

ECOLE POLYTECHNIQUE

---

# Modèles des Taux d'intérêt

---

Bachir EL KHADIR

June 17, 2015

## CONTENTS

<b>1</b>	<b>Remerciments</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Quelques définitions</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Produits financier d'interêts</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Les différents modèles des taux d'interêts</b>	<b>7</b>
<b>6</b>	<b>Le modèle à deux facteurs</b>	<b>8</b>
6.1	Motivation . . . . .	8
6.2	Approximation de la solution par un arbre binomial . . . . .	9
6.3	Formule analytique - Intégration . . . . .	9
6.4	Performance . . . . .	9
<b>7</b>	<b>Application: calibration et pricing</b>	<b>10</b>
7.1	Calibration . . . . .	10

# 1 REMERCIMENTS

Ecole Polytechnique Maitre de stage Bla bla bla

## 2 INTRODUCTION

J'ai fait mon stage a JP Morgan equipe exotic rates. La plus grosse partie du travail: trouver le bon modele pour pricer un produit et le calibrer au marche

Un produit qui gagne en notoriété: cancelable swaptions Comme tout produit relie au taux on a besoin de la dynamique des taux

Dans la littérature, il existe différents modèles Hull white modele 1F et 2F Motivation

La notion de taux d'intérêt nous est familière et fait parti de notre vie de tous les jours.  
Zéro Coupon

### 3 QUELQUES DÉFINITIONS

**Theorem 1.**  $Z(t, T, S)$  est le montant qu'il faut investir dans un instrument risque-neutre au temps  $T$  pour obtenir 1euro au temps  $S$ .

**Theorem 2.**  $r$  le taux d'intérêt instantané est défini comme étant

**Theorem 3.** La courbe de rendement ou la yield curve  $L(t, T)$

**Theorem 4.** Le taux d'interet cumulé

## 4 PRODUITS FINANCIER D'INTERÊTS

Swap: Un swap est un contract entre deux parties qui s'engagent à échanger des flux financier pendant une durée et à une fréquence déterminées. la plupart du temps, ces flux sont déterminé comme étant l'intêret sur un notionnel  $K$ .

$$N \sum D_t^{T_i} \tau_i (L(T_{i-1}) - K)$$

Caps/floor: Un cap/floor peut être vu comme un call/put européenne sur un swap

$$N \sum D_t^{T_i} \tau_i (L(T_{i-1}) - K)^+$$

Swaption

$$N(\sum D_t^{T_i} \tau_i (L(T_{i-1}) - K))^+$$

## 5 LES DIFFÉRENTS MODÈLES DES TAUX D'INTERÊTS

Certains produits financiers dépendent en grande partie de la courbe de rendement. Nous avons vu précédemment que la donnée du taux instantané  $r_t$  permet de caractériser complètement cette courbe.

Il est donc important que la dynamique de  $r_t$  soit à la fois riche pour pouvoir décrire la courbe de rendement observée dans le marché, et suffisamment simple pour que le temps nécessaire pour le calcul ne soit trop long.

Nous pouvons considérer que la courbe de rendement varie dans un espace vectoriel de dimension infinie. Toute tentative de la caractériser par un nombre fini de paramètres réels est donc vouée à l'échec.

Le modèle de Hull White a été introduit en 1990. Un des atouts majeurs de ce modèle est la possibilité de simuler la dynamique de  $r_t$  par un arbre trinomial. Ceci étant essentiel pour pricer des produits du type bermuda options

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t$$

$$r_t = e^{-\alpha t}r_0 + \text{integral}...$$

## 6 LE MODÈLE À DEUX FACTEURS

### 6.1 MOTIVATION

Montrons dans un premier temps pourquoi un modèle à un seul facteur n'est pas suffisant pour pricer certains produits disponibles sur les marchés. En effet, considérons un produit  $E$  dont le payoff dépend du spread entre un taux d'intérêt cumulé entre 0 et  $T_1$  pour le premier et 0 et  $T_2$  pour le second.

