 - e^{(\alpha+\beta)(T-t)}}{\alpha + \beta}$$

On a 5 paramètres à optimiser On calibre les caplets

Les caplets ne sont pas directement disponibles sur les marchés On calibre les swaptions/caps

- Le problème de calibration est un problème d'optimisation Courbe de vol implicite :
- minimisation de l'erreur L2



UN MOT SUR LE MULTI THREADING - GPU?

La méthode de calibration proposée ci-dessus à l'avantage d'être facilement parallélisable. Les calculs aux différents points de la grille sont indépendant.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from multiprocessing import Pool
import multiprocessing
import bs
```



```
directions = [ (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1) ]
```

```
class TreePricer:
```

```
    def __init__(self, sigma=.02, nu=.03, rho=0.5, draw=False):
        self.sigma = sigma
        self.nu = nu
        self.rho = rho
        self.a = 0.02
        self.b = 0.01
        self.Dt = 1. / 365
        self.sqrtDt = np.sqrt(self.Dt)
        self.dx = self.sigma * self.sqrtDt
        self.dy = self.nu * self.sqrtDt
        self.draw = draw
```

Annexe 2:

MODEL

$$dx = -\beta_x x dt + \sigma_x dW_1$$

$$dy = -\beta_y y dt + \sigma_y dW_2$$

$$r = h + x + y$$

$$\rho = \langle dW_1, dW_2 \rangle$$

In the following, we consider only the case of one factor model.

VOLATILITY PIECE WISE CONSTANT

$$[0, T] = \cup_i T_i = \cup_i [t_i, t_{i+1}]$$

$$\sigma(t) = \sum_{t_i < t} 1_{\{t \in T_i\}} \sigma_i$$

$$\beta(t) = \sum_{t_i < t} 1_{\{t \in T_i\}} \beta_i$$

TIME METRIC DISCUSSION

The driver $x(t)$ stops diffusing/reverting during non trading days, but the discounting takes place during those days (we call this time metric Act365) . In order to account for this, we multiply α and σ by the ratio $\frac{dt}{d \text{ in the Act365 time metric}}$. This way, we will integrate all the variables according to the Act365.

INTEGRATION THE PDE IN THE 1F CASE

$$x(t) = \sum_{t_i < t} \sigma_i \int_{t_i}^{t \wedge t_{i+1}} e^{-a(t \wedge t_{i+1} - s)} dW_1(s)$$

If $Z(t, T)$ is the forward zero coupon price between the dates t and T then:

$$Z(t, T) = E \left[\exp \left\{ - \int_t^T h(u) + x(u) du \right\} \right]$$

To calculate the integrale of x between t_0 and t_f we decompose it to smaller intervals where the factor's parameters are constant. Then we can use the usual formula provided by Brigo - Mercurio

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} x(t) dt &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt \\ &= \sum_i \frac{1 - e^{-\beta_i(t_{i+1} - t_i)}}{\beta_i} x(t_i) + \frac{\sigma_i}{\beta_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (1 - e^{-\beta_i(t_{i+1} - u)}) dW_u \\ &= \sum_i \frac{1 - e^{-\beta_i(t_{i+1} - t_i)}}{\beta_i} e^{-\int_{t_0}^{t_i} \beta} x(t_0) \\ &\quad + \sum_i \frac{1 - e^{-\beta_i(t_{i+1} - t_i)}}{\beta_i} \int_{t_0}^{t_i} \sigma_u e^{-\int_u^{t_i} \beta} dW_u + \frac{\sigma_i}{\beta_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (1 - e^{-\beta_i(t_{i+1} - u)}) dW_u \\ &=: L(t_0, t_f) x(t_0) + V(t_0, t_f) \end{aligned}$$

$\int_{t_0}^{t_f} x(t) dt$ is a normal variable, therefore:

$$Z(t, T) = E \left[\exp \left\{ - \int_t^T h(u) + E(- \int_t^T x) - \frac{1}{2} Var(- \int_t^T x) \right\} \right]$$

Let's denote:

$$L(t_0, t_f) := \sum_i \frac{1 - e^{-\beta_i(t_{i+1} - t_i)}}{\beta_i} e^{-\int_{t_0}^{t_i} \beta} = \frac{E(\int_t^T x | F_{t_0})}{x(t_0)}$$

and

$$\begin{aligned}
V(t_0, t_f) &:= \sum_{i, t_0 \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t_f} \frac{1 - e^{-\beta_i(t_{i+1}-t_i)}}{\beta_i} \int_{t_0}^{t_i} \sigma_u e^{-\int_u^{t_i} \beta} dW_u + \frac{\sigma_i}{\beta_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (1 - e^{-\beta_i(t_{i+1}-u)}) dW_u \\
