

ECOLE POLYTECHNIQUE

---

# Modèles des Taux d'intérêt

---

Bachir EL KHADIR  
June 19, 2015

## CONTENTS

<b>1</b>	<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Quelques définitions</b>	<b>5</b>
3.1	Choix de mesure . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Produits financier d'interêts</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Les différents modèles des taux d'interêts</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Le modèle à deux facteurs</b>	<b>9</b>
6.1	Motivation . . . . .	9
6.2	Approximation de la solution par un arbre binomial . . . . .	11
6.2.1	Paramètres constants . . . . .	12
6.2.2	Paramètres dépendant du temps . . . . .	13
6.2.3	Code python . . . . .	13
6.3	Formule analytique - Intégration . . . . .	13
6.4	Performance . . . . .	13
<b>7</b>	<b>Application: calibration et pricing</b>	<b>14</b>
7.1	Calibration . . . . .	14
7.1.1	Calibration du drift . . . . .	14
7.1.2	Methode de calibration de la surface - Méthode d'optimisation . . . .	14

# 1 REMERCIMENTS

Ecole Polytechnique Maitre de stage Bla bla bla

## 2 INTRODUCTION

J'ai fait mon stage a JP Morgan equipe exotic rates. La plus grosse partie du travail: trouver le bon modele pour pricer un produit et le calibrer au marche

L'interêt que porte les banques aux produits exotiques a considérablement augmenté au cours des dernières années. Plusieurs modèles ont été développés pour refléter au mieux le comportement des marchés financiers. Le département au sein duquel j'ai effectué mon stage s'occupait des produits basés sur les taux d'intérêt. Dans ce domaine, une propriété appréciable est le fait qu'ils possèdent un nombre de paramètres suffisant pour être calibrés parfaitement au prix observable dans la réalité, sans pour autant "overfitter" l'échantillon disponible. En effet, depuis la crise, le marché des taux a connu des changements radicaux, la possibilité d'observer des taux négatifs en est un exemple.

Un produit en particulier n'a cessé de gagner en notoriété: les cancelables spread options. Ma mission de stage était de comprendre les modèles existants et leurs implémentations, comprendre leurs limites, et essayer de trouver des améliorations.

Dans la littérature, il existe différents modèles Hull white modèle 1F et 2F Motivation C'est la première implémentation de de WH a 2F avec des paramètres variant avec le temps

Dans une première partie je présenterai quelques définitions essentielles à l'étude des taux d'intérêts, ainsi que les produits financiers principaux utilisés pour la calibration des modèles. Dans la deuxième partie modèle existant dans la littérature, pk 2F? Implémentation, calibration Conclusion

### 3 QUELQUES DÉFINITIONS

**Definition 1.** On dénote le prix de zéro coupon forwardé  $Z(T, S)$  le montant qu'il faut investir à dans un instrument risque-neutre au temps  $T$  pour obtenir une unité de monnaie au temps  $S$ .

**Definition 2.** On définit  $f(t, T)$  le taux d'intérêt instantané forward à la date  $t$  pour une maturité  $T$  la quantité

$$f(t, T) := -\frac{\delta}{\delta T} \log Z(T, S)$$

**Definition 3.** La courbe de rendement ou la yield curve  $L(t, T)$

**Definition 4.** Le taux d'interet cumulé

#### 3.1 CHOIX DE MESURE

Une hypothèse souvent utilisée dans le cadre de la finance de marché est l'absence d'arbitrage. Une opportunité d'arbitrage est la possibilité d'investir à aujourd'hui, et recevoir, avec probabilité non nulle, un montant positive dans le future. En d'autres termes, deux portfolio qui ont le même payoff auront la même valeur aujourd'hui. Ceci nous permettra de valoriser des produits complexes en répliquant leur payoff par une combinaison linéaire de produits simple dont le prix est connue.

Une deuxième hypothèse que nous admettrons dans la suite est la complétude du marché: Tout les produits utilisés seront considérés disponible à tout moment et en quantité abondante (liquide). Nous ne traiterons pas le cas des produits illiquide. Ceci est justifié, le marché des taux étant l'un des plus gros en volume dans le monde.