La dynamique de  $r_t$  dans le modèle de Vasicek est donnée par

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

La formule analytique du bond zéro coupon est donc

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r_t)$$

En particulier le taux d'intérêt cumulé est une donnée par une transformation affine du taux instantané:

$$R(t, T) = \frac{\ln P(t, T)}{T - t} =: a(t, T) + b(t, T)r_t$$

Le payoff du produit  $E$  est donc fonction de la distribution jointe de  $R(0, T_1)$  et  $R(0, T_2)$ . Sauf que:

$$\text{Cor}(R(0, T_1), R(0, T_2)) = 1$$

On en déduit qu'un choc à  $r_t$  agit de la même manière sur toutes les courbes. On observe sur les marchés que les taux à différentes maturités ne sont pas corrélés. Si on regarde le taux 2Y et 10Y

<Courbe 10Y>

<Courbe 2Y>

Clairement un tel modèle ne capture pas ce comportement.

Dans cette section nous considérons un modèle où le taux d'intérêt instantané est donné par une somme de deux facteurs gaussiens centrés et corrélés. Pour fitter la yield curve, on rajoute une fonction déterministe.

$$dX =$$

$$dY =$$

$$dr = X + Y + \phi(t)$$

$$P(t, T) = E[...]$$

Le processus est markovien

Les cap floors admettent une formule analytique, comme pour les options vanilles : formule de Black-Scholes. Dans la pratique, les banques tradent beaucoup des produits exotiques. Ce n'est pas le cas pour ces produits => arbre de pricing



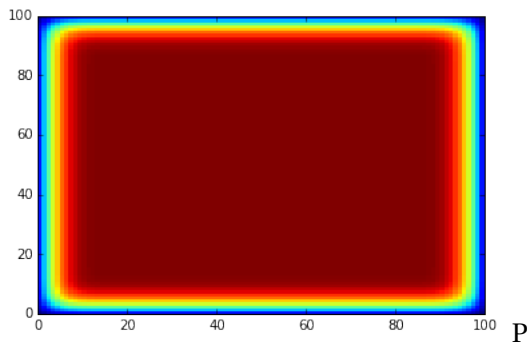
## 6.2 APPROXIMATION DE LA SOLUTION PAR UN ARBRE BINOMIAL

Cette méthode a été d'abord suggérée par Hull-White (1994) On commence par donner une approximation de la dynamique processus  $x$  et  $y$  :

$$\begin{aligned}E(x(t + \Delta t)|F_t) &= x(t)e^{-a\Delta t} \\ V(x(t + \Delta t)|F_t) &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t}) \\ Cov\{x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)|F_t\} &= \frac{\sigma v \rho}{a + b}(1 - e^{-(a+b)\Delta t})\end{aligned}$$

Dans l'arbre, on commence par discrétiser le temps par un pas fixe  $\Delta t$ , ensuite à chaque pas de temps on fait l'approximation du couple aléatoire à cdf continue  $(x, y)$  par un couple de variables de bernouilli qui a les même moments de premier et second ordre.

Le nombre de noeuds augmente de façon exponentielle en fonction du nombre de pas de temps. En pratique ceci est problématique et conduit vite à une saturation de mémoire. Pour palier à ce problème on réutilise les noeuds



- Discrétisation
- Construction de l'arbre

## 6.3 FORMULE ANALYTIQUE - INTÉGRATION

## 6.4 PERFORMANCE

L'arbre est long mais beaucoup plus puissant Imperfections de l'arbre:

- bornée
- discretisation
- probabilité négative

Monte Carlo Limitation Closed Form

Le temps d'exécution: Arbre Closed form

## 7 APPLICATION: CALIBRATION ET PRICING

Le modèle à 2F permet de capter le hump de la courbe de rendement

Le nombre de paramètres est fini (5) => pas de overfitting

Méthode d'optimisation

### 7.1 CALIBRATION

Courbe de vol implicite