&= \sum_i \frac{1 - e^{-\int_{t_i}^{t_{i+1}} \beta}}{\beta_i} \int_{t_0}^{t_i} \sigma_u e^{-\int_u^{t_i} \beta} dW_u + \frac{\sigma_i}{\beta_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} 1 - e^{-\int_u^{t_{i+1}} \beta} dW_u \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u}{\beta_u} dW_u + \sum_i \int_{t_0}^{t_i} \frac{\sigma_u}{\beta_i} e^{-\int_u^{t_i} \beta} dW_u - \int_{t_0}^{t_i} \frac{\sigma_u}{\beta_i} e^{-\int_u^{t_{i+1}} \beta} dW_u - \frac{\sigma_i}{\beta_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\int_u^{t_{i+1}} \beta} du \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u}{\beta_u} dW_u + \sum_i \frac{\int_{t_0}^{t_i} \sigma_u e^{-\int_u^{t_i} \beta} dW_u - \int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma_u e^{-\int_u^{t_{i+1}} \beta} dW_u}{\beta_i} \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u}{\beta_u} dW_u + \sum_i \frac{K_i - K_{i+1}}{\beta_i} \quad \text{with } K_i = \int_{t_0}^{t_i} \sigma_u e^{-\int_u^{t_i} \beta} dW_u \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u}{\beta_u} dW_u + \sum_i \left(\frac{1}{\beta_i} - \frac{1}{\beta_{i+1}} \right) K_i \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u}{\beta_u} dW_u + \sum_{i=1..n} c_i K_i \quad \text{with } c_i = \frac{1}{\beta_i} - \frac{1}{\beta_{i-1}} \text{ and } c_n = \frac{1}{\beta_n}
\end{aligned}$$

We are interested in $Var(V(t_0, t_f)) = Var(\int_{t_0}^{t_f} x)$:

$$\begin{aligned}
Var(t_0, t_f) &:= var(V(t_0, t_f) | F_{t_0}) \\
&= < \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u}{\beta_u} dW_u, \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u}{\beta_u} dW_u > + 2 \sum_i c_i < K_i, \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u}{\beta_u} dW_u > + \sum_{i,j} c_i c_j < K_i, K_j > \\
&= \omega + 2 \sum_i c_i \alpha_i + \sum_{i,j} c_i c_j \gamma_{ij} \\
&= \omega + 2 \sum_i c_i \alpha_i + 2 \sum_{i < j} c_i c_j e^{-\int_{t_i}^{t_j} \beta} \gamma_i + \sum_i c_i^2 \gamma_i \\
&= \omega + 2 \sum_i c_i \alpha_i + 2 \sum_{i=1..n} \gamma_i \frac{c_i}{I_i} \left(\sum_{j=i+1..n} I_j c_j \right) + \sum_i c_i^2 \gamma_i \\
&= \omega + 2 \sum_i c_i \alpha_i + 2 \sum_{i=1..n} \gamma_i \frac{c_i}{I_i} (S_n - S_i) + \sum_i c_i^2 \gamma_i \quad \text{with } S_i = \sum_{j=0..i} I_j c_j
\end{aligned}$$

where $I_i := e^{-\int_0^{t_i} \beta}$ and:

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+1} &= e^{-\beta_i(t_{i+1}-t_i)} \alpha_i + \left(\frac{\sigma_i}{\beta_i} \right)^2 (1 - e^{-\beta_i(t_{i+1}-t_i)}) \\
\gamma_{i+1} &= e^{-2\beta_i(t_{i+1}-t_i)} \gamma_i + \frac{\sigma_i^2}{2\beta_i} (1 - e^{-2\beta_i(t_{i+1}-t_i)}) \\
\omega &:= \sum_i \left(\frac{\sigma_i}{\beta_i} \right)^2 (t_{i+1} - t_i)
\end{aligned}$$

(The following section gives more details about this calculations)

The last formula allow us to calculate the zero coupon bond price in linear time ($O(t_f - t_0)$)

CALCULATIONS

for $i < j$

$$\begin{aligned}
\gamma_{i,j} &:= \langle K_i, K_j \rangle \\
&= \langle \int_t^{t_i} \sigma_u e^{-\int_u^{t_i} \beta} dW_u, \int_t^{t_j} \sigma_u e^{-\int_u^{t_j} \beta} dW_u \rangle \\
&= e^{-\int_{t_i}^{t_j} \beta} \int_t^{t_i} (\sigma_u e^{-\int_u^{t_i} \beta})^2 du \\
&= e^{-\int_{t_i}^{t_j} \beta} \int_t^{t_i} \sigma_u^2 e^{-2\int_u^{t_i} \beta} du \\
&= e^{-\int_{t_i}^{t_j} \beta} \gamma_{i,i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{i+1} &:= \gamma_{i+1,i+1} \\
&= \int_t^{t_{i+1}} \sigma_u^2 e^{-2\int_u^{t_{i+1}} \beta} du \\