Nous nous plaçons dans le cadre d'une économie 0 temps continue, espace de probabilité filtration continue à droite

Nous pouvons montrer(\*) que ces hypothèse sont équivalent à l'existence d'une mesure de probabilité risque neutre  $Q$  unique sous laquelle le prix actualisé de tous les produits tradables sont des martingales. ie si un on note  $H_t$  le prix à l'instant  $t$  d'un produit financier, alors

$$H_t = E^Q \left[ e^{-\int_t^s r} H_s | F_t \right]$$

En particulier, le prix d'un zéro coupon qui paye 1 à l'instant  $T$  est donné par

$$P(t, T) := E^Q \left[ e^{-\int_t^T r} \right]$$

**Definition 5.** Changement de numéraire

**Definition 6.** Mesure de probabilité équivalente

En fonction du produit que nous voulons pricer, certaines mesures peuvent être plus pratique que d'autres.

Exemple: Mesure forward neutre

Le bond zéron coupon dont la maturité concide avec la date du payment d'un produit financier peut servir de numéraire. Nous appellerons la mesure de probabilité associé  $Q_T$ .

Dans ce cas  $P(T, T) = 1$ , et par conséquent il suffit de calculer l'espérance du payoff (divisé par 1) sous  $Q_T$ . Si nous notons le payoff de ce produit  $H$ , alors son prix à l'instant 0 est donné par

$$P(t, T) E^Q [H | F_t]$$

Pour que celà nous soit utile, il faut que la dynamique de  $H$  soit connue sous  $Q_T$ . Ceci est vérifié pour les contrats payant un taux d'intérêt sur un nominal fixe. En effet  $(F(t; S, T))_t$  est une martingale

$$E^Q [F(t; S, T) | F_u] = F(u; S, T)$$

proof

## 4 PRODUITS FINANCIER D'INTERÊTS

**Definition 7.** Swap: Un swap est un contract entre deux parties qui s'engagent à échanger des flux financiers pendant une durée et à une fréquence déterminées. la plupart du temps, ces flux sont déterminé comme étant l'intérêt sur un notionnel  $K$ .

$$N \sum D_t^{T_i} \tau_i (L(T_{i-1}) - K)$$

**Definition 8.** Caplets/floor: Un caplet/floorlet peut être vu comme un call/put européenne sur un swap

$$N \sum D_t^{T_i} \tau_i (L(T_{i-1}) - K)^+$$

nominal  $N = 1$

$$CPL(t, t_{i-1}, t_i, \tau_i, X) = (1 + X\tau_i) ZBP(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1 + X\tau_i})$$

$$ZBP = \mathbb{E}^{Q_T} ((P(t_{i-1}, t_i) - X)^+)$$

Si  $P(t, T)$  admet une loi log normal par rapport a la mesure forward neutre  $Q_T$ , on peut appliquer black scholes. Dans la pratique, les trader sont habitués a raisonner en terme de vol bs plutot qu'en terme de prix. Nous verrons plus loin que la dynamique  $P(t, T)$  est plus complique, mais cette methode permet néanmoins d'avoir une correspondance entre prix et vol.

**Definition 9.** Swaption

$$N(\sum D_t^{T_i} \tau_i (L(T_{i-1}) - K))^+$$

## 5 LES DIFFÉRENTS MODÈLES DES TAUX D'INTERÊTS

Nous avons vu dans la partie précédente que pour calculer l'espérance, il faut donner la dynamique du produit sous-jacent. Plusieurs choix sont disponibles:

- Long term interest rate
- Short term

Certains produits financiers dépendent directement la courbe de rendement. Nous avons vu précédemment que la donnée du taux instantané  $r_t$  permet de caractériser complètement cette courbe.

Il est donc important que la dynamique de  $r_t$  soit à la fois riche pour pouvoir décrire la courbe de rendement observée dans le marché, et suffisamment simple pour que le temps nécessaire pour le calcul ne soit trop long.

Nous pouvons considérer que la courbe de rendement varie dans un espace vectoriel de dimension infinie. Toute tentative de la caractériser par un nombre fini de paramètres réels est donc vouée à l'échec.

Le modèle de Hull White a été introduit en 1990. Un des atouts majeurs de ce modèle est la possibilité de simuler la dynamique de  $r_t$  par un arbre trinomial. Ceci étant essentiel pour pricer des produits du type bermuda options

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t$$

$$r_t = e^{-\alpha t}r_0 + \text{integral}...$$



## 6 LE MODÈLE À DEUX FACTEURS

### 6.1 MOTIVATION

Considérons un produit  $E$  dont le payoff dépend du spread entre un taux d'intérêt cumulé entre 0 et  $T_1$  pour le premier et 0 et  $T_2$  pour le second.  $E$  dépend donc de la distribution jointe des deux taux.

#### LIMITE DES MODÈLE À UN SEUL FACTEUR

Montrons dans un premier temps pourquoi un modèle à un seul facteur n'est pas suffisant pour pricer ces produits qui dépendent non seulement de la distribution de chaque courbe de taux, mais aussi de leur corrélation.

La dynamique de  $r_t$  dans le modèle de Vasicek est donné par

$$r_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

La formule analytique du bond zéro coupon est donc

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r_t)$$

En particulier le taux d'intérêt cumulé est une donné par une transformation affine du taux instantané:

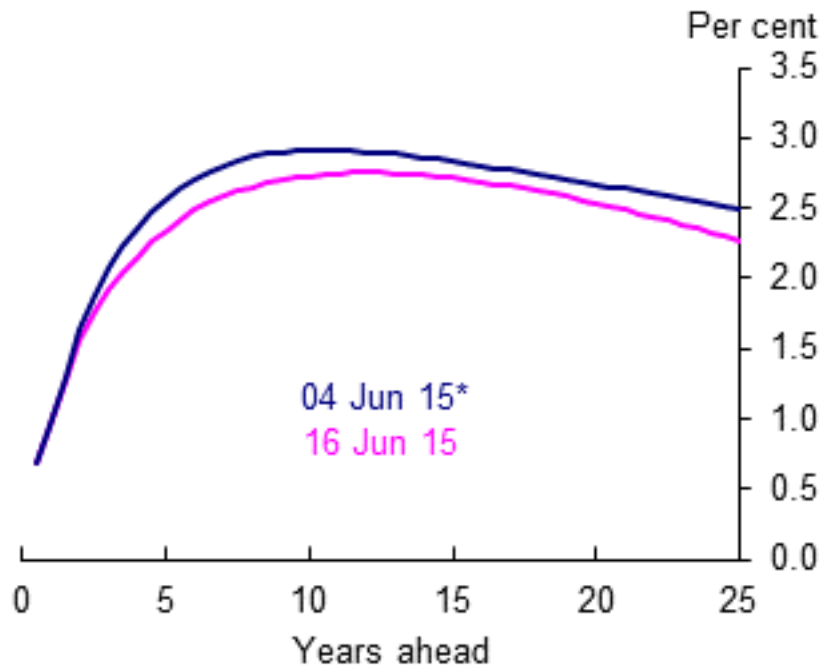
$$R(t, T) = \frac{\ln P(t, T)}{T - t} =: a(t, T) + b(t, T)r_t$$

Le payoff du produit  $E$  est donc fonction de la distribution jointe de  $R(0, T_1)$  et  $R(0, T_2)$ . Sauf que:

$$\text{Cor}(R(0, T_1), R(0, T_2)) = 1$$

On en déduit qu'un choc à  $r_t$  agit de la même manière sur toutes les courbes.

Dans la réalité, on observe sur les marchés que les taux à différentes maturités ne sont pas corrélés. Si on regarde le taux 2Y et 10Y



Un modèle à un seul facteur ne capture pas ce comportement. Essayons de pallier à ce problème en rajoutons un facteur à ce modèle.