&= e^{-2\beta_i(t_{i+1}-t_i)} \gamma_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma_i^2 e^{-2\beta_i(t_{i+1}-u)} du \\
&= e^{-2\beta_i(t_{i+1}-t_i)} \gamma_i + \frac{\sigma_i^2}{2\beta_i} (1 - e^{-2\beta_i(t_{i+1}-t_i)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_i &:= \langle K_i, \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u}{\beta_u} dW_u \rangle \\
&= \langle \int_t^{t_i} \sigma_u e^{-\int_u^{t_i} \beta} dW_u, \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u}{\beta_u} dW_u \rangle \\
&= \int_t^{t_i} \frac{\sigma_u^2}{\beta_u} e^{-\int_u^{t_i} \beta} du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+1} &= e^{-\beta_i(t_{i+1}-t_i)} \alpha_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\sigma_u^2}{\beta_u} e^{-\beta_i(t_{i+1}-u)} du \\
&= e^{-\beta_i(t_{i+1}-t_i)} \alpha_i + \left(\frac{\sigma_i}{\beta_i}\right)^2 (1 - e^{-\beta_i(t_{i+1}-t_i)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega &:= \left\langle \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u}{\beta_u} dW_u, \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u}{\beta_u} dW_u \right\rangle \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\sigma_u}{\beta_u} \right)^2 du \\
&= \sum_i \left(\frac{\sigma_i}{\beta_i} \right)^2 (t_{i+1} - t_i)
\end{aligned}$$

2F CASE

Now we consider the case with 2 factors x and y . The expectancy of the integral L is linear, while the variance V is quadratic:

ie Lx becomes $L^x x + L^y y$, and $V := V^{xx} + V^{yy} + 2V^{xy}$

$$Z(t_0, T_f) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t_f} h - L^x(t_0, t_f)x(t_0) - L^y(t_0, t_f)y(t_0) + \frac{V(t_0, t_f)}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} V^{xy} &:= \left\langle \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u^x}{\beta_u^x} dW_u^x + \sum_{i=1..n} c_i^x K_i^x, \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u^y}{\beta_u^y} dW_u^y + \sum_{i=1..n} c_i^y K_i^y \right\rangle \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u^x \sigma_u^y}{\beta_u^x \beta_u^y} \rho_u du + \sum_{ij} c_i^x c_j^y \langle K_i^x, K_j^y \rangle + \sum_i c_i^x \langle K_i^x \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u^y}{\beta_u^y} dW_u^y \rangle + c_i^y \langle K_i^y \int_{t_0}^{t_f} \frac{\sigma_u^x}{\beta_u^x} dW_u^x \rangle \\ &= \omega^{x,y} + \sum_{ij} c_i^x c_j^y \gamma_{ij}^{xy} + \sum_i c_i^x \alpha_i^x + c_i^y \alpha_i^y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j < n} c_i^x c_j^y \gamma_{ij}^{xy} &= \sum_{i < j} \gamma_{ii}^{xy} \frac{c_i^x}{I_i^x} c_j^y I_j^y + \gamma_{ii}^{xy} \frac{c_i^y}{I_i^y} c_j^x I_j^x + \sum_i \gamma_{ii} c_i^x c_i^y \\ &= \sum_i \gamma_{ii}^{xy} \frac{c_i^x}{I_i^x} (S_n^y - S_i^y) + \gamma_{ii}^{xy} \frac{c_i^y}{I_i^y} (S_n^x - S_i^x) + \sum_i \gamma_{ii} c_i^x c_i^y \\ &= S_n^y \sum_{i < n} \gamma_{ii}^{xy} \frac{c_i^x}{I_i^x} - \sum_i \gamma_{ii}^{xy} \frac{c_i^x}{I_i^x} S_i^y + S_n^x \sum_{i < n} \gamma_{ii}^{xy} \frac{c_i^y}{I_i^y} - \gamma_{ii}^{xy} \frac{c_i^y}{I_i^y} S_i^x + \sum_i \gamma_{ii} c_i^x c_i^y \end{aligned}$$

où:

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1}^x &= e^{-\beta_i^x(t_{i+1}-t_i)} \alpha_i^x + \rho_i \frac{\sigma_i^x \sigma_i^y}{\beta_i^x \beta_i^y} (1 - e^{-\beta_i^x(t_{i+1}-t_i)}) \\ \gamma_{i+1} &= e^{-(\beta_i^x + \beta_i^y)(t_{i+1}-t_i)} \gamma_i + \rho_i \frac{\sigma_i^x \sigma_i^y}{\beta_i^x + \beta_i^y} (1 - e^{-(\beta_i^x + \beta_i^y)(t_{i+1}-t_i)}) \\ \omega &:= \sum_i \rho_i \frac{\sigma_i^x \sigma_i^y}{\beta_i^x \beta_i^y} (t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$