Dans cette section nous considérons un modèle où le taux d'intérêt instantané est donné par une somme de deux facteurs gaussiens centrés et corrélés.

$$dX =$$

$$dY =$$

$$dr = X + Y + \phi(t)$$

Pour fitter la courbe on rajoute une fonction déterministe.

$$P(t, T) = E[...]$$

Le processus est markovien

Les cap floors admettent une formule analytiques, comme pour les options vanilles : formule de blackscholes Dans la pratique, les banques tradent beaucoup des produits exotiques. Ce n'est pas le cas pour ces produits => arbre de pricing

## 6.2 APPROXIMATION DE LA SOLUTION PAR UN ARBRE BINOMIAL

Cette méthode a été d'abord suggérée par Hull-White (1994) On commence par donner une approximation de la dynamique processus  $x$  et  $y$ , par une suite de variable de discretisé  $((\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \approx (x(i\Delta t), y(i\Delta t)))_i$ . Pour cela nous calculerons les deux premier moment de  $(x, y)$

$$\begin{aligned} E(x(t + \Delta t)|F_t) &= x(t)e^{-a\Delta t} \\ V(x(t + \Delta t)|F_t) &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t}) \\ Cov\{x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)|F_t\} &= \frac{\sigma v \rho}{a + b}(1 - e^{-(a+b)\Delta t}) \end{aligned}$$

Pour que le  $((\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$  et  $(x(i\Delta t), y(i\Delta t)))_i$  aient les même moment, la loi de  $((\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$  est donnée par:

$$P(\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + a dx, \tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + b dy | \tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = p^{a,b}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$$

où

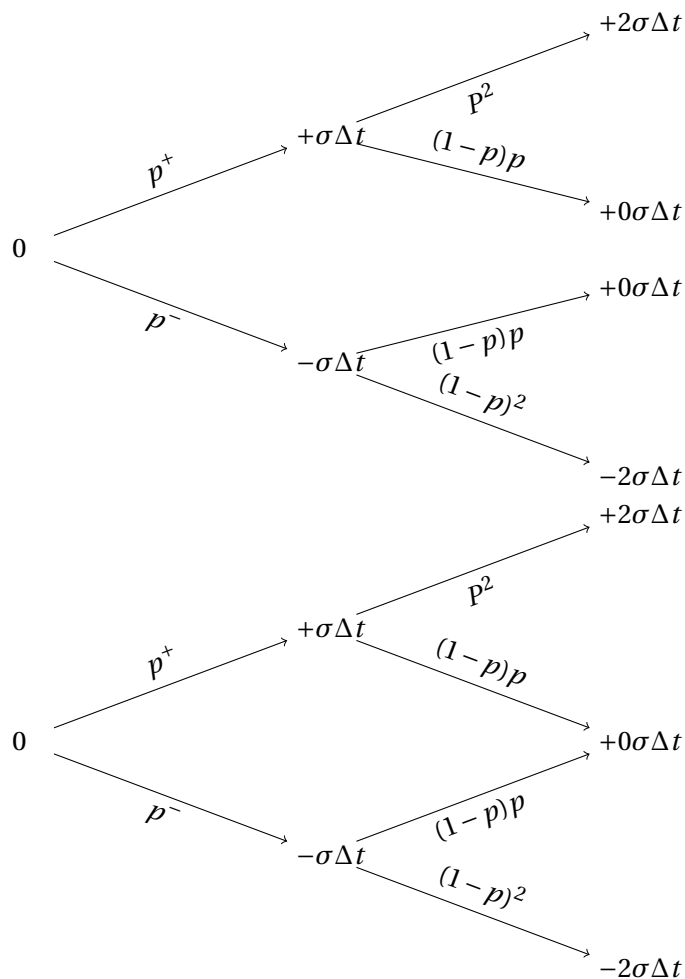
- $a, b \in \{-1, +1\}$
- $p$  est donnée par

Le pricing se fait en deux temps:

- On diffuse le processus  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  dans l'arbre en prenant soin de calculer la probabilité de transition d'un état à un autre
- On "drawback" dans l'arbre en partant de la date à laquelle on fait le payoff, et on discount

Si nous implémentons l'arbre de façon naïve, le nombre de noeuds augmente de façon exponentielle en fonction du nombre de pas de temps. En pratique ceci est problématique et conduit vite à une saturation de mémoire. Dans l'exemple simplifié ci-dessus nous traçons l'arbre de diffusion du premier facteur  $(x(t))$ . A chaque pas de temps le nombre de noeuds double, ie pour  $n$  pas de temps, nous nous retrouvons avec  $2^n$  noeuds pour un facteur, ou  $4^n$  pour deux.

Remarquer que  $(x, y)_i$  tilde est un processus markovien homogène à valeurs discrètes nous permet d'optimiser la simulation de l'arbre. En effet, il nous suffit de calculer la table de transition une fois au début du programme et de la réutiliser pour avancer/reculer dans le temps.



Une autre amélioration possible est de trouver une formule analytique pour certains produits. En effet, si nous reprenons l'exemple d'un cancellable spread option 2Y10Y dont la maturité est dans 5 ans, nous devrions normalement construire l'arbre jusqu'en 2030 pour avoir le taux 10Y en 2020. Nous pouvons éviter cela en fournissant directement une formule exacte pour les zéro coupons.

$$\int r \sim Normal$$

$$P(t, T) = E^Q \left[ e^{\int_t^T r} \right] = \exp \left( E^Q \left[ \int_t^T r \right] + \frac{Var[\int_t^T r]}{2} \right)$$

#### 6.2.1 PARAMÈTRES CONSTANTS

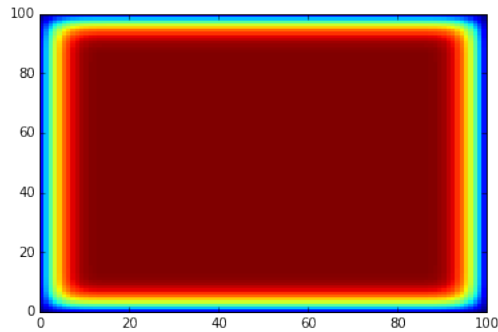
<Calcul>

### 6.2.2 PARAMÈTRES DÉPENDANT DU TEMPS

<Calcul>

On vérifie expérimentalement que le gain est significatif <Cache grind >

### 6.2.3 CODE PYTHON



Cependant, on ne peut ajouter un drift au noeud avec cette methode.  
Paragraphe sur la taille des slice, ellipsoid <exemple de Slice>

- Discrétisation
- Construction de l'arbre

### 6.3 FORMULE ANALYTIQUE - INTÉGRATION

Closed form des zero coupons  
en pratique, gain en temps  
< cachegrind results >

gain en precision  
<Comparaison de slice entre cf et bf>  
Amerlioration:

- Time dependant parameters

### 6.4 PERFORMANCE

L'arbre est long mais beaucoup plus puissant Imperfections de l'arbre:

- bornee
- discretisation
- probabilite negative

Monte Carlo Limitation Closed Form

Le temps d'exécution: Arbre Closed form

## 7 APPLICATION: CALIBRATION ET PRICING

Le modèle à 2F permet de caputer le hump de la courbe de rendement Le nombre de paramètre est fini (5) => pas de overfitting

### 7.1 CALIBRATION

Dans cette section on verra a quel point le modele peut fitter la realite.

- $h(t)$  pour reconstruire la yield curve  $\sigma\rho v$  pour
- matcher la surface

#### 7.1.1 CALIBRATION DU DRIFT

$\Pi_j$  state price (arrow debrew) (paye 1 si le noeud  $(t_n, j)$  est atteint.

$$D_j(h_n) := \frac{1}{1 + r(t_n)(t_{n+1} - t_n)}$$

Le discount factor

$$\Pi_j(t_{n+1}) = \sum_j \Pi_j(t_n) p_{j,j'}(t_n) D_{j'}(h_n)$$

$$\sum \Pi_j D_j(h_n) = P(0, t_{n+1})$$

Developement de taylor => trouver  $h_n$

#### 7.1.2 METHODE DE CALIBRATION DE LA SURFACE - MÉTHODE D'OPTIMISATION

On calibre les caplets

Les caplets ne sont pas directement disponible sur les marche On calibre les swaptions/caps

- Le probleme de calibration est un probleme d'optimisation Courbe de vol implicite :
- minimisation de l'erreur L2

